Robustné matice

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

1. Robustné matice
   - Robustnosť matice
   - Robustnosť ireducibilnej matice
   - Robustnosť reducibilnej matice

Dosiahnutie ustáleného stavu - Príklad

Príklad:

Nech A je matica prechodu nejakého DDS. Majme 5-stavový projekt, ktorý štartuje na všetkých strojoch v čase 0.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ \varepsilon & 4 & 6 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad x(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x(2) = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes x(1) = x(2) \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 6 \otimes x(1)$$

Zistime, či sa tento systém (ktorý sa na začiatku nedostane do ustáleného stavu) dostane v priebehu 5-stavového projektu do ustáleného stavu.

Dosiahnutie ustáleného stavu - Príklad

Riešenie:

$$x(r):\begin{pmatrix}4\\4\\6\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}13\\10\\12\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}19\\16\\18\\14\end{pmatrix},\begin{pmatrix}25\\22\\24\\20\end{pmatrix},\begin{pmatrix}31\\28\\30\\26\end{pmatrix}$$

$$x(3)=\lambda(A)\otimes x(2)=6\otimes x(2)$$

$\Longrightarrow x(2)$ je vlastný vektor

Systém sa dostal do ustáleného stavu (nezávisle na tom, aký konštantný vektor štartových časov by sme zvolili).

Dosiahnutie ustáleného stavu - Príklad

Ak $x(2)$ je vlastný vektor, tak platí

$$\begin{aligned} A \otimes x(3) &= A \otimes \lambda \otimes x(2) = \\ &= \lambda \otimes A \otimes x(2) = \\ &= \lambda \otimes x(3) \end{aligned}$$

Teda $x(3)$ (a všetky nasledujúce) je tiež vlastný vektor.

Robustné matice - motivácia

Formulácia problému:

Naším želaním je, aby DDS dosiahol po konečnom počte krokov vlastný vektor a dokonca pri prerušení chodu systému nejakou poruchou, aby sa systém vrátil do ustáleného stavu. Aké vlastnosti musí mať matica prechodu, aby sa to splnilo?

Robustné matice - definícia

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Hovoríme, že A je robustná, ak pre každý vektor $x \in \mathbb{R}^{\star}(n)$ existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že $A^k \otimes x$ je vlastným vektorom matice A, t. j. platí

$$A \otimes (A^k \otimes x) = \lambda \otimes (A^k \otimes x) \tag{1}$$

Robustné matice - príklad

Príklad

Zistime, či pre maticu A a vektor x sa systém dostane do ustáleného stavu

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Robustné matice - príklad

Riešenie

- ireducibilná matica s $\lambda(A) = 0$, teda periodická matica
- najväčší spoločný deliteľ dĺžok cyklov v kritickom digrafe je rovný 1, teda perióda matice $\mathrm{per}(A) = 1$

$$A^5 = A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $$A \otimes (A^5 \otimes x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda(A) \otimes (A^5 \otimes x).$$

pre daný vektor x existuje $k = 5$ také, že $A^k \otimes x$ je vlastným vektorom matice A

Nutná a postačujúca podmienka robustnosti ireducibilnej matice

Uvažujme netriviálny prípad matice, ktorá má v každom stĺpci aspoň jednu konečnú hodnotu. Takúto maticu budeme nazývať stĺpcovo - konečná matica. Dôsledkom toho je existencia konečnej maximálnej priemernej váhy cyklu $\lambda(A)$.

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ je stĺpcovo - konečná ireducibilná matica. A je robustná vtedy a len vtedy, ak $\text{lper}(A) = 1$.

Robustnosť ireducibilnej matice - Príklad 1

Príklad

Zistime, či ireducibilná matica A je robustná

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 2 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Robustnosť ireducibilnej matice - Príklad 1

Riešenie

- stĺpcovo - konečná matica
- $\lambda(A) = 2$
- $$A_\lambda = \lambda(A)^{-1} \otimes A = 2^{-1} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 2 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$
- $\mathrm{per}(A_\lambda) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{lper}(A) = 1$

matica je robustná

Robustnosť ireducibilnej matice - Príklad 2

Príklad

Zistime, či ireducibilná matica A je robustná

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Robustnosť ireducibilnej matice - Príklad 2

Riešenie

- stĺpcovo - konečná matica
- $\lambda(A) = 0$
- $\mathrm{per}(A) = 3$

matica nie je robustná

Robustné matice - nutná a postačujúca podmienka

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$ je stĺpcovo - konečná reducibilná matica vo Frobeniovom normálnom tvare. Nech N_1, N_2, ..., N_t sú triedy matice A. A je robustná vtedy a len vtedy, ak platia nasledujúce podmienky

1. všetky netriviálne triedy N_1, N_2, ..., N_t sú spektrálne,
2. ak pre $i, j \in T$ sú N_i a N_j netriviálne triedy a $i \notin T_j$ a $j \notin T_i$, tak $\lambda(A_{ii}) = \lambda(A_{jj})$,
3. $\mathrm{lper}(A_{jj}) = 1$ pre všetky $j \in T$.

$$T_i = \{j \in T;\ N_j \longrightarrow N_i\}$$

Robustnosť reducibilnej matice - Príklad 1

Príklad

Zistime, či reducibilná matica A je robustná

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 3 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 2 \\ \varepsilon & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Robustnosť reducibilnej matice - Príklad 1

Riešenie

- stĺpcovo - konečná matica
- $\lambda(A_{11}) = \lambda(A_{22}) = \lambda(A_{33}) = 3 \quad \Longrightarrow$
  - ✓ všetky triedy sú spektrálne
  - ✓ platí druhá podmienka
  - ✗ $\mathrm{lper}(A_{22}) = \mathrm{lper}(A_{33}) = 2 \quad \Longrightarrow$ neplatí tretia podmienka

matica nie je robustná

Robustnosť reducibilnej matice - Príklad 2

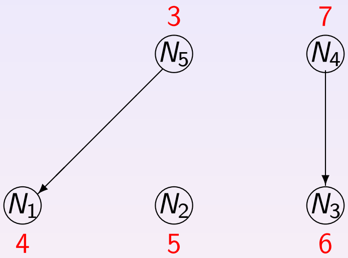
Príklad

Zistime, či reducibilná matica A je robustná

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc}
4 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & 5 & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & 4 & 6 & . & . & . & . \\
. & . & . & 6 & 2 & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & . & 4 & 0 & 5 & . & . \\
. & . & . & . & . & 3 & 7 & . & . \\
\hline
1 & 0 & . & . & . & . & . & 2 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & 2
\end{array}\right)$$

Robustnosť reducibilnej matice - Príklad 2

Riešenie



N_3 nie je spektrálna $\implies$ matica nie je robustná

Robustnosť reducibilnej matice - Príklad 3

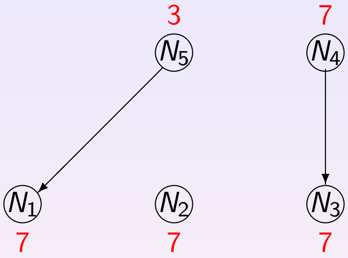
Príklad

Zistime, či reducibilná matica A je robustná

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc}
7 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & 7 & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & 7 & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & 4 & 7 & . & . & . & . \\
. & . & . & 7 & 2 & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & . & 4 & 0 & 5 & . & . \\
. & . & . & . & . & 3 & 7 & . & . \\
\hline
1 & 0 & . & . & . & . & . & 2 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & 2
\end{array}\right)$$

Robustnosť reducibilnej matice - Príklad 3

Riešenie



- ✓ všetky triedy sú spektrálne
- ✗ druhá podmienka neplatí:
  $2 \notin T_5 = \emptyset$ a $5 \notin T_2 = \emptyset$, ale $\lambda(A_{22}) \neq \lambda(A_{55})$

matica nie je robustná

Robustnosť reducibilnej matice - Príklad 4

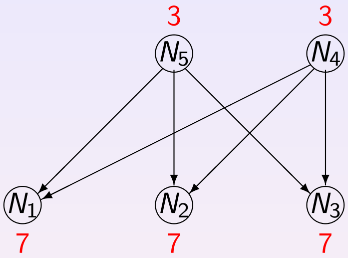
Príklad

Zistime, či reducibilná matica A je robustná

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc}
7 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & 7 & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & 7 & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & 4 & 7 & . & . & . & . \\
. & . & . & 7 & 2 & . & . & . & . \\
\hline
0 & . & 0 & . & 4 & 0 & 4 & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & 3 & . & . \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & 2
\end{array}\right)$$

Robustnosť reducibilnej matice - Príklad 4

Riešenie



- ✓ všetky triedy sú spektrálne
- ✓ platí druhá podmienka
- ✗ $\mathrm{lper}(A_{33}) = \mathrm{lper}(A_{55}) = 2 \neq 1 \quad \Longrightarrow$ neplatí tretia podmienka

matica nie je robustná

Robustnosť reducibilnej matice - Príklad 5

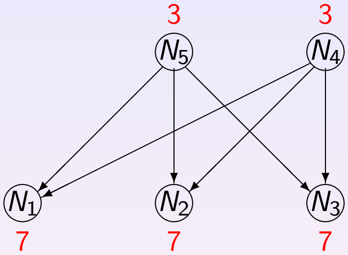
Príklad

Zistime, či reducibilná matica A je robustná

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc}
7 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & 7 & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & 7 & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & 7 & 7 & . & . & . & . \\
. & . & . & 7 & 2 & . & . & . & . \\
\hline
0 & . & 0 & . & 4 & 0 & 4 & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & 3 & . & . \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & 3
\end{array}\right)$$

Robustnosť reducibilnej matice - Príklad 5

Riešenie



- ✓ všetky triedy sú spektrálne
- ✓ platí druhá podmienka
- ✓ $\text{lper}(A_{ii}) = 1$ pre $i = 1, 2, \ldots, 5$

matica je robustná

Ďakujem za pozornosť.