Max-plus algebra

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Diskrétne dynamické systémy

Systémy

1. spojité
   - stavy sa menia spojite v závislosti na čase
   - výstupy v tvare spojitej funkcie

   $x = x(t)$ $\quad$ t spojitá premenná času

2. diskrétne (DDS)
   - stavy sa menia diskrétne, t.j. z "prípadu"na "prípad"
   - výstupy v tvare diskrétnej funkcie

   $x = x(r)$ $\quad$ r diskrétna premenná udalosti (prípadu)

Diskrétne dynamické systémy v praxi - príklady

Príklady DDS

- dopravné systémy
- signálne sústavy
- výrobné procesy

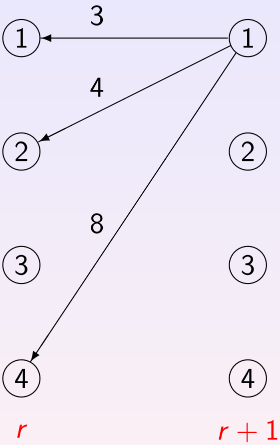
⋮

Modelový systém - výrobná linka - popis

Popis systému:

Výrobná linka pozostáva z viacerých strojov, ktorých práca je navzájom ovplyvnená. Okrem počtu strojov je preto systém určený dvoma druhmi parametrov. V prvom rade je pre každý stroj daná časová hodnota, kedy začne pracovať. Druhá skupina parametrov udáva, koľko a či vôbec musia jednotlivé stroje čakať na seba, pokým začnú ďalší pracovný úkon.

Modelový systém - výrobná linka - ilustrácia



práca **pre** 1. stroj

- 1. stroj pracuje 3 jednotky času, t.j. čaká "na seba"3j času
- 2. stroj 4j času
- 4. stroj 8j času

$x_i(r)$ čas, kedy najskôr môže nastať r-tá udalosť na i-tom stroji, t.j. dokončenie r-tého pracovného úkonu

$$x_1(r+1) = \max\{x_1(r)+3,\ x_2(r)+4,\ x_4(r)+8\}$$

Diskrétne dynamické systémy - cieľ

Cieľ:

- formalizovať zápis ľubovoľného DDS pomocou vektorov a matíc
- definovať "vhodnú algebru", v ktorej klasické operácie násobenia a sčítania budú nahradené operáciou sčítania a maxima, ale operácie s vektormi a maticami budú formálne definované, ako v klasickej algebre

⋮

Formalizácia zápisu - predstavenie prvku ε

$$x_1(r+1) = \max\{x_1(r)+3,\ x_2(r)+4,\ x_4(r)+8\}$$

formálne

$$x_1(r+1) = \max\{x_1(r)+a_{11},\ x_2(r)+a_{12},\ x_4(r)+a_{14}\}$$

$$\max\{x_1(r)+a_{11},\ x_2(r)+a_{12},\ x_3(r)+a_{13},\ x_4(r)+a_{14}\} =$$

$$\text{nech } a_{13} = -\infty \implies$$

$$\begin{aligned}
&= \max\{x_1(r)+a_{11},\ x_2(r)+a_{12},\ x_3(r)+(-\infty),\ x_4(r)+a_{14}\} = \\
&= \max\{x_1(r)+a_{11},\ x_2(r)+a_{12},\ -\infty,\ x_4(r)+a_{14}\} = \\
&= \max\{x_1(r)+a_{11},\ x_2(r)+a_{12},\ x_4(r)+a_{14}\} = \\
&= x_1(r+1)
\end{aligned}$$

Zápis: $-\infty = \varepsilon$

Aplikácia - výrobná linka

Rekurzívny popis systému pozostávajúci z n strojov v klasickej algebre:

$$x_i(r+1) = \max\{x_1(r) + a_{i1},\ x_2(r) + a_{i2},\ \dots,\ x_n(r) + a_{in}\}$$

Rekurzívny popis systému pozostávajúci z n strojov v max-plus algebre:

$$x_i(r+1) = a_{i1} \otimes x_1(r) \oplus a_{i2} \otimes x_2(r) \oplus \dots \oplus a_{in} \otimes x_n(r)$$

Formalizácia zápisu - modelový systém so 4 strojmi

$$
\begin{aligned}
x_1(r+1) &= \max\{x_1(r)+a_{11},\ x_2(r)+a_{12},\ x_3(r)+a_{13},\ x_4(r)+a_{14}\} \\
x_2(r+1) &= \max\{x_1(r)+a_{21},\ x_2(r)+a_{22},\ x_3(r)+a_{23},\ x_4(r)+a_{24}\} \\
x_3(r+1) &= \max\{x_1(r)+a_{31},\ x_2(r)+a_{32},\ x_3(r)+a_{33},\ x_4(r)+a_{34}\} \\
x_4(r+1) &= \max\{x_1(r)+a_{41},\ x_2(r)+a_{42},\ x_3(r)+a_{43},\ x_4(r)+a_{44}\}
\end{aligned}
$$

Formalizácia zápisu - matica prechodu modelového systému

Definícia

Maticou prechodu diskrétneho dynamického systému s n strojmi nazývame štvorcovú maticu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ rádu n, v ktorej každý prvok a_{ij}, pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$, reprezentuje veľkosť vplyvu j-tého stroja na i-tý stroj, ak a_{ij} je konečné, alebo naň nemá vplyv, ak $a_{ij} = \varepsilon$.

Pre modelový systém (predstavený čiastočne na začiatku) môžeme zobrať napríklad maticu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Aplikácia - výrobná linka

Popis systému pozostávajúci zo 4 strojov v max-plus algebre:

$$\begin{aligned}
x_1(r+1) &= a_{11} \otimes x_1(r) \oplus a_{12} \otimes x_2(r) \oplus a_{13} \otimes x_3(r) \oplus a_{14} \otimes x_4(r)\\
x_2(r+1) &= a_{21} \otimes x_1(r) \oplus a_{22} \otimes x_2(r) \oplus a_{23} \otimes x_3(r) \oplus a_{24} \otimes x_4(r)\\
x_3(r+1) &= a_{31} \otimes x_1(r) \oplus a_{32} \otimes x_2(r) \oplus a_{33} \otimes x_3(r) \oplus a_{34} \otimes x_4(r)\\
x_4(r+1) &= a_{41} \otimes x_1(r) \oplus a_{42} \otimes x_2(r) \oplus a_{43} \otimes x_3(r) \oplus a_{44} \otimes x_4(r)
\end{aligned}$$

Maticový zápis: $x(r+1) = A \otimes x(r)$

$$\begin{pmatrix} x_1(r+1)\\ x_2(r+1)\\ x_3(r+1)\\ x_4(r+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1(r)\\ x_2(r)\\ x_3(r)\\ x_4(r) \end{pmatrix}$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad 1

Príklad:

Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov. Nech A je matica prechodu daného DDS

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Predpokladajme, že výrobný proces začne na všetkých strojoch v čase nula. Kedy skončia jednotlivé stroje

a) prvý výrobný cyklus,

b) druhý výrobný cyklus.

Aplikácia - výrobná linka - Príklad 2

Príklad:

Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov. Nech A je matica prechodu daného DDS

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Predpokladajme, že výrobný proces začne na jednotlivých strojoch v čase danom vektorom $t = (2, 3, 4, 1)$. Kedy skončia jednotlivé stroje

a) prvý výrobný cyklus,

b) druhý výrobný cyklus.

Aplikácia - výrobná linka - Príklad 3

Príklad:

Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov. Nech A je matica prechodu daného DDS

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Predpokladajme, že výrobný proces začne na všetkých strojoch v čase nula. Po prvom výrobnom cykle došlo k zdržaniu 10 časových jednotiek v dôsledku výpadku elektrickej energie. Vypočítajme, kedy najskôr môže skončiť dvoj etapový projekt.

Vlastnosti násobenia matíc

Veta

Nech A, B a C sú matice vhodných rozmerov nad $\mathbb{R}^\star$. Platí

$$\begin{array}{rcll} A \otimes (B \otimes C) & = & (A \otimes B) \otimes C & \text{asociatívnosť } \otimes \\ A \otimes (B \oplus C) & = & A \otimes B \oplus A \otimes C & \text{distributívnosť } \otimes \\ & & & \text{vzhľadom na } \oplus \\ \alpha \otimes (A \otimes B) & = & A \otimes (\alpha \otimes B) & \end{array}$$

Poznámka:

Horeuvedené vzťahy platia aj pre stĺpcové vektory (matice s jedným stĺpcom). Posledná rovnosť môže mať v takom prípade pre ľubovoľnú maticu A a vektor x podobu

$$\alpha \otimes (A \otimes x) = A \otimes (\alpha \otimes x).$$

Aplikácia - výrobná linka

Aplikácia:

Uvažujme výrobný proces, v ktorom došlo k výpadku prúdu počas r-tého pracovného úkonu. Nech dĺžka trvania výpadku bola δ. Ak $x_i(r)$ predstavoval čas dokončenia r-tého pracovného úkonu na i-tom stroji, tak to znamená, že táto hodnota sa zvýši o δ pre každý stroj. Nový čas dokončenia r-tého pracovného úkonu bude reprezentovaný vektorom

$$\begin{pmatrix} x_1(r) + \delta \\ \vdots \\ x_n(r) + \delta \end{pmatrix} = \delta \otimes x(r)$$

Čo znamená, že $(r+1)$-vý pracovný úkon (a teda každý ďalší) bude ukončený s posunom o δ

$$x'(r+1) = A \otimes (\delta \otimes x(r)) = \delta \otimes (A \otimes x(r)) = \delta \otimes x(r+1).$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Príklad:

Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov, ktorú sme predstavili v predošlých príkladoch. Nech A je matica prechodu daného DDS

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Predpokladajme, že výrobný proces začne na všetkých strojoch v čase nula. Kedy skončia jednotlivé stroje prácu na projekte, ak projekt pozostáva z 5 pracovných úkonov?

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie: Pri prvom pracovnom úkone nie je daný stroj ovplyvnený žiadnym iným $\Longrightarrow$ $x(1)$ pozostáva z diagonálnych prvkov matice A:

$$x(1) = \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \\ x_4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Keďže $x(r+1) = A \otimes x(r) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x(2) &= A \otimes x(1) \\ x(3) &= A \otimes x(2) \\ x(4) &= A \otimes x(3) \\ x(5) &= A \otimes x(4) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow x(5) = A^4 \otimes x(1)$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 & 14 \\ 7 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 12 \\ 5 & 9 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \left(A^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 & 14 \\ 7 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 12 \\ 5 & 9 & 6 & 12 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 19 & 23 & 20 & 26 \\ 17 & 20 & 17 & 22 \\ 18 & 21 & 18 & 24 \\ 17 & 21 & 18 & 24 \end{pmatrix}$$

$$x(5) = A^4 \otimes x(1) = \begin{pmatrix} 19 & 23 & 20 & 26 \\ 17 & 20 & 17 & 22 \\ 18 & 21 & 18 & 24 \\ 17 & 21 & 18 & 24 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Vzostupný stavový orbit

Definícia

Majme DDS so začiatočným stavom daným vektorom $x \in \mathbb{R}^\star(n)$ a maticou prechodu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Postupnosť stavov $x(1) = x$, $x(2) = A \otimes x$, $x(3) = A^2 \otimes x$, ..., $x(p+1) = A^p \otimes x$ pre $p \in \mathbb{N}^+$ nazývame $(p+1)$-stavový vzostupný orbit založený na vektore x.

Pre modelový systém z predchádzajúceho príkladu 5-stavový vzostupný orbit má tvar:

$$\begin{array}{ccccc} x(1), & x(2), & x(3), & x(4), & x(5) \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Výpočtová zložitosť stavového orbitu

Veta

$(p+1)$ - stavový orbit pre DDS s n strojmi sa dá vypočítať s výpočtovou zložitosťou $O(pn^2)$.

D:

$x_i(j)$	n operácií
$x(j)$	n^2 operácií
$x(2),\ x(3),\ \dots,\ x(p+1)$	$p \times n^2$ operácií

Konečné prvky matice

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Množinu všetkých matíc typu $m \times n$, v ktorých žiadny riadok ani žiadny stĺpec nepozostáva výlučne z prvkov ε, budeme označovať $F(m,n) \subseteq \mathbb{R}^\star(m,n)$.

Poznámka: $F(m,1)$ reprezentuje množinu všetkých konečných vektorov.

Veta

Nech $A \in F(m,r)$, $B \in F(r,n)$. Potom $A \otimes B = C \in F(m,n)$.

D:

$$\forall j \quad \exists k \quad \exists i; \quad b_{kj} > \varepsilon \quad \wedge \quad a_{ik} > \varepsilon$$
$$\Longrightarrow c_{ij} = \sum_{l}^{\oplus} a_{il} \otimes b_{lj} \geq a_{ik} \otimes b_{kj} > \varepsilon$$

Rastúci DDS

Definícia

DDS s postupnosťou stavových vektorov $x(1)$, $x(2)$, ... nazývame rastúcim, ak pre $i = 1, 2, \ldots, n$ je

$$x_i(r+1) \geq x_i(r) \quad \text{pre} \quad r = 1, 2, \ldots .$$

Poznámka: Systémy, ktorými sa zaoberáme, majú nezávisle na voľbe začiatočného vektora túto vlastnosť.

Rastúci DDS - postačujúca podmienka

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$ s $a_{ii} \geq 0$, pre $i = 1, 2, \dots, n$. Potom platí

1. $A \in F(n, n)$,
2. DDS s maticou prechodu A je rastúci.

D:

1. definícia $F(n, n)$
2. $$x_i(r+1) = \sum_l^{\oplus} a_{il} \otimes x_l(r) \geq a_{ii} \otimes x_i(r) \geq x_i(r)$$

Rastúci DDS a diagonálne prvky matice prechodu

Dôsledok

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ s $a_{ii} \geq 0$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom pre $r \geq 1$ platí

$$x_i(r+1) \geq a_{ii}^r \otimes x_i(1).$$

D:

$$\begin{aligned} x_i(r+1) &\geq a_{ii} \otimes x_i(r) \geq a_{ii} \otimes (a_{ii} \otimes x_i(r-1)) = a_{ii}^2 \otimes x_i(r-1) \geq \\ &\geq a_{ii}^3 \otimes x_i(r-2) \geq \ldots \geq a_{ii}^r \otimes x_i(1) \end{aligned}$$

Ilustrácia - Príklad

Príklad:

Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov z predošlých príkladov s maticou prechodu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

a 5-stavový vzostupný orbit zodpovedajúci spusteniu v čase nula:

$$\begin{array}{ccccc} x(1), & x(2), & x(3), & x(4), & x(5) \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ďakujem za pozornosť.