Priebeh funkcie

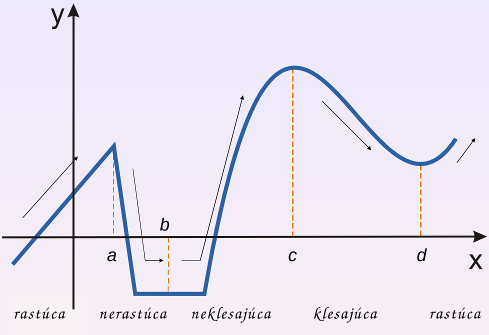
Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Monotónnosť funkcie - ilustrácia



Obr. : Monotónnosť funkcie

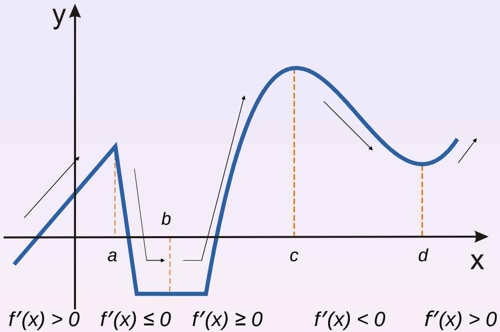
Postačujúca podmienka monotónnosti na intervale

Veta (Postačujúca podmienka monotónnosti)

Nech funkcia f je spojitá na intervale $I \subset < a, b >$ a má deriváciu rovnakého znamienka na intervale (a, b). Potom

- ak $f'(x) > 0$, tak f je rastúca na I,
- ak $f'(x) < 0$, tak f je klesajúca na I,
- ak $f'(x) \geq 0$, tak f je neklesajúca na I,
- ak $f'(x) \leq 0$, tak f je nerastúca na I.

Monotónnosť funkcie - ilustrácia



Obr. : Monotónnosť funkcie pomocou derivácie

Monotónnosť funkcie - Príklad

Príklad:

Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia rýdzomonotónna:

1. $f(x) = x^4 - 4x^3$,
2. $f(x) = x \cdot \ln x$.

Monotónnosť príjmovej funkcie - Príklad

Príklad:

Pomocou funkcie dopytu

$$D(p) = 1470 - 0,1p^2 \qquad 0 < p < 70\sqrt{3}$$

zostrojme funkciu celkových príjmov a nájdime intervaly, na ktorých je funkcia rýdzomonotónna.

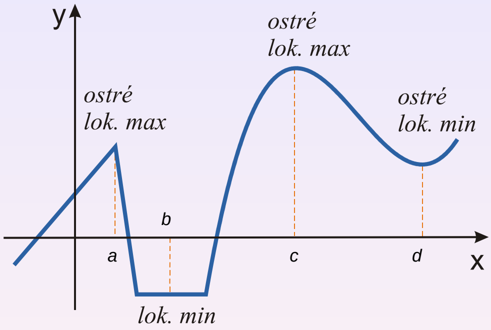
Pojem lokálneho extrému

Definícia

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in (a, b)$ lokálny extrém, ak existuje také okolie prstencové okolie $O^{\circ}(x_0)$, že pre všetky $x \in O^{\circ}(a)$ platí jeden z prípadov

- $f(x) \leq f(x_0)$ lokálne maximum alebo
- $f(x) \geq f(x_0)$ lokálne minimum alebo
- $f(x) < f(x_0)$ ostré lokálne maximum alebo
- $f(x) > f(x_0)$ ostré lokálne minimum.

Lokálne extrémy funkcie - ilustrácia



Obr. : Lokálne extrémy funkcie

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému

Veta (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému)

Nech existuje derivácia $f'(x_0)$. Ak má funkcia f v bode x_0 lokálny extrém, tak $f'(x_0) = 0$.

Poznámka: Obrátené tvrdenie neplatí. Ak $f'(x_0) = 0$, to neznamená, že má funkcia v bode x_0 lokálny extrém.

Definícia

Bod x_0, v ktorom má funkcia deriváciu, a platí $f'(x_0) = 0$, nazývame stacionárnym bodom funkcie f.

Stacionárne body funkcie - Príklad

Príklad:

Nájdime stacionárne body funkcie:

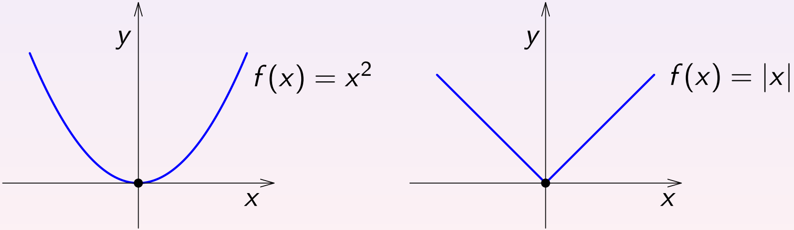
1. $f(x) = x^4 - 4x^3$,
2. $f(x) = x \cdot \ln x$,
3. $f(x) = x^2$,
4. $f(x) = |x|$.

Kritické body funkcie

Definícia

Stacionárne body funkcie f a body, v ktorých funkcia f nemá deriváciu, nazývame kritické body funkcie f.

Z nutnej podmienky existencie lokálneho extrému vyplýva, že funkcia **môže** nadobúdať extrém v svojich kritických bodoch.



Obr. : Kritické body funkcie

Lokálne extrémy funkcie pomocou monotónnosti

Ak má funkcia v okolí bodu x_0 deriváciu, tak vzhľadom na znamienko tejto derivácie pred bodom x_0 a za bodom x_0 môžu nastať tieto prípady:

1. ak má derivácia rovnaké znamienko, tak funkcia nemá v bode x_0 lokálny extrém,
2. ak derivácia mení znamienko z kladného na záporné, tak funkcia má v bode x_0 lokálne maximum,
3. ak derivácia mení znamienko zo záporného na kladné, tak funkcia má v bode x_0 lokálne minimum.

Lokálne extrémy funkcie pomocou monotónnosti - Príklad

Príklad:

Nájdime pomocou monotónnosti funkcie lokálne extrémy funkcie:

1. $f(x) = x^4 - 4x^3$,
2. $f(x) = x \cdot \ln x$,
3. $f(x) = x^2$,
4. $f(x) = |x|$.

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

Veta (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému)

Nech funkcia f má v bode $x_0 \in (a, b)$ deriváciu $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, pre $n \geq 2$. Nech $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Potom platí

1. Ak je n párne a
   - $f^{(n)}(x_0) > 0$, tak má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne minimum.
   - $f^{(n)}(x_0) < 0$, tak má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne maximum.
2. Ak je n nepárne, tak funkcia f nemá v bode x_0 lokálny extrém (x_0 je inflexný bod).

Lokálne extrémy funkcie - Príklad

Príklad:

Nájdime lokálne extrémy funkcie:

1. $f(x) = x^4 - 4x^3$,
2. $f(x) = x^5 - 5x^4$,
3. $f(x) = x \cdot \ln x$.

Výpočet globálnych extrémov funkcie

Ak má funkcia f lokálne extrémy len v bodoch $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in < a, b >$, tak

1. globálne minimum

$$\min_{x\in<a,b>} f(x) = \min\{f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(a),\ f(b)\}$$

2. globálne maximum

$$\max_{x\in<a,b>} f(x) = \max\{f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(a),\ f(b)\}$$

Globálne extrémy funkcie - Príklad

Príklad: Vypočítajme absolútne maximum a absolútne minimum funkcie $f(x) = x^5 - 5x$ na $< -2, \frac{3}{2} >$.

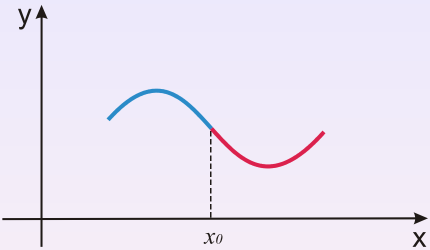
Riešenie:

- lokálne minimum $f(1) = -4$
- lokálne maximum $f(-1) = 4$
- $f(a) = f(-2) = -22$
- $f(b) = f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{32}$

$$\min_{x \in < -2, \frac{3}{2} >} f(x) = \min\{f(1),\ f(-1),\ f(-2),\ f(\frac{3}{2})\} = -22$$

$$\max_{x \in < -2, \frac{3}{2} >} f(x) = \max\{f(1),\ f(-1),\ f(-2),\ f(\frac{3}{2})\} = 4$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie - ilustrácia



Obr. : Inflexný bod

Pojem konvexnosti a konkávnosti

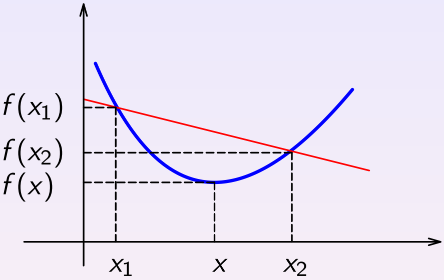
Definícia

Nech funkcia f je definovaná na intervale (a, b). Hovoríme, že funkcia f je konvexná (konkávna) na (a, b), ak pre každú trojicu bodov $x_1,\ x,\ x_2 \in (a, b)$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod (nad) priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$ alebo leží na tejto priamke.

Definícia

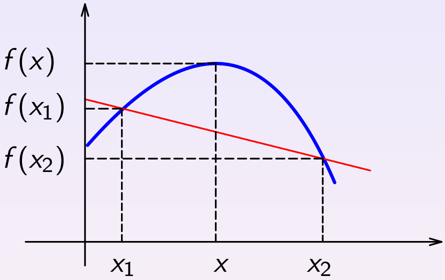
Nech funkcia f je definovaná na intervale (a, b). Hovoríme, že funkcia f je rýdzokonvexná (rýdzokonkávna) na (a, b), ak pre každú trojicu bodov $x_1,\ x,\ x_2 \in (a, b)$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod (nad) priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$.

Konvexnosť funkcie - ilustrácia



Obr. : Rýdzo konvexná funkcia

Konkávnosť funkcie - ilustrácia



Obr. : Rýdzo konkávna funkcia

Postačujúca podmienka konvexnosti/konkávnosti

Veta (Postačujúca podmienka konvexnosti/konkávnosti)

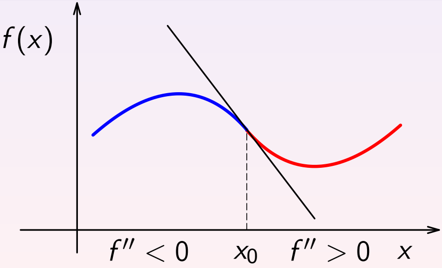
Nech je funkcia f spojitá na intervale $I \subset < a, b >$ a má druhú deriváciu rovnakého znamienka na intervale (a, b). Potom platí

- ak $f''(x) > 0$, tak f je rýdzo konvexná na I,
- ak $f''(x) < 0$, tak f je rýdzo konkávna na I,
- ak $f''(x) \geq 0$, tak f je konvexná na I,
- ak $f''(x) \leq 0$, tak f je konkávna na I.

Pojem inflexného bodu

Definícia

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode $x_0 \in I \subset < a, b >$ inflexiu, ak je funkcia v nejakom ľavom okolí bodu x_0 rýdzo konkávna (rýdzo konvexná) a v nejakom pravom okolí bodu x_0 rýdzo konvexná (rýdzo konkávna). Bod $[x_0, f(x_0)]$ nazývame inflexným bodom funkcie $f(x)$.



Nutná podmienka existencie inflexného bodu

Veta (Nutná podmienka existencie inflexného bodu)

Nech existuje derivácia $f''(x_0)$. Ak má funkcia $f(x)$ v bode x_0 inflexiu, tak $f''(x_0) = 0$.

Poznámka: Obrátené tvrdenie neplatí. Ak $f''(x_0) = 0$, to neznamená, že x_0 je inflexný bod funkcie.

Príklad:

$$f(x) = x^5 - 5x^4$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie - Príklad

Príklad:

Vyšetrime konvexnosť/konkávnosť funkcie a nájdime inflexné body funkcie:

1. $f(x) = x^4 - 4x^3$,
2. $f(x) = x \cdot \ln x$.

Vyšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie

Algoritmus:

1. $D(f)$ (príp. $H(f)$).
2. Prieseky grafu funkcie so súradnicovými osami.
3. Párnosť - nepárnosť.
4. Periodičnosť funkcie.
5. Body nespojitosti.
6. Asymptoty grafu funkcie.
7. Stacionárne body a intervaly, na ktorých je funkcia rýdzomonotónna.
8. Lokálne a globálne extrémy funkcie.
9. Intervaly, na ktorých je funkcia konvexná/konkávna.
10. Inflexné body.
11. Graf funkcie.

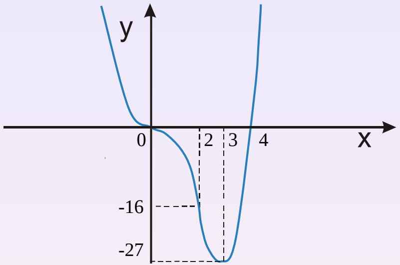
Vyšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie - Príklad

Príklad:

Vyšetrime priebeh a nakreslime graf funkcie:

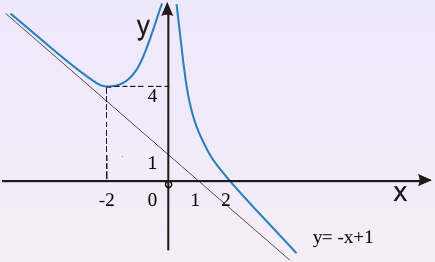
1. $f(x) = x^4 - 4x^3$,
2. $f(x) = x^5 - 5x^4$,
3. $f(x) = \dfrac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2}$,
4. $f(x) = x \cdot \ln x$,
5. $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Vyšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie - Príklad 1



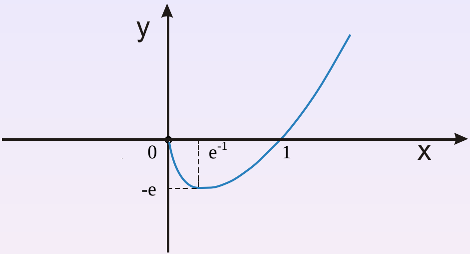
Obr. : Priebeh funkcie $y = x^4 - 4x^3$

Vyšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie - Príklad 2



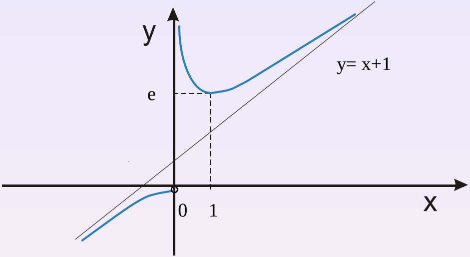
Obr. : Priebeh funkcie $y = \frac{-x^3+x^2+4}{x^2}$

Vyšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie - Príklad 3



Obr. : Priebeh funkcie $y = x \ln x$

Vyšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie - Príklad 4



Obr. : Priebeh funkcie $y = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Ďakujem za pozornosť.