ALGEBRA

Číselné množiny a operácie s nimi. Úprava algebrických výrazov

Definícia 1 **Množinu** *považujeme za určenú, ak vieme o ľubovoľnom objekte rozhodnúť, či je alebo nie je prvkom množiny. Množinu určujeme spravidla jedným z týchto spôsobov:*

- *vymenovaním (vypísaním) všetkých prvkov, napr.* $A = \{1;\ 4;\ 3{,}2\}$, $B = \{a,\ b\}$, $C = \{0\}$;
- *uvedením charakteristických vlastností prvkov, ktoré patria do množiny, napr. množina študentov 1. ročníka na FEI TU v Košiciach v roku 2013 alebo množina* $A = \{x \in \mathbb{R};\ x < 1\}$.

Definícia 2 *Nech* A, B *sú množiny. Zápis* $A = B$ *označuje ich* **rovnosť**, $A \cup B$ *ich* **zjednotenie**, $A \cap B$ *ich* **prienik**, $A - B$ *ich* **rozdiel** *(v danom poradí). Zápis* $A \subset B$ *znamená, že množina* A *je* **podmnožinou množiny** B. *Ak* $A \subset B$, *tak množinu* $B - A$ *nazývame* **doplnok množiny** A *v množine* B.

Číselné množiny (obory) definujeme intuitívne na základe ich vlastností (exaktné definície sú viazané na zložitý matematický aparát). Budeme používať tieto označenia:

$\mathbb{N}$ – **obor prirodzených čísel** (množina všetkých prirodzených čísel). Sú to čísla 1, 2, 3, 4, 5, ... Slúžia na vyjadrenie počtu[1];

$\mathbb{Z}$ – **obor celých čísel** (množina všetkých celých čísel);

$\mathbb{Q}$ – **obor racionálnych čísel** (množina všetkých racionálnych čísel);

$\mathbb{R}$ – **obor reálnych čísel** (množina všetkých reálnych čísel);

$\mathbb{C}$ – **obor komplexných čísel** (množina všetkých komplexných čísel).

Číselné obory sú vo vzájomnom vzťahu, ktorý môžeme zapísať takto:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Každé reálne číslo, ktoré nie je racionálne, nazývame **iracionálnym číslom**.

V každom číselnom obore používame základné operácie sčítanie a násobenie. Ostatné operácie – odčítanie, delenie a umocňovanie – môžeme definovať pomocou sčítania a násobenia. Uvedieme vlastnosti týchto operácií – k tomu potrebujeme pojem premenná.

Keď chceme jedným zápisom vyjadriť viaceré konkrétne čísla (konkrétne číslo je číslo, ktoré môžeme zapísať číslicami s prípadným použitím dohodnutých symbolov – napr. 3,23 a tiež $\sin 5{,}1$), alebo keď chceme vyjadriť jediným zápisom rovnaké počtové úkony s číslami, tak používame písmená. Takéto písmená nazývame **premenné**, napr. x, y, z, u, v. Grécke písmeno π je zvyčajne vyčlenené na označenie Ludolfovho čísla. Ak hovoríme o premennej, takmer vždy je nevyhnutné poznať **obor premennej** $\mathcal{O}$, čo je číselná množina, ktorej prvky premenná zastupuje.

Obor reálnych čísel tvorí najdôležitejšiu číselnú množinu. Vymedzíme ju popisom základných vlastností operácií a usporiadania (odporúčame premyslieť si, či sú tieto vlastnosti splnené v ostatných číselných množinách).

Nech a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla. Potom

[1]Niektorí autori zahŕňajú do množiny prirodzených čísel aj číslo 0.

- operácie sčítania a násobenia sú **uzavreté v** $\mathbb{R}$, t. j. $a+b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b \in \mathbb{R}$;
- platí **komutatívnosť sčítania a násobenia**:

$$a+b=b+a\,; \qquad\qquad a\cdot b=b\cdot a\,;$$

- platí **asociatívnosť sčítania a násobenia**:

$$a+(b+c)=(a+b)+c\,; \qquad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c\,;$$

- platí **distributívnosť násobenia vzhľadom k sčítaniu**:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\,;$$

- existuje práve jedno číslo $0 \in \mathbb{R}$ také, že $a+0=a$;
- existuje práve jedno číslo $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, také, že $a \cdot 1 = a$;
- k číslu $a \in \mathbb{R}$ existuje práve jedno $x \in \mathbb{R}$ také, že $a+x=0$. Toto číslo x nazývame **opačným číslom k číslu $\boldsymbol{a}$** a označujeme ho $(-a)$;
- ak $a \neq 0$, tak existuje práve jedno číslo y také, že $a \cdot y = 1$. Toto číslo nazývame **prevráteným číslom k číslu $\boldsymbol{a}$** a označujeme ho zápisom $1/a$, $\dfrac{1}{a}$ alebo a^{-1}.

Odčítanie a delenie reálnych čísel a, b definujeme takto:

$$a-b=a+(-b), \qquad \frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b} \quad \text{pre} \quad b\neq 0$$

Každé reálne číslo je na číselnej osi zobrazené práve jedným bodom. Každý bod číselnej osi je obrazom práve jedného reálneho čísla.

Veta 1 *Nech* a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. *Potom*

1. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ *práve vtedy, keď* $ad=bc$; *2.* $\dfrac{ab}{db}=\dfrac{a}{d}$;

3. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$; *4.* $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$; *5.* $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}$ *pre* $c \neq 0$.

Usporiadanie reálnych čísel má tieto vlastnosti:

- **trichotómia usporiadania**, t. j. pre každé dve reálne čísla a, b platí práve jeden z nasledujúcich troch vzťahov

$$a<b, \qquad a=b, \qquad a>b\,;$$

- tranzitívnosť usporiadania, t. j. ak $a<b$, $b<c$, tak $a<c$;
- ak $a<b$, tak $a+c<b+c$ pre každé $c \in \mathbb{R}$;
- ak $0<a$, $0<b$, tak $0<ab$.

Veta 2 *Nech a, b, c, d sú ľubovoľné reálne čísla. Potom*
a) ak $a < b$ a $c < d$, tak $a + c < b + d$;
b) ak $a < b$ a $c > 0$, tak $ac < bc$;
c) ak $a < b$ a $c < 0$, tak $ac > bc$;
d) ak $0 < a < b$, tak $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$;
e) ak $0 < a < b$ a $0 < c < d$, tak $ac < bd$.

Zápis $a \leqq b$ ($a \geqq b$) znamená, že $a < b$ ($a > b$) alebo $a = b$. Platí napr.: ak $a \leqq b$ a súčasne $b \leqq a$, tak $a = b$. Premyslite si, v ktorých častiach vety 2 môžeme znak $<$, resp. $>$, zameniť za znak $\leqq$, resp. $\geqq$.

Z podmnožín množiny reálnych čísel sa najčastejšie používajú **intervaly** a ich zjednotenia.

Definícia 3 **Ohraničené intervaly s krajnými bodmi** a, b, $a < b$ *sú tieto množiny:*
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\quad a \leqq x \leqq b\}$ – **uzavretý interval**;
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\quad a < x < b\}$ – **otvorený interval**;
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\quad a \leqq x < b\}$;
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\quad a < x \leqq b\}$.

Posledné dva intervaly nazývame **polootvorené** alebo **polouzavreté**. Dĺžka (veľkosť) ľubovoľného z týchto štyroch intervalov je $d = b - a$.

Definícia 4 **Neohraničené intervaly s krajným bodom** $a \in \mathbb{R}$ *sú tieto množiny:*
$(-\infty, a\rangle = \{x \in \mathbb{R};\quad x \leqq a\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\quad x < a\}$;
$\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\quad x \geqq a\}$, $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\quad x > a\}$.
Obor reálnych čísel $\mathbb{R}$ *zapisujeme tiež ako interval* $(-\infty, +\infty)$.

Pri symbole $+\infty$ často znak $+$ vynechávame.

Definícia 5 **Absolútna hodnota čísla $\boldsymbol{a}$** $\in \mathbb{R}$ *je číslo* $|\boldsymbol{a}|$ *definované takto:*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pre } a \geqq 0; \\ -a & \text{pre } a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Pre absolútnu hodnotu platia tieto základné vlastnosti:

Veta 3 *Nech a, b sú ľubovoľné reálne čísla. Potom platí:*

1. $|a| \geqq 0$, *pričom* $|a| = 0$ *práve vtedy, keď* $a = 0$;

2. $|-a| = |a|$; *3.* $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ *pre* $b \neq 0$; *5.* $|a| - |b| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b|$.

Definícia 6 *Nech a je ľubovoľné reálne číslo.* **$\boldsymbol{n}$-tú mocninu čísla $\boldsymbol{a}$** *(označujeme $\boldsymbol{a^n}$) definujeme takto:*

1. ak $n = 1$, tak $a^1 = a$;

2. ak $n \in \mathbb{N}$ a $n > 1$, tak $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ činiteľov}}$;

3. ak $n = 0$, $a \neq 0$, *tak* $a^0 = 1$;

4. ak $n \in \mathbb{N}$, *tak pre* $a \neq 0$ *je* $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Veta 4 *Pre každé* $a \in \mathbb{R}$, $a \geqq 0$ *a každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje práve jedno číslo* $x \in \mathbb{R}$, $x \geqq 0$, *také, že* $x^n = a$.

Definícia 7 *Nech a je nezáporné reálne číslo a n prirodzené číslo.* ***n*-tú odmocninu čísla *a*** *definujeme ako nezáporné číslo x, pre ktoré platí* $x^n = a$. *Zapisujeme* $x = \sqrt[n]{a}$.

Definícia 8 *n-tú odmocninu, kde n je nepárne číslo, zo záporného reálneho čísla a definujeme takto:*

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} \qquad (a < 0).$$

Ak n je párne číslo, tak n-tú odmocninu zo záporného čísla v $\mathbb{R}$ nedefinujeme. Poznamenávame, že vyššie definovaná n-tá odmocnina reálneho čísla je v množine $\mathbb{R}$ uzavretá. Pripomíname, že pre ľubovoľné $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{a^2} = |a|, \qquad \text{ale} \qquad \sqrt[3]{a^3} = a$$

pre každé $a \in \mathbb{R}$. Tieto rovnosti môžeme takto zovšeobecniť:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ pre párne } n \quad \text{a} \quad \sqrt[n]{a^n} = a \text{ pre nepárne } n. \tag{2}$$

Definícia 9 *Nech* $a > 0$ *je reálne číslo a* $\frac{m}{n}$ *je racionálne číslo (t. j.* $m \in \mathbb{Z}$ *a* $n \in \mathbb{N}$*). Potom definujeme tzv.* **racionálnu mocninu čísla** *a takto:*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{3}$$

Neuvedieme presnú definíciu mocniny a^r, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, pre reálny exponent r, ale uvedieme vlastnosti tejto všeobecnej mocniny.

Veta 5 *Nech r, s sú ľubovoľné reálne čísla. Potom platí:*

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; *2.* $(a^r)^s = a^{rs}$; *3.* $a^r \cdot b^r = (ab)^r$;

4. $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$; *5.* $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$;

6. ak $0 < a < b$ *a* $r > 0$, *tak* $a^r < b^r$ *(„nerovnosť sa zachová“), ale*
ak $0 < a < b$ *a* $r < 0$, *tak* $a^r > b^r$ *(„nerovnosť sa obráti“;)*

7. ak $a > 1$ *a* $r < s$, *tak* $a^r < a^s$ *(„nerovnosť sa zachová“), ale*
ak $0 < a < 1$ *a* $r < s$, *tak* $a^r > a^s$ *(„nerovnosť sa obráti“);*

8 $1^r = 1$ *pre každé* $r \in \mathbb{R}$, $0^r = 0$ *pre každé* $r > 0$.

Odporúčame čitateľovi, aby si premyslel otázku platnosti vzťahov 1 – 7 z vety 5 pre záporné reálne čísla a, b v prípade, keď r, s sú z množiny $\mathbb{N}$, resp. $\mathbb{Z}$, resp. $\mathbb{Q}$.

Algebrický výraz je zápis, skladajúci sa z čísel a písmen, ktoré označujú premenné. Tieto čísla a písmená sú pospájané znakmi operácií: sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie, umocnenie, odmocnenie. Obyčajne obsahujú aj zátvorky, ktoré určujú poradie naznačených operácií.

Úprava výrazu V_1 je jeho nahradenie „jednoduchším“ výrazom V_2, pričom $V_1 = V_2$ (na definičnom obore výrazu V_1, ktorý zadefinujeme o chvíľu).

Zjednodušenie výrazu je taký súbor úprav, po ktorých dostaneme výraz napríklad s menším počtom členov, zátvoriek, premenných — dá sa povedať, že obsahuje menej znakov operácií ako obsahoval pôvodný algebrický výraz. Zvyčajne požadujeme, aby zjednodušený výraz bol napríklad v tvare súčinu alebo v tvare zlomku, ktorý sa nedá krátiť alebo aby neobsahoval odmocninu v menovateli zlomku (pozri príklad 1).

Pri úprave výrazu treba často vymedziť, pre ktoré hodnoty premenných má výraz zmysel. Určujeme pritom množinu všetkých tých hodnôt premenných, pre ktoré má výraz zmysel (uvažovanú množinu nazývame **definičným oborom výrazu** a označujeme $\mathcal{D}$). To obyčajne vedie k riešeniu rovníc alebo nerovníc. Pretože touto problematikou sa budeme zaoberať neskôr, odporúčame riešiteľovi cvičení, aby sa v prípade nejasností vrátil k tejto záležitosti po precvičení príslušných úloh z rovníc a nerovníc.

Pri samotnej úprave výrazu využívame už skôr uvedené vlastnosti reálnych čísel. Pri výrazoch, ktoré obsahujú zlomky, často využívame známu vlastnosť

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \qquad pre \quad b \neq 0, \quad c \neq 0$$

(tzv. **krátenie zlomku**). K tomu je potrebné upraviť výrazy v čitateli a v menovateli tak, aby obsahovali činitele s rovnakým základom (v predchádzajúcom vzorci je uvažovaný rovnaký základ reprezentovaný písmenom c). To si vyžaduje istú „rutinu, zbehlosť“ v úpravách výrazov do tvaru súčinu (tieto úpravy nám pomôžu aj pri riešení rovníc a nerovníc). Uvedieme základné metódy na dosiahnutie tohto cieľa:

- „vytknutie pred zátvorku“, napr.

$$6x^5 + 8x^3 - 12x^2 = 2x^2(3x^3 + 4x - 6);$$

- ak upravovaný výraz je kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ktorého korene (nulové body) sú čísla x_1 a x_2 (pozri kapitolu o kvadratických rovniciach), tak

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{4}$$

  napr. $3x^2 - 4x - 4 = 3(x - 2)\left(x + \frac{2}{3}\right)$ – nazývaný **rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov**;

- zovšeobecnením predchádzajúcej metódy je rozklad polynómu na súčin v prípade, ak poznáme nejaký koreň tohto polynómu – to je ale v náplni učebných osnov prvého semestra na našej fakulte. Napr. číslo -2 je koreňom polynómu $y^4 + 2y^3 + y^2 - 4$, a preto

$$y^4 + 2y^3 + y^2 - 4 = (y + 2)(y^3 + y - 2);$$

- po združení „vhodných častí výrazu vytknutie spoločného výrazu pred zátvorku“, napr.

$$3a^2 + az - 6a - 2z \stackrel{\alpha}{=} 3a(a - 2) + z(a - 2) \stackrel{\beta}{=} (a - 2)(3a + z),$$

kde
– v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme združili prvý a tretí člen daného výrazu a druhý člen so štvrtým. V oboch prípadoch sme tieto združené výrazy upravili so „spoločným činiteľom“ $(a-2)$;
– v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme vytkli pred zátvorku tento spoločný činiteľ.

- často nám pomôžu nižšie uvedené vzorce, ktoré umožňujú zapísať istý typ výrazu v tvare súčinu. Pre ľubovoľné reálne čísla a a b platí:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \tag{5}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \tag{6}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \tag{7}$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \tag{8}$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3. \tag{9}$$

- všeobecné výrazy typu $a^n - b^n$, $n \geqq 2$, môžeme zapísať v tvare súčinu, kde jeden z činiteľov je $(a-b)$; výraz typu $a^n + b^n$, $n \neq 2^k$, kde $k \in \mathbb{N}$, môžeme zapísať v tvare súčinu, kde jeden z činiteľov je $(a^s + b^s)$, $s \in \mathbb{N}$. Ukážky týchto úprav sú uvedené v príklade 2. Výrazy $a^2 + b^2$, $a^4 + b^4$, $a^8 + b^8$ atď, sa nedajú zapísať v tvare súčinu s nejakým činiteľom typu $a^s + b^s$, $s \in \mathbb{N}$. Zdôrazňujeme, že tieto úvahy platia v množine $\mathbb{R}$ (neplatia v $\mathbb{C}$).

Príklad 1 *Vyjadrime číslo* $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+3} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ *použitím čo najmenšieho počtu druhých odmocnín.*

Riešenie.

$$a \overset{\alpha}{=} \frac{2\boldsymbol{(\sqrt{3}+1)}}{(\sqrt{3}-1)\boldsymbol{(\sqrt{3}+1)}} + \frac{\boldsymbol{(\sqrt{3}-3)}}{(\sqrt{3}+3)\boldsymbol{(\sqrt{3}-3)}} - \frac{2\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\boldsymbol{\sqrt{3}}} \overset{\beta}{=}$$

$$\overset{\beta}{=} \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} + \frac{\sqrt{3}-3}{-6} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \overset{\gamma}{=} \frac{6\sqrt{3}+6-\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+9}{6},$$

kde
– v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme odstránili pomocou tzv. **združených výrazov** odmocniny (iracionality) z menovateľov jednotlivých zlomkov: prvý zlomok sme vynásobili „vhodnou jednotkou“ v tvare $\dfrac{\boldsymbol{(\sqrt{3}+1)}}{\boldsymbol{(\sqrt{3}+1)}}$, druhý zlomok $\dfrac{\boldsymbol{(\sqrt{3}-3)}}{\boldsymbol{(\sqrt{3}-3)}}$ a tretí zlomok $\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$;
– v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme upravili čitatele a menovatele zlomkov;
– v rovnosti $\overset{\gamma}{=}$ sme upravili zlomky na najmenší spoločný menovateľ. □

Príklad 2 *Rozložme na súčin: a)* $(5n+2)^2 - (2n+5)^2$*; b)* $a^4 - b^4$*;*
c) $a^6 + b^6$*; d)* $a^3 - 3a + 2$*; e)* $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

Riešenie.

a)
$$(5n+2)^2 - (2n+5)^2 \overset{\alpha}{=} [(5n+2)+(2n+5)] \cdot [(5n+2)-(2n+5)] =$$
$$= (7n+7)(3n-3) = 21(n+1)(n-1),$$

kde v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme v známom vzorci (5) položili $a = 5n+2$ a $b = 2n+5$.

b) $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 \overset{\alpha}{=} (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \overset{\beta}{=} (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$,
kde v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme vo vzorci (5) nahradili a s a^2 a b s b^2 a v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme použili samotný vzorec (5).

c) $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 \overset{\alpha}{=} (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$,

kde v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme vo vzorci (7) nahradili a s a^2 a b s b^2 .

d)
$$\begin{aligned} a^3 - 3a + 2 &\overset{\alpha}{=} \boldsymbol{a^3 - a} - 2a + 2 \overset{\beta}{=} \boldsymbol{a(a-1)(a+1)} - 2(a-1) \overset{\gamma}{=} \\ &\overset{\gamma}{=} (a-1)\boldsymbol{(a^2 + a - 2)} \overset{\delta}{=} (a-1)\boldsymbol{(a-1)(a+2)} = \\ &= (a-1)^2(a+2), \end{aligned}$$

kde v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme nahradili výraz $-3a$ výrazom $-a - 2a$;
– v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme urobili túto úpravu: $a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1)$;
– v rovnosti $\overset{\gamma}{=}$ sme vytkli pred zátvorku výraz $a - 1$ a upravili sme vzniknutý výraz v zátvorke;
– v rovnosti $\overset{\delta}{=}$ sme podľa (4) upravili trojčlen $a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2)$ – jeho korene sú čísla 1 a -2.

e) V tejto úlohe využijeme predchádzajúce poznatky:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= x^2(x+3) - 4(x+3) = (x+3)(x^2-4) = \\ &= (x+3)(x-2)(x+2). \end{aligned}$$
□

Príklad 3 *Upravme v* $\mathbb{R}$ *výraz* $\sqrt{x^2 - 12x + 36} - 3\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[3]{x^3}$ *tak, aby neobsahoval odmocninu.*

Riešenie. $\sqrt{x^2 - 12x + 36} - 3\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[3]{x^3} \overset{\alpha}{=} \sqrt{(x-6)^2} - 3\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[3]{x^3} \overset{\beta}{=}$
$\overset{\beta}{=} |x-6| - 3|x| + x$, kde v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme podľa (8) upravili výraz $x^2 - 12x + 36$ na tvar $(x-6)^2$ a v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme využili poznatok (2)

Je nevyhnutné ovládať dopĺňanie kvadratického trojčlena $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, na „úplný štvorec“. Cieľom tejto úpravy je vyjadriť tento kvadratický trojčlen v tvare

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + s, \tag{10}$$

kde m a s sú konkrétne čísla – ináč povedané: upraviť výraz $ax^2 + bx + c$ na tvar, v ktorom premenná x vystupuje len v tvare druhej mocniny (t. j. „štvorca“) výrazu typu x mínus číslo m. Mohli by sme dokázať, že platí

$$ax^2 + bx + c = a\Big(x - \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{m}\Big)^2 + \underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a}}_{s}. \tag{11}$$

Ak porovnáme (11) s (10), tak ľahko zistíme, že

$$m = \frac{-b}{2a} \qquad \text{a} \qquad s = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$
□

Nie je potrebné zaťažovať si mozgovú kapacitu vzťahom (11)[2]. Stačí si uvedomiť „ideu“ dopĺňania na štvorec – pozri príklad 4 a neriešené príklady.

Príklad 4 *Doplňme daný kvadratický výraz na úplný štvorec:*
a) $2x^2 - 12x + 5$; *b)* $2 - 3x^2 - 6x$; *c)* $y^2 - 8y - 4$; *d)* $5 - 7z^2$.

[2] Z tejto rovnosti by sme mohli dokázať vzorec (**??**) na výpočet koreňov kvadratickej rovnice.

Riešenie. Hlavná idea dopĺňania na štvorec spočíva vo vhodnom použití jedného zo vzorcov (8):

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

a)

1. Najprv vo výraze $2x^2 - 12x + 5$ združíme kvadratický a lineárny člen, t. j.

$$2x^2 - 12x + 5 = (2x^2 - 12x) + 5;$$

2. potom „vytkneme pred zátvorky číslo, ktoré je pri x^2“ (týmto krokom dostaneme v zátvorkách x^2):

$$(2x^2 - 12x) + 5 = 2(x^2 - 6x) + 5;$$

3. výraz v zátvorkách upravíme tak, aby bol v tvare $a^2 \pm 2ab + b^2$ ľavej strany vzorca (8): ak položíme $a = x$, tak výraz $2ba$ získame úpravou $6x = 2 \cdot 3 \cdot x$. Ak teraz položíme $b = 3$, tak potrebujeme ešte získať $b^2 = 3^2$:

$$2(x^2 - 6x) + 5 = 2(\boldsymbol{x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x}) + 5 \overset{\alpha}{=} 2(\boldsymbol{x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2}) + 5,$$

kde v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme pripočítali a súčasne odčítali číslo 3^2;

4. konečne podľa (8) dostaneme

$$2(\boldsymbol{x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2} - 3^2) + 5 = 2\left[\boldsymbol{(x - 3)^2} - 3^2\right] + 5;$$

5. jednoduchou úpravou pravej strany dostaneme

$$2x^2 - 12x + 5 = 2(x - 3)^2 - 13,$$

čo je výraz v požadovanom tvare $a(x - m)^2 + s$, kde $a = 2, m = 3$ a $s = -13$.

b) Zopakujeme postup z časti a) tohto príkladu. Poradové čísla zodpovedajúcich krokov sme zaznamenali nad znakom $=$:

$$2 - 3x^2 - 6x \overset{1.}{=} (-3x^2 - 6x) + 2 \overset{2.}{=} -3(x^2 + 2x) + 2 =$$

$$\overset{3.}{=} -3(\boldsymbol{x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2} - 1^2) + 2 \overset{4.}{=} -3\left[\boldsymbol{(x + 1)^2} - 1^2\right] + 2 \overset{5.}{=} -3\left[x - (-1)\right]^2 + 5.$$

Ak porovnáme získaný výraz s (10), tak vidno, že tentoraz je $a = -3, m = -1$ a $s = 5$.

c) To bude jednoduchšie, lebo druhý krok nie je potrebný (premenná je teraz y):

$$y^2 - 8y - 4 \overset{1.}{=} (y^2 - 8y) - 4 \overset{3.}{=} (\boldsymbol{y^2 - 2 \cdot 4 \cdot y + 4^2} - 4^2) - 4 =$$

$$\overset{4.}{=} \left[\boldsymbol{(x - 4)^2} - 4^2\right] - 4 \overset{5.}{=} (x - 4)^2 - 20.$$

Pripomíname, že $a = 1, m = 4$ a $s = -20$.

d) Koeficient pri z^1 je vo výraze $5 - 7z^2$ rovný nule. V takomto prípade nemusíme dopĺňať na štvorec, lebo daný výraz je v tvare (10). Stačí si uvedomiť, že

$$5 - 7z^2 = -7\,(z - 0)^2 + 5.$$

Odtiaľ vidno, že $a = -7$, $m = 0$ a $s = 5$. □

Je potrebné mať istú zručnosť aj v úpravách výrazov, v ktorých vystupujú zlomky. Tu sa musíme vo väčšine prípadov držať týchto hlavných zásad:

- ak sa nejaký zlomok vo výraze dá krátiť, tak **najprv zlomok krátime** a potom robíme ďalšie prípadné úpravy;
- v prípade sčitovania alebo odčitovania zlomkov nepodceniť **najmenší spoločný menovateľ zlomkov**.

Ukážeme to na jednoduchom prípade úprav racionálnych čísel: máme upraviť číslo $\frac{9}{12}+\frac{1}{10}-\frac{4}{15}$. Ak nebudeme rešpektovať spomínané zásady, tak môžeme za spoločného menovateľa zobrať súčin menovateľov:

$$\frac{9}{12}+\frac{1}{10}-\frac{4}{15}=\frac{9\cdot 10\cdot 15+12\cdot 15-4\cdot 12\cdot 10}{12\cdot 10\cdot 15}=\cdots .$$

Tu by sme sa asi bez kalkulačky pomýlili. Ak si ale všimneme, že prvý zlomok môžeme po krátení upraviť na tvar $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$, tak dostaneme

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{10}-\frac{4}{15}=\frac{3\cdot 10\cdot 15+4\cdot 15-4\cdot 4\cdot 10}{4\cdot 10\cdot 15}=\cdots .$$

To už bolo o máličko lepšie, ale ak si uvedomíme, že najmenším spoločným menovateľom je číslo 60, tak

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{10}-\frac{4}{15}=\frac{3\cdot 15}{4\cdot 15}+\frac{1\cdot 6}{10\cdot 6}-\frac{4\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{45+6-16}{60}=\frac{35}{60}=\frac{7}{12}.$$

Je evidentné, že posledné úpravy boli najvhodnejšie. V predchádzajúcich dvoch prípadoch sme dostali zlomky, ktoré sa dajú krátiť (hoci sme ich čitatele nevyčíslili). A teraz si predstavme, že by sme upravovali výraz s premennými a nedodržali by sme obe hlavné zásady úprav zlomkov. Dostali by sme zlomok, ktorý sa vo väčšine prípadov bude dať krátiť, ale jeho úprava bude oveľa náročnejšia.

Príklad 5 *Zjednodušme v $\mathbb{R}$ daný výraz V a určme kedy má zmysel:*

a) $V(x)=\left(\dfrac{x+5}{x^2-81}+\dfrac{x+7}{x^2-18x+81}\right):\left(\dfrac{x+3}{x-9}\right)^2-\dfrac{1+x}{9+x};$

b) $V(a,b,x,y)=\dfrac{9x}{a^3}\left(\dfrac{-y}{32b^2}\right)\left(\dfrac{-4a}{27xy}\right)\cdot 24a^2b^3;$

c) $V(u)=\left(\dfrac{\sqrt[6]{\sqrt{u^{-5}}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{u^{-7}}}\cdot u^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-6}:\left(\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{u^{-8}}}}{\sqrt[10]{u^9}\cdot\sqrt{\frac{1}{u^3}}}\right)^{10};$

d) $V(a,x)=\left(\dfrac{1}{a^2-9}:\dfrac{x-a}{3a^2+9a}-\dfrac{3a}{9-3x-3a+ax}\right)\cdot\dfrac{x^3-27}{3a};$

e) $V(r,s)=\left(\dfrac{r+\sqrt{r^2-s^2}}{r-\sqrt{r^2-s^2}}+\dfrac{r-\sqrt{r^2-s^2}}{r+\sqrt{r^2-s^2}}\right):\dfrac{\sqrt{2}r-s}{s^3};$

f) $V(x,y)=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+\frac{2x^2}{\sqrt{x}}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}.$

Riešenie.

a) $V(x) \overset{\alpha}{=} \left(\dfrac{x+5}{(x-9)(x+9)} + \dfrac{x+7}{(x-9)^2}\right) \cdot \dfrac{(x-9)^2}{(x+3)^2} - \dfrac{x+1}{x+9} =$

$$\overset{\beta}{=} \frac{(x+5)(x-9)+(x+7)(x+9)}{\boldsymbol{(x-9)^2}(x+9)} \cdot \frac{\boldsymbol{(x-9)^2}}{(x+3)^2} - \frac{x+1}{x+9} =$$

$$\overset{\gamma}{=} \frac{2x^2+12x+18}{(x+9)} \cdot \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{x+1}{x+9} =$$

$$\overset{\delta}{=} \frac{2\boldsymbol{(x+3)^2}}{(x+9)\boldsymbol{(x+3)^2}} - \frac{x+1}{x+9} = \frac{2}{x+9} - \frac{x+1}{x+9} = \frac{1-x}{x+9}$$

pre $x \in \mathbb{R} - \{-3; -9; 9\}$, kde
– v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme urobili tieto úpravy: podľa (5) je $x^2-81=(x-9)(x+9)$ a na základe (8) je $x^2-18x+81=(x-9)^2$ a delenie zlomkom $\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2$ sme nahradili násobením zlomkom $\frac{(x-9)^2}{(x+3)^2}$;
– v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme sčítali prvé dva zlomky: ich najmenší spoločný menovateľ je $(x-9)^2(x+ +9)$;
– v rovnosti $\overset{\gamma}{=}$ sme upravili čitateľa prvého zlomku
– v rovnosti $\overset{\delta}{=}$ sme podľa (8) takto upravili čitateľa prvého zlomku:
$2x^2+12x+18=2(x^2+6x+9)=2(x+3)^2$
– výrazy, ktorými boli jednotlivé zlomky upravené krátením sme typograficky zvýraznili (rovnako budeme postupovať aj v ďalších častiach tohto príkladu).

b) $V(a,b,x,y) = \dfrac{9 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot a^3b^3xy}{32 \cdot 27 \cdot a^3b^2xy} = b \quad \text{pre} \quad a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0,$

pričom sme viacnásobne využili poznatky vety 5.

c) $V(u) = \left(\dfrac{u^{\frac{-5}{12}}}{u^{\frac{7}{3}} \cdot u^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-6} : \left(\dfrac{u^{\frac{-8}{15}}}{u^{\frac{9}{10}} \cdot u^{-\frac{3}{2}}}\right)^{10} = \left(u^{\frac{-5}{12}-\frac{7}{3}+\frac{1}{4}}\right)^{-6} : \left(u^{\frac{-8}{15}-\frac{9}{10}+\frac{3}{2}}\right)^{10} =$

$$= \left(u^{\frac{-5}{2}}\right)^{-6} : \left(u^{\frac{1}{15}}\right)^{10} = u^{15} \cdot u^{-\frac{2}{3}} = u^{\frac{43}{3}} \quad \text{pre} \quad u > 0,$$

pričom sme opäť použili vetu 5 a definíciu (3).

d) $V(a,x) \overset{\alpha}{=} \left(\dfrac{1}{(a-3)\boldsymbol{(a+3)}} \cdot \dfrac{3a\boldsymbol{(a+3)}}{x-a} - \dfrac{3a}{(x-3)(a-3)}\right) \dfrac{x^3-27}{3a} =$

$$\overset{\beta}{=} \frac{\boldsymbol{3a}(x-3-x+a)}{(a-3)(x-a)\boldsymbol{(x-3)}} \cdot \frac{\boldsymbol{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\boldsymbol{3a}} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{a-3}}{\boldsymbol{(a-3)}(x-a)} \cdot (x^2+3x+9) = \frac{x^2+3x+9}{x-a}$$

pre $x \neq a$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 3$. Tu sme použili tieto úpravy:
– v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ je $a^2-9=(a-3)(a+3)$, ďalej $3a^2+9a=3a(a+3)$, delenie zlomkom $\frac{x-a}{3a^2+9a}$ sme nahradili násobením prevráteným zlomkom $\frac{3a(a+3)}{x-a}$ a napokon sme použili úpravu na súčin: $9-3x-3a+ax=(x-3)(a-3)$;
– v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme po krátení výrazom $(a+3)$ upravili zlomky v zátvorkách na najmenší spoločný menovateľ $(a-3)(x-a)(x-3)$ a podľa (6) sme dostali $x^3-27=x^3-3^3=(x- -3)(x^2+3x+9)$.

e) $V(r,s) \overset{\alpha}{=} \dfrac{(r+\sqrt{r^2-s^2})^2+(r-\sqrt{r^2-s^2})^2}{(r-\sqrt{r^2-s^2})(r+\sqrt{r^2-s^2})} \cdot \dfrac{s^3}{\sqrt{2}r-s} =$

$$\overset{\beta}{=} \frac{2(2r^2-s^2)}{\boldsymbol{s^2}} \cdot \frac{\boldsymbol{s^3}}{\sqrt{2}r-s} \overset{\gamma}{=} \frac{2\boldsymbol{(\sqrt{2}r-s)}(\sqrt{2}r+s)s}{\boldsymbol{(\sqrt{2}r-s)}} = 2s(\sqrt{2}r+s)$$

pre $|r|>|s|>0,\ \ s \neq \sqrt{2}r$, kde
– v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme sčítali prvé dva zlomky;
– v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme upravili čitateľa a menovateľa vzniknutého zlomku;
– v rovnosti $\overset{\gamma}{=}$ sme krátili zlomok výrazom s^2 a vzhľadom na to, že menovateľ druhého zlomku je v tvare $\sqrt{2}r-s$, tak sme výraz $2r^2-s^2$ na základe (5) zapísali takto: $2r^2-s^2 = (\sqrt{2}r)^2-s^2 = (\sqrt{2}r-s)(\sqrt{2}r+s)$, čo nám umožní krátenie vzniknutého výrazu.

f) $V(x,y) = \dfrac{(x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}-y\sqrt{y})+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3} +$

$$+\frac{3\sqrt{y}\boldsymbol{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}}{\boldsymbol{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{3\sqrt{x}\boldsymbol{(x-\sqrt{xy}+y)}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\boldsymbol{(x-\sqrt{xy}+y)}} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{3\boldsymbol{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}}{\boldsymbol{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = 3 \qquad \text{pre} \quad x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ x \neq y,$$

kde sme postupne použili tieto úpravy:
– podľa (9) je $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3 = x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}-y\sqrt{y}$;
– je zrejmé, že $\frac{2x^2}{\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x}$;
– podľa (7) je $x\sqrt{x}+y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$;
– čitateľ prvého zlomku má po úprave tvar $3x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}$ a taktiež ho môžeme zapísať takto v tvare súčinu: $3\sqrt{x}(x-\sqrt{xy}+y)$;
– keďže čitateľ $3\sqrt{xy}-3y$ druhého zlomku môžeme zapísať v tomto tvare súčinu: $3\sqrt{xy}-3y = 3\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, tak na základe (5) zapíšeme jeho menovateľa takto: $x-y = (\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, čo nám umožní zlomok krátiť výrazom $(\sqrt{x}-\sqrt{y})$. □

Na záver tohto oddielu uvádzame väčšie množstvo neriešených úloh na úpravy výrazov. Odporúčame vám, aby ste sa pokúsili vyriešiť čo najviac úloh. Nedajte sa odradiť prípadným neúspechom. Na vlastných chybách sa človek najlepšie učí. Môže vám to pomôcť v nadobudnutí zbehlosti v riešení tých úloh, ktoré vás očakávajú.

Úlohy

1. Upravte (zjednodušte) daný číselný výraz:

a) $\left(-(-3)^2+5^2-4^2+3^2\right)^2$; [81]

b) $\dfrac{-1}{2^2}-\left(\dfrac{-2^2}{3}\right)^2-\dfrac{16}{(-3)^2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$; [−32/9]

c) $1{,}2+\dfrac{3}{5}-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$; [−41/25 = 1,64]

d) $\dfrac{(-2)^3}{3^2}+\dfrac{-1^3}{9}+\left(\dfrac{2}{-3}\right)^3$; [−35/27]

e) $\sqrt{0,03+\dfrac{1}{100}}\cdot\sqrt{10^2-8^2}-(\sqrt{3})^2$; [−9/5 = −1,8]

f) $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}}{\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{48}}$; [$\sqrt{6}/9$]

g) $\left(2^3:3^2+\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\sqrt{16}$; [4]

h) $\dfrac{(-0{,}6)^2\cdot 0{,}5+\left(\frac{1}{2}\right)^3:\frac{5}{8}}{\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}$; [$-76/75=-1{,}01\overline{33}$]

i) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)-2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; [1]

i) $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{7}\right)}{\left(\frac{3}{7}-1\frac{1}{2}\right):\frac{3}{8}}$; [1/45]

2. Rozložte v $\mathbb{R}$ na súčin:

a) x^3-2x^2-x+2; [$(x^2-1)(x-2)$]

b) x^3-x^2+4x-4; [$(x^2+4)(x-1)$]

c) x^3+3x^2+3x+1; [$(x+1)^3=(x+1)(x+1)^2$]

d) $x^3-9x^2+27x-27$; [$(x-3)^3=(x-3)(x^2-6x+9)$]

e) $x^3-6x^2+12x-8$; [$(x-2)^3=(x-2)(x-2)^2$]

f) $(6n+17)^2-(n-3)^2$; [$35(n+2)(n+4)$]

g) $(x+y)^4-(x-y)^4$; [$8xy(x^2+y^2)$)

h) $a^4+a^3+6a^2+5a+5$; [$(a^2+5)(a^2+a+1)$]

i) $(x-3)^3+(x+3)^3$; [$2x(x^2+27)$]

j) $27b^3-54b^2+36b-8$; [$(3b-2)^3$]

k) $27b^3-3b^2+2b-8$. [$(3b-2)(9b^2+5b+4)$]

3. Doplňte daný výraz na štvorec:

a) x^2-2x+2; [$(x-1)^2+1$]

b) $x^2 + 4x - 7$; $[(x+2)^2 - 11]$

c) $x^2 - 5x + 1$; $[(x-5/2)^2 - 21/4]$

d) $x^2 + 10x + 22$; $[(x+5)^2 - 3]$

e) $6y - y^2$; $[-(y-3)^2 + 9]$

f) $8 - 7a^2$; $[-7a^2 + 8]$

g) $3x^2 - 5x + 2$; $[3(x-5/6)^2 - 1/12]$

h) $2 - 2z^2 - 12z$; $[-2(z+3)^2 + 20]$

i) $2x^2 - 12x - 2$. $[2(x-3)^2 - 20]$

4. Upravte (zjednodušte) daný výraz:

a) $\dfrac{x}{x^2-4} \cdot \dfrac{x+2}{3x}$; $[1/(3(x-2))]$

b) $\dfrac{x}{x^2-6x+9} : \dfrac{5x}{3-x}$; $[1/(5(3-x))]$

c) $\dfrac{\frac{2-x}{x+3}}{\frac{4-4x}{x^2+3x}}$; $[x(x-2)/(4(x-1))]$

d) $\dfrac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2}$; $[(x^2-1)/x^2]$

e) $\dfrac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2}$; $[(x^2-4x)/(x-2)^2 = x(x-4)/(x-2)^2]$

f) $\dfrac{-2x(x+2) - (3-x^2)}{(x+2)^2}$; $[-(x^2+4x+3)/(x+2)^2 = -(x+3)(x+1)/(x+2)^2]$

g) $\dfrac{2x(4-x^2) - x^2(-2x)}{(4-x^2)^2}$; $[8x/(x^2-4)^2]$

h) $\dfrac{2x(x^2+4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2}$; $[8x/(x^2+4)^2]$

i) $\dfrac{2(x-1)^2 - (2x-1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$; $[-2x/(x-1)^3]$

j) $\dfrac{3x^2 \cdot 2(x+1)^2 - x^3 \cdot 4(x+1)}{4(x+1)^4}$. $[x^2(x+3)/(2(x+1)^3) = (x^3+3x^2)/(2(x+1)^3)]$

5. Zjednodušte dané výrazy a určte ich definičné obory:

a) $\left[\left(\dfrac{2a}{3b^3}\right)^3 \cdot \dfrac{9b^4}{4c^3} \cdot \left(\dfrac{5c^2}{3a}\right)^2\right] : \dfrac{25c}{3a}$; $[2a^2/(9b^5);\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0]$

b) $\dfrac{(x+y)^{2a+1}}{(u-v)^{2a-1}} \cdot \dfrac{(u-v)^{2a+1}}{(x^2-y^2)^{2a+1}} \cdot \dfrac{(x-y)^{2a+2}}{(u-v)^2}$, kde $a \in \mathbb{N}$; $[x-y;\ u \neq v,\ x \neq \pm y]$

c) $\dfrac{a^{2x+3y} \cdot b^{4x-5y}}{a^{5x-y} \cdot b^{3x+y}} : \dfrac{a^{4x+5y} \cdot b^{2x-4y}}{a^{8x+2y} \cdot b^{x+2y}}$ pre $a > 0,\ b > 0$; $[a^{x+y}]$

d) $\left(\dfrac{a^2b^{-4}}{c^{-3}d^{-2}}\right)^{-3} : \left(\dfrac{a^3b^{-3}}{c^{-2}d^{-2}}\right)^{-2}$; $[b^6/(c^5d^2);\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0]$

e) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^{-2}\cdot\left(b-\dfrac{1}{a}\right)^{-3}\cdot\left(ab-\dfrac{1}{ab}\right)^{2}$; $\qquad [a/(ab-1);\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ ab\neq\pm 1]$

f) $\dfrac{\dfrac{r+s}{r-s}-\dfrac{r-s}{r+s}}{1-\dfrac{r^2+s^2}{r^2-s^2}}$; $\qquad [-2r/s\,;\ r\neq\pm s,\ s\neq 0]$

g) $\dfrac{\dfrac{a^4-b^4}{a^2b^2}}{\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)\left(1-\dfrac{2a}{b}+\dfrac{a^2}{b^2}\right)}$; $\qquad [(a+b)/(a-b)\,;\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\neq b]$

h) $\left(\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{2z}{z^2-1}\right)\left(\dfrac{1}{z}-1\right)$; $\qquad [1/z;\ z\in\mathbb{R}-\{0;1;-1\}]$

i) $\left(\dfrac{1+6ac}{a^3-8c^3}-\dfrac{1}{a-2c}\right):\left(\dfrac{1}{a^3-8c^3}-\dfrac{1}{a^2+2ca+4c^2}\right)$; $\qquad [1+a-2c;\ a\neq 2c,\ a-2c\neq 1]$

j) $\left(\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{a}{a+2}\right)\ :\ \dfrac{2a}{0{,}5a^4-a^3+4a-8}$; $\qquad [a^2-2a+4;\ a\notin\{0;\pm 2\}]$

k) $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$; $\qquad [1/x^3;\ x\neq 0]$

ℓ) $\left(a+\dfrac{2}{1+0{,}5a}\right):\dfrac{a^3-8}{a+2}+\dfrac{2}{2a-a^2}$; $\qquad [1/a;\ a\notin\{0,\ \pm 2\}]$

m) $\left(\dfrac{a^x+a^{-x}}{b^y+b^{-y}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{a^x-a^{-x}}{b^y-b^{-y}}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{a^{2x}-1}{b^{2y}-1}\right)^{-2}:\left(\dfrac{a^{2x}+1}{b^{2y}+1}\right)^{-1}$;

$[b^y/a^x;\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ a>0,\ b>0,\ a\neq 1, b\neq 1]$

n) $\left[\dfrac{a+3}{(3-a)^2}-\dfrac{6}{9-a^2}+\dfrac{3-a}{(a+3)^2}\right]:\dfrac{24a^2}{81-a^4}+\dfrac{2a^2}{a^2-9}$; $\qquad [1;\ a\notin\{0;\pm 3\}]$

o) $\dfrac{x+1}{x+9}+\left(\dfrac{x+5}{x^2-81}+\dfrac{x+7}{x^2-18x+81}\right):\left(\dfrac{x+3}{2x-18}\right)^2$; $\qquad [1;\ x\notin\{-3;\pm 9\}]$

p) $\left(\dfrac{1}{2+4y}-\dfrac{1-y}{8y^3+1}:\dfrac{1-2y}{4y^2-2y+1}\right)\cdot\dfrac{4y+2}{2y-1}$; $\qquad [1/(2y-1)^2;\ y\neq\pm 0{,}5]$

q) $\dfrac{2b+a-(4a^2-b^2)a^{-1}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\dfrac{a^3b+2a^2b^2+ab^3-4a^2b^2}{a^2-b^2}$;

$[(a-b)/(a+b);\ \ a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\neq\pm b,\ b\neq -3a]$

r) $\dfrac{18}{3x-x^2}+\left(\dfrac{3x+9}{x-3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3x-9}+\dfrac{2}{9-x^2}-\dfrac{1}{x^2+3x}\right)$; $\qquad [3/x;\ \ x\notin\{0;\pm 3\}]$

s) $1+\left(\dfrac{a}{4+2a}-\dfrac{a-2}{a^2+2a}\right):\left(\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{4}{a^3-4a}\right)$; $\qquad [a/2;\ \ a\notin\{0;\pm 2\}]$

t) $-\dfrac{a}{5}+\left(\dfrac{1}{1-2a}\right)^2:\left(\dfrac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\dfrac{2-a}{1-8a^3}\cdot\dfrac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right);$

[0,1; $a \notin \{0; \pm 0{,}5\}$]

u) $\left[3+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2\right]\cdot\left[\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}+3\right]^{-1}\cdot\dfrac{x^3+1}{x^3-1};$ [$(x-1)/(x+1)$; $x \neq \pm 1$]

v) $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\dfrac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right);$ [$2\sqrt[4]{ax}$; $a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ a \neq 0$]

w) $\left(\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-(a^{0,5}+b^{0,5})^2\right)^{0,5};$ [0; $(a=0 \wedge b>0) \vee (b=0 \wedge a>0)$]

x) $\left(\dfrac{b}{a+b}+a\right)\left(\dfrac{a}{a-b}-b\right)-\left(\dfrac{a}{a+b}+b\right)\left(\dfrac{b}{a-b}-a\right);$ [$2a$; $a \neq \pm b$]

y) $\left[\sqrt{ab}-ab(a+\sqrt{ab})^{-1}\right]:\dfrac{\sqrt{ab}-b}{a-b};$ [a; $ab>0,\ a \neq b$]

z) $\dfrac{m+n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}:\left(\dfrac{m+n}{\sqrt{mn}}+\dfrac{n}{m-\sqrt{nm}}-\dfrac{m}{\sqrt{nm}+n}\right);$ [$\sqrt{m}-\sqrt{n}$; $m,n>0,\ n \neq m$]

A) $\dfrac{x}{ax-2a^2}-\dfrac{2}{x^2+x-2ax-2a}\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right);$ [$1/a$; $a \neq 0,\ x \neq 2, -3, 2a$]

B) $\left(\dfrac{2}{1-3x}-1\right)\left(1-\dfrac{9x-9x^2}{3x+1}\right)(1-9x^2)^{-1};$ [$1/(3x+1)$; $x \neq \pm 1/3$]

C) $\dfrac{x-1}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}\cdot\sqrt[4]{x}+1;$ [$\sqrt{x}$; $x>0$]

D) $\left[\dfrac{1-x^2}{(x-1)^2}\right]^{-1}+\left[\dfrac{1}{2+2\sqrt{x}}+(2-2\sqrt{x})^{-1}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right];$ [$1/(x+1)$; $x \in \langle 0;\infty) - \{1\}$]

E) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}};$ [$2\sqrt[3]{ab}$; $b \neq \pm a$]

F) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b};$ [$\sqrt{ab}/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$; $a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ a \neq b$]

G) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}};$

[$2/(x-2)$ pre $x>2$ a $2\sqrt{x-1}/(2-x)$ pre $1 \leqq x < 2$]

H) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^{-1/2};$ [$1/(1+\sqrt{x})$; $x>0,\ x \neq 1$]

I) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)^{-2}:(2-x^2-2\sqrt{1-x^2});$ [$1-x^2$; $x \neq 0,\ |x|<1$]

J) $\left(\sqrt{s(1-s)}+\dfrac{\sqrt{s^3}}{\sqrt{1-s}}\right):\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{s}}+\dfrac{\sqrt{s}}{1-s}\right);$ $\qquad [\sqrt{s(1-s)};\ 0<s<1]$

K) $\left(\dfrac{1}{3p-r}+\dfrac{3pr-4}{27p^3-r^3}\right):\left(\dfrac{1}{9p^2+3pr+r^2}+\dfrac{2-2r}{r^3-27p^3}\right);$ $\qquad [r\neq 3p,\ 3p+r\neq \pm 2]$

L) $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}};$ $\qquad [1/(ab);\ \ a>0,\ \ b>0,\ \ a\neq b.]$