FUNKCIA 1 REÁLNEJ PREMENNEJ

Pojem funkcia

Definícia 1 *Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny. Funkcia (zobrazenie) f je predpis, ktorý každému prvku x z množiny A priradí práve jeden prvok y z množiny B.*
Zapisujeme

$$f : A \to B.$$

Prvku x funkcia f priraďuje prvok y, zapisujeme $y = f(x)$.

- Definičným oborom $D(f)$ funkcie f nazývame množinu A.
- Oborom hodnôt $H(f)$ funkcie f nazývame množinu tých prvkov z B, ktoré sú priradené nejakým prvkom z A.
- Grafom funkcie f nazývame množinu všetkých dvojíc $[x, y]$, kde prvá súradnica x patrí do definičného oboru funkcie a druhá súradnica y je hodnota funkcie v x.

Ohraničené funkcie

Definícia 2 *Funkciu f nazývame zhora ohraničenou, ak je zhora ohraničná množina jej funkčných hodnôt.*

Definícia 3 *Funkciu f nazývame zdola ohraničenou, ak je zdola ohraničná množina jej funkčných hodnôt.*

Definícia 4 *Ak je funkcia f ohraničená zhora aj zdola, tak hovoríme, že je ohraničená.*

Definícia 5 *Ak má množina $H(f)$ najväčší prvok, tak toto číslo nazývame maximom funkcie f a označujeme $max\ f(x)$.*

Definícia 6 *Ak má množina $H(f)$ najmenší prvok, tak toto číslo nazývame minimom funkcie f a označujeme $min\ f(x)$.*

Monotónne funkcie

Definícia 7 *Funkciu f nazývame rastúcou na $D(f)$, ak pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.*

Definícia 8 *Funkciu f nazývame klesajúcou na $D(f)$, ak pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.*

Pozn.: Každú rastúcu a každú klesajúcu funkciu nazývame rýdzomonotónnou funkciou.

Definícia 9 *Funkciu f nazývame neklesajúcou na $D(f)$, ak pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Definícia 10 *Funkciu f nazývame nerastúcou na $D(f)$, ak pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Pozn.: Každú nerastúcu a každú neklesajúcu funkciu nazývame monotónnou funkciou.

Párne a nepárne funkcie

Definícia 11 *Funkcia f sa nazýva párna, ak platí*

1. *pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$,*
2. *$f(-x) = f(x)$, pre každé $x \in D(f)$.*

Pozn.: Graf párnej funkcie je osovo súmerný podľa osi y.

Definícia 12 *Funkcia f sa nazýva nepárna, ak platí*

1. *pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$,*
2. *$f(-x) = -f(x)$, pre každé $x \in D(f)$.*

Pozn.: Graf nepárnej funkcie je stredovo súmerný podľa stredu súradnicového systému.

Periodické a zložené funkcie

Definícia 13 *Funkciu f nazývame periodickou, ak existuje také reálne číslo $p \neq 0$, že pre každé $x \in D(f)$ platí $f(x+p) = f(x)$. Najmenšie také číslo p nazývame periódou funkcie f.*

Definícia 14 *Nech $g : A \to B$, $f : B \to C$. Potom funkciu $f\big(g(x)\big) : A \to C$ nazývame zloženou funkciou.*

Prostá a inverzná funkcia

Definícia 15 *Funkciu f nazývame prostou (injektívnou), ak pre každé $x_1, x_2 \in D(f)$ platí implikácia $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Pozn.: Každá rýdzomonotónna funkcia je prostá.

Definícia 16 *Nech f je prostá funkcia s definičným oborom $D(f)$ a s oborom hodnôt $H(f)$. Funkciu f^{-1} nazývame inverznou funkciou k funkcii f, ak je*

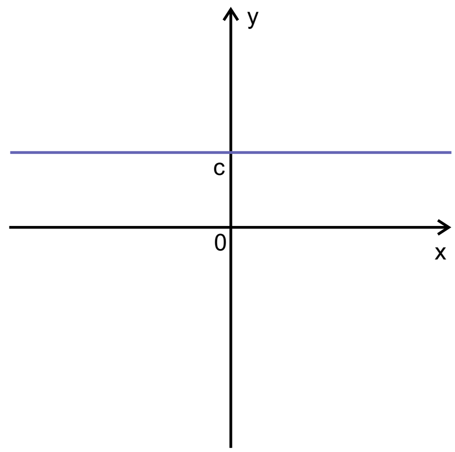
a) definovaná na $H(f)$,

b) priraďuje číslu $y \in H(f)$ číslo $x \in D(f)$, pre ktoré platí $y = f(x)$, čiže $f^{-1}(y) = x$.

Pozn.: Graf inverznej funkcie f^{-1} je súmerný ku grafu funkcie f podľa priamky $y = x$.

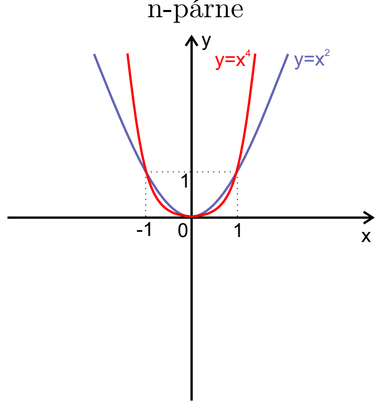
Elementárne funkcie

Konštantná funkcia $y = c,\ c \in \mathbb{R}$

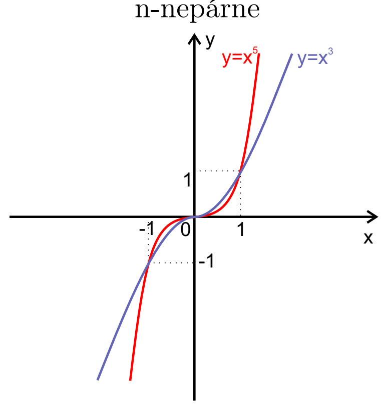


Mocninová funkcia $y = x^n,\ n \in \mathbb{N}$

n-párne

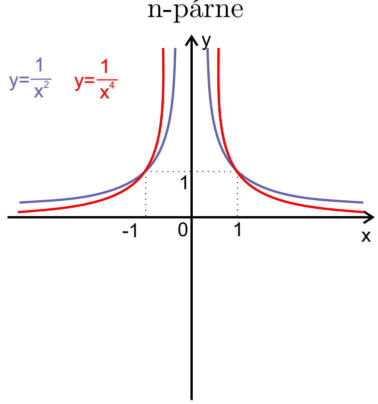


n-nepárne

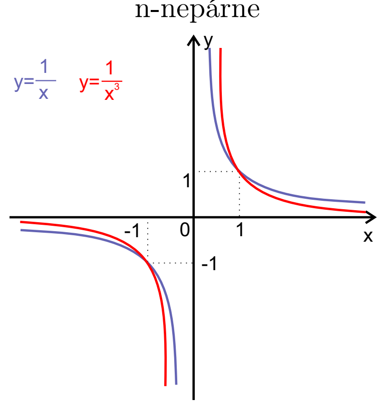


Mocninová funkcia $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}$

n-párne

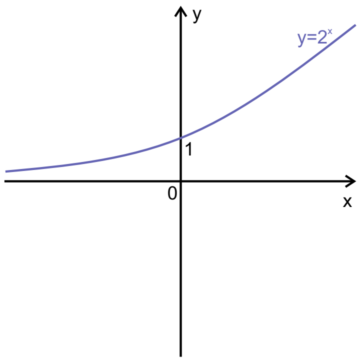


n-nepárne

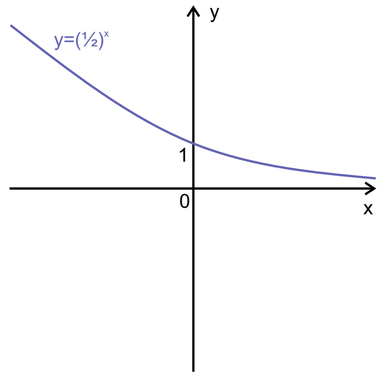


Exponenciálna funkcia $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

a>1

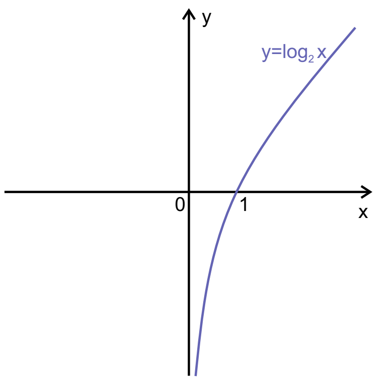


0<a<1

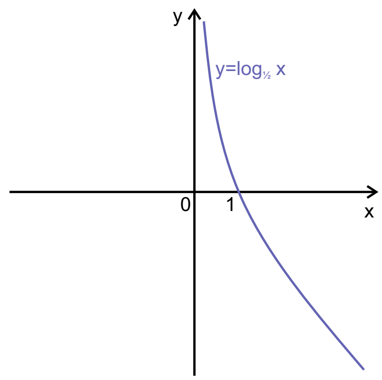


Logaritmická funkcia $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

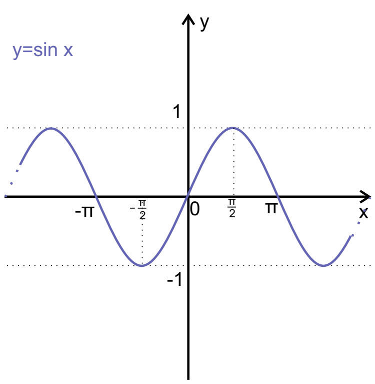
a>1

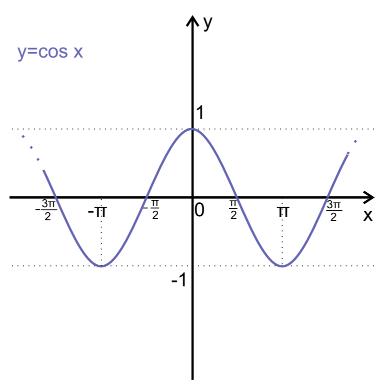


0<a<1

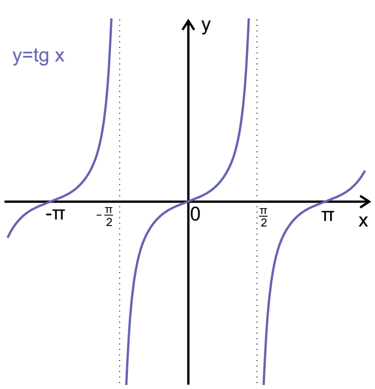


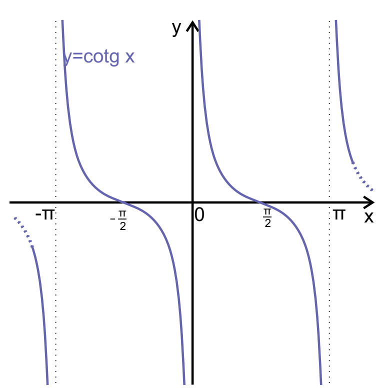
Goniometrické funkcie $y = \sin x$, $y = \cos x$



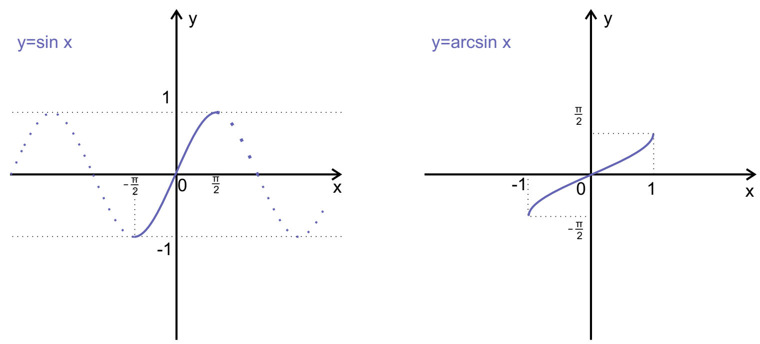


Goniometrické funkcie $y = tg\ x$, $y = cotg\ x$

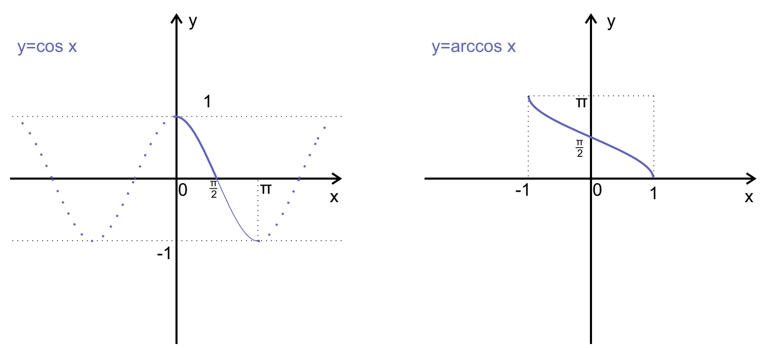




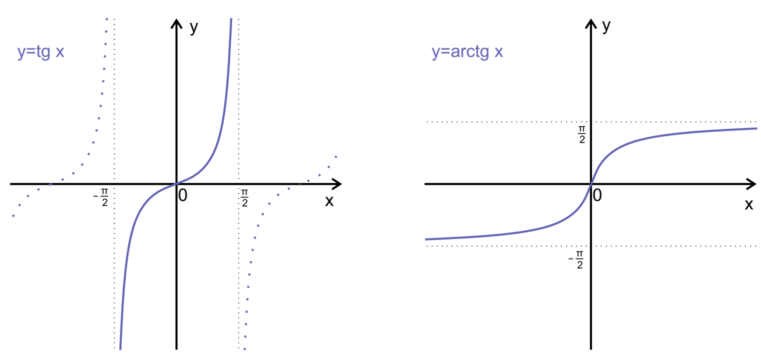
Cyklometrické funkcie $\mathbf{y}=\arcsin x$



Cyklometrické funkcie $\mathbf{y}=\arccos x$



Cyklometrické funkcie $y = arctg\ x$



Cyklometrické funkcie $y = arccotg\ x$