Max-plus algebra

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Základné pojmy

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ a $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. Množinu všetkých vlastných vektorov matice A prislúchajúcich λ rozšírenú o ε nazveme vlastným priestorom matice A prislúchajúcim vlastnej hodnote λ a označíme $V(A,\lambda)$

$$V(A,\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^\star(n);\ A \otimes x = \lambda \otimes x\}$$

Množinu všetkých vlastných hodnôt matice A označíme $\Lambda(A)$

$$\Lambda(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}^\star;\ V(A,\lambda) \neq \{\varepsilon\}\}$$

Množinu všetkých vlastných vektorov matice A rozšírenú o ε označíme $V(A)$

$$V(A) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(A)} V(A,\lambda)$$

Hlavná vlastná hodnota

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Potom $\lambda(A)$ je jej vlastnou hodnotou. Ak je $\lambda(A)$ konečné, tak je každý stĺpcový vektor slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_{\lambda} = \lambda^{-1}(A) \otimes A$ zodpovedajúci nulovej hodnote na diagonále vlastným vektorom matice A prislúchajúcim vlastnej hodnote $\lambda(A)$.

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Vlastnú hodnotu $\lambda(A)$ nazveme hlavnou vlastnou hodnotou matice A.

Hlavný vlastný priestor

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Nech $\lambda(A)$ je konečné a Δ_1, Δ_2,..., Δ_n sú stĺpcové vektory slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$. Potom pre vlastný priestor matice A prislúchajúci vlastnej hodnote $\lambda(A)$ platí

$$V(A, \lambda(A)) = \left\{ \sum_{k \in N_c^*(A)}^{\oplus} \alpha_k \otimes \Delta_k;\ \alpha_k \in \mathbb{R}^{\star},\ k \in N_c^*(A) \right\}$$

kde $N_c^*(A)$ je maximálna množina neekvivalentných vlastných vrcholov matice A.

Hlavný vlastný priestor

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Vlastný vektor prislúchajúci hlavnej vlastnej hodnote $\lambda(A)$ nazveme hlavným vlastným vektorom matice A. Zodpovedajúci priestor vlastných vektorov $V(A, \lambda(A))$ nazveme hlavným vlastným priestorom matice A.

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Dimenziu hlavného vlastného priestoru matice A nazveme hlavnou dimenziou matice A a označíme $\mathrm{pd}\,(A)$.

Vysoko súvislé komponenty

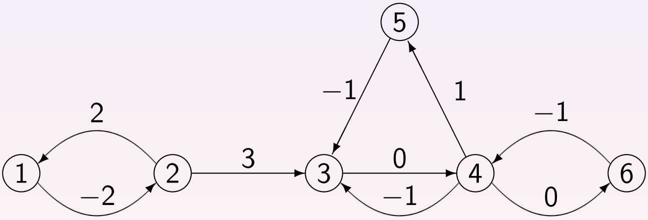
Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Hovoríme, že dva vrcholy $i,j \in \mathcal{G}(A)$ sú vysoko-spojené, zapisujeme $i \equiv_h j$, ak i a j ležia na spoločnom cykle c s priemernou váhou $\bar{w}(c) = \lambda(A)$ (kritickom cykle). Poddigrafy generované triedami ekvivalencie reflexívneho uzáveru $\equiv_h$ nazývame vysoko súvislé komponenty $\mathcal{G}(A)$. Množinu všetkých vysoko súvislých komponentov $\mathcal{G}(A)$ označme HCC$(\mathcal{G}(A))$. $\mathcal{K} \in$ HCC$(\mathcal{G}(A))$ sa nazýva triviálnym, ak $\mathcal{K}$ neobsahuje cyklus kladnej dĺžky s priemernou váhou rovnou $\lambda(A)$. Množinu všetkých netriviálnych vysoko súvislých komponentov (kritické komponenty) označujeme HCC$^*(\mathcal{G}(A))$. Poddigraf, ktorý obsahuje len kritické cykly, nazývame kritickým digrafom a označujeme $\mathcal{G}_c(A)$.

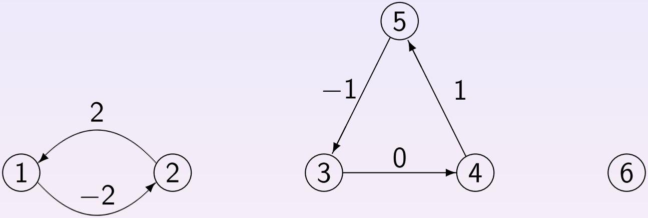
Vysoko súvislé komponenty

$$A = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

$\mathcal{G}(A)$



Vysoko súvislé komponenty



Obr. : Kritický digraf $\mathcal{G}_c(A)$

Dimenzia hlavného vlastného priestoru

Príklad

Určte hlavnú dimenziu matice A z predchádzajúceho príkladu.

Riešenie:

Platí: Hlavná dimenzia matice A sa rovná počtu netriviálnych vysoko súvislých (kritických) komponentov.

Kritické komponenty

$$\mathcal{K}_1 = \{1, 2\} \quad \text{a} \quad \mathcal{K}_2 = \{3, 4, 5\}$$

$$\mathrm{pd}\,(A) = 2$$

Báza hlavného vlastného priestoru

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Nech $\lambda(A)$ je konečné a Δ_1, Δ_2,..., Δ_n sú stĺpcové vektory slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$. Potom bázu hlavného vlastného priestoru matice $V(A, \lambda(A))$ dostaneme, ak pre každý netriviálny vysoko súvislý komponent zvolíme práve jeden vektor Δ_j prislúchajúci danému vysoko súvislému komponentu.

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 1

Príklad 1

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \varepsilon & A_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 1 & \varepsilon & 8 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 3 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 1

Príklad 1

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \varepsilon & A_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 1 & \varepsilon & 8 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 3 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 \end{array} \right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = \lambda(A_{22}) = 3 = \lambda(A)$.

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 1

Príklad 1

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \varepsilon & A_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 1 & \varepsilon & 8 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 3 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = \lambda(A_{22}) = 3 = \lambda(A)$.
2. Vytvoríme maticu A_λ: $A_\lambda = -3 \otimes A$.

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 1

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & 1 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & 5 & 5 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & -2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 1

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & 5 & 5 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & -2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \end{array}\right)$$

4. Na základe kritických komponentov $\mathcal{K}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{K}_2 = \{3\}$ a $\mathcal{K}_3 = \{4\}$ $(\mathrm{pd}\,(A) = 3)$ zvolíme $N_c^*(A) = \{1, 3, 4\}$ a určíme bázu:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 2

Príklad 2

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \varepsilon & A_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{array}\right)$$

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 2

Príklad 2

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \varepsilon & A_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{array}\right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = 2$, $\lambda(A_{22}) = 4 = \lambda(A)$.

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 2

Príklad 2

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \varepsilon & A_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{array}\right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = 2$, $\lambda(A_{22}) = 4 = \lambda(A)$.
2. Vytvoríme maticu A_λ: $A_\lambda = -4 \otimes A$.

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 2

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$$

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 2

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$$

4. Na základe kritických komponentov $\mathcal{K} = \{3\}$ $(\mathrm{pd}\,(A) = 1)$ zvolíme $N_c^*(A) = \{3\}$ a určíme bázu:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 3

Príklad 3

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline \varepsilon & A_{22} & A_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & A_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 3 & 6 & 0 \\ \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{array}\right)$$

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 3

Príklad 3

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline \varepsilon & A_{22} & A_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & A_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 3 & 6 & 0 \\ \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{array}\right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = 2$, $\lambda(A_{22}) = \lambda(A_{33}) = 4 = \lambda(A)$.

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 3

Príklad 3

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline \varepsilon & A_{22} & A_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & A_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 3 & 6 & 0 \\ \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{array}\right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = 2$, $\lambda(A_{22}) = \lambda(A_{33}) = 4 = \lambda(A)$.
2. Vytvoríme maticu A_λ: $A_\lambda = -4 \otimes A$.

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 3

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{c|cc|c} -2 & -5 & -3 & -9 \\ \hline \varepsilon & 0 & 2 & -4 \\ \varepsilon & -2 & 0 & -6 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$$

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 3

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{c|cc|c} -2 & -5 & -3 & -9 \\ \hline \varepsilon & 0 & 2 & -4 \\ \varepsilon & -2 & 0 & -6 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$$

4. Na základe kritických komponentov $\mathcal{K}_1 = \{2, 3\}$ a $\mathcal{K}_2 = \{4\}$ ($\mathrm{pd}\,(A) = 2$) zvolíme $N_c^*(A) = \{2, 4\}$ a určíme bázu:

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 4

Príklad 4

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline \varepsilon & A_{22} & A_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & A_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 4 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 3 & 6 & 0 \\ \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{array}\right)$$

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 4

Príklad 4

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline \varepsilon & A_{22} & A_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & A_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 4 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 3 & 6 & 0 \\ \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{array}\right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = \lambda(A_{22}) = 4 = \lambda(A)$, $\lambda(A_{33}) = 2$.

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 4

Príklad 4

Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline \varepsilon & A_{22} & A_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & A_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 4 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 3 & 6 & 0 \\ \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{array}\right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = \lambda(A_{22}) = 4 = \lambda(A)$, $\lambda(A_{33}) = 2$.
2. Vytvoríme maticu A_λ: $A_\lambda = -4 \otimes A$.

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 4

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & -5 & -3 & -9 \\ \hline \varepsilon & 0 & 2 & -4 \\ \varepsilon & -2 & 0 & -6 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 \end{array}\right)$$

Báza hlavného vlastného priestoru - Príklad 4

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & -5 & -3 & -9 \\ \hline \varepsilon & 0 & 2 & -4 \\ \varepsilon & -2 & 0 & -6 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 \end{array}\right)$$

4. Na základe kritických komponentov $\mathcal{K}_1 = \{1\}$ a $\mathcal{K}_2 = \{2, 3\}$ ($\mathrm{pd}\,(A) = 2$) zvolíme $N_c^*(A) = \{1, 2\}$ a určíme bázu:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Konečné vlastné vektory

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ a $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. Množinu všetkých konečných vlastných vektorov matice A prislúchajúcich λ označíme $V^+(A,\lambda)$

$$V^+(A,\lambda) = V(A,\lambda) \cap \mathbb{R}(n)$$

Množinu všetkých konečných vlastných vektorov matice A označíme $V^+(A)$

$$V^+(A) = V(A) \cap \mathbb{R}(n)$$

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Ak $A \neq \varepsilon$ a $V^+(A) \neq \emptyset$, tak je $\lambda(A)$ konečné a všetky konečné vlastné vektory matice prislúchajú vlastnej hodnote $\lambda(A)$

$$A \otimes x = \lambda(A) \otimes x \qquad \forall x \in V^+(A)$$

Nutná a postačujúca podmienka existencie konečného vlastného vektora

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Nech $\lambda(A)$ je konečné a Δ_1, Δ_2,..., Δ_n sú stĺpcové vektory slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$. Potom platí

$$V^+(A) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \sum_{k \in N_c(A)}^{\oplus} \Delta_k \quad \text{je konečný vektor}$$

kde $N_c(A)$ je množina vlastných vrcholov matice A.

Existencia konečného vlastného vektora - Príklad 1

Príklad 1

Rozhodnime o existencii konečného vlastného vektora matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \varepsilon & A_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 1 & \varepsilon & 8 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 3 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = \lambda(A_{22}) = 3 = \lambda(A)$.
2. Vytvoríme maticu A_λ: $A_\lambda = -3 \otimes A$.

Existencia konečného vlastného vektora - Príklad 1

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & 5 & 5 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & -2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \end{array}\right)$$

4. Vypočítame $\sum_{k \in N_c(A)}^{\oplus} \Delta_k$

$$\Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \Delta_3 \oplus \Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Existencia konečného vlastného vektora - Príklad 3

Príklad 3

Rozhodnime o existencii konečného vlastného vektora matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline \varepsilon & A_{22} & A_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & A_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 3 & 6 & 0 \\ \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{array}\right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = 2$, $\lambda(A_{22}) = \lambda(A_{33}) = 4 = \lambda(A)$.
2. Vytvoríme maticu A_λ: $A_\lambda = -4 \otimes A$.

Existencia konečného vlastného vektora - Príklad 3

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{c|cc|c} -2 & -5 & -3 & -9 \\ \hline \varepsilon & 0 & 2 & -4 \\ \varepsilon & -2 & 0 & -6 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$$

4. Vypočítame $\displaystyle\sum_{k \in N_c(A)}^{\oplus} \Delta_k$

$$\Delta_2 \oplus \Delta_3 \oplus \Delta_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Existencia konečného vlastného vektora - Príklad 4

Príklad 4

Rozhodnime o existencii konečného vlastného vektora matice A:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline \varepsilon & A_{22} & A_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & A_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 4 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 3 & 6 & 0 \\ \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{array}\right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = \lambda(A_{22}) = 4 = \lambda(A)$, $\lambda(A_{33}) = 2$.
2. Vytvoríme maticu A_λ: $A_\lambda = -4 \otimes A$.

Existencia konečného vlastného vektora - Príklad 4

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & -5 & -3 & -9 \\ \hline \varepsilon & 0 & 2 & -4 \\ \varepsilon & -2 & 0 & -6 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 \end{array}\right)$$

4. Vypočítame $\sum_{k \in N_c(A)}^{\oplus} \Delta_k$

$$\Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Priestor konečných vlastných vektorov

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\lambda(A)$ je konečné a Δ_1, Δ_2,..., Δ_n sú stĺpcové vektory slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$. Ak $V^+(A) \neq \emptyset$, tak

$$V^+(A) = \left\{ \sum_{k \in N_c^*(A)}^{\oplus} \alpha_k \otimes \Delta_k;\ \alpha_k \in \mathbb{R},\ k \in N_c^*(A) \right\}$$

kde $N_c^*(A)$ je maximálna množina neekvivalentných vlastných vrcholov matice A.

Priestor konečných vlastných vektorov - Príklad 3

Príklad 3

Popíšme priestor konečných vlastných vektorov matice A a nájdime jeho bázu, ak existuje:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline \varepsilon & A_{22} & A_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & A_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 3 & 6 & 0 \\ \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{array}\right)$$

Riešenie:

1. Vypočítame $\lambda(A_{11}) = \lambda(A_{22}) = \lambda(A) = 4$, $\lambda(A_{33}) = 2$.
2. Vytvoríme maticu A_λ: $A_\lambda = -4 \otimes A$.

Priestor konečných vlastných vektorov - Príklad 3

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{c|cc|c} -2 & -5 & -3 & -9 \\ \hline \varepsilon & 0 & 2 & -4 \\ \varepsilon & -2 & 0 & -6 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$$

4. Popíšeme

$$V^+(A) = \left\{ \sum_{k \in N_c^*(A)}^{\oplus} \alpha_k \otimes \Delta_k;\ \alpha_k \in \mathbb{R},\ k \in N_c^*(A) \right\}$$

$$V^+(A) = \{\alpha_2 \otimes \Delta_2 \oplus \alpha_4 \otimes \Delta_4;\ \alpha_2,\ \alpha_4 \in \mathbb{R}\}$$

Báza priestoru konečných vlastných vektorov neexistuje.

Vlastné hodnoty matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$ a $\lambda \in \Lambda(A)$. Potom $V(A) - \{\varepsilon\} = V^{+}(A)$ vtedy a len vtedy, ak A je ireducibilná.

Poznámka: Veta nevylučuje, aby aj reducibilná matica mala konečné vlastné vektory.

Frobeniov normálny tvar matice

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Hovoríme, že matica je vo Frobeniovom normálnom tvare, ak je v tvare

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & \varepsilon \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{t1} & A_{t2} & \dots & A_{tt} \end{array}\right)$$

kde A_{11}, A_{22}, ..., A_{tt} sú ireducibilné štvorcové matice.

Poznámka: Každá matica sa dá napísať po konečnom počte permutácií riadkov a stĺpcov vo Frobeniovom normálnom tvare.

Triedy matice

Maticiam A_{11}, A_{22}, ..., A_{tt} zodpovedajú silne súvislé komponenty v digrafe s vrcholovými množinami N_1, N_2, ..., N_t. Zodpovedajúci kondenzovaný digraf s vrcholmi N_1, N_2, ..., N_t spĺňa podmienku: Ak vedie hrana z vrchola N_i do vrchola N_j, tak $i \geq j$.

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ je vo Frobeniovom normálnom tvare. Nech A_{11}, A_{22}, ..., A_{tt} sú všetky diagonálne bloky matice A a N_1, N_2, ..., N_t zodpovedajúce vrcholové množiny v digrafe. Triedami matice A budeme nazývať množiny N_1, N_2, ..., N_t.

Kondenzovaný digraf - Príklad

Príklad

Nakreslime kondenzovaný digraf matice A vo Frobeniovom normálnom tvare:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
A_{11} & . & . & . & . & . & . \\ \hline
. & A_{22} & . & . & . & . & . \\ \hline
. & * & A_{33} & . & . & . & . \\ \hline
. & . & * & A_{44} & . & . & . \\ \hline
. & * & * & . & A_{55} & . & . \\ \hline
. & . & . & . & . & A_{66} & . \\ \hline
. & . & . & . & . & * & A_{77}
\end{array}\right)$$

Kondenzovaný digraf - Príklad

Riešenie: Kondenzovaný digraf

$$
\begin{tikzcd}
 & N_5 \arrow[d] \arrow[dr] & N_4 \arrow[d] & N_7 \arrow[d] \\
N_1 & N_2 & N_3 \arrow[l] & N_6
\end{tikzcd}
$$

Začiatočné a koncové triedy matice

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$ je vo Frobeniovom normálnom tvare. Nech N_1, N_2, ..., N_t sú triedy matice A. Začiatočnými triedami matice A budeme nazývať tie triedy matice A, do ktorých v kondenzovanom digrafe nevchádza žiadne hrana. Koncovými triedami matice A budeme nazývať tie triedy matice A, z ktorých v kondenzovanom digrafe nevychádza žiadna hrana.

Začiatočné a koncové triedy matice - Príklad

Príklad

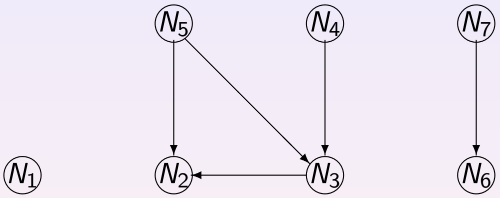
Určme začiatočné a koncové triedy matice A, ktorej kondenzovaný digraf je:

$$\begin{tikzcd} & N_5 \arrow[d] \arrow[dr] & N_4 \arrow[d] & N_7 \arrow[d] \\ N_1 & N_2 & N_3 \arrow[l] & N_6 \end{tikzcd}$$

Začiatočné a koncové triedy matice - Príklad

Príklad

Určme začiatočné a koncové triedy matice A, ktorej kondenzovaný digraf je:



Riešenie:

- začiatočné triedy: N_1, N_4, N_5, N_7
- koncové triedy: N_1, N_2, N_6

Množina všetkých vlastných hodnôt matice - spektrálna veta

Veta (Spektrálna veta)

Nech

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & \varepsilon & \ldots & \varepsilon \\ \hline A_{21} & A_{22} & \ldots & \varepsilon \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline A_{t1} & A_{t2} & \ldots & A_{tt} \end{array}\right)$$

je Frobeniov normálny tvar matice $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Potom pre množinu všetkých vlastných hodnôt matice A platí

$$\Lambda(A) = \{\lambda(A_{jj});\ \lambda(A_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \lambda(A_{ii})\}$$

Vlastné hodnoty matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ a $\lambda \in \Lambda(A)$. Nech $x \in V(A,\lambda) - V^+(A,\lambda)$ a nepozostáva výlučne z ε. Potom $n > 1$ a matica A sa dá napísať v tvare

$$\left(\begin{array}{c|c} A^{(11)} & \varepsilon \\ \hline A^{(21)} & A^{(22)} \end{array}\right),$$

pričom $\lambda = \lambda(A^{(22)})$.

D: Po permutácii riadkov a stĺpcov matice A dostaneme pre nejaké $1 \leq p < n$ vektor x v tvare

$$x_{per} = (x^{(1)}, x^{(2)})^\top = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_p}_{\varepsilon}, \underbrace{x_{p+1}, \ldots, x_n}_{\text{konečné}})^\top$$

Vlastné hodnoty matice

a maticu A_{per}

$$A_{per} = \left(\begin{array}{c|c} A^{(11)} & A^{(12)} \\ \hline A^{(21)} & A^{(22)} \end{array} \right)$$

kde $A^{(11)}$ je štvorcová matica rádu p
Z rovnosti $A_{per} \otimes x_{per} = \lambda \otimes x_{per}$ dostaneme po blokoch

$$\begin{array}{rcl} A^{(12)} \otimes x^{(2)} & = & \varepsilon \\ A^{(22)} \otimes x^{(2)} & = & \lambda \otimes x^{(2)} \end{array}$$

Teda $\lambda = \lambda(A^{(22)})$ a $A^{(12)}$ pozostáva výlučne z ε.

Spektrálna veta - dôkaz

D(spektrálna veta):

$$\text{platí} \quad \lambda(A) = \max_{i=1,2,\dots,t} \lambda(A_{ii})$$

$\supseteq$
nech pre ľubovoľné $j \in \{1, 2, \dots, t\}$

$$\lambda(A_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \lambda(A_{ii}) \qquad (1)$$

označme množiny indexov

$$\begin{aligned} S_2 &= \{i \in \{1, 2, \dots, t\};\ N_i \to N_j\} \\ S_1 &= \{1, 2, \dots, t\} - S_2 \end{aligned}$$

a zodpovedajúce množiny tried

$$\begin{aligned} M_2 &= \bigcup_{i \in S_2} N_i \\ M_1 &= \bigcup_{i \in S_1} N_i \end{aligned}$$

Spektrálna veta - dôkaz

$\stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \lambda(A_{jj}) = \lambda(A[M_2])$ a

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|c} A[M_1] & \varepsilon \\ \hline * & A[M_2] \end{array}\right)$$

ε ... musí pozostávať z ε (z vrcholov S_1 neidú hrany do vrcholov S_2)
$*$ ... môže pozostávať z ľubovoľných hodnôt (teda aj výlučne z ε)
(z vrcholov S_2 môžu ísť hrany do vrcholov S_1)

položme $x = (x[M_1], x[M_2])^\top$

- $x[M_2]$ je konečný vlastný vektor $A[M_2]$ zodpovedajúci $\lambda(A_{jj})$
- $x[M_1] = \varepsilon$

overme

$$A \otimes x = \lambda(A_{jj}) \otimes x$$

Spektrálna veta - dôkaz

Z rovnosti $A \otimes x = \lambda(A_{jj}) \otimes x$ dostaneme po blokoch

$$\begin{array}{rcl} A[M_1] \otimes x[M_1] \oplus \varepsilon \otimes x[M_2] & = & \lambda(A_{jj}) \otimes x[M_1] \\ * \otimes x[M_1] \oplus A[M_2] \otimes x[M_2] & = & \lambda(A_{jj}) \otimes x[M_2] \end{array}$$

teda

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon & = & \varepsilon \\ A[M_2] \otimes x[M_2] & = & \lambda(A_{jj}) \otimes x[M_2] \end{array}$$

$\Longrightarrow \lambda(A_{jj}) \in \Lambda(A)$

Spektrálna veta - dôkaz

$\subseteq$

nech $\lambda \in \Lambda(A)$ a x je zodpovedajúci vlastný vektor

môžu nastať dva prípady

1. nech x je konečný vlastný vektor matice $A \Longrightarrow$

$$\lambda = \lambda(A) = \max_{i=1,2,\ldots,t} \lambda(A_{ii})$$

2. nech x nie je konečný vlastný vektor matice $A \Longrightarrow$ po permutácii riadkov a stĺpcov matice A dostaneme pre nejaké $1 \leq p < n$ vektor x v tvare

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)})^\top = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_p}_{\varepsilon}, \underbrace{x_{p+1}, \ldots, x_n}_{\text{konečné}})^\top$$

Spektrálna veta - dôkaz

a maticu A v tvare

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|c} A^{(11)} & \varepsilon \\ \hline A^{(21)} & A^{(22)} \end{array} \right)$$

kde $A^{(11)}$ a $A^{(22)}$ predpokladajme, sú vo FNT a teda A je tiež vo FNT

nech

$$A^{(11)} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{i_1 i_1} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \hline A_{i_2 i_1} & A_{i_2 i_2} & \dots & \varepsilon \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{i_s i_1} & A_{i_s i_2} & \dots & A_{i_s i_s} \end{array} \right)$$

Spektrálna veta - dôkaz

nech

$$A^{(22)} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{i_{s+1} i_{s+1}} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \hline A_{i_{s+2} i_{s+1}} & A_{i_{s+2} i_{s+2}} & \dots & \varepsilon \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{i_t i_{s+1}} & A_{i_t i_{s+2}} & \dots & A_{i_t i_t} \end{array}\right)$$

$\overset{\text{veta}}{\Longrightarrow}$

$$\lambda = \lambda(A^{(22)}) = \lambda(A_{jj}) = \max_{i=s+1,\dots,t} \lambda(A_{ii})$$

ak $N_i \to N_j$, tak $i \in \{s+1, \dots, t\}$

Spektrálne triedy matice

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ je vo Frobeniovom normálnom tvare. Ak

$$\lambda(A_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \lambda(A_{ii})$$

tak N_j budeme nazývať spektrálnou triedou matice A.

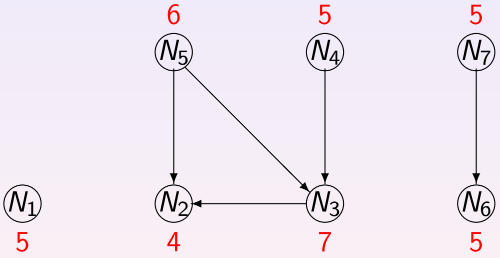
Poznámka 1: Jedná sa o tie triedy matice, do ktorých nevchádza hrana z tried s vyššou hodnotou λ.

Poznámka 2: Ak N_j je spektrálna, tak $\lambda(A_{jj}) \in \Lambda(A)$.

Spektrálne triedy matice - Príklad

Príklad

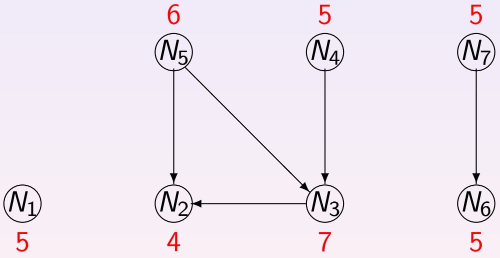
Určme spektrálne triedy matice A s $\lambda(A_{11}) = 5$, $\lambda(A_{22}) = 4$, $\lambda(A_{33}) = 7$, $\lambda(A_{44}) = 5$, $\lambda(A_{55}) = 6$, $\lambda(A_{66}) = 5$, $\lambda(A_{77}) = 5$, ktorej kondenzovaný digraf je:



Spektrálne triedy matice - Príklad

Príklad

Určme spektrálne triedy matice A s $\lambda(A_{11}) = 5$, $\lambda(A_{22}) = 4$, $\lambda(A_{33}) = 7$, $\lambda(A_{44}) = 5$, $\lambda(A_{55}) = 6$, $\lambda(A_{66}) = 5$, $\lambda(A_{77}) = 5$, ktorej kondenzovaný digraf je:



Riešenie:

- spektrálne triedy: N_1, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7

Množina všetkých vlastných hodnôt matice - Príklad

Príklad

Určme množinu všetkých konečných vlastných hodnôt $\Lambda(A)$ matice z predchádzajúceho príkladu

Riešenie:

- spektrálne triedy: N_1, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7 $\Longrightarrow$
- $$\begin{aligned} \Lambda(A) &= \{\lambda(A_{11}), \lambda(A_{33}), \lambda(A_{44}), \lambda(A_{55}), \lambda(A_{66}), \lambda(A_{77})\} = \\ &= \{5, 7, 6\} \end{aligned}$$

Hlavná vlastná hodnota matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Potom všetky začiatočné triedy matice A sú spektrálne.

D: Do začiatočnej triedy nevedie žiadna hrana a teda nemôže viesť ani hrana s väčšou hodnotou λ.

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Pre hlavnú vlastnú hodnotu matice A platí

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \max \Lambda(A)\\ &= \max\{\lambda;\ (\exists x \in \mathbb{R}^\star(n),\ x \neq \varepsilon)\ \ A \otimes x = \lambda \otimes x\}\end{aligned}$$

Počet vlastných hodnôt matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Potom pre počet vlastných hodnôt matice A platí: $1 \leq |\Lambda(A)| \leq n$.

D: Počet tried matice A je rovný nanajvýš n.

Nutná a postačujúca podmienka výlučnosti $\lambda(A)$

Veta (nutná a postačujúca podmienka)

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné

- $V(A) = V(A, \lambda(A))$
- všetky začiatočné triedy majú vlastnú hodnotu $\lambda(A)$.

D: $\Longrightarrow$
nech $V(A) = V(A, \lambda(A)) \rightarrow \Lambda(A) = \{\lambda(A)\}$
všetky začiatočné triedy N_j sú spektrálne a teda pre príslušné vlastné hodnoty platí: $\lambda(A_{jj}) \in \Lambda(A) \Longrightarrow \lambda(A_{jj}) = \lambda(A)$
$\Longleftarrow$
nech všetky začiatočné triedy majú vlastnú hodnotu $\lambda(A)$
nech λ je vlastná hodnota nejakej spektrálnej triedy (nie zač.)

$$\Longrightarrow \quad \lambda \geq \max_i \lambda(A_{ii}) \quad \Longrightarrow$$

existuje dráha z nejakej zač. triedy do tejto triedy $\Longrightarrow \lambda = \lambda(A)$

Všetky vlastné priestory matice

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je vo FNT. Nech N_1, N_2, ..., N_t sú triedy matice A. Nech $T = \{1, 2, \dots, t\}$. Pre ľubovoľné $\lambda \in \Lambda(A)$ označíme

$$I(\lambda) = \{i \in T;\ \lambda(A_{ii}) = \lambda,\ N_i \text{ je spektrálny }\}$$

a množinu vlastných vrcholov prislúchajúcich hodnote λ

$$N_c(\lambda) = \bigcup_{i \in I(\lambda)} N_c(A_{ii}) = \left\{ j \in N;\ \delta_{jj} = 0,\ j \in \bigcup_{i \in I(\lambda)} N_i \right\}$$

kde δ_{jj} je diagonálny prvok slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1} \otimes A$

Hovoríme, že vrcholy i a j sú λ- ekvivalentné, ak ležia na spoločnom cykle s priemernou váhou λ. Označujeme $i \sim_\lambda j$.

Všetky vlastné priestory matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ a $\lambda \in \Lambda(A)$ je konečné. Nech Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n sú stĺpce slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1} \otimes A$. Potom $\Delta_j \in \mathbb{R}^{\star}(n)$ (teda neobsahujú $+\infty$) pre všetky $j \in N_c(\lambda)$ a bázu príslušného vlastného priestoru $V(A, \lambda)$ dostaneme, ak zoberieme jeden vektor Δ_j pre každú triedu ekvivalencie $\sim_\lambda$.

D: označme $M = \bigcup_{i \in I(\lambda)} N_i \implies A$ môžeme zapísať v tvare

$$\left(\begin{array}{c|c} * & \varepsilon \\ \hline * & A[M] \end{array}\right)$$

a teda aj slabý tranzitívny uzáver matice $A_\lambda = \lambda^{-1} \otimes A$ má tvar

$$\left(\begin{array}{c|c} * & \varepsilon \\ \hline * & C \end{array}\right)$$

kde C je slabý tranzitívny uzáver matice $(\lambda(A[M]))^{-1} \otimes A[M]$

Všetky vlastné priestory matice - Algoritmus

Algoritmus nájdenia vlastných priestorov matice pre vlastné hodnoty $\lambda \in \Lambda(A)$ s použitím spektrálnej vety:

1. nájdeme všetky vlastné hodnoty (všetky spektrálne triedy)
2. pre každú konečnú vlastnú hodnotu $\lambda \in \Lambda(A)$ určíme $I(\lambda)$
   - ak $I(\lambda) = \{j\}$, vytvoríme množiny

     $$M_2 = \bigcup_{N_i \to N_j} N_i \qquad M_1 = N - M_2$$

     a

     $$V(A, \lambda) = \{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\}$$

   - ak $|I(\lambda)| > 1$, pre každú neprázdnu podmnožinu $J \subseteq I(\lambda)$ vytvoríme množinu $S = \bigcup_{j \in J} N_j$ a

     $$M_2 = \bigcup_{N_i \to S} N_i \qquad M_1 = N - M_2$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 1

Príklad

Pre danú maticu A vo Frobeniovom normálnom tvare:

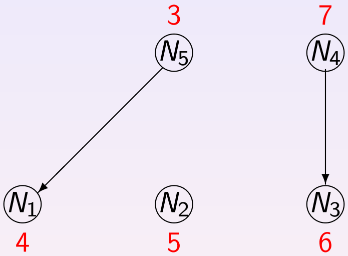
$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc}
4 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & 5 & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & 4 & 6 & . & . & . & . \\
. & . & . & 6 & 2 & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & . & 4 & 0 & 5 & . & . \\
. & . & . & . & . & 3 & 7 & . & . \\
\hline
1 & 0 & . & . & . & . & . & 2 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & 2
\end{array}\right)$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 1

1. Určme triedy matice A.
2. Určme, ktoré z tried sú začiatočné, ktoré koncové a ktoré spektrálne.
3. Určme množinu všetkých vlastných hodnôt matice A.
4. Určme pre každú vlastnú hodnotu bázu vlastného priestoru a popíšme ho.
5. Rozhodnime, či je $V^+(A) = \emptyset$.

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 1

Riešenie:



Všetky vlastné priestory matice - Príklad 1

1. $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3\}$, $N_3 = \{4, 5\}$, $N_4 = \{6, 7\}$, $N_5 = \{8, 9\}$.
2.
   - začiatočné triedy: N_2, N_4, N_5
   - koncové triedy: N_1, N_2, N_3
   - spektrálne triedy: N_1, N_2, N_4, N_5
3. $\Lambda(A) = \{\lambda(A_{11}), \lambda(A_{22}), \lambda(A_{44}), \lambda(A_{55})\} = \{4, 5, 7, 3\}$.

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 1

4. báza vlastného priestoru pre jednotlivé vlastné hodnoty
   - $\lambda = 4 \implies I(\lambda) = \{1\}$

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to N_1} N_i = \{N_1, N_5\} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_2, N_3, N_4\}$$

$$V(A,\lambda) = \{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\}$$

$$A[M_2] = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & \varepsilon \\ \hline A_{51} & A_{55} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 2 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$A_\lambda[M_2] = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -3 & -4 & -2 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 1

$$\Delta(A_\lambda[M_2]) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -3 & -3 & -2 & 0 \\ -5 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

báza: $\{(0,-2,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-3,-5)^\top,(0,0,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-3,-5)^\top\}$

$$\begin{aligned} V(A,\lambda) \quad = \quad & \{\alpha \otimes (0,-2,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-3,-5)^\top \oplus \\ & \oplus \beta \otimes (0,0,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-3,-5)^\top;\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}^\star\} \end{aligned}$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 1

- $\lambda = 5 \implies I(\lambda) = \{2\}$

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to N_2} N_i = \{N_2\} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_1, N_3, N_4, N_5\}$$

$$V(A, \lambda) = \left\{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\right\}$$

$$A[M_2] = (A_{22}) = (5)$$

$$A_\lambda[M_2] = (0) = \Delta(A_\lambda[M_2])$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{báza:} & \mathcal{B} & = & \{(\varepsilon, \varepsilon, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)^\top\} \\ & V(A, \lambda) & = & \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)^\top,\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\} \end{array}$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 1

- $\lambda = 7 \implies I(\lambda) = \{4\}$

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to N_4} N_i = \{N_4\} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_1, N_2, N_3, N_5\}$$

$$V(A,\lambda) = \{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\}$$

$$A[M_2] = (A_{44}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_\lambda[M_2] = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta(A_\lambda[M_2]) = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{báza:} \qquad \mathcal{B} &= \{(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-2,0,\varepsilon,\varepsilon)^\top\} \\ V(A,\lambda) &= \{\alpha \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-2,0,\varepsilon,\varepsilon)^\top,\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\} \end{aligned}$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 1

- $\lambda = 3 \implies I(\lambda) = \{5\}$

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to N_5} N_i = \{N_5\} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$$

$$V(A,\lambda) = \{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\}$$

$$A[M_2] = (A_{55}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_\lambda[M_2] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Delta(A_\lambda[M_2]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{báza:} \qquad \mathcal{B} &= \{(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0,-1)^\top\} \\ V(A,\lambda) &= \{\alpha \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0,-1)^\top,\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\} \end{aligned}$$

Konečné vlastné vektory matice

Veta (nutná a postačujúca podmienka existencie)

$V^+(A) \neq \emptyset$ vtedy a len vtedy ak vlastná hodnota všetkých koncových tried je rovná $\lambda(A)$.

Veta

$V^+(A) = \emptyset$ vtedy a len vtedy ak vlastná hodnota niektorej koncovej triedy je menšia ako $\lambda(A)$.

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 1

5. existuje koncová trieda, ktorej vlastná hodnota je menšia ako $\lambda(A) = 7$

$$\lambda(A_{11}) = 4 \quad \Longrightarrow \quad V^{+}(A) = \emptyset$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

Príklad

Pre danú maticu A vo Frobeniovom normálnom tvare:

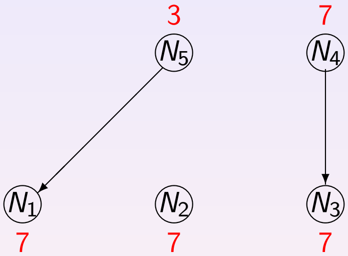
$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc}
7 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & 7 & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & 7 & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & 4 & 7 & . & . & . & . \\
. & . & . & 7 & 2 & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & . & 4 & 0 & 5 & . & . \\
. & . & . & . & . & 3 & 7 & . & . \\
\hline
1 & 0 & . & . & . & . & . & 2 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & 2
\end{array}\right)$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

1. Určme triedy matice A.
2. Určme, ktoré z tried sú začiatočné, ktoré koncové a ktoré spektrálne.
3. Určme množinu všetkých vlastných hodnôt matice A.
4. Určme pre každú vlastnú hodnotu bázu vlastného priestoru a popíšme ho.
5. Rozhodnime, či je $V^+(A) = \emptyset$.

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

Riešenie:



Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

1. $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3\}$, $N_3 = \{4, 5\}$, $N_4 = \{6, 7\}$, $N_5 = \{8, 9\}$.
2.
   - začiatočné triedy: N_2, N_4, N_5
   - koncové triedy: N_1, N_2, N_3
   - spektrálne triedy: N_1, N_2, N_3, N_4, N_5
3. $\Lambda(A) = \{\lambda(A_{11}), \lambda(A_{22}), \lambda(A_{33}), \lambda(A_{44}), \lambda(A_{55})\} = \{7, 3\}$.

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

4. báza vlastného priestoru pre jednotlivé vlastné hodnoty
   - $\lambda = 7 \implies I(\lambda) = \{1, 2, 3, 4\}$
     zoberieme tie neprázdne podmnožiny $J \subseteq I(\lambda)$, ktoré pokryjú všetky možnosti, vytvoríme množinu $S = \bigcup_{j \in J} N_j$

$$J = \{1\} \quad \implies \quad S = \{N_1\}$$

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to S} N_i = \{N_1, N_5\} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_2, N_3, N_4\}$$

$$V(A, \lambda) = \{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\}$$

$$A[M_2] = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & \varepsilon \\ \hline A_{51} & A_{55} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 2 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

$$\Delta(A_\lambda[M_2]) = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -3 & \varepsilon & \varepsilon \\ -5 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -6 & -7 & -5 & -3 \\ -11 & -12 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

prvky bázy:

$$(0, -5, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -6, -11)^\top$$

$$(-3, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -7, -12)^\top$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

$$J = \{3, 4\} \quad \Longrightarrow \quad S = \{N_3, N_4\}$$

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to S} N_i = \{N_3, N_4\} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_1, N_2, N_5\}$$

$$V(A, \lambda) = \{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\}$$

$$A[M_2] = \left(\begin{array}{c|c} A_{33} & \varepsilon \\ \hline A_{43} & A_{44} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 4 & 0 & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

$$\Delta(A_\lambda[M_2]) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -3 & -3 & -6 & -2 \\ -7 & -7 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

prvky bázy:

$$(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, 0, -3, -7, \varepsilon, \varepsilon)^\top$$

$$(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -2, 0, \varepsilon, \varepsilon)^\top$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

$$J = \{2\} \quad \Longrightarrow \quad S = \{N_2\}$$

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to S} N_i = \{N_2\} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_1, N_3, N_4, N_5\}$$

$$V(A, \lambda) = \{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\}$$

$$A[M_2] = (A_{22}) = (7)$$

$$A_\lambda[M_2] = (0) = \Delta(A_\lambda[M_2])$$

prvok bázy:

$$(\varepsilon, \varepsilon, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)^\top$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

$$
\begin{aligned}
\text{báza:} \qquad \mathcal{B} &= \{(0,-5,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-6,-11)^\top, \\
&\quad (-3,0,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-7,-12)^\top, \\
&\quad (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0,0,-3,-7,\varepsilon,\varepsilon)^\top, \\
&\quad (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-2,0,\varepsilon,\varepsilon)^\top, \\
&\quad (\varepsilon,\varepsilon,0,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)^\top\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(A,7) &= \{\alpha \otimes (0,-5,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-6,-11)^\top \oplus \\
&\quad \beta \otimes (-3,0,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-7,-12)^\top \oplus \\
&\quad \gamma \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0,0,-3,-7,\varepsilon,\varepsilon)^\top \oplus \\
&\quad \delta \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-2,0,\varepsilon,\varepsilon)^\top \oplus \\
&\quad \omega \otimes (\varepsilon,\varepsilon,0,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)^\top,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta,\omega \in \mathbb{R}^\star\}
\end{aligned}
$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

- $\lambda = 3 \implies I(\lambda) = \{5\}$

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to N_5} N_i = \{N_5\} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$$

$$V(A,\lambda) = \left\{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\right\}$$

$$A[M_2] = (A_{55}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_\lambda[M_2] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Delta(A_\lambda[M_2]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{báza:} & \mathcal{B} & = & \{(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0,-1)^\top\} \\ & V(A,3) & = & \{\alpha \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0,-1)^\top,\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\} \end{array}$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 2

5. neexistuje koncová trieda, ktorej vlastná hodnota je menšia ako $\lambda(A) = 7$

$$\Longrightarrow \quad V^{+}(A) \neq \emptyset$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

Príklad

Pre danú maticu A vo Frobeniovom normálnom tvare:

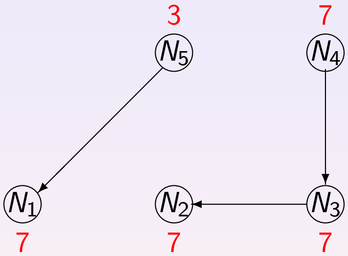
$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc}
7 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & 7 & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & 7 & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & 6 & 4 & 7 & . & . & . & . \\
. & . & . & 7 & 2 & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & . & 4 & 0 & 5 & . & . \\
. & . & . & . & . & 3 & 7 & . & . \\
\hline
1 & 0 & . & . & . & . & . & 2 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & 2
\end{array}\right)$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

1. Určme triedy matice A.
2. Určme, ktoré z tried sú začiatočné, ktoré koncové a ktoré spektrálne.
3. Určme množinu všetkých vlastných hodnôt matice A.
4. Určme pre každú vlastnú hodnotu bázu vlastného priestoru a popíšme ho.
5. Rozhodnime, či je $V^+(A) = \emptyset$.

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

Riešenie:



Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

1. $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3\}$, $N_3 = \{4, 5\}$, $N_4 = \{6, 7\}$, $N_5 = \{8, 9\}$.
2. - začiatočné triedy: N_4, N_5
   - koncové triedy: N_1, N_2
   - spektrálne triedy: N_1, N_2, N_3, N_4, N_5
3. $\Lambda(A) = \{\lambda(A_{11}), \lambda(A_{22}), \lambda(A_{33}), \lambda(A_{44}), \lambda(A_{55})\} = \{7, 3\}$.

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

4. báza vlastného priestoru pre jednotlivé vlastné hodnoty
   - $\lambda = 7 \implies I(\lambda) = \{1, 2, 3, 4\}$
     zoberieme tie neprázdne podmnožiny $J \subseteq I(\lambda)$, ktoré pokryjú všetky možnosti, vytvoríme množinu $S = \bigcup_{j \in J} N_j$

     $$J = \{1\} \quad \implies \quad S = \{N_1\}$$

     $$M_2 = \bigcup_{N_i \to S} N_i = \{N_1, N_5\} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_2, N_3, N_4\}$$

     $$V(A, \lambda) = \{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\}$$

     $$A[M_2] = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & \varepsilon \\ \hline A_{51} & A_{55} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 2 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

$$\Delta(A_\lambda[M_2]) = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -3 & \varepsilon & \varepsilon \\ -5 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -6 & -7 & -5 & -3 \\ -11 & -12 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

prvky bázy:

$$(0, -5, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -6, -11)^\top$$

$$(-3, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -7, -12)^\top$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

prípady:

$$J = \{4\} \quad \Longrightarrow \quad S = \{N_4\}$$

$$\left.\begin{array}{l} J = \{3\} \\ J = \{3,4\} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad S = \{N_3, N_4\}$$

sú obsiahnuté v prípadoch:

$$\left.\begin{array}{l} J = \{2\} \\ J = \{2,3\} \\ J = \{2,4\} \\ J = \{2,3,4\} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad S = \{N_2, N_3, N_4\}$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to S} N_i = \{N_2, N_3, N_4\} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_1, N_5\}$$

$$V(A, \lambda) = \{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\}$$

$$A[M_2] = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{22} & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline A_{32} & A_{33} & \varepsilon \\ \hline A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 6 & 4 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 4 & 0 & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

$$\Delta(A_\lambda[M_2]) = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -1 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -4 & -3 & -3 & -6 & -2 \\ -8 & -7 & -7 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

prvky bázy:

$$(\varepsilon, \varepsilon, 0, -1, -1, -4, -8, \varepsilon, \varepsilon)^\top$$

$$(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, 0, -3, -7, \varepsilon, \varepsilon)^\top$$

$$(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -2, 0, \varepsilon, \varepsilon)^\top$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

$$\begin{aligned}
\text{báza:} \qquad \mathcal{B} &= \{(0,-5,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-6,-11)^\top, \\
&(-3,0,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-7,-12)^\top, \\
&(\varepsilon,\varepsilon,0,-1,-1,-4,-8,\varepsilon,\varepsilon)^\top, \\
&(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0,0,-3,-7,\varepsilon,\varepsilon)^\top, \\
&(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-2,0,\varepsilon,\varepsilon)^\top\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(A,7) &= \{\alpha \otimes (0,-5,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-6,-11)^\top \oplus \\
&\beta \otimes (-3,0,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-7,-12)^\top \oplus \\
&\gamma \otimes (\varepsilon,\varepsilon,0,-1,-1,-4,-8,\varepsilon,\varepsilon)^\top \oplus \\
&\delta \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0,0,-3,-7,\varepsilon,\varepsilon)^\top \oplus \\
&\omega \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-2,0,\varepsilon,\varepsilon)^\top,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta,\omega \in \mathbb{R}^\star\}
\end{aligned}$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

- $\lambda = 3 \implies I(\lambda) = \{5\}$

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to N_5} N_i = \{N_5\} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$$

$$V(A, \lambda) = \{x;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\}$$

$$A[M_2] = (A_{55}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_\lambda[M_2] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Delta(A_\lambda[M_2]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{báza:} \qquad \mathcal{B} &= \{(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -1)^\top\} \\ V(A, 3) &= \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -1)^\top,\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\} \end{aligned}$$

Všetky vlastné priestory matice - Príklad 3

5. neexistuje koncová trieda, ktorej vlastná hodnota je menšia ako $\lambda(A) = 7$

$$\Longrightarrow \quad V^{+}(A) \neq \emptyset$$

Ďakujem za pozornosť.