KOMPLEXNÉ ČÍSLA[1]

Pojem komplexného čísla

Väčšine z nás je známe, že druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla nemôže byť záporná (ináč povedané: pre každé $x \in \mathbb{R}$ je $x^2 \geqq 0$). Ako by sme mohli „pokaziť“ túto základnú vlastnosť reálnych čísel? Dosiahneme to pomocou tzv. **imaginárnej jednotky** (označíme ju ako i – ide o čosi „nereálne“, môžeme ju považovať za jedno z riešení kvadratickej rovnice $x^2 + 1 = 0$, ktorá má záporný diskriminant), pre ktorú platí

$$i^2 = -1. \tag{1}$$

Táto definícia imaginárnej jednotky je založená na jej druhej mocnine:

$$i^2 = i \cdot i.$$

Rovnako je definovaná aj druhá mocnina ľubovoľnej reálnej premennej. Tu ale i nie je premenná, ale symbol s „nereálnou vlastnosťou“ $i^2 = -1$! Aj vyššie mocniny imaginárnej jednotky definujeme tak ako mocniny reálnej premennej, t. j.

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i,$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1.$$

Podobne $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$. Potom $i^6 = -1$, $i^7 = -i$ a $i^8 = 1$. Ľahko zistíme, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$i^{n+4} = i^n. \tag{2}$$

Zrejme $i^1 = i$ a $i^0 = 1$. Potom z rovnosti (2) dostaneme: pre každé prirodzené číslo n je

$$i^n = i^r, \tag{3}$$

kde r je zvyšok pri delení čísla n číslom 4 ($r \in \{0, 1, 2, 3\}$). Napríklad pre $n = 2013$ je $r = 1$, a teda

$$i^{2013} = i^1 = i.$$

Teraz môžeme definovať množinu komplexných čísel:

Definícia 1 *Nech i je imaginárna jednotka. Potom každá usporiadaná dvojica (a, b) reálnych čísel a a b definuje (určuje) práve jedno komplexné číslo tvaru $a + bi$. Tomuto zápisu hovoríme* **algebrický tvar komplexného čísla**.[2] *Množina všetkých komplexných čísel sa zvykne označovať písmenom $\mathbb{C}$.*

Napríklad dvojica $(2, -5)$ definuje komplexné číslo $2 + (-5)i$, ktoré budeme zapisovať takto: $2 - 5i$. Tu sú ďalšie príklady:

$$(-7, \sqrt[5]{3}) \longrightarrow -7 + \sqrt[5]{3}i;$$

$$(0, -6) \longrightarrow 0 + (-6)i, \text{ resp. } -6i;$$

$$(5, 0) \longrightarrow 5 + 0i, \text{ resp. } 5.$$

[1] Komplexné čísla sa na mnohých stredných školách vynechali z učebných osnov. Pre štúdium na našej fakulte sú ale potrebné. Preto výklad je robený podrobnejšie ako v iných častiach tejto učebnej pomôcky.

[2] V literatúre sa často používa rovnocenný tvar $a + ib$.

Definícia 2 *Nech $a + bi$ je komplexné číslo, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Potom reálne číslo a nazývame* **reálnou časťou** *a reálne číslo b* **imaginárnou časťou komplexného čísla**. *Bežne sa používa toto označenie:*

$$a = \Re e(a+bi) \qquad \text{a} \qquad b = \Im m(a+bi).$$

Napríklad $\Re e(-3+\sqrt{3}i) = -3$ a $\Im m(-3+\sqrt{3}i) = \sqrt{3}$ alebo $\Re e(6) = 6$ a $\Im m(6) = 0$ a tiež $\Re e(-9i) = 0$ a $\Im m(-9i) = -9$.

Definícia 3 (Rovnosť komplexných čísel) *Dve komplexné čísla sa rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú ich reálne a aj imaginárne časti, t. j. pre $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ je*

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2)\,.$$

Nech $x \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné reálne číslo. Potom platí: $x = x + 0i$, pričom $x + 0i$ je komplexné číslo (jeho imaginárna časť je rovná nule). Teda každé reálne číslo je aj komplexným číslom, a preto

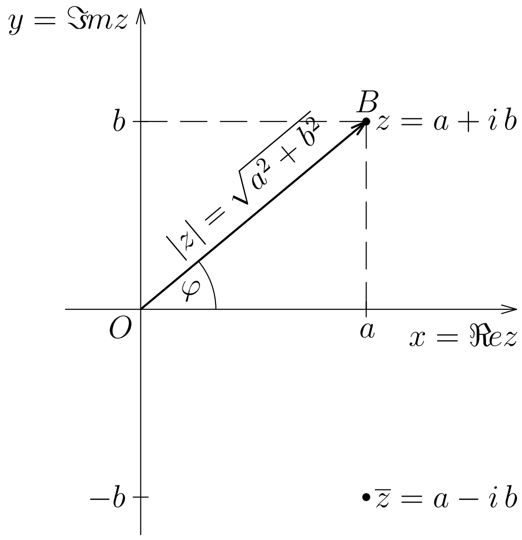
$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Gaussova rovina a goniometrický tvar komplexného čísla

Vieme, že každému komplexnému číslu $z = a + bi$ v algebrickom tvare zodpovedá práve jedna usporiadaná dvojica (a, b) reálnych čísel (priradenie je vzájomne jednoznačné):

$$a + ib \longleftrightarrow (a, b).$$

Zvoľme v rovine bežnú pravouhlú súradnicovú sústavu a v nej bod $B = [a; b]$. Jeho prvá súradnica sa rovná reálnej časti a druhá súradnica imaginárnej časti komplexného čísla z (pozri obr. 1). Toto priradenie je vzájomne jednoznačné, lebo ku každému bodu roviny existuje jediné komplexné číslo, ktoré je „vzorom“ tohto bodu pri danom priradení.



Obr. 1: Gaussova rovina

Bodom osi x je priradená usporiadaná dvojica $(x, 0)$, ktorej zodpovedá číslo $x + 0i = x$, kde $x \in \mathbb{R}$. To ale znamená, že body osi x reprezentujú reálne čísla. Podobnou úvahou dostaneme, že body osi y znázorňujú čísla typu $0 + yi = yi$, kde $y \in \mathbb{R}$. To sú komplexné čísla s nulovou reálnou časťou – hovoríme im **rýdzo imaginárne**. Rovine, v ktorej sú uvedeným spôsobom znázorňované komplexné čísla, hovoríme **Gaussova rovina**, osi x hovoríme **reálna os** a osi y **imaginárna os** (označujeme ich tiež $\Re e\, z$, resp. $\Im m\, z$).

Často je výhodné poznať pojem „komplexne združené číslo“.

Definícia 4 Komplexne združeným číslom *k číslu $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, nazývame číslo $a + (-bi) = a - bi$. Zapisujeme to takto*

$$\overline{a + bi} = a - bi.$$

Komplexné číslo a k nemu komplexne združené číslo majú „imaginárne časti s opačnými znamienkami“, ich reálne časti sú rovnaké (obr. 1). Napríklad:

$$\overline{-2 - \sqrt{3}i} = -2 + \sqrt{3}i, \qquad \overline{3i} = -3i \qquad \text{a} \qquad \overline{-6} = -6.$$

Ak x je reálne číslo, tak $\overline{x} = x$. Je zrejmé, že pre každé komplexné číslo z platí:

$$\overline{(\overline{z})} = z.$$

Definícia 5 (Absolútna hodnota komplexného čísla) Pod absolútnou hodnotou, *resp.* **modulom komplexného čísla** *$a+bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, rozumieme nezáporné reálne číslo $\sqrt{a^2 + b^2}$. Zapisujeme to takto:*

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4}$$

(teda používame označenie $|\cdot|$ – rovnako ako pre absolútnu hodnotu reálneho čísla).

Napríklad

$$|5 - 3i| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}, \quad |-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5,$$

$$|-4i| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4 \quad \text{a} \quad |-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3.$$

Pri určovaní absolútnej hodnoty komplexného čísla sa často robí takáto chyba:

$$|5 - 3i| = \underbrace{\sqrt{5^2 + (-3i)^2}}_{\text{chyba!}} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

Správne má byť $(-3)^2$ a nie $(-3i)^2$. Ešte raz zdôrazňujeme, že absolútna hodnota komplexného čísla z je definovaná takto:

$$|z| = \sqrt{\left(\Re e\, z\right)^2 + \left(\Im m\, z\right)^2}.$$

Všimnime si, že pre $x \in \mathbb{R}$ je $|x|_{\mathbb{C}} = |x + 0i|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|_{\mathbb{R}}$ (tu $\mathbb{C}$ v indexe označuje výpočet absolútnej hodnoty v množine komplexných čísel a $\mathbb{R}$ v množine reálnych čísel.) Pre reálne x sme dostali rovnaké výsledky!

Pre absolútnu hodnotu komplexného čísla platia niektoré pravidlá, ktoré sú zhodné s pravidlami pre absolútnou hodnotu reálneho čísla, napr. $|z_1| \geqq 0$ (ďalšie sú uvedené vo vete 2). **Ale pozor! Nerovnosti majú zmysel len vtedy, keď obe strany nerovnosti nadobúdajú iba reálne hodnoty**. Napríklad známa nerovnosť $x \leqq |x|$ z oboru reálnych čísel nemá zmysel v množine komplexných čísel. Súvisí to s tým, že na množine všetkých komplexných čísel sa nedá zaviesť nerovnosť (t. j. $<$, $>$, $\leqq$ alebo $\geqq$) tak, aby mala všetky vlastnosti, ktoré má nerovnosť na množine reálnych čísel.

Niektoré vlastnosti Gaussovej roviny:

- body Gaussovej roviny, ktoré znázorňujú dve navzájom komplexne združené čísla, sú súmerné podľa reálnej osi (obr. 1);

- absolútna hodnota komplexného čísla z sa rovná dĺžke úsečky $\overleftrightarrow{OB}$, ktorej koncové body sú začiatok súradnicovej sústavy a bod B znázorňujúci komplexné číslo z (obr. 1);

- na kružnici so stredom v začiatku súradnicovej sústavy s polomerom r „ležia“ všetky komplexné čísla, ktorých absolútna hodnota je rovná r.

Všimnime si, že každé nenulové komplexné číslo z jednoznačne určuje úsečku $\overleftrightarrow{OB}$ (dĺžka tejto úsečky je $|z|$), ktorá zviera s kladnou časťou reálnej osi uhol veľkosti $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$ (veľkosť uhla sa berie v smere proti pohybu hodinových ručičiek). Číslo φ nazývame **argumentom** (niekedy aj **amplitúdou**) **komplexného čísla** z. Je zrejmé, že ak φ je argumentom komplexného čísla z, tak aj všetky čísla typu $\varphi + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, sú jeho argumentom. V praxi sa používa aj φ z intervalu $(-\pi; \pi\rangle$. Argument φ dostaneme vyriešením tejto sústavy rovníc (pozri obr. 1):

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \qquad \text{a} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}. \tag{5}$$

Odtiaľ máme $a = |z|\cos\varphi$ a $b = |z|\sin\varphi$. Potom pre každé nenulové komplexné číslo $z = a + bi$ dostávame:

$$z = a + bi = (|z|\cos\varphi) + (|z|\sin\varphi)i = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Zápisu $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ hovoríme **goniometrický tvar komplexného čísla** z. Je jednoznačne daný absolútnou hodnotou

$$|z| = \sqrt{\left(\Re e\, z\right)^2 + \left(\Im m\, z\right)^2}$$

a argumentom φ, ktorý je riešením sústavy (5) – samotný sínus alebo kosínus neurčujú uhol φ jednoznačne.

Poznámka 1 *Pri praktickom prepise komplexného čísla z tvaru algebrického $z = a+bi$ na tvar goniometrický mnohých odrádza správne vyriešenie sústavy (5). V takom prípade odporúčame znázorniť si komplexné číslo v Gaussovej rovine: argument φ môžeme získať priamo zo znázornenia (vyskúšajte si to napr. na číslach $6i$, -6, $-6i$, 6, $6+6i$, $-6+6i$, $-6-6i$ a $6-6i$) alebo použijeme funkciu tangens. V prvom a štvrtom kvadrante je sústava (5) ekvivalentná s rovnicou*

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \tag{6}$$

Ale vo zvyšných dvoch kvadrantoch riešenie rovnice (6) nie je požadovaným argumentom φ – skúste porozmýšľať nad tým, ako súvisí riešenie uvažovanej rovnice (6) so správnou hodnotou φ. Ak sa vám to nepodarí, tak si pozrite riešené príklady.

Príklad 1 *Zapíšme dané komplexné čísla v goniometrickom tvare:* a) $3i$; b) $-1-i$; c) -4; d) $-1+\sqrt{3}i$; e) 3; f) $\sqrt{12}-2i$.

Riešenie.

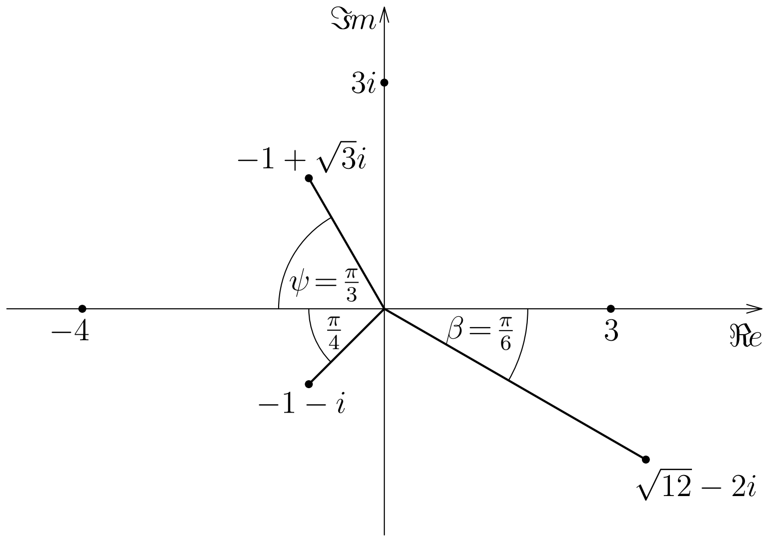
a) Zrejme $|3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$ a sústava (5) má tvar

$$\cos\varphi = \frac{0}{3} \qquad \text{a} \qquad \sin\varphi = \frac{3}{3} = 1.$$

Jej riešením je množina $\varphi = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Za argument čísla $3i$ zvolíme hodnotu $\varphi = \pi/2$. Potom

$$3i = 3(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}).$$

Pozrite si obr. 2: zo znázornenia čísla $3i$ v Gaussovej rovine priamo vidno, že $|3i| = 3$ a $\varphi = \pi/2$.



Obr. 2: Komplexné čísla z príkladu 1 zo strany 4 v Gaussovej rovine

b) Tentoraz $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Komplexné číslo $-1-i$ leží v Gaussovej rovine (obr.2) na osi tretieho kvadrantu. Odtiaľ ľahko vidno, že $\varphi = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$ (pripomíname, že φ je veľkosť uhla, ktorý zviera kladná časť reálnej osi s úsečkou, ktorej koncové body sú začiatok súradnicového systému a bod znázorňujúci číslo $-1-i$). Potom

$$-1 - i = \sqrt{2}(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}).$$

Poznamenávame, že za argument komplexného čísla $-1-i$ sme mohli zvoliť hodnotu $\varphi = -3\pi/4$ (premyslite si to).

c) Číslo -4 leží v Gaussovej rovine na zápornej časti reálnej osi (pozri obr. 2). To znamená, že $\varphi = \pi$ a keďže $|-4| = 4$, tak

$$-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi).$$

d) Máme $|-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Argument φ získame vyriešením sústavy rovníc (5), ktorá má tvar

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2} \qquad \text{a} \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(skúste ju vyriešiť). Komplexné číslo $-1+\sqrt{3}i$ leží v druhom kvadrante Gaussovej roviny (obr. 2). Uvažujme uhol ψ: preň platí $\operatorname{tg}\psi = \sqrt{3} : 1 = \sqrt{3}$. Odtiaľ $\psi = \pi/3$ a teda $\varphi = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$. Potom

$$-1+\sqrt{3}i = 2(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}).$$

e) Pre číslo 3 je situácia jednoduchá (pozri obr.2): $|3| = 3$ a $\varphi = 0$. Takto

$$3 = 3(\cos 0 + i\sin 0).$$

f) Najprv určíme absolútnu hodnotu $|\sqrt{12}-2i| = \sqrt{(\sqrt{12})^2+(-2)^2} = 4$. Sústava rovníc (5) má tvar

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{a} \qquad \sin\varphi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Ak nemáte istotu v jej vyriešení, tak sa pozrite na znázornenie komplexného čísla $\sqrt{12}-$ $-\,2i$ v Gaussovej rovine (obr.2). Leží vo štvrtom kvadrante a pre vyznačený uhol β platí: $\operatorname{tg}\beta = 2/\sqrt{12} = 1/\sqrt{3}$. Odtiaľ $\beta = \pi/6$. Potom pre argument φ je $\varphi = 2\pi - \pi/6 = 11\pi/6$. Teda

$$\sqrt{12}-2i = 4(\cos\tfrac{11\pi}{6} + i\sin\tfrac{11\pi}{6}).$$

Tu sme namiesto argumentu $\varphi = 11\pi/6$ mohli použiť argument $\varphi = -\pi/6$ (podobne ako v príklade b)) s týmto výsledkom:

$$\sqrt{12}-2i = 4(\cos\tfrac{-\pi}{6} + i\sin\tfrac{-\pi}{6}). \qquad \square$$

Poznámka 2 *Premyslite si tieto špeciálne prípady goniometrických tvarov:*

- *ak a je kladné reálne číslo, tak* $a = a(\cos 0 + i\sin 0)$;
- *ak a je záporné reálne číslo, tak* $a = -a(\cos\pi + i\sin\pi)$;
- *ak b je kladné reálne číslo, tak* $bi = b(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$;
- *ak b je záporné reálne číslo, tak* $bi = -b(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$.

(prvé dva prípady sa vzťahujú na nenulové reálne čísla a posledné dva prípady na rýdzo imaginárne čísla).

Poznámka 3 *Uvádzame dva postrehy:*

1. *Prechod od goniometrického tvaru komplexného čísla na algebrický je jednoduchý: vyčíslime hodnoty* $\cos\varphi$ *a* $\sin\varphi$ *a upravíme číslo* $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Napríklad*

$$6(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}) = 6(\tfrac{-\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i.$$

2. *Zápisy* $7(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$ *a* $(1-\sqrt{3})(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$ *sú isté komplexné čísla (vyjadrite ich v algebrickom tvare!), ale nie sú v goniometrickom tvare (viete to zdôvodniť?).*

Operácie s komplexnými číslami

Súčet, rozdiel a súčin dvoch komplexných čísel získame jednoduchým spôsobom: s obidvoma číslami „narábame“ ako s výrazom, ktorý obsahuje imaginárnu jednotku i. Pri súčine využijeme základnú vlastnosť imaginárnej jednotky: $i^2 = -1$.

Napríklad, ak $z_1 = -3 + 5i$ a $z_2 = 2 - 8i$, tak

$$z_1 + z_2 = (-3 + 5i) + (2 - 8i) = (-3 + 2) + [5 + (-8)]i = -1 + (-3)i;$$

$$z_1 - z_2 = (-3 + 5i) - (2 - 8i) = (-3 - 2) + [5 - (-8)]i = -5 + 13i;$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (-3 + 5i) \cdot (2 - 8i) = -6 + 24i + 10i - 40i^2 = \\ &= \Big[-6 - 40 \cdot (-1)\Big] + \Big[24 + 10\Big] i = 34 + 34i. \end{aligned}$$

Všimnime si, že cieľom uvedených úprav je získanie výsledného komplexného čísla v algebrickom tvare $a + bi$, kde a, $b \in \mathbb{R}$. Odtiaľ ľahko určíme jeho reálnu a imaginárnu časť.

S podielom je to trochu zložitejšie. Ak delíme nenulovým reálnym číslom, tak reálnu a imaginárnu časť výsledku ľahko dostaneme „roztrhnutím zlomku“:

$$\frac{3 - 5i}{8} = \frac{3}{8} - \frac{5}{8} i.$$

Reálna časť výsledku je $3/8$ a imaginárna časť je $-5/8$.

Ak menovateľ má nenulovú imaginárnu časť, tak zlomok vynásobíme zlomkom

$$\frac{\text{komplexne združený menovateľ}}{\text{komplexne združený menovateľ}} = 1,$$

ktorý je rovný jednej – pozri rovnosť a):

$$\frac{-2 + 11i}{-3 + 4i} \overset{a)}{=} \frac{(-2 + 11i)}{(-3 + 4i)} \cdot \underbrace{\frac{(-3 - 4i)}{(-3 - 4i)}}_{=1} \overset{b)}{=}$$

Teraz úpravou b) „vynásobíme“ získané dva zlomky – čitateľ čitateľom a menovateľ menovateľom. Úpravou c) zjednodušíme čitateľa a menovateľa. Dostaneme zlomok, ktorého menovateľ je reálne číslo – tu reálnu a imaginárnu časť dostaneme „roztrhnutím“ zlomku:

$$\overset{b)}{=} \frac{6 + 8i - 33i - 44i^2}{9 - 16i^2} \overset{c)}{=} \frac{(6 + 44) + (8 - 33)i}{9 - 16 \cdot (-1)} = \frac{50 - 25i}{25} = 2 - i.$$

Uvedené príklady môžeme zovšeobecniť:

Veta 1 *Ak $z_1 = a_1 + b_1 i$ a $z_2 = a_2 + b_2 i$ sú komplexné čísla v algebrickom tvare, tak:*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_{\Re e} + \underbrace{(a_1 b_2 + b_1 a_2)}_{\Im m} i;$$

$$\textit{pre } z_2 \neq 0: \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \underbrace{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}_{\Re e} + \underbrace{\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}_{\Im m} i.$$

Nesnažte sa tieto vzorce zapamätať; pri uvedených operáciách odporúčame postupovať podľa predchádzajúcich príkladov. Radšej si zapamätajte tieto skutočnosti:

1. Ľahko sa dá dokázať, že operácie sčitovania a násobenia komplexných čísel spĺňajú komutatívny, asociatívny a distributívny zákon.

2. V množine komplexných čísel (tak isto ako v množine reálnych čísel) je jediným neutrálnym prvkom vzhľadom na

   - sčitovanie číslo 0 (t. j. pre ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ platí: $z + 0 = 0 + z = z$)
   - násobenie číslo 1 (t. j. pre ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ platí: $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$).

3. Pomocou operácií násobenia a delenia definujeme (obdobným spôsobom ako v množine reálnych čísel) celočíselnú mocninu komplexného čísla z^n.

Zamyslime sa nad tým, ako sa správajú vyššie definované operácie v súvislosti s pojmom komplexne združené číslo. Overte si, že pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$z + \overline{z} = 2 \cdot \Re e z, \qquad z - \overline{z} = 2 \cdot \Im m z \cdot i, \quad \text{a} \quad z \cdot \overline{z} = \Big(\Re e z\Big)^2 + \Big(\Im m z\Big)^2.$$

Ďalej, ak z_1 a z_2 sú komplexné čísla, tak

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \text{a pre } z_2 \neq 0 \text{ je } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

V súvislosti s absolútnou hodnotou je teda

$$z \cdot \overline{z} = \Big(\Re e\, z\Big)^2 + \Big(\Im m\, z\Big)^2 = |z|^2.$$

Ďalej platí:

Veta 2 *Ak z_1 a z_2 sú komplexné čísla, tak*

$$\text{a) } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \qquad \text{b) } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \textit{pre} \quad z_2 \neq 0;$$

$$\text{c) } |z_1| - |z_2| \leqq |z_1 \pm z_2| \leqq |z_1| + |z_2| \qquad \textit{(trojuholníková nerovnosť).}$$

Možno ste si položili otázku: načo je dobrý goniometrický tvar komplexného čísla? Nestačí algebrický tvar? Goniometrický tvar neraz poskytuje jednoduchú interpretáciu úloh v rôznych vedných disciplínach. My si ukážeme, že pravidlá pre výpočet súčinu, podielu a celočíselných mocnín komplexných čísel v goniometrickom tvare sú oveľa jednoduchšie ako v tvare algebrickom. Napokon goniometrický tvar nám umožní prostou úvahou získať hodnoty n-tej odmocniny komplexného čísla.

Veta 3 *Ak $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ sú dve nenulové komplexné čísla, tak*

$$z_1 \cdot z_2 = \Big(|z_1|\cdot|z_2|\Big)\Big[\cos(\varphi_1+\varphi_2) \;+\; i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big] \tag{7}$$

a

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)\Big[\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big]. \tag{8}$$

Je zrejmé, že pravé strany rovností (7) a (8) sú komplexné čísla v goniometrickom tvare. Podľa (7) dve komplexné čísla v goniometrickom tvare vynásobíme tak, že vynásobíme ich absolútne hodnoty a ich argumenty sčítame. Pri delení absolútne hodnoty vydelíme a od argumentu delenca odčítame argument deliteľa.

Poznámka 4 *Premyslite si geometrické interpretácie rovností (7) a (8) v Gaussovej rovine, t. j. ako zo znázornenia komplexných čísel z_1 a z_2 dostaneme obrazy čísel $z_1 \cdot z_2$ a z_1/z_2?*

Príklad 2 *Nech* $z_1 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$ *a* $z_2 = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. *Určme reálnu a imaginárnu časť komplexných čísel:* a) $z_1 \cdot z_2$*;* b) $z_1 : z_2$*;* c) $z_2 : z_1$*.*

Riešenie. Čísla z_1 a z_2 sú zapísané v goniometrickom tvare (číslo z_2 má správny tvar $z_2 = 1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, ale v takomto prípade sa z pochopiteľných dôvodov nevyžaduje zápis čísla 1).

a) Na základe (7) je

$$z_1 \cdot z_2 = \Big(2\cdot 1\Big)\Big[\cos(\tfrac{7\pi}{6}+\tfrac{\pi}{3}) \ + \ i\sin(\tfrac{7\pi}{6}+\tfrac{\pi}{3})\Big] = 2(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}) = -2i.$$

Odtiaľ

$$\Re e\,(z_1 \cdot z_2) = 0 \qquad \text{a} \qquad \Im m\,(z_1 \cdot z_2) = -2.$$

b) Podľa (8) je

$$\frac{z_1}{z_2} = \Big(\tfrac{2}{1}\Big)\Big[\cos(\tfrac{7\pi}{6}-\tfrac{\pi}{3}) \ + \ i\sin(\tfrac{7\pi}{6}-\tfrac{\pi}{3})\Big] = 2(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i.$$

Teda

$$\Re e\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\sqrt{3} \qquad \text{a} \qquad \Im m\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 1.$$

c) Vzhľadom na (8) je

$$\frac{z_2}{z_1} = \Big(\tfrac{1}{2}\Big)\Big[\cos(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{7\pi}{6}) \ + \ i\sin(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{7\pi}{6})\Big] = \tfrac{1}{2}(\cos\tfrac{-5\pi}{6} + i\sin\tfrac{-5\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}-i}{4}.$$

Teda

$$\Re e\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \text{a} \qquad \Im m\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{1}{4}.$$ □

Ak $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tak na základe (7) dostaneme

$$z \cdot z = z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi). \tag{9}$$

Rovnosť (9) môžeme matematickou indukciou zovšeobecniť:

Veta 4 *Ak* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *je nenulové komplexné číslo, tak pre každé prirodzené číslo* n *platí*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{10}$$

Rovnosť (10) nazývame **Moivreov vzorec**.

Umocnenie komplexného čísla podľa Moivreovho vzorca spočíva v umocnení jeho absolútnej hodnoty a n-násobnom zväčšení jeho argumentu.

Je užitočné si uvedomiť, že Moivreov vzorec má v prípade $|z| = 1$ tvar

$$z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{11}$$

Všimnite si, že čísla $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$ a $\cos n\varphi + i\sin n\varphi$ z rovnosti (11) ležia v Gaussovej rovine na kružnici so stredom v začiatku súradnicovej sústavy, ktorej polomer je 1.

Príklad 3 *Určme reálnu a imaginárnu časť komplexného čísla*

$$z = \frac{(1-\sqrt{3}i)^{17}(i-1)^7}{(2+2i)^{13}}. \tag{12}$$

Riešenie. Sedemnástu, siedmu a trinástu mocninu by sme mohli vyčísliť pomocou binomického rozvoja – to by si vyžadovalo hodne trpezlivosti a pravdepodobne by sme sa v úpravách aj pomýlili. Oveľa jednoduchšie to pôjde pomocou Moivreovho vzorca. Ten si vyžaduje základy mocnín v goniometrickom tvare. Presvedčte sa, že (pomôžte si Gaussovou rovinou):

$$1-\sqrt{3}i = 2(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ), \qquad i-1 = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$$

a podobne $2+2i = 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$ – tentoraz sme použili stupne. Podľa Moivreovho vzorca je:

$$(1-\sqrt{3}i)^{17} = [2(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)]^{17} = 2^{17}\left[\cos(17\cdot 300^\circ) + i\sin(17\cdot 300^\circ)\right],$$

$$(i-1)^7 = [\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)]^7 = (\sqrt{2})^7\left[\cos(7\cdot 135^\circ) + i\sin(7\cdot 135^\circ)\right]$$

a

$$(2+2i)^{13} = \left[2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\right]^{13} = (2\sqrt{2})^{13}\left[\cos(13\cdot 45^\circ) + i\sin(13\cdot 45^\circ)\right].$$

Keďže $17\cdot 300 = 5100$, $7\cdot 135 = 945$ a $13\cdot 45 = 585$, tak dané komplexné číslo (12) môžeme zapísať takto:

$$z = \frac{\overbrace{2^{17}\left[\cos 5100^\circ + i\sin 5100^\circ\right]}^{(1-\sqrt{3}i)^{17}} \cdot \overbrace{(\sqrt{2})^7\left[\cos 945^\circ + i\sin 945^\circ\right]}^{(i-1)^7}}{\underbrace{(2\sqrt{2})^{13}\left[\cos 585^\circ + i\sin 585^\circ\right]}_{(2+2i)^{13}}} = (*)$$

Teraz môžeme použiť pravidlo (7) pre súčin a pravidlo (8) pre podiel komplexných čísel v goniometrickom tvare. Vzhľadom na to, že

$$\frac{2^{17}\cdot(\sqrt{2})^7}{(2\sqrt{2})^{13}} = 2 \qquad \text{a} \qquad 5100^\circ + 945^\circ - 585^\circ = 5460^\circ$$

môžeme písať

$$(*) = 2(\cos 5460^\circ + i\sin 5460^\circ) \stackrel{a)}{=} 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ).$$

Tu sme v rovnosti $a)$ využili periodicitu funkcií cos a sin $(5460 - 15\cdot 360 = 60)$. Pri počítaní v radiánoch by sme mali

$$17\cdot\frac{5\pi}{3} + 7\cdot\frac{3\pi}{4} - 13\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{364}{12}\pi = 15\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}.$$

Vieme, že $\cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = 1/2$ a $\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}/2$, a preto

$$z = 2\left(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}i.$$

Teda $\Re e\, z = 1$ a $\Im m\, z = \sqrt{3}$.

Nasledujúci príklad je peknou ukážkou použitia Moivreovho vzorca a utvrdzuje poznatky o rovnosti komplexných čísel (je súčasťou nejednej učebnej pomôcky o komplexných číslach):

Príklad 4 *Vyjadrime výrazy* $\cos 2\varphi$ *a* $\sin 2\varphi$ *pomocou výrazov* $\cos\varphi$ *a* $\sin\varphi$*.*

Riešenie. Pre $n = 2$ má Moivreov vzorec (11) tvar

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \underbrace{\cos 2\varphi}_{\Re e} + i\,\underbrace{\sin 2\varphi}_{\Im m} \tag{13}$$

Ak v dobre známom vzorci $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ položíme $a = \cos\varphi$ a $b = i\sin\varphi$, tak dostaneme

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 &= \cos^2\varphi + 2(\cos\varphi)\cdot(i\sin\varphi) + (i\sin\varphi)^2 = \\ &= \underbrace{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{\Re e} + i\,\underbrace{2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}_{\Im m}\end{aligned} \tag{14}$$

Vieme, že dve komplexné čísla sa rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú ich reálne a imaginárne časti, a preto porovnaním reálnych častí vzťahov (13) a (14) dostaneme

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

a porovnaním imaginárnych častí máme

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

A to sú známe vzorce z goniometrie.

Úlohy

1. Určte reálnu a imaginárnu časť komplexného čísla z:
   a) $z = 2 - \sqrt{3}i$; [$\Re ez = 2$, $\Im mz = -\sqrt{3}$]
   b) $z = 2 - \sqrt{3}$; [$\Re ez = 2 - \sqrt{3}$, $\Im mz = 0$]
   c) $z = \sqrt{\pi}i$; [$\Re ez = 0$, $\Im mz = \sqrt{\pi}$]
   d) $z = i^{51} - \sqrt{3}$; [$\Re ez = -\sqrt{3}$, $\Im mz = -1$]
   e) $z = i^{52} - \sqrt{3}$; [$\Re ez = 1 - \sqrt{3}$, $\Im mz = 0$]
   f) $z = i^{52} + i^{152}$. [$\Re ez = 2$, $\Im mz = 0$]

2. Zapíšte v algebrickom tvare:
   a) $(3+2i)(2-i)$; [$8+i$]
   b) $(3+3i)(1-i)$; [6]
   c) $(2+3i)(4+i)$; [$5+14i$]
   d) $(1+i)(3+2i)(2-i)$; [$7+9i$]
   e) $(3-2i)^2\cdot i$; [$12+5i$]

f) $\dfrac{2+i}{1+i}$; [$3/2 - i/2$]

g) $\dfrac{1+2i}{2-i} - \dfrac{2-i}{1+2i}$; [$2i$]

h) $(2-3i)(4+5i) - 3i^4 - 11$; [$9-2i$]

i) $8 - (2-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i+2) + 5i^5$; [$1+5i$]

j) $8 - (2-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i+2)^2$; [$-6-7\sqrt{3}i$]

k) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$; [$1+i$]

l) $\dfrac{4+7i}{2i-1}$; [$2-3i$]

m) $(i-18) : (2i-1)^2$; [$2-3i$]

n) $\dfrac{4-7i}{2i-1}$; [$-18/5 - i/5$]

o) $|2i-1| + \overline{i-18} - \Re e(8^5 i)$; [$(\sqrt{5}-18) - i$]

p) $\dfrac{1-\overline{4-9i}}{2-|4i-3|}$. [$1+3i$]

3. Znázornite v Gaussovej rovine množinu všetkých bodov $z \in \mathbb{C}$, pre ktoré platí:
a) $\Re e z = 2 \cdot \Re e \overline{z}$; b) $\Im m z < 2$; c) $\Re e z = 2 \cdot \Im m \overline{z}$; d) $\Im m z + \Re e z = |z|$; e) $|z| \leqq 3$;
f) $1 < |z+i| \leqq 3$; g) $|z+1-4i| \geqq 5$; h) $\Re e z = z \cdot \overline{z}$; i) $|z| < 2|z|$; j) $\Re e z^2 = 2$;
k) $|1+z| \leqq |1-z|$; ℓ) $|z| \geqq 3 \wedge \varphi = \pi/5$, kde φ je argument čísla z.

4. Vyjadrite dané komplexné číslo v goniometrickom tvare:

a) 1; [$1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$]

b) -1; [$1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$]

c) i; [$1 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$]

d) $-i$; [$1 \cdot (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$]

e) $1+i$; [$\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$]

f) $\sqrt{3} - i$; [$2(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$]

g) $-\sqrt{3} + i$; [$2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$]

h) $1 + \sqrt{3}i$; [$2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$]

i) $-1 - \sqrt{3}i$; [$2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$]

j) $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$; [$3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$]

k) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; [$1 \cdot (\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$]

ℓ) $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$; [$4(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$]

m) $-2 - 2i$; [$2\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$]

n) $1 - \sqrt{3}i$; [$2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$]

o) $1 - \sqrt{3}$; [$(\sqrt{3}-1)(\cos \pi + i \sin \pi)$]

p) $1 + i + i^2 + i^3 + i^8 + i^9$; [$\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$]

q) $7i$; [$7(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$]

r) $-5i$; [$5(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$]

s) π; [$\pi(\cos 0 + i \sin 0)$]

t) $8\sqrt{3}i - 8$; [$16(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$]

u) $-3+3i$; $[3\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})]$

5. Určte reálnu a imaginárnu časť čísla z, ak
   a) $z=(1+i)^5$; $[\Re e z=-4,\ \Im m z=-4]$
   b) $z=(i-\sqrt{3})^4$; $[\Re e z=-8,\ \Im m z=-8\sqrt{3}]$
   c) $z=(\sqrt{3}-i)^6$; $[\Re e z=-64,\ \Im m z=0]$
   d) $z=(1+\sqrt{3}i^4$; $[\Re e z=-8,\ \Im m z=-8\sqrt{3}]$
   e) $z=(-1-\sqrt{3}i)^5$; $[\Re e z=-16,\ \Im m z=16\sqrt{3}]$
   f) $z=(-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)^3$. $[\Re e z=2^{11/2}=32\sqrt{2},\ \Im m z=-2^{11/2}=-32\sqrt{2}]$
   g) $z=(\sqrt{3}+i)^{33}$; $[\Re e z=0,\ \Im m z=-2^{33}]$
   h) $z=(1-i)^{16}(i-\sqrt{3})^6$; $[\Re e z=-16\,384,\ \Im m z=0]$
   i) $z=(i-1)^8(1-\sqrt{3}i)^6$; $[\Re e z=1\,024,\ \Im m z=0]$
   j) $z=\left(\dfrac{i-1}{1+\sqrt{3}i}\right)^{24}$; $[\Re e z=2^{-12},\ \Im m z=0]$
   k) $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{19}\cdot i^{33}$; $[\Re e z=1,\ \Im m z=0]$
   ℓ) $z=\dfrac{(i+1)^9(1+\sqrt{3}i)^5}{(1-i)^{15}}$. $[\Re e z=2,\ \Im m z=-2\sqrt{3}]$