Derivácia funkcie

Pojem derivácia funkcie

Definícia 1 *Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu, ak je definovaná v okolí bodu x_0 a existuje limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Túto limitu nazývame deriváciou funkcie f v bode x_0 a označujeme ju $f'(x_0)$.

Iné označenie derivácie: $[f'(x)]_{x=x_0}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}$

Veta 1 *Ak funkcia f má v bode x_0 deriváciu, tak je v tomto bode spojitá.*

Jednostranné derivácie funkcie

Definícia 2 *Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ deriváciu zľava, ak je definovaná v ľavom okolí bodu x_0a existuje limita*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Túto limitu označujeme $f'_-(x_0)$.

Definícia 3 *Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ deriváciu sprava, ak je definovaná v pravom okolí bodu x_0 a existuje limita*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Túto limitu označujeme $f'_+(x_0)$.

Veta 2 *Funkcia* f *má v bode* x_0 *deriváciu* $f'(x_0)$ *práve vtedy, ak má v bode* x_0 *deriváciu zľava aj sprava a platí*

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Derivácia funkcie na intervale

Definícia 4 *Hovoríme, že funkcia* f *má na uzavretom intervale* $\langle a, b\rangle$ *deriváciu* f'*, ak funkcia* f *má na intervale* (a, b) *deriváciu, v bode* a *deriváciu sprava a v bode* b *deriváciu zľava.*

Definícia 5 *Hovoríme, že funkcia* f *je hladká na intervale* $\langle a, b\rangle$*, ak jej derivácia* f' *je spojitá na intervale* $\langle a, b\rangle$*.*

Pravidlá pre výpočet derivácie funkcie

Veta 3 *Nech funkcie* f *a* g *majú derivácie na otvorenom intervale* I*, nech* $c \in R$*. Potom funkcie* cf*,* $f + g$*,* fg *majú derivácie na* I *a* $\frac{1}{g}$*,* $\frac{f}{g}$ *majú derivácie na* $I - \{x \in I : g(x) = 0\}$*, pričom platí:*

- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}.$

Derivácia zloženej a inverznej funkcie

Veta 4 *Nech* $g : I \to J$ *má deriváciu na otvorenom intervale* I*. Nech* $f : J \to R$ *má deriváciu na otvorenom intervale* J*. Potom funkcia* $f(g(x))$ *má deriváciu na* I *a platí*

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

Veta 5 *Nech $f : I \to J$ je rýdzomonotónna funkcia na otvorenom intervale I, nech f^{-1} je inverzná funkcia k funkcii f. Ak $f'(x) \neq 0$ na I, tak funkcia f^{-1} má deriváciu na J a platí*

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Derivácie elementárnych funkcií

- $[\mathrm{a}]' = 0$
- $[x^{\mathrm{a}}]' = \mathrm{a}\, x^{\mathrm{a}-1}$
- $[\mathrm{a}^x]' = \mathrm{a}^x \ln \mathrm{a}$
- $[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x$
- $[\log_{\mathrm{a}} x]' = \dfrac{1}{x \ln \mathrm{a}}$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Pozn.: Uvedené vzorce platia na intervaloch, kde sú dané funkcie definované.

Pojem diferenciál funkcie

Definícia 6 *Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu x_0. Hovoríme, že funkcia f je v bode x_0 diferencovateľná, ak prírastok funkcie $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ môžeme vyjadriť v tvare*

$$f(x) - f(x_0) = K(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0),$$

kde $K \in \mathbb{R}$, ω je spojitá funkcia, pre ktorú platí

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0.$$

Výraz $df(x_0) = K(x - x_0)$ nazývame diferenciál funkcie.

Veta 6 *Funkcia f je v bode x_0 diferencovateľná práve vtedy, ak má v bode x_0 deriváciu. Potom platí $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.*

Rovnica dotyčnice a normály ku grafu funkcie

Definícia 7 *Ak $f'(x_0)$ existuje, tak dotyčnica ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $T[x_0, f(x_0)]$ má rovnicu*

$$t:\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Definícia 8 *Ak $f'(x_0) \neq 0$, tak normála ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $T[x_0, f(x_0)]$ má rovnicu*

$$n:\ y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Derivácie vyšších rádov

Definícia 9 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ má na neprázdnej množine $A_1 \subset A$ deriváciu f'. Ak funkcia f' má na neprázdnej množine $A_2 \subset A$ deriváciu $(f')'$, tak túto funkciu nazývame druhou deriváciou funkcie f na množine A_2 a označujeme ju f'', t.j. $f'' = (f')'$. Podobným spôsobom môžeme definovať derivácie vyšších rádov.*

Pozn: Označenie s čiarkami používame obyčajne pre derivácie rádu $n \leq 3$, t.j. f', f'', f''', pre $n \geq 4$ používame označenie $f^{(n)}$.

L'Hospitalovo pravidlo

Veta 7 *Nech funkcie f, g majú derivácie v prstencovom okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ a nech platí jedna z podmienok*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \infty$

Ak existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje aj $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pozn.: Veta platí aj pre jednostranné limity.

Vlastnosti diferencovateľných funkcií na intervale

Veta 8 *Nech funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *nadobúda vo vnútornom bode* c *intervalu* $\langle a, b\rangle$ *najväčšiu (najmenšiu) hodnotu. Ak navyše funkcia* f *má v bode* c *deriváciu, tak* $f'(c) = 0$.

Veta 9 (Rolleho veta) *Nech funkcia* f *má tieto vlastnosti:*

1. *Je spojitá na uzavretom intervale* $\langle a, b\rangle$.
2. *Má deriváciu na otvorenom intervale* (a, b).
3. *Platí* $f(a) = f(b)$.

Potom na otvorenom intervale (a, b) *existuje aspoň jeden bod* ξ *taký, že* $f'(\xi) = 0$.

Veta 10 (Lagrangeova veta) *Nech funkcia* f *má tieto vlastnosti:*

1. *Je spojitá na uzavretom intervale* $\langle a, b\rangle$.
2. *Má deriváciu na otvorenom intervale* (a, b).

Potom na otvorenom intervale (a, b) *existuje aspoň jeden bod* ξ *taký, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Definícia 10 *Polynóm*

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

sa nazýva Taylorov polynóm funkcie f *v bode* x_0 *a označujeme ho* $T_n(x)$.

Veta 11 (Taylorova veta) *Nech funkcia f je v istom okolí* $O(x_0)$ *bodu* x_0 $(n + 1)$-*krát diferencovateľná. Potom pre bod* $x \in O(x_0)$ *platí*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$