Limita a spojitosť funkcie

Pojem limita funkcie

Definícia 1 *Hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v čísle a limitu b, ak ku každému okoliu $O_\varepsilon(b)$ bodu b existuje také prstencové okolie $O_\delta^o(a)$ bodu a, že pre každé $x \in O_\delta^o(a)$ platí, že všetky funkčné hodnoty $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.*

Jednostranné limity funkcie

Definícia 2 *Hovoríme, že b je limitou sprava funkcie f v bode a, pričom píšeme $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$, ak ku každému okoliu $O_\varepsilon(b)$ existuje okolie $O_\delta^+(a)$, že pre každé $x \in O_\delta^+(a)$ je $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.*

Definícia 3 *Hovoríme, že b je limitou zľava funkcie f v bode a, pričom píšeme $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$ práve vtedy, ak ku každému okoliu $O_\varepsilon(b)$ existuje okolie $O_\delta^-(a)$, že pre každé $x \in O_\delta^-(a)$ je $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.*

Základné vety o limitách funkcie

Veta 1 *Funkcia $f(x)$ má v čísle a limitu práve vtedy, keď $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.*

Veta 2 *Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$ a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_2$, potom $b_1 = b_2$.*

Pozn.: Nech $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Potom

- ak $b \in \mathbb{R}$, hovoríme, že ide o vlastnú limitu
- ak $b \in \{\pm\infty\}$, hovoríme, že ide o nevlastnú limitu

Vlastné limity funkcie

Veta 3 *Nech* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ *a* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$. *Potom platí*

1. $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |b|$
2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$
3. *nech* $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, *potom* $\lim\limits_{x \to a} [k.\, f(x)] = k.\, b$
4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x).\, g(x)] = b\, .\, c$
5. *ak* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, *potom* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$
6. *ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *a* g *je ohraničená funkcia, potom* $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Nevlastné limity funkcie

Veta 4

1. *Ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} [-f(x)] = \mp\infty$.
2. *Ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$.
3. *Ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ *a* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq -\infty$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \infty$.
4. *Ak* $\forall x$ *je* $f(x) > 0$ *a* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.
5. *Ak* $\forall x$ *je* $f(x) < 0$ *a* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
6. *Ak* $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Nerovnosti pre limity funkcie

Veta 5 *Nech existuje* $O^o_\delta(a)$ *také, že* $\forall x \in O^o_\delta(a)$ *platí* $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. *Potom*

1. *ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_1$ *a* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b_2$, *potom* $b_1 \leq b_2$
2. *ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$
3. *ak* $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, *tak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Pojem spojitosť funkcie v bode

Definícia 4 *Nech funkcia* f *je definovaná na okolí bodu* a. *Hovoríme, že funkcia* f *je spojitá v bode* a, *ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definícia 5 *Nech funkcia* f *je definovaná na okolí bodu* a. *Hovoríme, že funkcia* f *je spojitá v bode* a *sprava*, *ak* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Definícia 6 *Nech funkcia* f *je definovaná na okolí bodu* a. *Hovoríme, že funkcia* f *je spojitá v bode* a *zľava*, *ak* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Pojem spojitosť funkcie

Definícia 7 *Funkcia* f *je spojitá, ak je spojitá v každom bode definičného oboru.*

Definícia 8 *Hovoríme, že funkcia* f *je spojitá na otvorenom intervale* (a, b), *ak je spojitá v každom bode tohto intervalu.*

Definícia 9 *Hovoríme, že funkcia* f *je spojitá na uzavretom intervale* $\langle a, b \rangle$, *ak je spojitá v každom bode intervalu* (a, b) *a naviac je spojitá v bode* a *sprava a spojitá v bode* b *zľava.*

Body nespojitosti funkcie

Definícia 10 *Body, v ktorých nie je funkcia spojitá, nazývame body nespojitosti funkcie.*

Body nespojitosti môžeme zatriediť do dvoch skupín:

1. body nespojitosti 1. druhu - ak existujú konečné jednostranné limity $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to a^-} f(x)$

2. body nespojitosti 2. druhu - ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to a^-} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná

Definícia 11 *Funkcia f sa nazýva po častiach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, ak má konečný počet bodov nespojitosti 1. druhu.*

Spojitosť funkcie

Veta 6 *Nech funkcie f, g sú spojité v bode a. Nech c$\in \mathbb{R}$. Potom v bode a sú spojité aj funkcie $f \pm g$, $c.\, f$, $f.\, g$, $|f|$ a ak $g(a) \neq 0$ je spojitá v bode a aj funkcia $\frac{f}{g}$.*

Veta 7 *Nech funkcia g je spojitá v bode a, funkcia f je spojitá v bode $g(a)$. Potom funkcia $f\,(g(x))$ je spojitá v bode a.*

Veta 8 *Každá elementárna funkcia je spojitá.*

Vlastnosti spojitých funkcií na intervale

Veta 9 *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom*

- *f nadobúda minimum aj maximum,*
- *f nadobúda aj každú hodnotu medzi minimom a maximom.*

Veta 10 (Bolzanova veta) *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a naviac nech $f(a).\, f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $f(c) = 0$.*