Max-plus algebra

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Modelový systém - výrobná linka - motivácia

Formulácia

Majme DDS s maticou prechodu A. Namiesto časov, kedy sa spúšťa výroba, nech je zadaná požiadavka, aby $(p+1)$-stavový projekt skončil na všetkých strojoch rovnako vo vopred danom čase c. Vzniká teda úloha nájsť taký vektor x, aby $A^p \otimes x = c$, resp. ak označíme $B = A^p$, tak

$$B \otimes x = c$$

Modelový systém - výrobná linka - otázky plánovania

Otázky manažovania projektu

- Dá sa vopred stanovený čas dodržať?
- Ak nie, aké sú dôvody?
- Ako blízko môžeme nájsť približné riešenie?

Nerovnosti - definícia

Definícia

Nech $A,\ B \in \mathbb{R}^{\star}(m,n)$

$$\begin{array}{lcll} A < B & \Leftrightarrow & a_{ij} < b_{ij} & \forall i,j \\ A \leq B & \Leftrightarrow & a_{ij} \leq b_{ij} & \forall i,j \\ A \leq_c B & \Leftrightarrow & A \leq B & \text{s aspoň jednou rovnosťou v každom stĺpci} \\ A \leq_r B & \Leftrightarrow & A \leq B & \text{s aspoň jednou rovnosťou v každom riadku} \end{array}$$

Poznámka:

$$\begin{array}{lcll} A \leq B & \Leftrightarrow & B = A \oplus X & \text{pre nejakú } X \\ A \leq B & \Leftrightarrow & A = B \oplus' Y & \text{pre nejakú } Y \end{array}$$

Nerovnosti - Príklad

Príklad:

1. $$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. $$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

3. $$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Izotónne zobrazenia

Definícia

Nech $S_1, S_2, \ldots, S_t, T$ sú dané množiny s vhodným čiastočným usporiadaním $\leq$. Nech f je zobrazenie

$$f: \; S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_t \longrightarrow T.$$

f nazývame izotónnym, ak zachováva nerovnosť $\leq$, t. j. ak pre $X = (x_1, x_2, \ldots, x_t)$ a $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_t)$ platí

$$X \leq Y \quad \Longrightarrow \quad f(X) \leq f(Y).$$

Izotónnosť elementárnych operácií

Veta

Nech $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Nech $x_1 \leq y_1$ a $x_2 \leq y_2$. Potom platí

1. $x_1 \oplus x_2 \leq y_1 \oplus y_2$,
2. $x_1 \oplus' x_2 \leq y_1 \oplus' y_2$,
3. $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$,

Príklad: $3 \leq 5 \quad \wedge \quad -2 \leq 4$

1. $x_1 \oplus x_2 = 3 \oplus -2 \leq 5 \oplus 4 = y_1 \oplus y_2$
2. $x_1 \oplus' x_2 = 3 \oplus' -2 \leq 5 \oplus' 4 = y_1 \oplus' y_2$
3. $x_1 + x_2 = 3 - 2 \leq 5 + 4 = y_1 + y_2$

Izotónnosť operácií s maticami v max-plus a max-min algebre

Veta

Všetky súčty a násobenia skalárov a matíc a kombinácie týchto operácií sú v oboch algebrách max-plus a min-plus izotónne.

Veta (Izotónnosť súčinu matíc v max-plus algebre)

Nech A, $B \in \mathbb{R}^{\star}(m, r)$, C, $D \in \mathbb{R}^{\star}(r, n)$. Nech $A \leq B$ a $C \leq D$. Potom platí

$$A \otimes C \leq B \otimes D$$

Izotónnosť operácií s maticami - rastúci DDS

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$, $A \geq E$. Potom platí

1. $A \in F(n,n)$,
2. DDS s maticou prechodu A je rastúci.

D: $A \otimes x \geq E \otimes x = x$

Sústava nerovníc

Definícia

Nech $B \in \mathbb{R}^{\star}(m, n)$ a $c \in \mathbb{R}^{\star}(m)$. Nerovnicu

$$B \otimes x \leq c \tag{1}$$

nazývame sústavou nerovníc v max-plus algebre. Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^{\star}(n)$, pre ktorý

$$A \otimes \alpha \leq c,$$

nazývame riešením sústavy (1).

Nutná a postačujúca podmienka riešiteľnosti sústavy nerovníc

Veta

Nech $B \in F(m,n)$, $x \in F(n)$ a $c \in F(m)$. Potom platí

$$B \otimes x \leq c \Longleftrightarrow x \leq B' \otimes' c$$

D: Ak $x \in F(n)$, tak $B \otimes x$ je konečný vektor.

$$\begin{aligned}
B \otimes x \leq c \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_j^{\oplus} b_{ij} \otimes x_j \leq c_i && \forall i \\
&\Leftrightarrow \quad b_{ij} \otimes x_j \leq c_i && \forall i, \forall j \\
&\Leftrightarrow \quad x_j \leq b'_{ji} + c_i && \forall i, \forall j \\
&\Leftrightarrow \quad x_j \leq \min_i (b'_{ji} + c_i) && \forall j \\
&\Leftrightarrow \quad x \leq B' \otimes' c
\end{aligned}$$

Hlavné riešenie sústavy nerovníc

Definícia

Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Hlavným riešením nerovnice $B \otimes x \leq c$ nazývame vektor $x^\sharp = B' \otimes' c \in F(n)$.

Predchádzajúcu vetu môžeme preformulovať

Veta

Nech $B \in F(m,n)$, $x \in F(n)$ a $c \in F(m)$. Potom $x^\sharp$ je najväčším riešením nerovnice $B \otimes x \leq c$.

Sústava rovníc

Definícia

Nech $B \in \mathbb{R}^\star(m,n)$ a $c \in \mathbb{R}^\star(m)$. Rovnicu

$$B \otimes x = c \tag{2}$$

nazývame sústavou rovníc v max-plus algebre. Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^\star(n)$, pre ktorý

$$B \otimes \alpha = c,$$

nazývame riešením sústavy (2). Množinu všetkých riešení sústavy (2) označíme

$$S(B,c) = \{x \in \mathbb{R}^\star(n);\ B \otimes x = c\}.$$

Sústava rovníc - Príklad 1

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sústava rovníc - Príklad 1

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \max\{1 + x_1,\, 2 + x_2\} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 \leq -1 \wedge x_2 \leq -2 \\ \max\{3 + x_1,\, 4 + x_2\} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 \leq -3 \wedge x_2 \leq -4 \end{aligned}$$

Sústava rovníc - Príklad 1

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \max\{1 + x_1, 2 + x_2\} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 \leq -1 \wedge x_2 \leq -2 \\ \max\{3 + x_1, 4 + x_2\} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 \leq -3 \wedge x_2 \leq -4 \end{aligned}$$

$$S(B, c) = \emptyset$$

Sústava rovníc - Príklad 2

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sústava rovníc - Príklad 2

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \max\{3 + x_1,\, 2 + x_2\} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 \leq -3 \,\wedge\, x_2 \leq -2 \\ \max\{1 + x_1,\, 4 + x_2\} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 \leq -1 \,\wedge\, x_2 \leq -4 \end{aligned}$$

Sústava rovníc - Príklad 2

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\begin{array}{lcl} \max\{3 + x_1,\ 2 + x_2\} = 0 & \Longleftrightarrow & x_1 \leq -3 \wedge x_2 \leq -2 \\ \max\{1 + x_1,\ 4 + x_2\} = 0 & \Longleftrightarrow & x_1 \leq -1 \wedge x_2 \leq -4 \end{array}$$

$$S(B, c) = \{(-3, -4)^\top\}$$

Sústava rovníc - Príklad 3

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sústava rovníc - Príklad 3

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \max\{x_1,\, 2 + x_2\} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 \leq 0 \wedge x_2 \leq -2 \\ \max\{x_1,\, 4 + x_2\} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 \leq 0 \wedge x_2 \leq -4 \end{aligned}$$

Sústava rovníc - Príklad 3

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \max\{x_1,\, 2 + x_2\} = 0 &\iff x_1 \leq 0 \wedge x_2 \leq -2 \\ \max\{x_1,\, 4 + x_2\} = 0 &\iff x_1 \leq 0 \wedge x_2 \leq -4 \end{aligned}$$

$$S(B, c) = \{(0, x_2)^\top;\ x_2 \leq -4\}$$

Špeciálne prípady: $c = \varepsilon$

1. $c = \varepsilon$
   označme B_j j-tý stĺpec matice B

- ak $B_j \neq \varepsilon$, tak $x_j = \varepsilon$,
- ak $B_j = \varepsilon$, tak x_j je ľubovoľné

množina riešení:

$$S(B, c) = \{x \in \mathbb{R}^\star(n);\ x_j = \varepsilon,\ \text{ak } B_j \neq \varepsilon, j \in N\}$$

Špeciálne prípady - Príklad

Príklad:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Riešenie:

- $B_2 \neq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \varepsilon$
- $B_1 = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x_1$ je ľubovoľné

sústava má nekonečne veľa riešení

$$S(B, c) = \{(x_1, \varepsilon)^\top;\ x_1 \in \mathbb{R}^\star\}.$$

Špeciálne prípady: $B = \varepsilon$

2. $B = \varepsilon$

- $c = \varepsilon$

  množina riešení:

$$S(B, c) = \mathbb{R}^{\star}(n)$$

- $c \neq \varepsilon$

  množina riešení:

$$S(B, c) = \emptyset$$

$B \neq \varepsilon$ a $c \neq \varepsilon$

$\exists i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$: $\quad c_i = \varepsilon$

Prípady:

- $\exists j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$: $\quad b_{ij} \neq \varepsilon$
  – položíme $x_j = \varepsilon$,
  – vynecháme j-té stĺpce matice B,
  – vynecháme j-té súradnice vektora x,
  – vynecháme i-tú rovnicu,
- $\forall j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$: $\quad b_{ij} = \varepsilon$
  – vynecháme i-tú rovnicu

$\Longrightarrow$

dostaneme sústavu, ktorej vektor pravých strán je konečný

$B \neq \varepsilon$ a $c \neq \varepsilon$ - Príklad

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$B \neq \varepsilon$ a $c \neq \varepsilon$ - Príklad

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$c_4 = \varepsilon \quad \wedge \quad \begin{array}{l} b_{41} = \varepsilon \\ b_{42} = \varepsilon \\ b_{43} = \varepsilon \end{array}$$

Vynecháme štvrtú rovnicu - nemá vplyv na riešenie.

$B \neq \varepsilon$ a $c \neq \varepsilon$ - Príklad

$$\begin{array}{lcll} c_1 = \varepsilon & \wedge & b_{11} \neq \varepsilon & \Longrightarrow \quad x_1 = \varepsilon \\ & & b_{12} = \varepsilon & \\ & & b_{13} \neq \varepsilon & \Longrightarrow \quad x_3 = \varepsilon \end{array}$$

Vynecháme prvú rovnicu, prvý a tretí stĺpec matice B a prvú a tretiu súradnicu vektora x:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ sústava nemá riešenie

$$S(B, c) = \emptyset$$

$B \neq \varepsilon$ a c konečné

$\exists j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$: $B_j = \varepsilon$ (j-tý stĺpec matice B)

$\Longrightarrow \quad x_j \in \mathbb{R}^\star$ (ľubovoľné)

Postup:

– vynecháme stĺpec B_j matice sústavy B
– vynecháme súradnicu x_j vektora x

$B \neq \varepsilon$ a c konečné - Príklad

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & -3 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B \neq \varepsilon$ a c konečné - Príklad

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & -3 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$B_2 = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x_2 \in \mathbb{R}^\star$$

Vynecháme druhý stĺpec matice B a druhú súradnicu vektora x:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$B \neq \varepsilon$ a c konečné - Príklad

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & -3 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$B_2 = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x_2 \in \mathbb{R}^\star$$

Vynecháme druhý stĺpec matice B a druhú súradnicu vektora x:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$S(B, c) = \{(-2,\, x_2,\, 0)^\top;\ x_2 \in \mathbb{R}^\star\}$$

$B \neq \varepsilon$ a $c \neq \varepsilon$

$$\exists i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}: \quad \forall j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$b_{ij} = \varepsilon \quad \wedge \quad c_i \in \mathbb{R} \quad \text{(konečné)}$$

$\Longrightarrow$ sústava nemá riešenie

$$S(B, c) = \emptyset$$

$B \neq \varepsilon$ a $c \neq \varepsilon$ - Príklad

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & -3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B \neq \varepsilon$ a $c \neq \varepsilon$ - Príklad

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & -3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$c_2 = 0 \quad \wedge \quad \begin{aligned} b_{21} &= \varepsilon \\ b_{22} &= \varepsilon \\ b_{23} &= \varepsilon \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ sústava nemá riešenie

$$S(B, c) = \emptyset$$

Riešiteľnosť sústavy rovníc

$$B \otimes x = c$$

hlavné riešenie

$$\begin{aligned} x^\sharp &= B' \otimes' c \\ x_j^\sharp &= \min_{i \in M} \{c_i \otimes b_{ij}^{-1};\ b_{ij} \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$M_j(B,c) = \{i \in M;\ x_j^\sharp = c_i \otimes b_{ij}^{-1}\} \tag{3}$$

množina indexov tých rovníc, ktoré sú splnené j-tou súradnicou hlavného riešenia $x^\sharp$

Riešiteľnosť sústavy rovníc

Veta

Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Potom platí

1. $x \leq x^\sharp$, pre všetky riešenia $x \in S(B,c)$,
2. $x \in S(B,c)$ vtedy a len vtedy, ak $x \leq x^\sharp$ a
$$\bigcup_{j:\, x_j = x_j^\sharp} M_j = M,$$
3. $\left(B \otimes x^\sharp\right)_i = c_i$, pre aspoň jedno $i \in M$.

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

Príklad: Rozhodnime, či je vektor x riešením sústavy

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $x = (-3, -4, -3)^\top$
b) $x = (-2, -5, -3)^\top$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

Príklad: Rozhodnime, či je vektor x riešením sústavy

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $x = (-3, -4, -3)^\top$
b) $x = (-2, -5, -3)^\top$

Riešenie:

$$x^\sharp = B' \otimes' c = (-2, -4, -3)^\top$$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

množiny indexov

$$M_j(B, c) = \{i \in M;\ x_j^\sharp = c_i \otimes b_{ij}^{-1}\}$$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

množiny indexov

$$M_j(B,c) = \{i \in M;\ x_j^\sharp = c_i \otimes b_{ij}^{-1}\}$$

$$M_1 \quad = \quad \{2\}$$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

množiny indexov

$$M_j(B,c) = \{i \in M;\ x_j^\sharp = c_i \otimes b_{ij}^{-1}\}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \{2\} \\ M_2 &= \{2,3\} \end{aligned}$$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

množiny indexov

$$M_j(B,c) = \{i \in M;\ x_j^\sharp = c_i \otimes b_{ij}^{-1}\}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \{2\} \\ M_2 &= \{2,3\} \\ M_3 &= \{1\} \end{aligned}$$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

a) $x = (-3, -4, -3)^\top$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

a) $x = (-3, -4, -3)^\top$

- $x \leq x^\sharp = (-2, -4, -3)^\top$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

a) $x = (-3, -4, -3)^\top$

- $x \leq x^\sharp = (-2, -4, -3)^\top$
- súradnice vektora $x = (-3, -4, -3)^\top$ sú rovnaké ako súradnice hlavného riešenia pre $j = 2$ a $j = 3$

$$\bigcup_{j:\, x_j = x_j^\sharp} M_j = M_2 \cup M_3 = M$$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

a) $x = (-3, -4, -3)^\top$

- $x \leq x^\sharp = (-2, -4, -3)^\top$
- súradnice vektora $x = (-3, -4, -3)^\top$ sú rovnaké ako súradnice hlavného riešenia pre $j = 2$ a $j = 3$

$$\bigcup_{j:\, x_j = x_j^\sharp} M_j = M_2 \cup M_3 = M$$

$\Longrightarrow$ x je riešením sústavy

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

b) $x = (-2, -5, -3)^\top$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

b) $x = (-2, -5, -3)^\top$

- $x \leq x^\sharp = (-2, -4, -3)^\top$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

b) $x = (-2, -5, -3)^\top$

- $x \leq x^\sharp = (-2, -4, -3)^\top$
- súradnice vektora $x = (-2, -5, -3)^\top$ sú rovnaké ako súradnice hlavného riešenia pre $j = 1$ a $j = 3$

$$\bigcup_{j:\, x_j = x_j^\sharp} M_j = M_1 \cup M_3 \neq M$$

Riešiteľnosť sústavy rovníc - Príklad

b) $x = (-2, -5, -3)^\top$

- $x \leq x^\sharp = (-2, -4, -3)^\top$
- súradnice vektora $x = (-2, -5, -3)^\top$ sú rovnaké ako súradnice hlavného riešenia pre $j = 1$ a $j = 3$

$$\bigcup_{j:\, x_j = x_j^\sharp} M_j = M_1 \cup M_3 \neq M$$

$\Longrightarrow \quad x$ nie je riešením sústavy

Existencia riešenia sústavy rovníc - nutné a postačujúce podmienky

Veta

Nech $B \in F(m, n)$ a $c \in F(m)$. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné

1. $S(B, c) \neq \emptyset$,
2. $x^\sharp \in S(B, c)$,
3. $\bigcup_{j \in N} M_j = M$.

Existencia riešenia sústavy rovníc - Príklad

Príklad: Zistime, či sústava má riešenie

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Existencia riešenia sústavy rovníc - Príklad

Príklad: Zistime, či sústava má riešenie

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$x^\sharp = B' \otimes' c = (-2, -4, -3)^\top$$

Existencia riešenia sústavy rovníc - Príklad

Príklad: Zistime, či sústava má riešenie

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$x^\sharp = B' \otimes' c = (-2, -4, -3)^\top$$

množiny indexov podľa vzťahu (3):

$$M_1 = \{2\} \qquad M_2 = \{2\} \qquad M_3 = \{1\}$$

Existencia riešenia sústavy rovníc - Príklad

Príklad: Zistime, či sústava má riešenie

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$x^\sharp = B' \otimes' c = (-2, -4, -3)^\top$$

množiny indexov podľa vzťahu (3):

$$M_1 = \{2\} \qquad M_2 = \{2\} \qquad M_3 = \{1\}$$

$$\bigcup_{j \in N} M_j = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \neq M$$

Existencia riešenia sústavy rovníc - Príklad

Príklad: Zistime, či sústava má riešenie

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$x^\sharp = B' \otimes' c = (-2, -4, -3)^\top$$

množiny indexov podľa vzťahu (3):

$$M_1 = \{2\} \qquad M_2 = \{2\} \qquad M_3 = \{1\}$$

$$\bigcup_{j \in N} M_j = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \neq M$$

$\Longrightarrow$ sústava nemá riešenie

Jednoznačnosť riešenia sústavy rovníc - nutná a postačujúca podmienka

Veta

Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Potom $S(B,c) = \{x^\sharp\}$ vtedy a len vtedy, ak platia nasledujúce podmienky

1. $\bigcup_{j \in N} M_j = M$ a
2. $\bigcup_{j \in N'} M_j \neq M$, pre žiadne $N' \subset N$, $N' \neq N$.

Všetky riešenia sústavy rovníc - Príklad

Príklad: Nájdime všetky riešenia sústavy rovníc

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -6 & -4 & -3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ -4 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Všetky riešenia sústavy rovníc - Príklad

Príklad: Nájdime všetky riešenia sústavy rovníc

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -6 & -4 & -3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ -4 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

- transformujeme sústavu $B \otimes x = c$ na sústavu $B^\star \otimes x = 0$: $b_{ij} \otimes c_i^{-1}$

$$B^\star = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ -3 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Všetky riešenia sústavy rovníc - Príklad

- nájdeme hlavné riešenie

$$x^{\sharp} = (3, 1, -2)^{\top}$$

Všetky riešenia sústavy rovníc - Príklad

- nájdeme hlavné riešenie

$$x^{\sharp} = (3, 1, -2)^{\top}$$

- nájdeme množiny indexov podľa vzťahu (3):

$$M_1 = \{2, 4\} \qquad M_2 = \{1, 2, 5\} \qquad M_3 = \{3, 4\}.$$

Všetky riešenia sústavy rovníc - Príklad

- nájdeme hlavné riešenie

$$x^{\sharp} = (3, 1, -2)^{\top}$$

- nájdeme množiny indexov podľa vzťahu (3):

$$M_1 = \{2, 4\} \qquad M_2 = \{1, 2, 5\} \qquad M_3 = \{3, 4\}.$$

- overíme existenciu riešenia

$$\bigcup_{j \in N} M_j = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = M$$

Všetky riešenia sústavy rovníc - Príklad

- nájdeme hlavné riešenie

$$x^\sharp = (3, 1, -2)^\top$$

- nájdeme množiny indexov podľa vzťahu (3):

$$M_1 = \{2, 4\} \qquad M_2 = \{1, 2, 5\} \qquad M_3 = \{3, 4\}.$$

- overíme existenciu riešenia

$$\bigcup_{j \in N} M_j = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = M$$

- overíme jednoznačnosť riešenia

$$\exists N' = \{2, 3\} \subset N : \quad \bigcup_{j \in N'} M_j = M_2 \cup M_3 = M$$

Všetky riešenia sústavy rovníc - Príklad

- nájdeme hlavné riešenie

$$x^{\sharp} = (3, 1, -2)^{\top}$$

- nájdeme množiny indexov podľa vzťahu (3):

$$M_1 = \{2, 4\} \qquad M_2 = \{1, 2, 5\} \qquad M_3 = \{3, 4\}.$$

- overíme existenciu riešenia

$$\bigcup_{j \in N} M_j = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = M$$

- overíme jednoznačnosť riešenia

$$\exists N' = \{2, 3\} \subset N : \quad \bigcup_{j \in N'} M_j = M_2 \cup M_3 = M$$

$$S(B, c) = \left\{ (x_1,\ 1,\ -2)^{\top};\ x_1 \leq x_1^{\sharp} \right\} = \left\{ (x_1,\ 1,\ -2)^{\top};\ x_1 \leq 3 \right\}$$

Riešenia sústavy rovníc - zhrnutie

Veta

Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Sústava $B \otimes x = c$ má riešenie vtedy a len vtedy, ak $\bigcup_{j \in N} M_j = M$.

Veta

Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Sústava $B \otimes x = c$ má riešenie vtedy a len vtedy, ak $x^\sharp$ je jej riešením. Navyše, ak $x^\sharp$ je riešením sústavy, tak je jej najväčším riešením.

Riešenia sústavy rovníc - zhrnutie

Veta

Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Sústava $B \otimes x = c$ má práve jedno riešenie vtedy a len vtedy, ak $\bigcup_{j \in N} M_j = M$ a $\bigcup_{j \in N'} M_j \neq M$, pre žiadne $N' \subset N$, $N' \neq N$.

Algoritmus riešenia sústavy rovníc

1. Ak $c = \varepsilon$ a $B = \varepsilon$, tak $S(B, c) = \mathbb{R}^\star(n)$.

Algoritmus riešenia sústavy rovníc

1. Ak $c = \varepsilon$ a $B = \varepsilon$, tak $S(B, c) = \mathbb{R}^{\star}(n)$.
2. Ak $c = \varepsilon$ a $B \neq \varepsilon$, tak pre stĺpce $B_j \neq \varepsilon$ matice B je $x_j = \varepsilon$, ostatné súradnice sú ľubovoľné
$S(B, c) = \{x \in \mathbb{R}^{\star}(n);\ x_j = \varepsilon \text{ pre } B_j \neq \varepsilon\}$.

Algoritmus riešenia sústavy rovníc

1. Ak $c = \varepsilon$ a $B = \varepsilon$, tak $S(B, c) = \mathbb{R}^\star(n)$.
2. Ak $c = \varepsilon$ a $B \neq \varepsilon$, tak pre stĺpce $B_j \neq \varepsilon$ matice B je $x_j = \varepsilon$, ostatné súradnice sú ľubovoľné
   $S(B, c) = \{x \in \mathbb{R}^\star(n);\ x_j = \varepsilon \text{ pre } B_j \neq \varepsilon\}$.
3. Ak $c \neq \varepsilon$ a $c_i \neq \varepsilon$, také že i-tý riadok B obsahuje len hodnoty ε, tak $S(B, c) = \emptyset$.

Algoritmus riešenia sústavy rovníc

4. Ak $c \neq \varepsilon$, tak

Algoritmus riešenia sústavy rovníc

4. Ak $c \neq \varepsilon$, tak
   i) ak existuje riadok, pre ktorý $c_i = \varepsilon$, tak
      - pre $b_{ij} \neq \varepsilon$
        – položíme $x_j = \varepsilon$,
        – vynecháme j-té stĺpce B a j-té súradnice vektora x,
      - vynecháme i-tú rovnicu,

Algoritmus riešenia sústavy rovníc

4. Ak $c \neq \varepsilon$, tak
   i) ak existuje riadok, pre ktorý $c_i = \varepsilon$, tak
      - pre $b_{ij} \neq \varepsilon$
        – položíme $x_j = \varepsilon$,
        – vynecháme j-té stĺpce B a j-té súradnice vektora x,
      - vynecháme i-tú rovnicu,

   ii) ak existuje stĺpec $B_j = \varepsilon$, tak
      - položíme $x_j \in \mathbb{R}^\star$,
      - vynecháme j-té stĺpce B a j-té súradnice vektora x,

Algoritmus riešenia sústavy rovníc

iii) nájdeme hlavné riešenie $x^\sharp$ novej sústavy,

Algoritmus riešenia sústavy rovníc

iii) nájdeme hlavné riešenie $x^\sharp$ novej sústavy,

iv) nájdeme množiny indexov M_j podľa vzťahu (3),

Algoritmus riešenia sústavy rovníc

iii) nájdeme hlavné riešenie $x^\sharp$ novej sústavy,

iv) nájdeme množiny indexov M_j podľa vzťahu (3),

v) overíme, či platí $\bigcup_{j\in N} M_j = M$, ak nie, tak $S(B,c)=\emptyset$, ak áno, overíme, či platí $\bigcup_{j\in N'} M_j \neq M$, pre žiadne $N' \subset N$, $N' \neq N$. Ak áno, $S(B,c)=\{x^\sharp\}$, ak nie, tak sústava má nekonečne veľa riešení a pre $N' \subset N$ také, že $\bigcup_{j\in N'} M_j = M$ položíme $x_l \leq x_l^\sharp$ pre $l \in N \setminus N'$ a $x_l = x_l^\sharp$ pre $l \in N'$.

Existencia riešenia lineárnej rovnice - modelový systém

Formulácia

Majme DDS s maticou prechodu A. Namiesto časov, kedy sa spúšťa výroba, nech je zadaná požiadavka, aby $(p+1)$-stavový projekt skončil na všetkých strojoch rovnako vo vopred danom čase c. Vzniká teda úloha nájsť taký vektor x, aby $A^p \otimes x = c$, resp. ak označíme $B = A^p$, tak $B \otimes x = c$.

Riešenie

Ak rovnica $B \otimes x = c$ má mať riešenie, tak vektor $x^\sharp = B' \otimes' c$ musí byť jej riešením. Ak položíme $B = A^p$, tak $x^\sharp = (A^p)' \otimes' c$ musí byť riešením

$$\Longrightarrow \quad y(1) = x^\sharp = (A^p)' \otimes' c$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Príklad:

Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov, ktorú sme predstavili v predošlých príkladoch. Nech A je matica prechodu daného DDS. Nech c je vektor reprezentujúci predpísané časy ukončenia 5-etapového projektu.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Sú stanovené časy ukončenia projektu dosiahnuteľné?

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie:

$$y(1) = x^\sharp = (A^4)' \otimes' c =$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie:

$$\begin{aligned} y(1) &= x^{\sharp} = (A^4)' \otimes' c = \\ &= \begin{pmatrix} -19 & -17 & -18 & -17 \\ -23 & -20 & -21 & -21 \\ -20 & -17 & -18 & -18 \\ -26 & -22 & -24 & -24 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie:

$$y(1) = x^{\sharp} = (A^4)' \otimes' c =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & -17 & -18 & -17 \\ -23 & -20 & -21 & -21 \\ -20 & -17 & -18 & -18 \\ -26 & -22 & -24 & -24 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 \otimes y(1) = \begin{pmatrix} 19 & 23 & 20 & 26 \\ 17 & 20 & 17 & 22 \\ 18 & 21 & 18 & 24 \\ 17 & 21 & 18 & 24 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 28 \\ 29 \\ 28 \end{pmatrix} = y(5)$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Interpretácia:

Z toho, že $x^\sharp$ je najväčším riešením rovnice $A^4 \otimes x = c$, t. j. $y(1) = x^\sharp$, vyplýva, že hoci stroje 2, 3 a 4 skončia prácu skôr, oneskorenie prvej etapy na ktoromkoľvek stroji by prinieslo nedodržanie cieľového času aspoň na jednom stroji. Z izotónnosti vyplýva na druhej strane, že ak začneme projekt skôr, neprinesie to oddialenie ukončenia práce na strojoch 2, 3 a 4.

Záver:

Stanovené časy c sú nedosiahnuteľné.

Definícia

Definícia

Nech x, $y \in F(n)$. Čebyševovou vzdialenosťou vektorov x a y budeme nazývať číslo

$$\xi(x,y) = \max_i |x_i - y_i| \, .$$

$$\begin{aligned}
\xi(x,y) &= \max_i |x_i - y_i| = \\
&= \max_i \{\max\{x_i - y_i, y_i - x_i\}\} = \\
&= \max\left\{\max_i \{x_i - y_i\}, \max_i \{y_i - x_i\}\right\}
\end{aligned}$$

$$\xi(x,y) = x' \otimes y \oplus y' \otimes x$$

Príklad

Príklad:

Vypočítajme Čebyševovu vzdialenosť vektorov

$$x(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad x(5) = \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Príklad

Príklad:

Vypočítajme Čebyševovu vzdialenosť vektorov

$$x(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad x(5) = \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \xi(x(1), x(5)) &= \max_i |x_i(1) - x_i(5)| = \\ &= \max\{29, 23, 27, 24\} = \\ &= 29 \end{aligned}$$

Určenie časovej náročnosti projektu pomocou Čebyševovej vzdialenosti

Ak súradnice y sú väčšie ako súradnice x, tak

$$\xi(x, y) = x' \otimes y$$

Skúmané DDS s maticou prechodu A majú vlastnosť rastúcosti. Čas, ktorý uplynie medzi ukončením prvého a $(p+1)$-ho pracovného úkonu vypočítame:

$$\xi(x(1), x(p+1)) = x(1)' \otimes x(p+1) = x(1)' \otimes A^p \otimes x(1)$$

Príklad

Príklad:
Vypočítajme čas, ktorý uplynie medzi ukončením prvého a piateho pracovného cyklu, ak výrobný proces začal na všetkých strojoch v čase 0 a DDS je daný maticou prechodu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Príklad

Príklad:
Vypočítajme čas, ktorý uplynie medzi ukončením prvého a piateho pracovného cyklu, ak výrobný proces začal na všetkých strojoch v čase 0 a DDS je daný maticou prechodu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \xi(x(1), x(5)) &= x(1)' \otimes A^4 \otimes x(1) = \\ &= (-3, -5, -3, -6) \otimes \begin{pmatrix} 19 & 23 & 20 & 26 \\ 17 & 20 & 17 & 22 \\ 18 & 21 & 18 & 24 \\ 17 & 21 & 18 & 24 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \\ &= (16, 20, 17, 23) \otimes (3, 5, 3, 6)^\top = 29 \end{aligned}$$

Odhad časovej náročnosti projektu pomocou Čebyševovej vzdialenosti

Formulácia problému

Majme DDS s maticou prechodu A. Dá sa z matice prechodu odhadnúť čas trvania práce na projekte s p etapami, t. j. čas práce stroja, ktorý pracuje najdlhšie?

$$x_i(p+1) \geq a_{ii}^p \otimes x_i(1)$$

$$\xi(x_i(1), x_i(p+1)) = x_i(1)' \otimes x_i(p+1) \geq x_i(1)' \otimes a_{ii}^p \otimes x_i(1) = a_{ii}^p$$

$$x(1)' \otimes x(p+1) = \sum_i^{\oplus} x_i(1)' \otimes x_i(p+1) \geq \sum_i^{\oplus} a_{ii}^p$$

$$\xi(x(1), x(p+1)) \geq \sum_i^{\oplus} a_{ii}^p = \left(\sum_i^{\oplus} a_{ii} \right)^p$$

Odhad časovej náročnosti projektu - Príklad

Príklad:
Odhadnime čas, ktorý uplynie medzi ukončením prvého a piateho pracovného cyklu, ak výrobný proces začal na všetkých strojoch v čase 0 a DDS je daný maticou prechodu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\xi(x(1), x(p+1)) \;\geq\; \sum_i^{\oplus} a_{ii}^p = \left(\sum_i^{\oplus} a_{ii} \right)^p$$

$$\xi(x(1), x(5)) \;\geq\; \left(\sum_i^{\oplus} a_{ii} \right)^4 = 6^4 = 24$$

Definícia

Definícia

Nech f je zobrazenie z množiny S do množiny $F(m)$. Nech $c \in F(m)$. Každé riešenie $x \in S$ úlohy typu

$$\text{minimalizujme} \quad \xi(f(x), c)$$

budeme nazývať Čebyševove najlepšie riešenie.

Jednoznačné Čebyševove najlepšie riešenie

- najväčšie Čebyševove najlepšie riešenie
- najmenšie Čebyševove najlepšie riešenie

Čebyševove najlepšie riešenie a hlavné riešenie

Veta

Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Nech $x^\sharp$ je hlavné riešenie nerovnice $B \otimes x \leq c$. Nech $S_\leq(B,c) = \{x \in \mathbb{R}^\star(n);\ B \otimes x \leq c\}$. Potom $x^\sharp$ je Čebyševovo najlepšie riešenie vzhľadom na všetky riešenia nerovnice $B \otimes x \leq c$:

$$\xi(B \otimes x^\sharp, c) = \min_{x \in S_\leq} \xi(B \otimes x, c).$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Príklad:

Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov, ktorú sme predstavili v predošlých príkladoch. Nech A je matica prechodu daného DDS. Nech c je vektor reprezentujúci predpísané časy ukončenia 5-etapového projektu (nesmieme ich prekročiť).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

a) Aké je Čebyševove najlepšie riešenie?

b) Aká je hodnota funkcie ξ?

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie:

a) Čebyševove najlepšie riešenie

$$y(1) = x^{\sharp} = (A^4)' \otimes' c = (11, 7, 10, 4)^{\top}$$

dosiahnuté časy

$$y(5) = A^4 \otimes y(1) = (30, 28, 29, 28)^{\top}$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie:

a) Čebyševove najlepšie riešenie

$$y(1) = x^{\sharp} = (A^4)' \otimes' c = (11, 7, 10, 4)^{\top}$$

dosiahnuté časy

$$y(5) = A^4 \otimes y(1) = (30, 28, 29, 28)^{\top}$$

b) presnosť riešenia

$$\xi(B \otimes y(1), c) = \max\{(30-30), (30-28), (30-29), (30-28)\} = 2$$

Aproximácia riešenia

Veta

Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Nech $x^\sharp$ je hlavné riešenie nerovnice $B \otimes x \leq c$. Nech $\mu^2 = \xi(B \otimes x^\sharp, c)$ a $y_\mu = \mu \otimes x^\sharp$. Potom platí

$$\xi(B \otimes y_\mu, c) = \min_{x \in R(n)} \xi(B \otimes x, c).$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Príklad:

Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov, ktorú sme predstavili v predošlých príkladoch. Nech A je matica prechodu daného DDS. Nech c je vektor reprezentujúci časy ukončenia 5-etapového projektu, ktoré chceme dosiahnuť také, že dovolíme ich malé prekročenie. Nájdime Čebyševove najlepšie riešenie.

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie:

$$\mu^2 = \xi(B \otimes y(1), c) = 2$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie:

$$\mu^2 = \xi(B \otimes y(1), c) = 2$$

Posuňme časy $y(1)$ o polovicu tejto hodnoty, t. j. 1 č.j.

$$\Longrightarrow \quad y_\mu(1) = 1 \otimes y(1) = 1 \otimes \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie:

$$\mu^2 = \xi(B \otimes y(1), c) = 2$$

Posuňme časy $y(1)$ o polovicu tejto hodnoty, t. j. 1 č.j.

$$\Longrightarrow \quad y_\mu(1) = 1 \otimes y(1) = 1 \otimes \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad y_\mu(5) = 1 \otimes y(5) = 1 \otimes \begin{pmatrix} 30 \\ 28 \\ 29 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 29 \\ 30 \\ 29 \end{pmatrix}$$

$$\xi(B \otimes y_\mu(1), c) = 1$$

Problém slabej realizácie

Formulácia

Predpokladajme, že boli sledovaním zistené prvé členy vzostupného orbitu $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, ..., $x(p+1)$, ktorý je v skutočnosti dlhý, ale ďalšie členy nevieme bezprostredne vypočítať, pretože nepoznáme jeho maticu prechodu. Ako odhadneme nasledujúce členy orbitu?

Problém

Hľadáme maticu X, ktorá spĺňa

$$X \otimes x(r) = x(r+1) \quad r = 1, 2, \ldots, p$$

Budeme to nazývať problémom slabej realizácie.

Riešenie problému slabej realizácie

Riešenie

Predpokladajme

- matica G obsahuje stĺpce $x(1)$, $x(2)$, ..., $x(p)$
- matica H obsahuje stĺpce $x(2)$, $x(3)$, ..., $x(p+1)$

Podľa princípu stĺpcového účinku hľadáme maticu X, ktorá je riešením rovnice

$$X \otimes G = H$$

Zovšeobecnenie vety o nutnej a postačujúcej podmienke

Veta

Nech $G \in F(r, n)$ a $H \in F(m, n)$. Rovnica $X \otimes G = H$ má riešenie vtedy a len vtedy, ak $X^\sharp = H \otimes' G' \in F(m, r)$ je jej riešením. Navyše, ak $X^\sharp$ je riešením rovnice, tak je jej najväčším riešením.

D: Veta je dualizáciou vety o nutnej a postačujúcej podmienke existencie riešenia lineárnej rovnice. Navyše vektor x je nahradený maticou X (princíp stĺpcového účinku).

Problém slabej realizácie - Príklad

Príklad:

Majme vzostupný stavový orbit

$$\begin{array}{ccccc} x(1), & x(2), & x(3), & x(4), & x(5) \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nájdime maticu X, aby

$$X \otimes x(r) = x(r+1) \quad r = 1, 2, 3$$

Problém slabej realizácie - Príklad

Riešenie

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 20 \\ 5 & 10 & 16 \\ 3 & 11 & 18 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 26 \\ 10 & 16 & 22 \\ 11 & 18 & 24 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix}$$

$$X^\sharp = H \otimes' G' = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 26 \\ 10 & 16 & 22 \\ 11 & 18 & 24 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} -3 & -5 & -3 & -6 \\ -14 & -10 & -11 & -12 \\ -20 & -16 & -18 & -18 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Problém slabej realizácie - Príklad

$$X^{\sharp} \otimes x(4) = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = x(5)$$

Formulácia problému

Formulácia problému

Majme DDS s maticou prechodu A a $(p+1)$-stavový projekt. Existuje v každej etape projektu kritický stav?

Ináč formulované:

Existuje v každej etape projektu aspoň jeden stroj, na ktorom sa $x_i(r)$ najskorší čas ukončenia r-tého pracovného úkonu rovná $y_i(r)$ najneskoršiemu času ukončenia r-tého pracovného úkonu?

Základná veta minimax algebry

Veta

Nech $B \in F(m,n)$, $x \in F(n)$. Potom platí

$$x \leq_c B' \otimes' (B \otimes x)$$

D: Ukážeme, že $\quad x' \otimes' [B' \otimes' (B \otimes x)] = 0$

$$\text{Označme} \quad w = B \otimes x$$

$$\begin{aligned} w' \otimes' w &= (B \otimes x)' \otimes' (B \otimes x) = \\ &= (x' \otimes' B') \otimes' (B \otimes x) = \\ &= x' \otimes' B' \otimes' (B \otimes x) = \\ &= x' \otimes' [B' \otimes' (B \otimes x)] = 0 \end{aligned}$$

Existencia kritických stavov - prvá etapa

Riešenie problému prvá etapa

Uvažujme najskôr prvú etapu pre 5-etapový projekt. Položme $x = x(1)$, $B = A^4$ v predchádzajúcej vete

$$x(1) \leq_c (A^4)' \otimes' (A^4 \otimes x(1)) = (A')^{[4]} \otimes' (A^4 \otimes x(1))$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{keďže} & A^4 \otimes x(1) & = & x(5) = y(5) \\ & (A')^{[4]} \otimes' y(5) & = & y(1) \\ \Longrightarrow & x(1) & \leq_c & y(1) \end{array}$$

Interpretácia: Aspoň v jednom riadku nastáva rovnosť, t.j kritický stav nastane v prvej etape aspoň na jednom stroji.

Existencia kritických stavov - zovšeobecnenie

Riešenie problému

Uvažujme $(p+1)$-stavový orbit založený na vektore $x(1)$ a matici prechodu A. Položme $x(p+1) = y(p+1)$. Zvoľme v predchádzajúcej vete $x = x(r+1)$ a $B = A^{p-r}$ pre $0 < r < p$

$$
\begin{aligned}
x(r+1) &\leq_c B' \otimes' (B \otimes x(r+1)) \\
&= B' \otimes' (A^{p-r} \otimes x(r+1)) \\
&= B' \otimes' (A^{p-r} \otimes A^r \otimes x(1)) \\
&= B' \otimes' (A^p \otimes x(1)) \\
&= B' \otimes' x(p+1) \\
&= (A^{p-r})' \otimes' x(p+1) \\
&= (A')^{[p-r]} \otimes' x(p+1) \\
&= (A')^{[p-r]} \otimes' y(p+1)
\end{aligned}
$$

Existencia kritických stavov - zovšeobecnenie

$$\begin{array}{llcl}
\text{keďže} & (A')^{[s]} \otimes' y(p+1) & = & y(p+1-s) \\
\text{pre } s = p - r & (A')^{[p-r]} \otimes' y(p+1) & = & y(r+1) \\
 & x(r+1) & \leq_c & (A')^{[p-r]} \otimes' x(p+1) \\
\Longrightarrow & x(r+1) & \leq_c & y(r+1)
\end{array}$$

Interpretácia: Aspoň v jednom riadku nastáva rovnosť, t.j kritický stav nastane v každej etape (medzi prvou a poslednou etapou) aspoň na jednom stroji.

Ďakujem za pozornosť.