Priebeh funkcie

Monotónnosť funkcie

Veta 1 *Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech má na intervale (a, b) deriváciu. Potom ak pre každé $x \in (a, b)$ je*

a) $f'(x) > 0$, *tak f je rastúca na $\langle a, b\rangle$.*

b) $f'(x) < 0$, *tak f je klesajúca na $\langle a, b\rangle$.*

c) $f'(x) \geq 0$, *tak f je neklesajúca na $\langle a, b\rangle$.*

d) $f'(x) \leq 0$, *tak f je nerastúca na $\langle a, b\rangle$.*

d) $f'(x) = 0$, *tak f je konštantná na $\langle a, b\rangle$.*

Pojem lokálny extrém funkcie

Definícia 1 *Nech funkcia f je definovaná na otvorenom intervale (a, b). Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in (a, b)$ lokálne maximum, ak existuje prstencové okolie $O^o(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^o(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$.*

Definícia 2 *Nech funkcia f je definovaná na otvorenom intervale (a, b). Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in (a, b)$ lokálne minimum, ak existuje prstencové okolie $O^o(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^o(x_0)$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.*

Definícia 3 *Nech funkcia f je definovaná na otvorenom intervale (a, b). Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in (a, b)$ ostré lokálne maximum, ak existuje prstencové okolie $O^o(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^o(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$.*

Definícia 4 *Nech funkcia f je definovaná na otvorenom intervale (a, b). Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in (a, b)$ ostré lokálne minimum, ak existuje prstencové okolie $O^o(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^o(x_0)$ platí $f(x) > f(x_0)$.*

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému

Veta 2 (nutná podmienka existencie lokálneho extrému) *Nech existuje $f'(x_0)$. Ak funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém, tak $f'(x_0) = 0$.*

Definícia 5 *Bod x_0 nazývame stacionárnym bodom funkcie f, ak existuje $f'(x_0)$ a platí $f'(x_0) = 0$.*

Pozn: Funkcia môže mat' lokálny extrém len v bodoch, kde je prvá derivácia nulová alebo kde prvá derivácie neexistuje.

Postačujúce podmienky existencie lokálneho extrému

1. Ak f' mení znamienko z $+$ na $-$ má funkcia v bode x_0 lokálne maximum.
   Ak f' mení znamienko z $-$ na $+$ má funkcia v bode x_0 lokálne minimum.
2. Nech x_0 je stacionárnym bodom funkcie f a nech existuje $f''(x_0)$. Potom ak
   a) $f''(x_0) > 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.
   b) $f''(x_0) < 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

Pojem konvexnost' a konkávnost' funkcie

Definícia 6 *Funkcia $f : I \to \mathbb{R}$ sa nazýva konvexná na intervale I, ak pre každú trojicu bodov $x, x_1, x_2 \in I$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $(x, f(x))$ pod priamkou určenou bodmi $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ alebo leží na tejto priamke.*

Definícia 7 *Funkcia $f : I \to \mathbb{R}$ sa nazýva rýdzo konvexná na intervale I, ak pre každú trojicu bodov $x, x_1, x_2 \in I$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $(x, f(x))$ pod priamkou určenou bodmi $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.*

Definícia 8 *Funkcia* $\boldsymbol{f : I \to \mathbb{R}}$ *sa nazýva konkávna na intervale* $\boldsymbol{I}$, *ak pre každú trojicu bodov* $\boldsymbol{x, x_1, x_2 \in I}$ *takú, že* $\boldsymbol{x_1 < x < x_2}$ *je bod* $\boldsymbol{(x, f(x))}$ *nad priamkou určenou bodmi* $\boldsymbol{(x_1, f(x_1))}$, $\boldsymbol{(x_2, f(x_2))}$ *alebo leží na tejto priamke.*

Definícia 9 *Funkcia* $\boldsymbol{f : I \to \mathbb{R}}$ *sa nazýva rýdzo konkávna na intervale* $\boldsymbol{I}$, *ak pre každú trojicu bodov* $\boldsymbol{x, x_1, x_2 \in I}$ *takú, že* $\boldsymbol{x_1 < x < x_2}$ *je bod* $\boldsymbol{(x, f(x))}$ *nad priamkou určenou bodmi* $\boldsymbol{(x_1, f(x_1))}$, $\boldsymbol{(x_2, f(x_2))}$.

Veta 3 *Nech funkcia* $\boldsymbol{f}$ *je spojitá na intervale* $\boldsymbol{\langle a, b\rangle}$ *a nech má na intervale* $\boldsymbol{(a, b)}$ *druhú deriváciu. Potom ak pre každé* $\boldsymbol{x \in (a, b)}$ *je*

a) $f''(x) > 0$, *tak* $\boldsymbol{f}$ *je rýdzo konvexná na* $\boldsymbol{\langle a, b\rangle}$.

b) $f''(x) < 0$, *tak* $\boldsymbol{f}$ *je rýdzo konkávna na* $\boldsymbol{\langle a, b\rangle}$.

c) $f''(x) \geq 0$, *tak* $\boldsymbol{f}$ *je konvexná na* $\boldsymbol{\langle a, b\rangle}$.

d) $f''(x) \leq 0$, *tak* $\boldsymbol{f}$ *je konkávna na* $\boldsymbol{\langle a, b\rangle}$.

Inflexný bod a nutná podmienka existencie inflexie

Definícia 10 *Bod* $\boldsymbol{x_0 \in I}$ *nazývame inflexným bodom funkcie* $\boldsymbol{f}$, *ak funkcia* $\boldsymbol{f}$ *je v nejakom ľavom okolí bodu* $\boldsymbol{x_0}$ *rýdzo konkávna a v nejakom pravom okolí bodu* $\boldsymbol{x_0}$ *rýdzo konvexná.*

Definícia 11 *Bod* $\boldsymbol{x_0 \in I}$ *nazývame inflexným bodom funkcie* $\boldsymbol{f}$, *ak funkcia* $\boldsymbol{f}$ *je v nejakom ľavom okolí bodu* $\boldsymbol{x_0}$ *rýdzo konvexná a v nejakom pravom okolí bodu* $\boldsymbol{x_0}$ *rýdzo konkávna.*

Veta 4 (nutná podmienka existencie inflexie) *Nech existuje* $\boldsymbol{f''(x_0)}$. *Ak bod* $\boldsymbol{x_0}$ *je inflexným bodom funkcie* $\boldsymbol{f}$, *tak* $\boldsymbol{f''(x_0) = 0}$.

Asymptoty grafu funkcie

Definícia 12 *Nech funkcia* $\boldsymbol{f}$ *je definovaná na istom okolí* $\boldsymbol{O^o(x_0)}$ *bodu* $\boldsymbol{x_0}$. *Priamka* $x = x_0$ *sa nazýva asymptota bez smernice grafu funkcie, ak funkcia* $\boldsymbol{f}$ *má v bode* $\boldsymbol{x_0}$ *aspoň jednu nevlastnú jednostrannú limitu.*

Definícia 13 *Nech funkcia f je definovaná na nejakom intervale $(-\infty, a)$, resp. (a, ∞). Priamka $y = kx + q$, pre ktorú platí, že*

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx - q] = 0, \text{ resp. } \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx - q] = 0$$

sa nazýva asymptota so smernicou grafu funkcie f v nevlastnom bode $-\infty$, resp. ∞.

Veta 5 *Priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v nevlastnom bode $-\infty$ práve vtedy, keď*

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx] \in \mathbb{R}.$$

Priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v nevlastnom bode ∞ práve vtedy, keď

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] \in \mathbb{R}.$$

Zisťovanie priebehu funkcie

1. Definičný obor funkcie
2. Limity funkcie v krajných bodoch definičného oboru
3. Limity (jednostranné) v bodoch nespojitosti funkcie
4. Asymptoty grafu funkcie
5. Párnosť, nepárnosť funkcie
6. Monotónnosť funkcie
7. Lokálne extrémy funkcie
8. Intervaly konvexnosti a konkávnosti
9. Inflexné body funkcie
10. Graf funkcie