Neurčitý integrál

Pojem primitívna funkcia

Definícia 1 *Funkcia* $\boldsymbol{F}$ *sa nazýva primitívna funkcia k funkcii* $\boldsymbol{f}$ *na intervale* $\boldsymbol{I}$*, ak pre všetky* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$ *je* $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

Veta 1 *Nech funkcia* $\boldsymbol{F}$ *je primitívna funkcia k funkcii* $\boldsymbol{f}$ *na intervale* $\boldsymbol{I}$ *a* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$*, potom aj funkcia* $\boldsymbol{G(x) = F(x) + c}$ *je primitívnou funkciou k funkcii* $\boldsymbol{f}$ *na intervale* $\boldsymbol{I}$.

Veta 2 *Nech funkcia* $\boldsymbol{f}$ *je spojitá na intervale* $\boldsymbol{I}$*, potom k nej na intervale* $\boldsymbol{I}$ *existuje primitívna funkcia* $\boldsymbol{F}$.

Pojem neurčitý integrál

Definícia 2 *Množinu* $\boldsymbol{\{F{+}c,\ c \in \mathbb{R}\}}$ *všetkých primitívnych funkcií k funkcii* $\boldsymbol{f}$ *nazývame neurčitý integrál. Píšeme* $\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x) + c}$.

Veta 3 (o lineárnosti) *Nech k funkciám* $\boldsymbol{f}$ *a* $\boldsymbol{g}$ *existujú primitívne funkcie na intervale* $\boldsymbol{I}$*, nech* $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$*. Potom existuje primitívna funkcia k funkcii* $\boldsymbol{a \cdot f + b \cdot g}$ *na intervale* $\boldsymbol{I}$ *a platí*

$$\int \left[\boldsymbol{a \cdot f(x) + b \cdot g(x)}\right]\, \mathbf{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \int \boldsymbol{f(x)}\, \mathbf{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \int \boldsymbol{g(x)}\, \mathbf{d}\boldsymbol{x}.$$

Základné vzorce integrovania

- $\int \mathrm{a}\ \mathrm{d}x = \mathrm{a}\,x + c$
- $\int x^{\mathrm{a}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\mathrm{a}+1}}{\mathrm{a}+1} + c$
- $\int \mathrm{a}^x\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{a}^x}{\ln a} + c$
- $\int \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$
- $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{cotg}\,x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\,x + c$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$
- $\int \frac{1}{\mathrm{a}^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\,\mathrm{a}}\ln\left|\frac{\mathrm{a}+x}{\mathrm{a}-x}\right| + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$

Pozn.: Vzorce platia na intervaloch, na ktorých sú funkcie definované.

Substitučná metóda

Veta 4 *Nech $\varphi : (a,b) \to (\alpha,\beta)$ je spojite diferencovateľná funkcia. Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na (α,β) Potom funkcia $F(\varphi(x))$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ na (a,b).*

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c}\varphi(x) = t\\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}\right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Metóda per partes

Veta 5 *Nech funkcie u, v majú spojité derivácie na intervale I. Potom*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

Racionálna funkcia

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

- každú nerýdzoracionálnu funkciu môžeme vyjadriť ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

  $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_s(x) + \frac{R_r(x)}{Q_m(x)},$$

  kde $r < m$ a $s + m = n$

- každú rýdzoracionálnu funkciu vieme rozložiť na súčet elementárnych (parciálnych) zlomkov, ktoré môžu mať v množine $\mathbb{R}$ tieto tvary

  $$\frac{A}{ax+b}, \quad \frac{B}{(ax+b)^n}, \quad \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}, \quad \frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^n},$$

  kde $A, B, C, D, E, F, a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a trojčlen $ax^2 + bx + c$ nemá reálne korene.

Integrovanie niektorých racionálnych funkcií

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{A}}{ax+b}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{B}}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Cx}+\mathrm{D}}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

Pozn.: Pri integrovaní využívame substitučnú metódu a integračný vzorec $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c.$

Integrovanie iracionálnych funkcií (lineárna iracionalita)

1. $\displaystyle\int R\left[x;\ \sqrt[k_1]{ax+b};\ \sqrt[k_2]{ax+b};\dots;\ \sqrt[k_n]{ax+b}\right]\,dx,$

   $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$

   Riešime použitím substitúcie $ax + b = t^k$, $k =$nsn$\{k_1, k_2, \dots, k_n\}.$

   Pozn.: Po použití substitúcie vznikne integrál z racionálnej funkcie.

Integrovanie trigonometrických funkcií

1. $\int \boldsymbol{R[\sin x] \cdot \cos x \, dx}$

   Riešime použitím substitúcie $\boldsymbol{\sin x = t.}$

2. $\int \boldsymbol{R[\cos x] \cdot \sin x \, dx}$

   Riešime použitím substitúcie $\boldsymbol{\cos x = t.}$

   Pozn.: Po použití substitúcie vznikne integrál z racionálnej funkcie.