Periodické vlastnosti matíc

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Referencie

1. E. Draženská, M. Molnárová, *Periods of Monge matrices with zero-weight cycles*, Proc. of the Conf. Informatics and Algorithms, Prešov (1998), 327-330.
2. M. Molnárová, *Periods of matrices with zero-weight cycles in max-algebra*, Tatra Mountains Math. Publ. **16** (1999), 135–141.
3. M. Molnárová, *Computational complexity of Nachtigall's representation* , Optimization **52** (2003), 93–104.
4. M. Molnárová, J. Pribiš, *Matrix period in max-algebra*, Discrete Appl. Math. **103** (2000), 167–175.
5. M. Molnárová *Generalized matrix period in max-plus algebra*, Linear Algebra and its Applications **404** (2005), 345–366.

Obsah

Periodické správanie sa matice - Príklad 1

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = A^4$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix} = A^5$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = A^6$$

$$\vdots$$

Periodické správanie sa matice - Príklad 2

$$A=\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} A^2=\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ -1 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & -1 \end{pmatrix} \dots A^4=\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A^8$$

$$A^6=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A^9$$

$$A^7=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A^{10}$$

Periodické správanie sa matice - Príklad 3

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix} A^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ -1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 0 \end{pmatrix} \dots A^4 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^6 = \dots$$

Periodické matice - Definícia

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Hovoríme, že A je takmer periodická, ak pre všetky i,j je periodická postupnosť $a_{ij}^* = (\, a_{ij}^{(r)};\ r \in \mathbb{N}^+\,)$, t. j.

$$(\exists p \in \mathbb{N}^+)\,(\exists R_{ij} \in \mathbb{N})\,(\forall r > R_{ij}) \quad a_{ij}^{(r+p)} = a_{ij}^{(r)}.$$

Najmenšie p s touto vlastnosťou nazývame periódou a_{ij}^* a označujeme $\mathrm{per}(a_{ij}^*)$. Číslo R_{ij} nazývame defektom a_{ij}^* a označujeme $\mathrm{def}(a_{ij}^*)$. Perióda matice A je definovaná ako

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{nsn}\{\, \mathrm{per}(a_{ij}^*);\ i,j \in N\,\}. \tag{1}$$

Číslo $\mathrm{def}(A) = \max\{R_{ij};\ i,j \in N\,\}$ nazývame defektom matice A.

Periodické správanie sa matice - Príklady

Príklad 1 $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$ $\mathrm{per}(A) = 3$ $\mathrm{def}(A) = 0$

Príklad 2 $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ $\mathrm{per}(A) = 3$ $\mathrm{def}(A) = 4$

Príklad 3 $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$ $\mathrm{per}(A) = 1$ $\mathrm{def}(A) = 4$

Podmienka cyklov

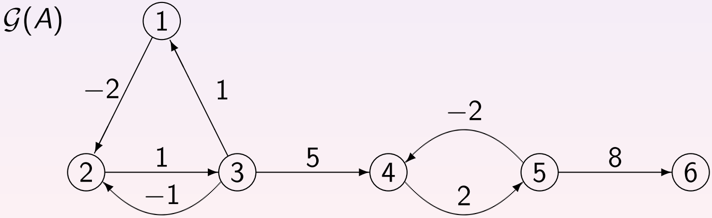
Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Hovoríme, že matica A spĺňa podmienku cyklov, ak váha každého cyklu v digrafe $\mathcal{G}(A)$ je rovná 0, t. j. $w(c) = 0$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & -1 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & \varepsilon & 8 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

Podmienka cyklov

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & -1 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & \varepsilon & 8 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$



Perióda silne súvislého komponentu - Definícia

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. $\mathrm{SCC}^{*}(\mathcal{G}(A))$ označme množinu všetkých netriviálnych silne súvislých komponentov $\mathcal{G}(A)$ a $\mathrm{SCC}(\mathcal{G}(A))$ množinu všetkých silne súvislých komponentov. Pre každý komponent $\mathcal{K} \in \mathrm{SCC}(\mathcal{G}(A))$ označme $\lambda(\mathcal{K})$ maximálnu priemernú váhu cyklu v $\mathcal{K}$. Periódu silne súvislého komponentu definujeme ako

$$\mathrm{per}(\mathcal{K}) = \mathrm{nsd}\,\{\, |c|;\ c \text{ je cyklus v } \mathcal{K},\ |c| > 0 \,\}. \tag{2}$$

Ak $\mathcal{K}$ je triviálny, tak $\mathrm{per}(\mathcal{K}) = 0$.

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 1 & -1 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \mathrm{per}(\mathcal{K}_1) = \mathrm{gcd}\,\{\, 2, 3 \,\} = 1$$

Perióda silne súvislého komponentu - Balcerov-Veinottov algoritmus

Vytvárame tri postupnosti. Postupnosť digrafov $(\mathcal{G}_r;\ r = 1, 2, \ldots)$, postupnosť podmnožín $(I_r \subseteq N;\ r = 1, 2, \ldots)$ a postupnosť rôznych vrcholov $(j_r \in I_r;\ r = 1, 2, \ldots)$.

- Algoritmus štartuje s hodnotami $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$, $I_1 = \{1\}$ a $j_1 = 1$.
- Množina I_2 je množina tých vrcholov, do ktorých vedie hrana z vrchola j_1 v digrafe $\mathcal{G}_1$. Digraf $\mathcal{G}_2$ vznikne kondenzáciou vrcholov množiny I_2 do jedného vrchola, pričom tento vrchol preberá všetky hrany, ktoré viedli z pôvodných vrcholov do nejakého vrchola.
- Všeobecne pre $r > 0$ je I_r množina terminálnych vrcholov tých hrán, ktoré vedú z vrchola j_{r-1} v digrafe $\mathcal{G}_{r-1}$. Vrchol j_r vyberáme z I_r (napr. minimálnu hodnotu) a $\mathcal{G}_r$ je kondenzácia $\mathcal{G}_{r-1}$, kde vrcholy z množiny I_r sa kondenzujú do vrchola j_r.
- Digraf $\mathcal{G}_{2n-2}$ je cyklus a jeho dĺžka predstavuje periódu pôvodného digrafu $\mathcal{G}$.

Balcerov-Veinottov algoritmus - Príklad

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Postačujúca podmienka periodickosti matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ spĺňa podmienku cyklov. Nech $d \in \mathbb{N}$. Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné

(i) $\mathrm{per}(A) \mid d$,

(ii) $(\forall \mathcal{K} \in \mathrm{SCC}^*(\mathcal{G})) \quad \mathrm{per}(\mathcal{K}) \mid d$.

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ spĺňa podmienku cyklov. Potom

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{nsn}\,\{\, \mathrm{per}(\mathcal{K});\ \mathcal{K} \in \mathrm{SCC}^*(\mathcal{G}) \,\}$$

Algoritmus overenia postačujúcej podmienky periodickosti matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Podmienka cyklov sa dá overiť v čase $O(n^3)$.

1. nájdeme $\Delta(A)$
2. overíme $\delta_{ii} \leq 0$ pre všetky i
3. nájdeme $\Delta(A')$ (konjugovanej matice)
4. overíme $\delta'_{ii} \leq 0$ pre všetky i

$0 \leq \min \leq \max \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ platia rovnosti

Algoritmus výpočtu periódy matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$ spĺňa podmienku cyklov. Perióda matice per(A) sa dá vypočítať v čase $O(n^3)$.

1. nájdeme silne súvislé komponenty v čase $O(n^3)$ pomocou $\Delta(A)$ (δ_{ij} aj δ_{ji} konečné)
2. vypočítame periódu každého netriviálneho sil. súv. komponentu v čase $O(n^2)$ pomocou Balcerovho-Veinottovho algoritmu
3. vypočítame per(A) v čase $O(n \log n)$ ako najmenší spoločný násobok periód všetkých netriviálnych silne súvislých komponentov s použitím Euclidovho algoritmu na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa nsd$\{a,b\}$

$$\text{nsn}\{a,b\} = \frac{ab}{\text{nsd}\{a,b\}}$$

Perióda matice - Príklad

Príklad: Overme podmienku cyklov a v kladnom prípade vypočítajme periódu matice.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & -1 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & \varepsilon & 8 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{1,2,3\} & \quad \mathrm{per}(\mathcal{K}_1) &= \mathrm{nsd}\,\{\,2,\,3\,\} = 1 \\ K_2 &= \{4,5\} & \quad \mathrm{per}(\mathcal{K}_2) &= \mathrm{nsd}\,\{\,2\,\} = 2 \end{aligned}$$

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{nsn}\,\{\,\mathrm{per}(\mathcal{K});\, \mathcal{K} \in \mathrm{SCC}^*(\mathcal{G})\,\} = \mathrm{nsn}\,\{\,2,1\,\} = 2$$

Perióda matice - Príklad

$$A^{10} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & -2 & -1 & 4 & 6 & 14 \\ 2 & 0 & 1 & 6 & 8 & 16 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 7 & 15 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right) \quad A^{11} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & -2 & -1 & 4 & 6 & 14 \\ 2 & 0 & 1 & 6 & 8 & 16 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 7 & 15 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & \varepsilon & 8 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

$$A^{12} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & -2 & -1 & 4 & 6 & 14 \\ 2 & 0 & 1 & 6 & 8 & 16 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 7 & 15 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right) \quad A^{13} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & -2 & -1 & 4 & 6 & 14 \\ 2 & 0 & 1 & 6 & 8 & 16 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 7 & 15 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & \varepsilon & 8 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

Perióda vysoko súvislého komponentu - Definícia

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Hovoríme, že dva vrcholy $i,j \in \mathcal{G}(A)$ sú vysoko-spojené, zapisujeme $i \equiv_h j$, ak i a j ležia na spoločnom cykle c s priemernou váhou $\bar{w}(c) = \lambda(A)$. Poddigrafy generované triedami ekvivalencie reflexívneho uzáveru $\equiv_h$ nazývame vysoko súvislé komponenty $\mathcal{G}(A)$. Množinu všetkých vysoko súvislých komponentov $\mathcal{G}(A)$ označme $\mathrm{HCC}(\mathcal{G}(A))$. $\mathcal{K} \in \mathrm{HCC}(\mathcal{G}(A))$ sa nazýva triviálnym, ak $\mathcal{K}$ neobsahuje cyklus kladnej dĺžky s priemernou váhou rovnou $\lambda(A)$. Množinu všetkých netriviálnych vysoko súvislých komponentov označujeme $\mathrm{HCC}^*(\mathcal{G}(A))$. Pre každý $\mathcal{K} \in \mathrm{HCC}(\mathcal{G}(A))$ definujme vysokú periódu $\mathcal{K}$ ako

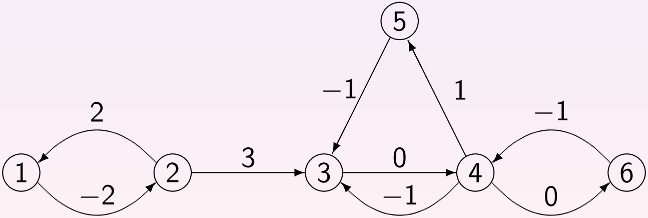
$$\mathrm{hper}(\mathcal{K}) = \gcd\{\,|\,c\,|;\; c \text{ je cyklus v } \mathcal{K},\ |\,c\,| > 0,\ \bar{w}(c) = \lambda(A)\,\}.$$

Ak $\mathcal{K}$ je triviálny, tak $\mathrm{hper}(\mathcal{K}) = 0$.

Vysoko súvislé komponenty

$$A = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

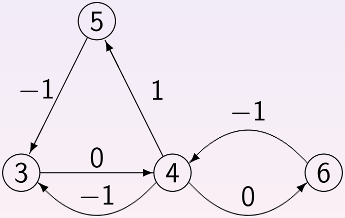
$\mathcal{G}(A)$



Vysoko súvislé komponenty

$$A_{22} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$\mathcal{G}(A_{22})$



Nutná a postačujúca podmienka periodickosti matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné

(i) A je takmer periodická,

(ii) $(\forall \mathcal{K} \in \mathrm{SCC}^{*}(\mathcal{G}(A)))\ \lambda(\mathcal{K}) = 0$.

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ je takmer periodická. Potom

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{nsn}\,\{\,\mathrm{hper}(\mathcal{K});\ \mathcal{K} \in \mathrm{HCC}^{*}(\mathcal{G}(A))\,\}$$

Algoritmus overenia periodickosti a výpočtu periódy matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Periodickosť matice sa dá overiť a perióda $\text{per}(A)$ sa dá vypočítať v čase $O(n^3)$.

1. nájdeme netriviálne silne súvislé komponenty v čase $O(n^3)$ pomocou $\Delta(A)$ (δ_{ij} aj δ_{ji} konečné)
2. vypočítame $\lambda(\mathcal{K})$ každého netriviálneho silne súvislého komponentu v čase $O(n^3)$ pomocou Karpovho algoritmu
3. nájdeme netriviálne vysoko súvislé komponenty a vypočítame ich vysoké periódy v čase $O(n^3)$ pomocou Gavalcovho algoritmu

Algoritmus overenia periodickosti a výpočtu periódy matice

4. vypočítame $\mathrm{per}(A)$ v čase $O(n \log n)$ ako najmenší spoločný násobok vysokých periód všetkých netriviálnych vysoko súvislých komponentov s použitím Euclidovho algoritmu na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa $\mathrm{nsd}\{a, b\}$ a

$$\mathrm{nsn}\{a, b\} = \frac{ab}{\mathrm{nsd}\{a, b\}}$$

Gavalcov algoritmus nájdenia HCC* a vysokých periód

Veta

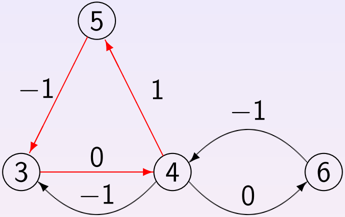
Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\mathcal{K} \in \mathrm{HCC}^*(\mathcal{G}(A))$. Ak hrana $e \in E(\mathcal{K})$ nie je v žiadnom cykle váhy nula, tak $\mathrm{hper}(\mathcal{K}) = \mathrm{hper}(\mathcal{K} - e)$.

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\mathcal{K} \in \mathrm{HCC}^*(\mathcal{G}(A))$. Ak každá hrana $e \in E(\mathcal{K})$ je v nejakom cykle váhy nula, tak priemerná váha každého cyklu je nula a $\mathrm{hper}(\mathcal{K}) = \mathrm{per}(\mathcal{K})$.

D: $a_{ij} + \delta_{ji} \leq 0$

Gavalcov algoritmus nájdenia HCC* a vysokých periód



Perióda matice - Príklad 1

Príklad 1: Overme podmienku periodickosti a v kladnom prípade vypočítajme periódu matice.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

Riešenie:

$$\begin{array}{llll} K_1 = \{1,2\} & & \operatorname{hper}(\mathcal{K}_1) & = 2 \\ K_2 = \{3,4,5\} & & \operatorname{hper}(\mathcal{K}_2) & = 3 \end{array}$$

$$\operatorname{per}(A) = \operatorname{nsn}\{\operatorname{hper}(\mathcal{K});\ \mathcal{K} \in \operatorname{HCC}^*(\mathcal{G}(A))\} = \operatorname{nsn}\{2,3\} = 6$$

Perióda matice - Príklad 1

$$A^9 = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & \varepsilon & 3 & 3 & 4 & 3 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & -1 & -1 & -2 \\ \varepsilon & \varepsilon & -2 & 0 & 0 & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon & -2 & -3 & 0 & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) = A^{15} = \dots$$

$$A^{10} = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & \varepsilon & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & -2 & 0 & 0 & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & -2 & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & -2 & -2 & -3 \\ \varepsilon & \varepsilon & -3 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) = A^{16} = \dots$$

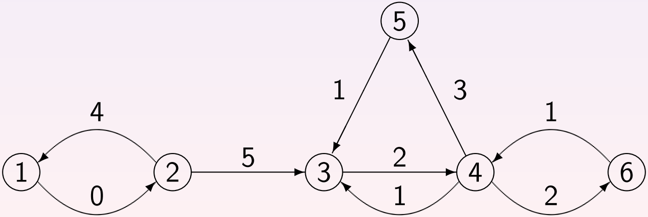
$$\vdots$$

Perióda matice - Príklad 2

Príklad 2: Overme podmienku periodickosti matice.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & 3 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

$\mathcal{G}(A)$



Perióda matice - Príklad 2

$$A^9 = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & 16 & 19 & 19 & 20 & 19 \\ 20 & \varepsilon & 21 & 21 & 22 & 21 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 18 & 17 & 17 & 16 \\ \varepsilon & \varepsilon & 16 & 18 & 18 & 17 \\ \varepsilon & \varepsilon & 16 & 15 & 18 & 17 \\ \varepsilon & \varepsilon & 17 & 16 & 16 & 15 \end{array}\right) \quad A^{15} = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & 28 & 31 & 31 & 32 & 31 \\ 32 & \varepsilon & 33 & 33 & 34 & 33 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 30 & 29 & 29 & 28 \\ \varepsilon & \varepsilon & 28 & 30 & 30 & 29 \\ \varepsilon & \varepsilon & 28 & 27 & 30 & 29 \\ \varepsilon & \varepsilon & 29 & 28 & 28 & 27 \end{array}\right)$$

$$A^{10} = \left(\begin{array}{cc|cccc} 20 & \varepsilon & 21 & 21 & 22 & 21 \\ \varepsilon & 20 & 23 & 23 & 24 & 23 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 18 & 20 & 20 & 19 \\ \varepsilon & \varepsilon & 19 & 18 & 21 & 20 \\ \varepsilon & \varepsilon & 19 & 18 & 18 & 17 \\ \varepsilon & \varepsilon & 17 & 19 & 19 & 18 \end{array}\right) \quad A^{16} = \left(\begin{array}{cc|cccc} 32 & \varepsilon & 33 & 33 & 34 & 33 \\ \varepsilon & 32 & 35 & 35 & 36 & 35 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 30 & 32 & 32 & 31 \\ \varepsilon & \varepsilon & 31 & 30 & 33 & 32 \\ \varepsilon & \varepsilon & 31 & 30 & 30 & 29 \\ \varepsilon & \varepsilon & 29 & 31 & 31 & 30 \end{array}\right)$$

$$\vdots$$

Lineárne periodické matice - Definícia

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Hovoríme, že A je takmer lineárne periodická, ak pre všetky i,j je lineárne periodická postupnosť $a_{ij}^* = (\, a_{ij}^{(r)};\ r \in \mathbb{N}^+\,)$, t. j.

$$(\exists p > 0)\,(\exists R_{ij} \in \mathbb{N})\,(\exists q_{ij} \in \mathbb{R}^\star)\,(\forall r > R_{ij}) \quad a_{ij}^{(r+p)} = a_{ij}^{(r)} + p \times q_{ij}.$$

Najmenšie p s touto vlastnosťou nazývame lineárnou periódou a_{ij}^* a označujeme $\operatorname{lper}(a_{ij}^*)$. Číslo q_{ij} nazývame lineárnym faktorom a_{ij}^* a označujeme $\operatorname{lfac}(a_{ij}^*)$. Číslo R_{ij} nazývame lineárnym defektom a_{ij}^* a označujeme $\operatorname{ldef}(a_{ij}^*)$. Lineárna perióda A je definovaná ako

$$\operatorname{lper}(A) = \operatorname{nsn}\{\, \operatorname{lper}(a_{ij}^*);\ i,j \in N\, \}.$$

Maticu $\operatorname{lfac}(A) = Q$ s $q_{ij} = \operatorname{lfac}(a_{ij}^*)$ nazývame maticou lineárnych faktorov matice A. Číslo $\operatorname{ldef}(A) = \max\{R_{ij};\ i,j \in N\}$ nazývame lineárnym defektom matice A.

Lineárne periodické matice s konštantnou maticou lineárnych faktorov

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ je takmer periodická matica s periódou $\mathrm{per}(A)$. Potom A je takmer lineárne periodická a platí

1. $\mathrm{lper}(A) = \mathrm{per}(A)$,
2. $\mathrm{lfac}(A) = Q$ s $q_{ij} = 0$ pre $i, j \in N$.

Lineárne periodické matice s konštantnou maticou lineárnych faktorov

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné

(i) A je takmer lineárne periodická a $\mathrm{lfac}(A) = Q$ s $q_{ij} = \lambda(A)$ pre $i, j \in N$,

(ii) $A_\lambda = \lambda^{-1} \otimes A$ je takmer periodická.

Navyše v kladnom prípade $\mathrm{per}(A_\lambda) = \mathrm{lper}(A)$.

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné

(i) A je takmer lineárne periodická a $\mathrm{lfac}(A) = Q$ s $q_{ij} = \lambda(A)$ pre $i, j \in N$,

(ii) $(\,\forall \mathcal{K} \in \mathrm{SCC}^*(\mathcal{G}(A))\,)\ \lambda(\mathcal{K}) = \lambda(A)$.

Lineárne periodické matice s konštantnou maticou lineárnych faktorov

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je takmer lineárne periodická a $\mathrm{lfac}(A) = Q$ s $q_{ij} = \lambda(A)$ pre $i, j \in N$. Potom

$$\mathrm{lper}(A) = \mathrm{nsn}\,\{\,\mathrm{hper}(\mathcal{K});\ \mathcal{K} \in \mathrm{HCC}^*(\mathcal{G}(A))\,\}.$$

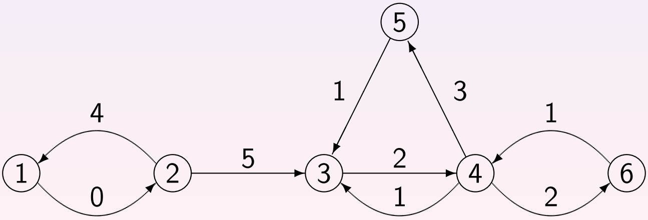
Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Lineárna periodickosť matice s konštantnou maticou lineárnych faktorov sa dá overiť a lineárna perióda $\mathrm{lper}(A)$ sa dá vypočítať v čase $O(n^3)$.

Lineárna perióda matice - Príklad

$$A = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & 3 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

$\mathcal{G}(A)$



Lineárna perióda matice - Príklad

Riešenie:

$$A_\lambda = \lambda^{-1} \otimes A = -2 \otimes A = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

- A_λ je takmer periodická s periódou $\mathrm{per}(A_\lambda) = 6$
- A je takmer lineárne periodická
  - $\mathrm{lper}(A) = \mathrm{per}(A_\lambda) = 6$
  - $\mathrm{lfac}(A) = Q$ s $q_{ij} = \lambda(A) = 2$ pre $i, j \in N$

Ďakujem za pozornosť.