# Polynómy

## Pojem polynóm

**Definícia 1** *Nech $n \in \mathbb{N}$ a nech $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ (koeficienty polynómu). Výraz*

$$P_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$$

*nazývame polynómom v premennej $x$.*
*Ak $a_n \neq 0$, tak číslo $n$ je stupeň polynómu.*

Pozn.: Koeficient $a_0$ sa nazýva absolútny koeficient, koeficient $a_1$ sa nazýva lineárny koeficient, koeficient $a_2$ sa nazýva kvadratický koeficient.

## Základné vlastnosti polynómov

Majme polynómy

$$P_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$Q_m(x) = b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

- Dva polynómy $P_n(x)$, $Q_m(x)$ sa rovnajú práve vtedy, ak sú rovnakého stupňa a koeficienty pri rovnakých mocninách sa rovnajú.
- Dva polynómy $P_n(x)$, $Q_m(x)$ sa rovnajú práve vtedy, ak sú rovnakého stupňa a majú rovnaké hodnoty pre každé $x$.
- Nech $P_n(x)$, $Q_m(x)$ sú dva polynómy. Potom existujú dva jednoznačne určené polynómy $S(x)$, $R(x)$ také, že platí:

  a) $P_n(x) = Q_m(x)\, S(x) + R(x)$,
  b) $R(x)$ je nulový polynóm alebo stupeň polynómu $Q_m(x)$ je väčší ako stupeň polynómu $R(x)$.

  Polynóm $R(x)$ nazývame zvyškom po delení polynómu $P_n(x)$ polynómom $Q_m(x)$.

## Pojem algebraická rovnica

**Definícia 2** *Nech $n \in \mathbb{N}$ a nech $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Rovnicu*

$$P_n(x) = 0, \text{ resp.}$$

$$a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 = 0$$

*nazývame algebraickou rovnicou (algebraickou rovnicou $n$-tého stupňa).*

**Definícia 3** *Každé komplexné číslo $\alpha$, pre ktoré platí $P_n(\alpha) = 0$ nazývame koreňom (riešením) danej algebraickej rovnice $P_n(x) = 0$.*

## Základné tvrdenia

**Veta 1** *Číslo $\alpha, \alpha \in \mathbb{C}$ je koreňom rovnice $P_n(x) = 0$ práve vtedy, ak polynóm $x - \alpha$ delí polynóm $P_n(x)$ bezo zvyšku.*

**Veta 2** *Algebraická rovnica $n$-tého stupňa má práve $n$ koreňov v množine $\mathbb{C}$.*

**Veta 3** *Ak algebraická rovnica $P_n(x) = 0$ má v množine $\mathbb{C}$ $k$ rovnakých koreňov $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$ $(k \leq n)$, tak číslo $\alpha_1$ je $k$-násobným koreňom rovnice $P_n(x) = 0$.*

**Veta 4 (Kanonický rozklad polynómu)** *Ak $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sú navzájom rôzne komplexné korene (násobnosť $k$ každého koreňa je rovná $1$) rovnice $P_n(x) = 0$, tak*

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n).$$

**Veta 5 (Kanonický rozklad polynómu)** *Ak $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ $(1 \leq p \leq n)$ sú všetky navzájom rôzne komplexné korene s násobnosťami $k_1, k_2, \ldots, k_p$ rovnice $P_n(x) = 0$, tak platí*

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}\ldots(x - \alpha_p)^{k_p},$$

*pričom $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$.*

**Veta 6** *Nech je daná algebraická rovnica $P_n(x) = 0$ a jej koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú celé čísla.*
*Nech*

$$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},$$

*kde $p$, $q$ sú nesúdeliteľné, je koreň rovnice $P_n(x) = 0$. Potom koeficient $a_n$ je deliteľný číslom $q$ a koeficient $a_0$ je deliteľný číslom $p$.*

**Veta 7** *Nech* $n \geq 2$ *a koeficienty* $P_n(x)$ *sú reálne čísla. Ak komplexné číslo* $\alpha = a + bi$ *je koreňom rovnice* $P_n(x) = 0$, *tak jej koreňom je aj komplexne združené číslo* $\overline{\alpha} = a - bi$.

**Veta 8** *Algebraická rovnica s reálnymi koeficientmi nepárneho stupňa má aspoň jeden reálny koreň.*

## Hornerova schéma

Polynóm

$$P_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$$

zapíšeme v tvare

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + x\, a_n)) \ldots)$$

odtiaľ dostaneme tzv. Hornerovu schému na výpočet hodnôt daného polynómu pre $x = \alpha$ v tvare:

| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | $\ldots$ | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | | $\alpha\, b_n$ | $\alpha\, b_{n-1}$ | $\ldots$ | $\alpha\, b_2$ | $\alpha\, b_1$ |
| | $b_n$ | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | $\ldots$ | $b_1$ | $b_0 = P_n(\alpha)$ |

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha\, b_n \\ b_{n-2} &= a_{n-2} + \alpha\, b_{n-1} \\ &\vdots \\ b_1 &= a_1 + \alpha\, b_2 \\ b_0 &= a_0 + \alpha\, b_1 = P_n(\alpha) \end{aligned}$$

## Pojem racionálna funkcia

**Definícia 4** *Funkciu*

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

*nazývame racionálnou funkciou.*

**Definícia 5** *Ak* $n \geq m$, *hovoríme, že funkcia* $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *je nerýdzoracionálna funkcia.*
*Ak* $n < m$, *hovoríme, že funkcia* $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *je rýdzoracionálna funkcia.*

## Základné vlastnosti

Každú nerýdzoracionálnu funkciu môžeme vyjadriť ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie. Teda

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_s(x) + \frac{R_r(x)}{Q_m(x)},$$

kde $r < m$ a $s + m = n$.
Každú rýdzoracionálnu funkciu vieme rozložiť na súčet elementárnych (parciálnych) zlomkov, ktoré môžu mať v množine $\mathbb{R}$ tieto tvary

$$\frac{A}{ax+b}, \quad \frac{B}{(ax+b)^n}, \quad \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}, \quad \frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^n},$$

kde $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a trojčlen $ax^2+bx+c$ nemá reálne korene.

Pozn.: Koeficienty $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ vypočítame metódou porovnávania koeficientov alebo dosadzovacou metódou.

## Rozklad na elementárne (parciálne) zlomky

1. Zistíme, či daná funkcia je rýdzoracionálna. Ak áno, pokračujeme bodom **3** a ak nie, pokračujeme bodom **2**.
2. Predelíme čitateľa menovateľom (delíme polynóm polynómom) a získanú rýdzoracionálnu funkciu rozložíme na elementárne (parciálne) zlomky.
3. Rozložíme menovateľa na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad polynómu).
4. Zapíšeme všeobecné parciálne zlomky.
5. Vypočítame ich koeficienty (dosadzovacou alebo porovnávacou metódou).