Určitý integrál

Pojem určitý integrál

Definícia 1 *Majme spojitú a nezápornú funkciu* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. *Rozdelíme interval* $\langle a, b\rangle$ *na podintervaly pomocou deliacich bodov* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. *Každý takýto systém podintervalov nazveme delenie intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Dĺžku* i*-teho čiastočného intervalu* $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, *kde* $i = 1, 2, \ldots, n$ *označujeme* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Definícia 2 *Číslo* $\|D\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ *nazývame normou delenia* D.

Definícia 3 *Ak pre každé prirodzené číslo* n *je dané jedno delenie* D_n *intervalu* $\langle a, b\rangle$, *hovoríme o postupnosti delení intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Postupnosť* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *delení intervalu* $\langle a, b\rangle$ *sa nazýva normálna, ak* $\lim\limits_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$.

Definícia 4 *Nech* t_i *pre* $i = 1, 2, \ldots, n$ *je ľubovoľný bod z intervalu* $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. *Integrálnym súčtom funkcie* f *pre delenie* D *intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a pre danú voľbu čísel* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *nazývame číslo*

$$S(f, D) = f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \ldots + f(t_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

Definícia 5 *Nech funkcia* f *je definovaná a ohraničená na* $\langle a, b\rangle$. *Nech pre ľubovoľnú normálnu postupnosť* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *delení intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a ľubovoľnú voľbu bodov* t_i *v čiastočných intervaloch existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$, *potom hovoríme, že funkcia* f *je integrovateľná na intervale* $\langle a, b\rangle$ *a túto limitu nazývame určitým integrálom funkcie* f *na intervale* $\langle a, b\rangle$. *Teda*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\, dx,$$

kde a *je dolná hranica a* b *je horná hranica určitého integrálu.*

Výpočet a vlastnosti určitého integrálu

Veta 1 (Newton – Leibnizov vzorec) *Nech funkcia $\boldsymbol{f}$ je integrovateľná na intervale $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ a nech má na intervale $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ primitívnu funkciu $\boldsymbol{F}$. Potom platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b .$$

Veta 2 *Nech $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ a nech funkcia $\boldsymbol{f}$ je integrovateľná na intervale $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$. Potom*

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Veta 3 *Nech funkcie $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ sú integrovateľné funkcie na intervale $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ a nech $\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2} \in \mathbb{R}$. Potom platí* $\displaystyle\int_a^b [k_1 \cdot f(x) + k_2 \cdot g(x)]\, dx = k_1 \int_a^b f(x)\,dx + k_2 \int_a^b g(x)\,dx.$

Veta 4 *Nech $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} < \boldsymbol{c}$. Nech funkcia $\boldsymbol{f}$ je integrovateľná na intervale $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ a nech je integrovateľná na intervale $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$. Potom je funkcia $\boldsymbol{f}$ integrovateľná aj na intervale $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle$ a platí*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Veta 5 *Ak je funkcia $\boldsymbol{f}$ spojitá na intervale $\langle -\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle$ a je*

- *párna, tak* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
- *nepárna, tak* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Existencia určitého integrálu

Veta 6 *Ak je funkcia $\boldsymbol{f}$ spojitá na intervale $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, tak je na tomto intervale integrovateľná.*

Veta 7 *Nech funkcia $\boldsymbol{f}$ je ohraničená na intervale $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ a má v tomto intervale konečný počet bodov nespojitosti, potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Substitučná metóda

Veta 8 *Nech funkcia $\boldsymbol{f}$ spojitá na intervale $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ a nech funkcia $\boldsymbol{\varphi}$ má spojitú deriváciu na intervale $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$ a zobrazuje interval $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ do $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$. Potom platí*

$$\int\limits_a^b f\left[\varphi(x)\right] \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(t)\, \mathrm{d}t.$$

$$\int\limits_a^b f\left[\varphi(x)\right] \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x = a \rightarrow t = \varphi(a) = \alpha \\ x = b \rightarrow t = \varphi(b) = \beta \end{array} \right| = \int\limits_\alpha^\beta f(t)\, \mathrm{d}t$$

Metóda per partes

Veta 9 *Nech funkcie $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ majú spojité derivácie na intervale $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$. Potom platí*

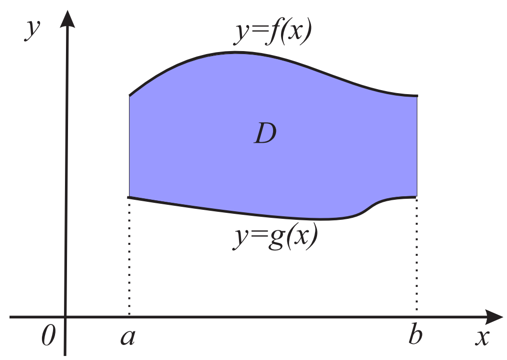
$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x.$$

Geometrické aplikácie určitého integrálu-elementárne oblasti

Definícia 6 *Nech funkcie* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ *sú spojité funkcie definované na intervale* $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, $\boldsymbol{f} : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\boldsymbol{g} : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. *Nech pre každé* $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ *je* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. *Potom množinu* $\boldsymbol{D}$ *bodov* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, *kde*

$$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

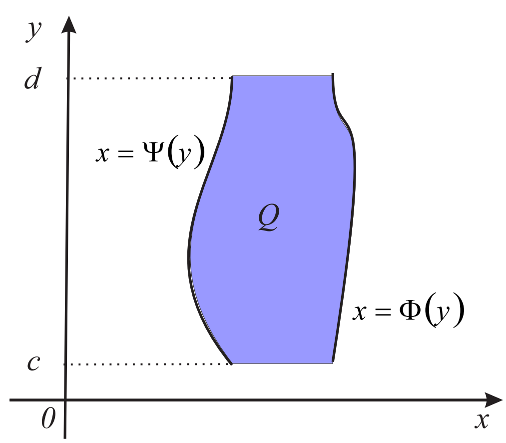
nazývame elementárna oblasť vzhľadom na os $\boldsymbol{O_x}$.



Definícia 7 *Nech funkcie* $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{\Phi}$ *sú spojité funkcie definované na intervale* $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$, $\boldsymbol{\Psi} : \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\Phi} : \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. *Nech pre každé* $\boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$ *je* $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})$. *Potom množinu* $\boldsymbol{Q}$ *bodov* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, *kde*

$$\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d}$$
$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})$$

nazývame elementárna oblasť vzhľadom na os $\boldsymbol{O_y}$.



Plošný obsah rovinných útvarov

Veta 10 *Plošný obsah elementárnej oblasti $\boldsymbol{D}$ sa počíta podľa vzorca*

$$\boldsymbol{P = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

Veta 11 *Plošný obsah elementárnej oblasti $\boldsymbol{Q}$ sa počíta podľa vzorca*

$$\boldsymbol{P = \int\limits_c^d [\Phi(y) - \Psi(y)]\, dy}$$

Objem rotačného telesa

Veta 12 *Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti $\boldsymbol{D}$ okolo $\boldsymbol{O_x}$ je*

$$\boldsymbol{V = \pi \int\limits_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx}$$

Veta 13 *Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti $\boldsymbol{Q}$ okolo $\boldsymbol{O_y}$ je*

$$\boldsymbol{V = \pi \int\limits_c^d \left[\Phi^2(y) - \Psi^2(y)\right] dy}$$

Dĺžka krivky

Veta 14 *Ak krivka $\boldsymbol{C}$ je grafom $\boldsymbol{f : \langle a, b\rangle} \to \mathbb{R}$, ktorá má spojitú deriváciu, tak jej dĺžka $\boldsymbol{\ell}$ je*

$$\boldsymbol{\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$