Základy lineárnej algebry

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Pojem aritmetického vektora

Definícia

Nech $n \in \mathbb{N}$. Usporiadanú n-ticu čísel $a_1, a_2, ..., a_n$ nazývame n-rozmerným aritmetickým vektorom. Čísla $a_1, a_2, ..., a_n$ nazývame zložkami alebo súradnicami aritmetického vektora.

Zápis: $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$

$\overline{a} = (2, -3, 1)$ 3-rozmerný vektor

$\overline{b} = (2, -3, 1, 5)$ 4-rozmerný vektor

Lineárna kombinácia vektorov

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Nech $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}$ sú n-rozmerné vektory. **Lineárnou kombináciou vektorov** $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}$ nazývame vektor $\overline{x} = \alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \cdots + \alpha_m \cdot \overline{a_m}$. Konštanty α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ nazývame kombinačnými koeficientami.

$\overline{a_1} = (2, -3, 1)$, $\alpha_1 = 3$

$\overline{a_2} = (4, -6, 2)$, $\alpha_2 = -2$

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} = 3 \cdot (2, -3, 1) + (-2) \cdot (4, -6, 2) = \\ &= (6, -9, 3) + (-8, 12, -4) = \\ &= (-2, 3, -1)\end{aligned}$$

Lineárna závislosť

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$,...,$\overline{a_m}$ (n-rozmerné) sú lineárne závislé, ak existujú čísla α_1, α_2,...,$\alpha_m \in \mathbb{R}$, aspoň jedno rôzne od nuly, také, že platí $\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \cdots + \alpha_m \cdot \overline{a_m} = \overline{0}$. Ak vektory nie sú lineárne závislé, hovoríme, že sú lineárne nezávislé.

$\overline{a_1} = (2, -3, 1)$, $\alpha_1 = 2$

$\overline{a_2} = (4, -6, 2)$, $\alpha_2 = -1$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} = \\ &= 2 \cdot (2, -3, 1) + (-1) \cdot (4, -6, 2) = \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Pojem matice

Definícia

Maticou typu $m \times n$ nazývame množinu prvkov zapísaných do tabuľky s m riadkami a n stĺpcami, pre $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zápis: $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Špeciálne typy matíc

Definícia

Transponovaná matica k matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ je matica $\mathbf{A}^\top = \mathbf{B} = (b_{ij})$ typu $n \times m$, kde $b_{ij} = a_{ji}$, pre $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Špeciálne typy matíc

Definícia

Štvorcová matica $(m = n)$: $\mathbf{A} = (a_{ij})\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 6 & -2 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Špeciálne typy štvorcových matíc

Definícia

Diagonálna matica: $\mathbf{D} = (d_{ij})$, kde pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad i \neq j \\ \text{ľubovoľné} & \text{pre} \quad i = j \end{cases}$$

Zápis: $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Špeciálne typy štvorcových matíc

Definícia

Jednotková matica: $\mathbf{E} = (e_{ij})$, kde pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad i \neq j \\ 1 & \text{pre} \quad i = j \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Špeciálne typy štvorcových matíc

Definícia

Horná (dolná) trojuholníková matica: $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = 0$, pre $i > j$ $(i < j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

horná dolná

Špeciálne typy matíc

Definícia

Lichobežníková matica: $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = 0$, pre $i > j$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ (prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Špeciálne typy matíc

Definícia

Stupňovitá (Gaussova) matica: $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ je lichobežníková matica, v ktorej každý nasledujúci riadok obsahuje aspoň o jednu nulu zľava viac ako predchádzajúci riadok.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Súčet matíc

Definícia

Súčtom matíc $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ typu $m \times n$ nazývame maticu $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu $m \times n$, pre ktorú $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, pre $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Zápis: $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+0 & 0+2 & -1+1 \\ 3-1 & 2+0 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Násobenie matice konštantou

Definícia

Nech k je konštanta, k-násobkom matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ nazývame maticu $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu $m \times n$, pre ktorú $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$, pre $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Zápis: $\mathbf{C} = k \cdot \mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \mathbf{A} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Súčin matíc

Definícia

Nech $m, n, r \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matica typu $m \times r$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ je matica typu $r \times n$. **Súčinom matíc A, B** nazývame maticu $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu $m \times n$, kde pre $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ir} \cdot b_{rj} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Zápis: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 6$$

Mocnina matice

Definícia

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je štvorcová matica rádu n. Maticu $\mathbf{A}^r$

$$\mathbf{A}^r = \begin{cases} \mathbf{E} & r = 0, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{r-1} & r = 1, 2, \dots \end{cases}$$

nazývame **r-tou mocninou matice A**.

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hodnosť matice

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Hodnosťou matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ nazývame maximálny počet lineárne nezávislých aritmetických vektorov tvoriacich riadky resp. stĺpce matice $\mathbf{A}$.

Zápis: h($\mathbf{A}$)

Definícia

Ekvivalentnou riadkovou úpravou matice nazývame:

1. zmenu poradia riadkov,
2. vynásobenie riadku nenulovou konštantou,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov k niektorému riadku.

Ekvivalentné matice

Definícia

Dve matice budeme nazývať ekvivalentné, ak sa jedna z matíc dá upraviť na druhú pomocou ekvivalentných riadkových úprav.

Zápis: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$

Veta

1. Nech matica $\mathbf{A}$ je ekvivalentná s maticou $\mathbf{B}$, tak $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{B})$.
2. Každú maticu možno pomocou ekvivalentných úprav upraviť na ekvivalentnú stupňovitú (Gaussovu) maticu.
3. Nech $m \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je stupňovitá matica s m nenulovými riadkami, tak $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = m$.

Výpočet hodnosti matice

Algoritmus

1. *K danej matici* $\boldsymbol{A}$ *nájdeme ekvivalentnú stupňovitú maticu* $\boldsymbol{B}$.
2. $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$ *je rovná počtu nenulových riadkov matice* $\boldsymbol{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \ldots \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2$$

Výpočet hodnosti matice – Príklad

Príklad:

Určme hodnosť matice A.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \approx \ldots \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 4$$

Pojem determinantu

Definícia

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n. Nech $\mathbf{M}_{ij}$ je štvorcová matica rádu $n-1$, ktorá vznikla z matice $\mathbf{A}$ vynechaním i-tého riadku a j-tého stĺpca v prípade, ak $n \geq 2$. Determinantom matice $\mathbf{A}$ nazývame číslo $\det \mathbf{A}$, pre ktoré platí:

1. $\det \mathbf{A} = a_{11}$, pre $n = 1$
2. $\det \mathbf{A} = a_{11} \det \mathbf{M}_{11} - a_{12} \det \mathbf{M}_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det \mathbf{M}_{1n}$, pre $n \geq 2$.

Zápis: $\det \mathbf{A}$, resp. $|\mathbf{A}|$

Sarusovo (krížové) pravidlo pre maticu rádu 2

Definícia

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1.$$

Sarusovo (krížové) pravidlo pre maticu rádu 3

Definícia

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} +a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + \\ +a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - \\ -a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21} \end{array}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2{\cdot}0{\cdot}5 + 1{\cdot}1{\cdot}4 + 3{\cdot}3{\cdot}2 - 4{\cdot}0{\cdot}3 - 2{\cdot}1{\cdot}2 - 5{\cdot}3{\cdot}1 = 3$$

Rozvoj podľa riadku

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu $n \geq 2$. Platí

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det \mathbf{M}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

rozvoj podľa i-tého riadku

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 10 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Rozvoj podľa stĺpca

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech **A** je štvorcová matica rádu $n \geq 2$. Platí

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det \mathbf{M}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

rozvoj podľa j-tého stĺpca

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Výmena dvoch riadkov (stĺpcov)

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu $n \geq 2$. Nech matica $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ výmenou dvoch riadkov (stĺpcov), tak

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Vynásobenie riadku (stĺpca) konštantou

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n. Nech matica $\mathbf{B}$ vznikla vynásobením i-tého riadku (j-tého stĺpca) matice $\mathbf{A}$ konštantou c, tak

$$\det \mathbf{B} = c \cdot \det \mathbf{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Pripočítanie lineárnej kombinácie riadkov (stĺpcov) k riadku (stĺpcu)

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu $n \geq 2$. Nech matica $\mathbf{B}$ vznikla pripočítaním lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k nejakému riadku (stĺpcu) matice $\mathbf{A}$, tak

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -4R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu matice

Algoritmus

1. *V prípade, ak je matica rádu 2 alebo 3, použijeme krížové pravidlo.*
2. *V prípade, ak je rád matice väčší ako tri*
   - *Pomocou ekvivalentných úprav vytvoríme riadok (stĺpec), v ktorom sa nachádza jeden nenulový člen.*
   - *Urobíme rozvoj podľa vzniknutého riadku (stĺpca).*
   - *Postup opakujeme, kým nemáme výsledok alebo neznížime rád na hodnotu nanajvýš tri a použijeme krížové pravidlo.*

Výpočet determinantu matice – Príklad

Príklad:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -R_2 \\ -4R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -[-4 - 6 + 9 - (6 - 9 - 4)] = -6$$

Výpočet determinantu matice – Príklad

Príklad:

Vypočítajme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & -9 & 12 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 10 & 2 \\ -5 & 10 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = 3180$$

Špeciálne prípady

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n. Nech matica $\mathbf{A}^\top$ vznikla transponovaním matice $\mathbf{A}$, tak

$$\det \mathbf{A}^\top = \det \mathbf{A}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Špeciálne prípady

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n. Nech všetky prvky niektorého riadku (stĺpca) matice $\mathbf{A}$ sú nuly, tak

$$\det \mathbf{A} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Špeciálne prípady

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je trojuholníková matica rádu n. Potom determinant matice $\mathbf{A}$ je rovný súčinu prvkov na hlavnej diagonále.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot 2 = -80$$

Špeciálne prípady

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú štvorcové matice rádu n. Potom

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Pojem inverznej matice

Definícia

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n a $\mathbf{E}$ jednotková matica rovnakého rádu. Maticu $\mathbf{A}^{-1}$ nazveme inverznou maticou k matici $\mathbf{A}$ práve vtedy, ak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Definícia

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n. Maticu $\mathbf{A}$ nazveme regulárnou (singulárnou) maticou práve vtedy, ak $\det \mathbf{A} \neq 0$ $(\det \mathbf{A} = 0)$.

Algebrický doplnok

Definícia

Nech $\mathbf{M}_{ij}$ (subdeterminant) je štvorcová matica rádu $n-1$, ktorá vznikla z matice $\mathbf{A}$ vynechaním i-tého riadku a j-tého stĺpca, číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{M}_{ij}$ nazývame algebrickým doplnkom matice $\mathbf{A}$ prislúchajúcim prvku a_{ij}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det \mathbf{M}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -2$$

Adjungovaná matica

Definícia

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n. Maticu $\mathbf{B}$ nazveme adjungovanou maticou k matici $\mathbf{A}$ práve vtedy, ak $b_{ij} = A_{ji}$ (algebrický doplnok prvku a_{ji}), pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Zápis:

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\top}$$

Výpočet inverznej matice pomocou adjungovanej matice

Veta

Nech $\mathbf{A}$ je regulárna matica. Potom k nej existuje inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ a platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (\operatorname{adj} \mathbf{A})$$

Výpočet inverznej matice pomocou adjungovanej matice – Príklad

Príklad:

Pomocou adjungovanej matice vypočítajme inverznú maticu k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & -6 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Výpočet inverznej matice pomocou adjungovanej matice – Príklad

$$\det \mathbf{A} = -54 \implies \mathbf{A} \text{ je regulárna} \implies \exists\, \mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{54} \begin{pmatrix} -18 & 18 & 18 \\ -27 & 36 & 27 \\ -54 & 54 & 36 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Výpočet inverznej matice pomocou Gaussovej metódy

Algoritmus

1. *Zostrojíme blokovú maticu* $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{E})$.
2. *Pomocou ekvivalentných riadkových úprav prevedieme na tvar s hornou trojuholníkovou maticou na ľavej strane. Ak boli riadky matice lineárne závislé (aspoň jeden riadok matice* $\boldsymbol{A}$ *sa vynuloval), je matica singulárna a inverzná matica k nej neexistuje.*
3. *Ak je matica regulárna, upravíme pomocou ekvivalentných riadkových úprav na diagonálnu maticu na ľavej strane.*
4. *Predelením diagonálnymi členmi upravíme na blokovú maticu* $(\boldsymbol{E} \,|\, \boldsymbol{A}^{-1})$.

Výpočet inverznej matice pomocou Gaussovej metódy – Príklad

Príklad:

Pomocou Gaussovej eliminácie vypočítajme inverznú maticu k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & -6 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Výpočet inverznej matice pomocou Gaussovej metódy – Príklad

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \ldots \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -9 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \approx \ldots \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right) = (\mathbf{E}\,|\,\mathbf{A}^{-1})$$

Výpočet inverznej matice pomocou Gaussovej metódy – Príklad

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Ďakujem za pozornosť.