# Matice a sústavy lineárnych rovníc

## Matice

**Definícia 1** *Maticou typu $m \times n$ rozumieme sústavu prvkov zapísaných do tabuľky (schémy) s $m$ riadkami a $n$ stĺpcami, pre $m, n \in \mathbb{N}$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

*kde $a_{ij}$ sú prvky matice, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.*

*Skrátené označenie $A = (a_{ij})$.*

**Špeciálne typy matíc:**

- Matice rovnakého typu - matice s rovnakým počtom riadkov a stĺpcov
- Submatica matice $A$ - matica, ktorú dostaneme z matice $A$ vynechaním jedného riadku a jedného stĺpca
- Štvorcová matica stupňa $n$ - matica typu $n \times n$ (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)
- Riadkový vektor - matica typu $1 \times n$ (matica s jedným riadkom)
- Stĺpcový vektor - matica typu $n \times 1$ (matica s jedným stĺpcom)
- Nech $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ sú vektory a $k_1, k_2, \dots, k_n$ sú konštanty, potom vektor

  $$\overrightarrow{x} = k_1 \overrightarrow{a_1} + k_2 \overrightarrow{a_2} + \dots + k_n \overrightarrow{a_n}$$

  je lineárnou kombináciou vektorov $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$

- Nulová matica - matica, ktorá má všetky prvky rovné nule
- Diagonálna matica - štvorcová matica, ktorej prvky mimo hlavnej diagonály sú rovné nule
- Jednotková matica - štvorcová diagonálna matica, ktorej prvky na hlavnej diagonále sú jednotky, ozn. $\boldsymbol{E}$ alebo $\boldsymbol{I}$
- Symetrická matica - štvorcová matica symetrická podľa hlavnej diagonály
- Transponovaná matica k matici $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ - matica $\boldsymbol{A}^T = (a_{ji})$
- Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule
- Lichobežníková matica - matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule

## Operácie s maticami

**Definícia 2** *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Súčtom matíc $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ typu $m \times n$ nazývame maticu $\boldsymbol{C}$ typu $m \times n$, pre ktorú platí*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

*pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

*Skrátené označenie $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$*

**Definícia 3** *Nech $m, n \in \mathbb{N}$ a $k$ je konštanta. $k$-násobkom matice $\boldsymbol{A}$ typu $m \times n$ nazývame maticu $\boldsymbol{C}$ typu $m \times n$, pre ktorú platí*

$$c_{ij} = k\, a_{ij},$$

*pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

*Skrátené označenie $\boldsymbol{C} = k\,.\,\boldsymbol{A}$*

**Definícia 4** *Nech $m, n, r \in \mathbb{N}$. Súčinom matice $\boldsymbol{A}$ typu $m \times r$ a matice $\boldsymbol{B}$ typu $r \times n$ nazývame maticu $\boldsymbol{C}$ typu $m \times n$, pre ktorú platí*

$$c_{ij} = a_{i1}\,.\,b_{1j} + a_{i2}\,.\,b_{2j} + \ldots + a_{r1}\,.\,b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}\,.\,b_{kj},$$

*pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

*Skrátené označenie $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$*

## Ekvivalentné matice

Ekvivalentné riadkové (stĺpcové) úpravy matice:

1. zmena poradia riadkov (stĺpcov),
2. vynásobenie riadku (stĺpca) nenulovou konštantou,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k niektorému riadku (stĺpcu).

**Definícia 5** *Dve matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ budeme nazývať riadkovo (stĺpcovo) ekvivalentné, ak sa jedna z matíc dá upraviť na druhú pomocou ekvivalentných riadkových (stĺpcových) úprav.*
*Označenie $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.*

## Hodnosť matice

**Definícia 6** *Nech $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ typu $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ je maximálny počet lineárne nezávislých riadkov (stĺpcov) matice $\boldsymbol{A}$.*
*Označenie $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{A})$.*

**Definícia 7** *Nech $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ typu $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ je počet nenulových riadkov matice $\boldsymbol{A}$ upravenej na trojuholníkový resp. lichobežníkový tvar. V nich každý nasledujúci riadok musí obsahovať zľava aspoň o jednu nulu viac ako predchádzajúci riadok.*
*Označenie $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{A})$.*

## Determinant matice

**Definícia 8** *Nech je daná štvorcová matica $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ $\boldsymbol{n}$-tého stupňa. Matici $\boldsymbol{A}$ môžeme priradiť číslo, ktoré nazývame determinant matice $\boldsymbol{A}$ a označujeme ho $\mathbf{det}\ \boldsymbol{A}$, resp. $|\boldsymbol{A}|$.*

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Definícia 9** *Nech je daná štvorcová matica $A = (a_{ij})$ $n$-tého stupňa. Subdeterminant (minor) $D_{ij}$ vzhľadom na prvok $a_{ij}$ matice $A$ je determinant matice, ktorá vznikne vynechaním $i$-teho riadku a $j$-teho stĺpca matice $A$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

## Výpočet determinantu matice

- Determinant 2. stupňa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

- Determinant 3. stupňa - Sarrusovo pravidlo
- Determinant $n$-tého stupňa, $n \geq 4$

  1. rozvoj podľa $i$-teho riadku

  $$|A| = a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \ldots + a_{in}\, A_{in},$$

  2. rozvoj podľa $j$-teho stĺpca

  $$|A| = a_{1j}\, A_{1j} + a_{2j}\, A_{2j} + \ldots + a_{nj}\, A_{nj},$$

  kde $A_{ij}$ je algebraický doplnok prvku $a_{ij}$, pre ktorý platí

  $$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

  kde $D_{ij}$ je subdeterminant (minor) vzhľadom na prvok $a_{ij}$ matice $A$

## Vlastnosti determinantu matice

**Definícia 10** *Štvorcová matica $\boldsymbol{A}$ sa nazýva regulárna, ak $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$.*
*Štvorcová matica $\boldsymbol{A}$ sa nazýva singulárna, ak $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$.*

- $|\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}| = |\boldsymbol{A}|$
- Ak matica $\boldsymbol{A}$ obsahuje nulový riadok (stĺpec), tak $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$.
- Ak v matici $\boldsymbol{A}$ vymeníme dva riadky (stĺpce) navzájom, tak sa zmení znamienko jej determinantu.
- Ak v matici $\boldsymbol{A}$ je jeden riadok (stĺpec) lineárnou kombináciou jej ostatných riadkov (stĺpcov), tak $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$.
- Ak pripočítame k niektorému riadku (stĺpcu) matice $\boldsymbol{A}$ násobok iného riadku (stĺpca), determinant matice $\boldsymbol{A}$ sa nezmení.
- Ak jeden riadok (stĺpec) matice $\boldsymbol{A}$ vynásobíme nenulovou konštantou $\boldsymbol{k}$, tak hodnota determinantu sa $\boldsymbol{k}$-krát zväčší (zmenší).

## Inverzná matica

**Definícia 11** *Nech $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica (t.j. $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$). Potom k matici $\boldsymbol{A}$ vždy existuje matica $\boldsymbol{A}^{-1}$ a nazývame ju inverzná matica k matici $\boldsymbol{A}$, pričom platí*

$$\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},$$

*kde $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica.*

## Spôsoby hľadania matice

1. pomocou jednotkovej matice

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}) \sim \text{ ekvivalentné úpravy } \sim \left(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)$$

2. pomocou adjungovanej matice

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\text{adj}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

$A_{ij}$ - algebraický doplnok prvku $a_{ij}$, pre ktorý platí

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

kde $D_{ij}$ je subdeterminant (minor) vzhľadom na prvok $a_{ij}$ matice $\boldsymbol{A}$

## Pojem sústava lineárnych rovníc

**Definícia 12** *Sústavu*

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned}$$

*nazývame sústava lineárnych algebraických rovníc.*
*Čísla $a_{11}, \dots, a_{mn}$ nazývame koeficienty sústavy, $x_1, \dots, x_n$ nazývame neznáme a $b_1, \dots, b_m$ nazývame pravé strany rovníc.*

Sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned}$$

prepíšeme do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

resp. $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

## Sústava lineárnych rovníc v maticovom tvare

Maticu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame matica sústavy.

Maticu

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

nazývame rozšírená matica sústavy.

## Frobeniova veta

**Veta 1 (Frobeniova veta)** *Sústava*

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned}$$

*má riešenie práve vtedy, ak* $h(A) = h(\bar{A})$.

*V tom prípade*

*a) Ak $h(A) = n$, tak daná sústava má práve jedno riešenie.*

*b) Ak $h(A) < n$, tak daná sústava má nekonečne vel'a riešení.*

Pozn: Ak $h(A) \neq h(\bar{A})$, tak daná sústava nemá riešenie.

## Gaussova eliminačná metóda

1. Prepíšeme sústavu lineárnych rovníc do tvaru rozšírenej matice.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

2. Pomocou postupných ekvivalentných úprav tejto matice upravíme maticu na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.
3. Na základe Frobeniovej vety urobíme záver o počte riešení danej sústavy.
4. Určíme riešenie danej sústavy.

## Cramerovo pravidlo pre $n = 3$

Majme danú sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Označme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Potom riešenie danej sústavy je $x^T = (x_1, x_2, x_3)^T$, kde

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \;\; x_2 = \frac{D_2}{D}, \;\; x_3 = \frac{D_3}{D}$$

**Veta 2** *Nech je daná sústava $n$ rovníc o $n$ neznámych. Nech $D$ je determinant matice $A$ a $D_i$, pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je determinant odvodený z determinantu $D$ tak, že $i$-ty stĺpec nahradíme pravou stranou. Potom pre každú $i$-tu zložku riešenia platí*

$$x_i = \frac{D_i}{D}.$$