Max-plus algebra

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Diskrétne dynamické systémy

Systémy

1. spojité
   - stavy sa menia spojite v závislosti na čase
   - výstupy v tvare spojitej funkcie

   $x = x(t)$ $\qquad$ t spojitá premenná času

2. diskrétne (DDS)
   - stavy sa menia diskrétne, t.j. z "prípadu"na "prípad"
   - výstupy v tvare diskrétnej funkcie

   $x = x(r)$ $\qquad$ r diskrétna premenná udalosti (prípadu)

Diskrétne dynamické systémy v praxi - príklady

Príklady DDS

- dopravné systémy
- signálne sústavy
- výrobné procesy

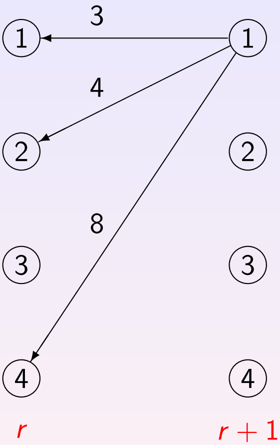
$\vdots$

Modelový systém - výrobná linka - popis

Popis systému:

Výrobná linka pozostáva z viacerých strojov, ktorých práca je navzájom ovplyvnená. Okrem počtu strojov je preto systém určený dvoma druhmi parametrov. V prvom rade je pre každý stroj daná časová hodnota, kedy začne pracovať. Druhá skupina parametrov udáva, koľko a či vôbec musia jednotlivé stroje čakať na seba, pokým začnú ďalší pracovný úkon.

Modelový systém - výrobná linka - ilustrácia



práca **pre** 1. stroj

- 1. stroj pracuje 3 jednotky času, t.j. čaká "na seba"3j času
- 2. stroj 4j času
- 4. stroj 8j času

$x_i(r)$ čas, kedy najskôr môže nastať r-tá udalosť na i-tom stroji, t.j. dokončenie r-tého pracovného úkonu

$$x_1(r+1) = \max\{x_1(r)+3,\ x_2(r)+4,\ x_4(r)+8\}$$

Diskrétne dynamické systémy v praxi - otázky

Otázky

- Akou najväčšou rýchlosťou môže systém bežať?
- Kedy musia jednotlivé stroje začať pracovať, aby sa systém ustálil, t. j. aby sa nezačali hromadiť výrobné komponenty pri niektorom zo strojov?
- Ak poznáme výšku zákazky a čas dodania zákazníkovi, aký je najneskorší termín spustenia výroby?

$\vdots$

Diskrétne dynamické systémy - cieľ

Cieľ:

- formalizovať zápis ľubovoľného DDS pomocou vektorov a matíc
- definovať "vhodnú algebru", v ktorej klasické operácie násobenia a sčítania budú nahradené operáciou sčítania a maxima, ale operácie s vektormi a maticami budú formálne definované, ako v klasickej algebre
- hľadať odpovede na položené otázky

Formalizácia zápisu - predstavenie prvku ε

$$x_1(r+1) = \max\{x_1(r)+3,\ x_2(r)+4,\ x_4(r)+8\}$$

formálne

$$x_1(r+1) = \max\{x_1(r)+a_{11},\ x_2(r)+a_{12},\ x_4(r)+a_{14}\}$$

$$\max\{x_1(r)+a_{11},\ x_2(r)+a_{12},\ x_3(r)+a_{13},\ x_4(r)+a_{14}\} =$$

$$\text{nech } a_{13} = -\infty \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&= \max\{x_1(r)+a_{11},\ x_2(r)+a_{12},\ x_3(r)+(-\infty),\ x_4(r)+a_{14}\} = \\
&= \max\{x_1(r)+a_{11},\ x_2(r)+a_{12},\ -\infty,\ x_4(r)+a_{14}\} = \\
&= \max\{x_1(r)+a_{11},\ x_2(r)+a_{12},\ x_4(r)+a_{14}\} = \\
&= x_1(r+1)
\end{aligned}$$

Zápis: $-\infty = \varepsilon$

Formalizácia zápisu - rekurzívny popis DDS

Rekurzívny popis systému pozostávajúci z n strojov:

$$x_i(r+1) = \max\{x_1(r) + a_{i1},\ x_2(r) + a_{i2},\ \dots,\ x_n(r) + a_{in}\}$$

- i-tý stroj $\qquad i = 1, 2, \dots, n$
- $(r+1)$-vá udalosť (pracovný úkon) $\qquad r = 1, 2, \dots$

Definícia max-plus algebry ako príklad extremálnej algebry

Definícia

Nech $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Nech $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Nech $a \oplus b = \max\{a, b\}$ a $a \otimes b = a + b$, pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{R}^\star$. Usporiadanú trojicu $(\mathbb{R}^\star, \oplus, \otimes)$ budeme nazývať max-plus algebra.

Príklad:

1. $3 \otimes 4 = 3 + 4 = 7$
2. $4 \otimes 3 = 4 + 3 = 7$
3. $5 \oplus 8 = \max\{5, 8\} = 8$
4. $8 \oplus 5 = \max\{8, 5\} = 8$
5. $2 \otimes (4 \oplus 6) = 2 + \max\{4, 6\} = 2 + 6 = 8$
6. $2 \otimes 4 \oplus 2 \otimes 6 = \max\{2 + 4, 2 + 6\} = \max\{6, 8\} = 8$

Niektoré vlastnosti operácií $\otimes$ a $\oplus$ pre skaláry I.

Veta

Nech $a, b, c \in \mathbb{R}^\star$. Platí

$$
\begin{array}{rcll}
a \oplus b & = & b \oplus a & \text{komutatívnosť } \oplus \\
a \oplus (b \oplus c) & = & (a \oplus b) \oplus c & \text{asociatívnosť } \oplus \\
a \otimes b & = & b \otimes a & \text{komutatívnosť } \otimes \\
a \otimes (b \otimes c) & = & (a \otimes b) \otimes c & \text{asociatívnosť } \otimes \\
a \otimes (b \oplus c) & = & a \otimes b \oplus a \otimes c & \text{distributívnosť } \otimes \text{ vzhľadom na } \oplus
\end{array}
$$

Niektoré vlastnosti operácií $\otimes$ a $\oplus$ pre skaláry II.

Veta

Nech $a \in \mathbb{R}^{\star}$. Platí

$$
\begin{array}{lllll}
a \oplus \varepsilon & = \varepsilon \oplus a & = a & & \varepsilon \text{ neutrálny prvok vzhľadom na } \oplus \\
a \otimes \varepsilon & = \varepsilon \otimes a & = \varepsilon & & \varepsilon \text{ absorbujúci vzhľadom na } \otimes \\
a \otimes 0 & = 0 \otimes a & = a & & 0 \text{ neutrálny prvok vzhľadom na } \otimes
\end{array}
$$

Príklad:

1. $3 \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus 3 = \max\{3, \varepsilon\} = 3$
2. $4 \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes 4 = \varepsilon + 4 = \varepsilon$
3. $5 \otimes 0 = 0 \otimes 5 = 0 + 5 = 5$

Definícia mocniny

Definícia

Nech $a \in \mathbb{R}^\star$. Nech $p \in \mathbb{N}^+$. *p-tou mocninou čísla a* nazývame výraz

$$a^p = \underbrace{a \otimes a \otimes \cdots \otimes a}_{p \text{ krát}}$$

$$a^0 = 0$$

Poznámka: $a^p = p \times a$

Príklad:

1. $3^5 = 3 \otimes 3 \otimes 3 \otimes 3 \otimes 3 = 5 \times 3 = 15$
2. $\varepsilon^2 = \varepsilon \otimes \varepsilon = 2 \times \varepsilon = \varepsilon$

Binomická veta

Veta (Binomická veta)

Nech $a, b \in \mathbb{R}^{\star}$. Nech $p \in \mathbb{N}$. Platí

$$(a \oplus b)^p = a^p \oplus b^p$$

Príklad:

$$(4 \oplus 5)^3 = 3 \times (4 \oplus 5) = 3 \times 4 \oplus 3 \times 5 = 4^3 \oplus 5^3$$

Princíp umocňovania

Vzťah platí pre ľubovoľný konečný počet sčítancov.

Veta (Princíp umocňovania)

Nech $a_i \in \mathbb{R}^\star$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Platí

$$\left(\sum_i^{\oplus} a_i\right)^p = \sum_i^{\oplus} (a_i)^p$$

Rozdiely oproti klasickej algebre

Veta

Nech $a, b \in \mathbb{R}^\star$. Platí

$$\begin{array}{rcll} a \oplus a & = & a & \text{idempotentnosť } \oplus \\ a \oplus b & \geq & a & \text{majoritnosť } \oplus \end{array}$$

Príklad:

1. $7 \oplus 7 = \max\{7, 7\} = 7$
2. $7 \oplus (-4) = \max\{7, -4\} \geq 7$

Rozdiely oproti klasickej algebre

Vzťah platí pre ľubovoľný konečný počet sčítancov.

Veta (Princíp majority)

Nech $a_i \in \mathbb{R}^\star$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Platí

$$\sum_i^{\oplus} a_i \geq a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Súčet (maximum) ľubovoľného počtu hodnôt je väčší alebo rovný ako ktorákoľvek z uvažovaných hodnôt.

Štruktúra $(\mathbb{R}^\star, \oplus, \otimes)$

1. $(\mathbb{R}, \otimes\,(+))$ je lineárne usporiadaná $(\leq)$ komutatívna grupa
   - uzavretá vzhľadom na $\otimes$
   - asociatívna
   - s neutrálnym prvkom 0
   - s inverzným prvkom $-a$ ku prvku a (konečný!)
   - komutatívna

   navyše každá rovnica $n \times x = b$ má riešenie v tvare $x = \frac{b}{n}$.

2. $(\mathbb{R}^\star, \oplus\,(\max))$ spĺňa
   - uzavretá vzhľadom na $\oplus$
   - asociatívna
   - s neutrálnym prvkom ε
   - - !!!
   - komutatívna
3. ε absorbujúci vzhľadom na $\otimes$
4. distributívnosť $\otimes$ vzhľadom na $\oplus$

Vektory a matice v max-plus algebre

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Množinu všetkých n-rozmerných vektorov nad $\mathbb{R}^\star$ budeme označovať $\mathbb{R}^\star(n)$, množinu všetkých matíc typu $m \times n$ budeme označovať $\mathbb{R}^\star(m, n)$.

Operácie súčinu skalára a matice, súčtu matíc a súčinu matíc definujeme formálne rovnako ako v klasickej algebre zohľadňujúc pritom operácie $\oplus$ a $\otimes$.

Násobenie matice skalárom

Definícia (násobenie matice skalárom)

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(m,n)$ a $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. α-násobkom matice A nazývame maticu $C \in \mathbb{R}^\star(m,n)$, $C = (c_{ij})$, pre ktorú $c_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}$, pre $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$.

Zápis: $C = \alpha \otimes A$

Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \alpha = 2$$

$$\alpha \otimes A = 2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 2+0 & 2+4 \\ 2+3 & 2+2 & 2+0 \\ 2+5 & 2+3 & 2+\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Súčet matíc

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(m,n)$ a $B \in \mathbb{R}^\star(m,n)$. Súčtom matíc A a B nazývame maticu $C \in \mathbb{R}^\star(m,n)$, $C = (c_{ij})$, pre ktorú $c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$, pre $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Zápis: $C = A \oplus B$

Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 6 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max\{1, 0\} & \max\{0, \varepsilon\} & \max\{4, 6\} \\ \max\{3, -1\} & \max\{2, 0\} & \max\{0, 4\} \\ \max\{5, 1\} & \max\{3, 2\} & \max\{\varepsilon, \varepsilon\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Vlastnosti sčítania matíc

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(m,n)$, $B \in \mathbb{R}^\star(m,n)$ a $C \in \mathbb{R}^\star(m,n)$. Platí

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= B \oplus A && \text{komutatívnosť } \oplus \\
A \oplus (B \oplus C) &= (A \oplus B) \oplus C && \text{asociatívnosť } \oplus \\
\alpha \otimes (A \oplus B) &= \alpha \otimes A \oplus \alpha \otimes B \\
\alpha \otimes (\beta \otimes A) &= (\alpha \otimes \beta) \otimes A
\end{aligned}
$$

Súčin matíc

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(m,r)$ a $B \in \mathbb{R}^\star(r,n)$. Súčinom matíc A a B nazývame maticu $C \in \mathbb{R}^\star(m,n)$, $C = (c_{ij})$, pre ktorú $c_{ij} = a_{i1} \otimes b_{1j} \oplus a_{i2} \otimes b_{2j} \oplus \cdots \oplus a_{ir} \otimes b_{rj} = \sum_k^{\oplus} a_{ik} \otimes b_{kj}$, pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Zápis: $C = A \otimes B$

Príklad:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = 2 \otimes 4 \oplus 0 \otimes 3 \oplus (-1) \otimes 2 = \max\{2+4,\ 0+3,\ -1+2\} = 6$$

Princíp stĺpcového účinku

Poznámka:

Nech $C = A \otimes B$. Každý stĺpec výslednej matice C vznikol pôsobením matice A na zodpovedajúci stĺpec matice B. Túto súvislosť budeme v ďalšom používať a označovať ako princíp stĺpcového účinku.

Príklad:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti násobenia matíc

Veta

Nech A, B a C sú matice vhodných rozmerov nad $\mathbb{R}^\star$. Platí

$$\begin{array}{rcll} A \otimes (B \otimes C) & = & (A \otimes B) \otimes C & \text{asociatívnosť } \otimes \\ A \otimes (B \oplus C) & = & A \otimes B \oplus A \otimes C & \text{distributívnosť } \otimes \\ & & & \text{vzhľadom na } \oplus \\ \alpha \otimes (A \otimes B) & = & A \otimes (\alpha \otimes B) & \end{array}$$

Poznámka:

Horeuvedené vzťahy platia aj pre stĺpcové vektory (matice s jedným stĺpcom). Posledná rovnosť môže mať v takom prípade pre ľubovoľnú maticu A a vektor x podobu

$$\alpha \otimes (A \otimes x) = A \otimes (\alpha \otimes x).$$

Špeciálne typy štvorcových matíc

Definícia

Štvorcovú maticu $D \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$, $D = (d_{ij})$ nazývame diagonálnou maticou, ak pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$d_{ij} = \begin{cases} \varepsilon & \text{pre} \quad i \neq j \\ \text{ľubovoľné} & \text{pre} \quad i = j \end{cases}$$

Zápis: $D = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$

Príklad:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(3, \varepsilon, 1)$$

Špeciálne typy štvorcových matíc

Definícia

Štvorcovú maticu $\Phi \in \mathbb{R}^\star(n,n)$, $\Phi = (\varphi_{ij})$ nazývame nulovou maticou, ak $\varphi_{ij} = \varepsilon$, pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Príklad:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$$

Súčet s nulovou maticou

Veta

Nech $\Phi \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je nulová matica. Pre ľubovoľnú maticu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ platí

$$A \oplus \Phi = \Phi \oplus A = A$$

Poznámka: Nulová matica Φ je neutrálnym prvkom vzhľadom na sčítavanie matíc.

Príklad:

$$A \oplus \Phi = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Špeciálne typy štvorcových matíc

Definícia

Štvorcovú maticu $E \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$, $E = (e_{ij})$ nazývame jednotkovou maticou, ak pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$e_{ij} = \begin{cases} \varepsilon & \text{pre} \quad i \neq j \\ 0 & \text{pre} \quad i = j \end{cases}$$

Príklad:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(0, 0, 0)$$

Násobenie jednotkovou maticou

Veta

Nech $E \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je jednotková matica. Pre ľubovoľnú maticu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ platí

$$A \otimes E = E \otimes A = A$$

Poznámka: Jednotková matica E je neutrálnym prvkom vzhľadom na násobenie matíc.

Príklad:

$$A \otimes E = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Inverzná matica

Definícia

Inverznou maticou ku štvorcovej matici A nazývame maticu A^{-1}, pre ktorú platí $A \otimes A^{-1} = A^{-1} \otimes A = E$.

Definícia

Každú štvorcovú maticu, ktorú môžeme dostať konečným počtom permutácií riadkov a stĺpcov jednotkovej matice E (diagonálnej matice) nazývame permutačnou maticou (zovšeobecnenou permutačnou maticou).

Výpočet inverznej matice

Ak $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je zovšeobecnená permutačná matica a $B \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je k nej inverzná matica, tak platí

$$b_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & \text{pre} \quad a_{ji} \text{ konečné} \\ \varepsilon & \text{pre} \quad a_{ji} = \varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Špeciálne pre diagonálnu maticu $A = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$ platí

$$A^{-1} = \mathrm{diag}(d_{11}^{-1}, d_{22}^{-1}, \ldots, d_{nn}^{-1}).$$

Mocnina matice

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $p \in \mathbb{N}$. p-tou mocninou matice A nazývame maticu A^p

$$A^p = \begin{cases} E & p = 0 \\ A \otimes A^{p-1} & p = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Zápis: $A^p = (a_{ij}^{(p)})$

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \varepsilon & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ \varepsilon & 12 \end{pmatrix}$$

Diagonálne prvky mocnín matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $p \in \mathbb{N}^+$.

$$a_{ii}^{(p)} \geq a_{ii}^{p} \quad \text{pre } i = 1, 2, \ldots, n$$

Dôkaz: $a_{ii}^{(2)} = a_{i1} \otimes a_{1i} \oplus \cdots \oplus a_{ii} \otimes a_{ii} \oplus \cdots \oplus a_{in} \otimes a_{ni} \geq a_{ii}^2$

Poznámka: Diagonálne prvky mocnín matice podstatným spôsobom súvisia s otázkou maximálnej rýchlosti, akou môže DDS bežať.

Idempotentnosť a binomická veta pre matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(m, n)$. Platí

$$A \oplus A = A \qquad \text{idempotentnosť } \oplus \text{ pre matice}$$

Idempotentnosť sčítavania matíc zjednodušuje binomickú vetu pre matice.

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$, $E \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Nech $p \in \mathbb{N}^+$. Platí

$$(E \oplus A)^p = E \oplus A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^p.$$

D: matematickou indukciou s využitím idempotentnosti

Aplikácia binomickej vety pre matice

Aplikácia:

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je ľubovoľná matica. Nech $E \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je jednotková matica. Označme Γ_p súčet jednotkovej matice a po sebe idúcich mocnín matice A po mocninu $p \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_p = E \oplus A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^p$$

Použijúc binomickú vetu pre matice dostávame

$$\Gamma_p = (E \oplus A)^p$$

S touto dôležitou maticou sa budeme neskôr stretávať.

Umocňovanie matíc

Príklad:

Pre danú maticu A vypočítajme efektívne

- A^{16}
- A^{15}

Riešenie:

- $A^{16} = (((A^2)^2)^2)^2 = A^{2^4}$
- $A^{15} = A^{1+2+4+8} = A \otimes A^2 \otimes A^4 \otimes A^8$

Výpočtová zložitosť mocnín matice I

Veta

Pre maticu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ sa dá mocnina A^p vypočítať s výpočtovou zložitosťou $O(n^3 \ln p)$.

D:

1. $p = 2^k$
   $A^2,\ A^4,\ \ldots,\ A^{2^k}$ ... k - krát mocnina matice

mocnina matice	n^3	operácií
k mocnín matice	$k \times n^3$	operácií

$$p = 2^k \Rightarrow k = \ln p \Longrightarrow kn^3 = n^3 \ln p$$

Výpočtová zložitosť mocnín matice II

2. $p \neq 2^k$

A^2, A^4, ..., $A^{2^{k+1}-1}$ ... najhorší prípad

ALGORITMUS:

$$\begin{array}{ll} A & B = A \\ A^2 & B = B \otimes A^2 \\ A^4 & B = B \otimes A^4 \\ \vdots & \\ A^{2^k} & B = B \otimes A^{2^k} \\ \hline k \text{ - krát násobenie matíc} & k \text{ - krát násobenie matíc} \end{array}$$

$\Rightarrow kn^3 + kn^3 = 2kn^3 \Longrightarrow n^3 \ln p$

Ďakujem za pozornosť.