

Postupnosti

Pojem postupnosť

Definícia 1 Funkciu $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame *postupnosťou reálnych čísel* a prvok $a_n = f(n)$ nazývame *n-tý člen* postupnosti. Označujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definícia 2 Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- *rastúca*, ak pre $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- *klesajúca*, ak pre $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$
- *nerastúca*, ak pre $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- *neklesajúca*, ak pre $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- *zhora ohraničená*, ak $\exists K \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq K$
- *zdola ohraničená*, ak $\exists k \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq k$
- *ohraničená*, ak je ohraničená zdola aj zhora

Pojem limita postupnosti a jej základné vlastnosti

Definícia 3 Číslo b sa nazýva *limitou postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, ak ku každému $O_\varepsilon(b)$ existuje n_0 také, že pre každé $n > n_0; n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \in O_\varepsilon(b)$. Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$.

Definícia 4 Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Keď $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \in \mathbb{R}$, hovoríme, že postupnosť je *konvergentná*. V opačnom prípade (t.j. keď limita neexistuje alebo je rovná $\pm\infty$) hovoríme, že postupnosť je *divergentná*.

Veta 1 Ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, tak je ohraničená.

Veta 2 Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné postupnosti. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}^*$. Potom platí

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = a^k$, $k \in \mathbb{Z}$

ak majú výrazy $a \pm b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, a^k v \mathbb{R}^* zmysel.