Sústavy lineárnych algebrických rovníc

Definícia 1 *Sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots\ &+ a_{1n}\, x_n = b_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots\ &+ a_{2n}\, x_n = b_2, \\ \ddots\ & \qquad\ \ \vdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots\ &+ a_{mn}\, x_n = b_m \end{aligned} \tag{1}$$

nazývame ***sústava*** m ***lineárnych algebr[a]ických rovníc o*** n ***neznámych*** *(SLAR). Čísla* a_{11}, a_{12}, $\ldots$, a_{mn} *nazývame* ***koeficienty*** *sústavy;* x_1, x_2, $\ldots$, x_n *sú* ***neznáme*** *a* b_1, b_2, $\ldots$, b_m *sú* ***absolútne členy (pravá strana)****. Maticu (tabuľku), utvorenú z koeficientov*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

nazývame ***maticou sústavy****. Ak k nej pridáme stĺpec, utvorený z pravej strany, dostaneme maticu*

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, \tag{3}$$

ktorú nazývame ***rozšírenou maticou sústavy****.* ■

Definícia 2 *Zápis*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{4}$$

budeme nazývať ***maticový tvar sústavy lineárnych algebrických rovníc****.* ■

Poznámka 1 Maticový tvar sústavy rovníc sa hodí, napríklad, pri ručnom riešení SLAR. V porovnaní s tvarom (1) sme vynechali neznáme x_i, znamienka $+$ a znamienka $=$ sme nahradili zvislou čiarou, ktorá oddeľuje pravú stranu sústavy od matice sústavy. Pritom si uvedomujeme, že jednotlivé stĺpce matice sústavy prirodzene odpovedajú neznámym x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Usporiadané n-tice, resp. m-tice čísel, nazývané tiež aritmetické vektory, sa dajú zapísať do stĺpcov (stĺpcových matíc)

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{5}$$

alebo do riadkov, pričom píšeme :

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \bar{\boldsymbol{x}}^T, \quad \bar{\boldsymbol{x}} = [x_1, \ldots, x_n]^T, \qquad [b_1, b_2, \ldots, b_m] = \bar{\boldsymbol{b}}^T, \quad \bar{\boldsymbol{b}} = [b_1, \ldots, b_m]^T. \tag{6}$$

Poznámka 2 V teórii matíc, ktorej sa budeme venovať v predmete Matematika 1, sa rozlišujú dva rôzne zápisy tej istej usporiadanej n-tice čísel. Používa sa pritom operácia transponovania stĺpcov, resp. riadkov, ktorá zo stĺpca, reprezentujúceho usporiadanú n-ticu vytvorí riadok reprezentujúci tú istú n-ticu, resp. z riadku vytvorí stĺpec. V predchádzajúcom riadku reprezentuje značka ^{T} práve operáciu transponovania.

SLAR (1) je možné zapísať v **maticovom tvare** dvomi rôznymi spôsobmi: buď vo vyššie uvedenom tvare (4) – $\left[\boldsymbol{A}\,|\,\bar{\boldsymbol{b}}\right]$ – alebo v tvare využívajúcom súčin matíc, ktorému sa nebudeme venovať – $\boldsymbol{A}\cdot\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{b}}$.

Definícia 3 *Každú usporiadanú n-ticu čísel $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$, pre ktorú platia rovnosti*

$$\begin{aligned} a_{11}\,\alpha_1 + a_{12}\,\alpha_2 + \cdots &+ a_{1n}\,\alpha_n = b_1,\\ a_{21}\,\alpha_1 + a_{22}\,\alpha_2 + \cdots &+ a_{2n}\,\alpha_n = b_2,\\ \ddots\qquad & \qquad\vdots \\ a_{m1}\,\alpha_1 + a_{m2}\,\alpha_2 + \cdots &+ a_{mn}\,\alpha_n = b_m, \end{aligned} \tag{7}$$

*budeme nazývať **riešenie sústavy** (1)* ■

Definícia 4 ***Množinu všetkých riešení** SLAR budeme nazývať **všeobecným riešením** SLAR.* ■

Poznámka 3 Prívlastok „všeobecný“ sa často vynecháva a to isté slovo sa používa pre jednotlivé riešenia SLAR aj pre množinu všetkých riešení SLAR.

Uveďme teraz príklad troch rôznych SLAR s tromi neznámymi a prediskutujme určenie ich všeobecných riešení.

Príklad 1 Riešme sústavy

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 2\,x_2 + 4\,x_3 &= -4\\ 3\,x_3 &= -3\\ 0\,x_3 &= 9 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right] \tag{8}$$

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 2\,x_2 + 4\,x_3 &= -4\\ -2\,x_2 + 3\,x_3 &= -3\\ 3\,x_3 &= 9 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & -4\\ 0 & -2 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \tag{9}$$

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 2\,x_2 + 4\,x_3 &= -4\\ 3\,x_3 &= -3\\ 0\,x_3 &= 0 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{10}$$

Riešenie. Najprv si všimnime, že sústavy sa dosť podobajú, pričom druhá sústava (9) sa od prvej SLAR (8) líši len v dvoch koeficientoch a tretia SLAR sa od prvej líši dokonca len jedným koeficientom.

Venujme sa najprv SLAR (8). Tretia rovnica nadobúda tvar $0 = 3$, čo zrejme nie je pravda. Preto pre žiadnu usporiadanú trojicu čísel x_1, x_2, x_3 **sústava nemá riešenie**. Všeobecným riešením tejto sústavy je teda **prázdna množina**. V zápise tretej rovnice sme mohli vynechať symbol x_3.

Pri riešení SLAR (9) budeme postupovať „zdola – hore“ z pohľadu riadkov, respektíve „zprava – doľava“ z pohľadu stĺpcov. Uvedený postup sa tiež zvykne nazývať **spätná substitúcia**. Z tretej rovnice $3\,x_3 = 9$ po vydelení číslom 3 zisťujeme, že $x_3 = 3$. Známu hodnotu x_3 dosadíme do druhej rovnice a dostávame

$$-2\,x_2 + 3\cdot 3 = -3 \qquad \Leftrightarrow \qquad -2\,x_2 = -12 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_2 = 6.$$

Známe hodnoty x_2 a x_3 dosadíme do prvej rovnice a dostávame

$$2\,x_1 - 2\cdot 6 + 4\cdot 3 = -4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\,x_1 = -4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = -2.$$

Vzhľadom na to, že jednotlivé kroky boli jednoznačné, **sústava rovníc má jediné riešenie** $x_1 = -2$, $x_2 = 6$ a $x_3 = 3$. Zapisujeme to tiež takto: $[x_1; x_2; x_3] = [-2; 6; 3]$.

Aj pri riešení SLAR (10) budeme postupovať „zdola – hore“. Tretia rovnica $0 = 0$ zrejme platí pre ľubovoľné hodnoty neznámych x_1, x_2 a x_3 a z hľadiska riešenia by sme ju mohli zo sústavy aj vyškrtnúť. Z druhej rovnice dostávame, že $x_3 = -1$. Po dosadení známej hodnoty x_3 do prvej rovnice dostávame

$$2\,x_1 - 2\,x_2 + 4\cdot(-1) = -4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\,x_1 - 2\,x_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Poslednú rovnosť môžeme chápať tak, že neznáma x_1 je vyjadrená pomocou neznámej x_2, ale aj naopak, že neznáma x_2 je vyjadrená pomocou neznámej x_1. Ak by sme poznali alebo zadali hodnotu jednej z dvoch neznámych x_1 alebo x_2, hodnota druhej by už bola určená jednoznačne. V takejto situácii hovoríme, že „**volíme parameter**“. Zvoľme, napríklad, $x_2 = t$, kde **parameter** t môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu. Potom bude aj $x_1 = t$. Toto **všeobecné riešenie SLAR** môžeme zapísať v tvare $[x_1; x_2; x_3] = [t; t; -1] = [0; 0; -1] + t\cdot[1; 1; 0]$, $t \in \mathbb{R}$, čo je parametrická rovnica priamky v trojrozmernom priestore. Je zrejmé, že v tomto prípade **SLAR má nekonečne veľa riešení** – každej hodnote parametra t odpovedá v tomto prípade práve jedno riešenie. Všetky riešenia pritom ležia na jednej priamke. □

Poznámka 4 Platí, že v prípade ľubovoľnej SLAR nastáva jeden z prípadov, ktoré nastali pri riešení Príkladu 1 – **sústava lineárnych algebrických rovníc** buď **nemá žiadne riešenie** alebo **má práve jedno riešenie** alebo **má nekonečne veľa riešení**. Nemôže teda mať, napríklad, práve 7 riešení.

Sústavy (8) – (10) sa nám podarilo relatívne jednoducho vyriešiť preto, lebo majú špecifický tvar. Ich matice obsahujú dosť veľa nulových koeficientov, ktoré sú navyše umiestnené na „potrebných“ pozíciách. Teraz upresníme, čo máme na mysli.

Definícia 5 *Koeficient matice* $\boldsymbol{M}$ *budeme nazývať* ***vedúci prvok riadku matice****, ak je nenulový a ak všetky ostatné koeficienty v tom istom riadku naľavo od neho sú nulové.* ■

Poznámka 5 Vedúci prvok riadku matice je teda **prvý nenulový prvkov riadku zľava**. Nulový riadok nemá vedúci prvok.

Definícia 6 *Budeme hovoriť, že matica* $\boldsymbol{M}$ ***má stupňovitý tvar matice*** *práve vtedy, ak:*

1. *žiadne dva vedúce prvky riadkov nie sú nad sebou;*
2. *pri usporiadaní riadkov zhora dole sú vedúce prvky riadkov usporiadané zľava doprava;*
3. *nulové riadky sú umiestnené dole.*

■

Poznámka 6 Ak si všimneme matice a rozšírené matice sústav (8) – (10) uvidíme, že každá z nich má stupňovitý tvar. Nuly v ľavom dolnom rohu sú usporiadané ako schodíky (tvar by sa teda mohol nazývať aj schodovitý). Špeciálny prípad stupňovitého tvaru je **trojuholníkový tvar** štvorcovej matice, v ktorom sú všetky prvky pod (alebo nad) hlavnou diagonálou nulové. Také sú matice sústav všetkých sústav (8) – (10).

Definícia 7 *Maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice $\boldsymbol{M}$ sa nazýva **hodnosť matice $\boldsymbol{M}$**. Budeme ju uznačovať $h(\boldsymbol{M})$.* ■

Pojmu lineárnej [ne]závislosti vektorov sa budeme venovať v predmete Matematika 1. Teraz sa zaobídeme bez jeho zadefinovania. Dá sa dokázať veta o tom, že maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice sa rovná jej maximálnemu počtu lineárne nezávislých stĺpcov. Bez dôkazu uvedieme nasledujúcu vetu.

Veta 1 ***Hodnosť stupňovitej matice** sa rovná počtu jej **vedúcich prvkov riadkov**, t. j. **počtu jej nenulových riadkov**.* ◀

Ďalej, tiež bez dôkazu, uvedieme základnú vetu, ktorá pojednáva všeobecnom riešení SLAR. Dôkaz uvedieme pri výklade teórie predmetu Matematika 1.

Veta 2 *(**Frobeniova veta**). Sústava (1) má riešenie práve vtedy, ak $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}')$. V tom prípade:*

a) Ak $h(\boldsymbol{A}) = n$, tak sústava (1) má práve jedno riešenie.

b) Ak $h(\boldsymbol{A}) < n$, tak sústava (1) má nekonečne veľa riešení, pričom existuje $p = n - h(\boldsymbol{A})$ neznámych, ktoré môžeme ľubovoľne zvoliť. ◀

Príklad 2 Posúďme riešiteľnosť SLAR (8) – (10) na základe Frobeniovej vety.

Riešenie. Ako sme už spomenuli v Poznámke 6, všetky matice sústavy ale aj rozšírené matice sústavy uvažovaných SLAR majú stupňovitý tvar, preto sa ich hodnosti rovnajú počtu nenulových riadkov. To nám umožňuje použiť Frobeniovu vetu bez ďalších výpočtov:

Sústava (8): $2 = h(\boldsymbol{A}) \neq h(\boldsymbol{A}') = 3$, a preto sústava nemá riešenie.

Sústava (9): $3 = h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') = 3 = n$, a preto sústava má práve jedno riešenie.

Sústava (10): $2 = h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}') = 2$, a preto sústava má nekonečne veľa riešení, pričom volíme $p = n - h(\boldsymbol{A}) = 3 - 2 = 1$ parameter. □

Z doteraz uvedeného vyplýva, že ak má SLAR maticový zápis so stupňovitými maticami, na základe Frobeniovej vety môžeme ľahko rozhodnúť o počte jej riešení a taktiež vykonať riešenie pomocou spätných substitúcií s prípadnou voľbou parametrov. V ďalšom sa budeme venovať úpravám, ktoré pôvodnú SLAR s nestupňovitým maticovým tvarom postupne pretransformujú na **novú sústavu s tou istou množinou riešení** so stupňovitým tvarom.

Definícia 8 *Majme dve sústavy lineárnych rovníc s rovnakým počtom neznámych. Označme ich $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$. Sústavy $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ nazývame **ekvivalentnými**, práve vtedy, keď každé riešenie sústavy $\mathcal{S}_1$ je riešením sústavy $\mathcal{S}_2$ a každé riešenie sústavy $\mathcal{S}_2$ je riešením sústavy $\mathcal{S}_1$. Ekvivalentnosť sústav $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ označíme $\mathcal{S}_1 \sim \mathcal{S}_2$.* ■

Definícia 9 *Nasledujúce úpravy nazývame* **ekvivalentnými úpravami** *SLAR:*

1. *Zmena poradie rovníc v sústave.*
2. *Vynásobenie jednej z rovníc sústavy číslom* $c \neq 0$.
3. *Pripočítanie k jednej rovnici sústavy ľubovoľnej lineárnej kombinácie ostatných rovníc sústavy.*
4. *Pridanie k sústave rovnice (alebo vynechanie zo sústavy rovnice), ktorá je lineárnou kombináciou ostatných rovníc tejto sústavy.*

Uvažujme teraz matice, napríklad rozšírenú maticu SLAR.

Definícia 10 *Nasledujúce úpravy nazývame* **riadkové ekvivalentné úpravy** *matice*

1. *Zmena poradia riadkov matice.*
2. *Vynásobenie jedného riadku matice číslom* $c \neq 0$.
3. *Pripočítanie k jednému riadku matice ľubovoľnej lineárnej kombinácie ostatných riadkov matice.*
4. *Pridanie k matici riadku (alebo vyškrtnutie z matice riadku), ktorý je lineárnou kombináciou ostatných riadkov matice.*

Znova bez dôkazu uveďme nasledujúcu vetu.

Veta 3 *Ak so sústavou* $\mathcal{S}_1$ *uskutočníme niektorú z ekvivalentných úprav SLAR, dostaneme sústavu* $\mathcal{S}_2$*, ktorá je ekvivalentná so sústavou* $\mathcal{S}_1$*.* ◀

Maticový analóg Vety 3 bude:

Veta 4 *Ak s rozšírenou maticou sústavy* $\mathcal{S}_1$ *uskutočníme niektorú z riadkových ekvivalentných úprav matice, dostaneme rozšírenú maticu sústavy* $\mathcal{S}_2$*, pričom sústava* $\mathcal{S}_2$ *je ekvivalentná so sústavou* $\mathcal{S}_1$*.* ◀

Poznámka 7 Na základe Vety 4 môžeme namiesto ekvivalentných úprav sústav rovníc upravovať rozšírenú maticu sústavy, čo využijeme pri riešení príkladov. Pri použití ekvivalentných riadkových úprav matice sa hodnosť matice nemení.

Gaussova eliminačná metóda riešenia sústavy lineárnych rovníc

Nižšie uvedieme metódu riešenia sústav lineárnych algebrických sústav, ktorá sa nazýva **Gaussova eliminačná metóda** (GEM). Jej princíp spočíva v postupnom použití riadkových ekvivalentných úprav rozšírených matíc sústav **s cieľom získania stupňovitej rozšírenej matice sústavy**. Zjednodušene sa dá povedať, že sa snažíme **vytvoriť nulové prvky pod hlavnou diagonálou** najprv v 1. stĺpci matice, potom v druhom atď. **Iný cieľ**, ktorý nám umožňuje rozhodovať o riešení SLAR, **je získanie rozšírenej matice sústavy, v ktorej žiadne dva vedúce prvky riadku sa nenachádzajú nad sebou**. Z takej matice v prípade potreby získame stupňovitý tvar jednoduchou výmenou riadku (viď algoritmus na strane 10).

Je rozdiel, či riešime pomocou GEM sústavu na počítači alebo ručne. Pri ručnom výpočte sa pri eliminácii snažíme vyhnúť vytváraniu zlomkov, prípadne násobeniu veľkými číslami. Tieto „problémy“ sú pri numerickom výpočte na počítači nezaujímavé. Napriek tomu existujú rôzne implementácie GEM, napr. Gaussova-Jordanova metóda, Gaussova-Doolittleova metóda, GEM s výberom hlavného prvku (po celej matici alebo v aktuálnom stĺpci.

Predtým, ako uvedieme možný **algoritmus použitia GEM**, ktorý vedie na stupňovitý tvar, uvedieme niekoľko príkladov.

Príklad 3 Riešme sústavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 &= -9 \\ x_1 - x_2 + 3\,x_3 &= 2 \\ 3\,x_1 - 6\,x_2 - x_3 &= 25 \end{aligned}$$

Riešenie. Na základe poznámky 7 zostrojíme rozšírenú maticu sústavy a tú budeme upravovať. Na pravej strane riadku, s ktorým uskutočňujeme úpravu, vyznačíme, aký násobok iného riadku k nemu pripočítame:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -1\cdot R_1 \\ -3\cdot R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -4\cdot R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right].$$

Na základe Frobeniovej vety máme $3 = h(A) = h(A') = 3 = n$, a preto má sústava práve jedno riešenie. Poslednej matici priradíme sústavu, ktorá je ekvivalentná so sústavou v zadaní príkladu.

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 &= -9 \\ -3\,x_2 - 2\,x_3 &= 11 \\ -8\,x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Vykonáme spätný chod. Jej riešením sú $x_3 = -1$, $x_2 = -3$, $x_1 = 2$, a preto riešením pôvodnej sústavy je vektor $[2, -3, -1]^T$. □

Poznámka 8 Keď pridávame k určitému riadku nejaký násobok iného riadku, obyčajne to nerobíme tak, že najprv určíme násobok celého riadku a následne ho pripočítame k danému riadku, ale postupne vykonávame operáciu „krát-plus“ s jednotlivými prvkami riadkov, pričom výsledok zapisujeme do nového riadku. Napríklad v prvok kroku sme ku 3. riadku pripočítavali (-3)-násobok 1. riadku. Postupne sme vykonali 4 operácie „krát-plus“:

$$-3\cdot 1 + 3 = 0, \qquad -3\cdot 2 - 6 = 0, \qquad -3\cdot 5 - 1 = -16, \qquad -3\cdot(-9) + 25 = 52.$$

Takto vzikli prvky nového 3. riadku.

Príklad 4 Riešme sústavu

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 - x_4 &= 1 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 - 11\,x_4 &= -4 \end{aligned}$$

Riešenie. Upravujeme rozšírenú maticu

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -11 & -4 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -1\cdot R_1 \\ -1\cdot R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -5 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -1\cdot R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -6 \end{array}\right]$$

Na základe Frobeniovej vety máme $3 = h(A) = h(A') = 3 \neq n = 4$, a preto má sústava práve nekonečne veľa riešení. Počet volených parametrov bude $p = n - h(A) = 4 - 3 = 1$. Napíšeme sústavu:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 - x_4 &= 1 \\ -2\,x_3 + 4\,x_4 &= 1\,, \\ 14\,x_4 &= 6 \end{aligned}$$

z ktorej po spätných substitúciách dostávame $x_4 = 3/7$, $x_3 = 5/14$, $x_2 = 2/3x_1$, x_1 je ľubovoľné reálne číslo. Preto každý vektor $[t, 2/3t, 5/14, 3/7]^T$, kde $t \in \mathbb{R}$, je riešením pôvodnej sústavy. $\square$

Príklad 5 Riešme sústavu lineárnych algebraických rovníc nad $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 & + & 2\,x_4 & = & 6 \\ 8\,x_1 & + & 5\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 12 \\ 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 6 \end{array}.$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme maticu sústavy rozšírenú o stĺpec pravých strán (rozšírenú maticu sústavy) na stupňovitý tvar.

$$[\boldsymbol{A} \,|\, \bar{\boldsymbol{b}}\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_4 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +4\,R_1 \\ +8\,R_1 \\ +3\,R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -3R_2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftrightarrows \\ \leftrightarrows \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ +4R_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

Keďže $4 = h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A'}) = 4 = n$, sústava má práve jedno riešenie. Vykonáme spätné substitúcie. Z poslednej rovnice vypočítame hodnotu $x_4 = -1$. Postupným dosadzovaním do predchádzajúcich rovníc dostaneme hodnoty ostatných neznámych.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2 & \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -2 & \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 & \\ & & & & & - & 2x_4 & = & 2 & \qquad\qquad \Rightarrow x_4 = -1. \end{array}$$

Z tretej rovnice dostávame:

$$x_3 - x_4 = x_3 - (-1) = x_3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1.$$

Z druhej rovnice dostávame:

$$-x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -x_2 + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = -x_2 - 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1.$$

Z prvej rovnice dostávame

$$-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -x_1 - 1 + (-1) - (-1) = -x_1 - 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1.$$

Riešením sústavy je vektor $\bar{\boldsymbol{x}} = [1, 1, -1, -1]^T$. □

Poznámka 9 V príkladoch 3 a 4 „sme mali šťastie“! Potrebné nuly sa nám podarilo vytvoriť pomocou násobkov riadkov hneď. V tomto príklade to už tak nebolo. Ak vezmeme koeficienty prvého stĺpca – 2, 4, 8, 3 – nenájdeme medzi nimi žiaden, ktorý by bol deliteľom všetkých ostatných. Preto sme v prvom kroku vytvorili v prvom riadku koeficient -1 odpočítaním štvornásobku 4. riadku od prvého riadku. Keďže číslo 1 je už deliteľom všetkých čísel 4, 8 a 3, v druhom kroku sa nám už podarilo vynulovať všetky koeficienty prvého stĺpca od 2. riadku až dole. Vo 4. kroku sme vymenili riadky, aby sme po následnej eliminácii získali stupňovitú trojuholníkovú maticu sústavy. Ako ukážeme neskôr, výmeny riadkov nemusíme uskutočňovať, ak sa naučíme vykonávať spätné substitúcie pri sústavách, pre ktoré je možné získať stupňovitý tvar jednoduchou výmenou riadkov.

Poznámka 10 V druhom kroku sme vykonali naraz 3 riadkové úpravy pomocou prvého riadku R_1. Mohli sme ich vykonať postupne za sebou, ale týmto zápisom sme ušetrili dve prepisovania rozšírenej matice sústavy. Takto môžeme postupovať vždy, ak robíme úpravy len pomocou jedného riadku. **Ak by sme sa o podobný zápis pokúsili s viacerými riadkami naraz, mohli by sme dostať nesprávny výsledok**. Riešme, napríklad, jednoduchú sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Správne riešenie je

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2\,R_2 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2.$$

Ak by sme, napríklad, vykonali nasledujúcu „úpravu“ využívajúcu naraz dva riadky, nebola by ekvivalentná:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 \\ -R_1 \end{array} \not\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

SLAR reprezentovaná treťou rozšírenou maticou má na základe Frobeniovej vety nekonečne veľa riešení, preto nemôže byť ekvivalentná s pôvodnou SLAR, ktorá má práve jedno riešenie!

Príklad 6 Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešme sústavu lineárnych algebraických rovníc nad $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & - & x_4 & = & 8 \\ 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & 3\,x_4 & = & 7 \\ 2\,x_1 & - & x_2 & & & + & 5\,x_4 & = & 6 \\ 5\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & x_3 & - & 8\,x_4 & = & 1 \end{array}$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitý tvar.

$$[\boldsymbol{A}\,|\,\bar{\boldsymbol{b}}\,] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} -R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -2R_1 \\ -5R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -18 & -4 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -2R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right].$$

Sústava nemá riešenie, pretože hodnosť matice sústavy sa nerovná hodnosti rozšírenej matice sústavy $3 = h(\boldsymbol{A}) \neq h(A') = 4$. □

Príklad 7 Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešme sústavu lineárnych algebraických rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2\,x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2q, x_4 & + & 3\,x_5 & = & 2 \\ 6\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 4\,x_4 & + & 5\,x_5 & = & 3 \\ 6\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & 8\,x_4 & + & 13\,x_5 & = & 9 \\ 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2\,x_5 & = & 1 \end{array}$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitý tvar.

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -3R_1 \\ -2R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \\ -R_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \leftrightarrows \\ \cdot(-1)\ \leftrightarrows \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Keďže hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy $3 = h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A'}) = 3 \neq n = 5$, sústava má nekonečne veľa riešení. Poèet voľných premenných (počet parametrov) určíme na základe vzťahu $p = n - h(\boldsymbol{A}) = 5 - 3 = 2$ (t. j. lineárny priestor všetkých riešení danej sústavy je dvojrozmerný).

Sústavu prepíšeme na „obyčajný“ tvar a vykonáme spätné substitúcie:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 3\ . \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

Volíme dve voľné premenné. Keďže $x_4 = 0$, vzhľadom na druhú rovnicu z dvojice x_3 a x_5 vyberieme jednu a z dvojice x_1 a x_2 vyberieme druhú voľnú premennú. Nech $x_5 = t$ a $x_1 = s$. Potom z druhej rovnice dostávame:

$$x_3 + x_4 + 4x_5 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = 3 - 4t.$$

Nakoniec dosadíme vypočítané hodnoty do prvej rovnice a určíme x_2

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 1 - t + 2s.$$

Riešením sústavy je vektor $\bar{\boldsymbol{x}} = [s, 1 - t + 2s, 3 - 4t, 0, t]^T$ pre $s, t \in \mathbb{R}$. □

Poznámka 11 Pri inej voľbe voľných premenných, z tých, ktoré boli prípustné v tomto príklade, je vyjadrenie výsledku odlišné od toho, ktoré sme pri horeuvedenom výpočte dostali.

Poznámka 12 Riešenie môžeme zapísať aj v nasledujúcom tvare:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = [0, 1, 3, 0, 0]^T + t \cdot [0, -1, -4, 0, 1]^T + s \cdot [1, 2, 0, 0, 0]^T \quad \text{pre} \quad s, t \in \mathbb{R},$$

ktorý predstavuje rovnicu „roviny“ v päťrozmernom priestore.

Ak začíname riešiť sústavy lineárnych algebrických rovníc Gaussovou eliminačnou metódou, nie vždy je jasné, čím začať alebo ako pokračovať. Teraz predstavíme **algoritmus riešenia SLAR Gaussovou eliminačnou metódou** pre sústavy s celočíselnými prvkami, ktorý umožňuje túto činnosť zautomatizovať. Pritom **používa len zjednodušenú 3. riadkovú elimináčnú úpravu** v tvare:

3'. Pripočítanie k nejakému riadku celočíselného násobku iného riadku.

Počas celej prvej etapy riešenia – úpravy rozšírenej matice sústavy na stupňovitý tvar – ostávajú prvky matice celočíselné.

Algoritmus riešenia SLAR Gaussovou eliminačnou metódou

1. krok: V každom riadku vyznačíme **vedúci prvok riadku** (viď Definíciu 5).

2. krok: Ak žiadne dva vedúce prvky riadkov nie sú nad sebou, prvá etapa skončila, prechádzame na krok 6. V opačnom prípade pokračujeme krokom 3.

3. krok: Zo skupiny vedúcich prvkov, ktoré sa nachádzajú nad sebou (v prípade viacerých skupín volíme prvú skupinu zľava) zvolíme jeden vedúci prvok s najmenšou absolútnou hodnotou (nazveme ho **aktívny vedúci prvok** a vyznačíme ho, napríklad, znakom „!“ napravo od matice).

4. krok: Pre každý vedúci prvok z vyššie uvedenej skupiny okrem aktívneho, **vykonáme celočíselné delenie** (delenie so zaokrúhľovaním) **aktívnym vedúcim prvkom**. Výsledok zapíšeme s opačným znamienkom napravo v príslušnom riadku a dopíšeme „názov“ riadku aktívneho vedúceho prvku. Týmto určíme potrebnú eliminačnú úpravu.

5. krok: Vykonáme príslušné eliminačné úpravy a vraciame sa na krok 1.

6. krok: Rozšírená matica je stupňovitá. Prechádzame k rozhodovaniu o jej riešení na základe Frobeniovej vety. Prípadné **parametre volíme v stĺpcoch** matice sústavy, **ktoré neobsahujú vedúci prvok**. Riadky volíme v poradí zodpovedajúcom poradiu vedúcich prvkov sprava-doľava.

Príklad 8 *Gaussovou eliminačnou metódou riešme sústavu lineárnych algebrických rovníc*

$$\begin{aligned} 5\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 + 4\,x_4 &= 21 \\ 4\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 + 7\,x_4 &= 25 \\ 8\,x_1 - 6\,x_2 - x_3 - 5\,x_4 &= 9 \\ 7\,x_1 - 3\,x_2 + 7\,x_3 + 17\,x_4 &= 54 \end{aligned}$$

Riešenie. Na riešenie danej SLAR použijeme práve opísaný algoritmus:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{5} & -3 & 2 & 4 & 21 \\ \boxed{4} & -2 & 3 & 7 & 25 \\ \boxed{8} & -6 & -1 & -5 & 9 \\ \boxed{7} & -3 & 7 & 17 & 54 \end{array}\right] \begin{array}{r} -1\,R_2 \\ ! \\ -2\,R_2 \\ -2\,R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -1 & -1 & -3 & -4 \\ \boxed{4} & -2 & 3 & 7 & 25 \\ 0 & \boxed{-2} & -7 & -19 & -41 \\ \boxed{-1} & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{r} ! \\ -4\,R_1 \\ \\ +1\,R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & \boxed{2} & 7 & 19 & 41 \\ 0 & \boxed{-2} & -7 & -19 & -41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ ! \\ +1\,R_1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & \boxed{2} & 7 & 19 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Poznámka 13 Počet vedúcich prvkov riadkov sa rovná hodnosti matice.

Na základe Frobeniovej vety konštatujeme, že $2 = h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A'}) = 2 \neq n = 4$, a teda SLAR má nekonečne veľa riešení, pričom počet volených parametrov bude $p = n - h(\boldsymbol{A}) = 4 - 2 = 2$. Ako sme uviedli vyššie v opise kroku 6, voľné neznáme budeme voliť v 3. a vo 4. stĺpci, t. j. zvolíme, napríklad, $x_3 = 2t$ a $x_4 = 2s$, t, $s \in \mathbb{R}$. Ďalej sa orientujeme podľa vedúcich prvkov. Pravý vedúci prvok sa nachádza v druhom stĺpci a v druhom riadku, preto najprv určíme x_2 z druhej rovnice:

$$2\,x_2 + 7 \cdot x_3 + 19 \cdot x_4 = 2\,x_2 + 14\,t + 38\,s = 41 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{41}{2} - 7\,t - 19\,s.$$

Nasledujúci vedúci prvok sa nachádza v prvom stĺpci a v prvom riadku. Práve z tohoto riadku určíme neznámu x_1:

$$x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = x_1 - \left[\frac{41}{2} - 7t - 19s\right] - 2t - 6s = x_1 - \frac{41}{2} + 5t + 13s = -4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{33}{2} - 5t - 13s.$$

Všeobecné riešenie SLAR je

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 33/2 \\ 41/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} -13 \\ 19 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot s\,, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Všeobecné riešenie vytvára „rovinu“ vo štvorrozmernom priestore. Rovina prechádza bodom $[33/2; 41/2; 0; 0]$ a má „smerové vektory“ $[-5; -7; 2; 0]$ a $[-13; 19; 0; 2]$.

Príklad 9 Pomocou vyššie uvedeného algoritmu riešme SLAR

$$\begin{aligned} 7\,x_1 + 9\,x_2 + 4\,x_3 + 2\,x_4 &= 2, \\ 2\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\ 5\,x_1 + 6\,x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 &= 3, \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie. Podobne ako v predchádzajúcom príklade dostávame

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{7} & 9 & 4 & 2 & 2 \\ \boxed{2} & -2 & 1 & 1 & 6 \\ \boxed{5} & 6 & 3 & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} -3\,R_2 \\ ! \\ -2\,R_2 \\ -1\,R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 15 & 1 & -1 & -16 \\ \boxed{2} & -2 & 1 & 1 & 6 \\ \boxed{1} & 10 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{r} -1\,R_3 \\ -2\,R_3 \\ ! \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & \boxed{5} & 0 & -1 & -7 \\ 0 & \boxed{-22} & -1 & 1 & 24 \\ \boxed{1} & 10 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{r} -1\,R_4 \\ +4\,R_4 \\ \\ ! \end{array} \sim$$

$$
\sim\left[\begin{array}{rrrr|r}
0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & -1\\
0 & \boxed{-2} & -1 & 1 & 0\\
\boxed{1} & 10 & 1 & 0 & -9\\
0 & \boxed{5} & 0 & 0 & -6
\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ ! \\ \\ +2\,R_2\end{array}
\sim\left[\begin{array}{rrrr|r}
0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & -1\\
0 & \boxed{-2} & -1 & 1 & 0\\
\boxed{1} & 10 & 1 & 0 & -9\\
0 & \boxed{1} & -2 & 2 & -6
\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ +2\,R_4 \\ \\ !\end{array}
\sim\left[\begin{array}{rrrr|r}
0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & -1\\
0 & 0 & \boxed{-5} & 5 & -12\\
\boxed{1} & 10 & 1 & 0 & -9\\
0 & \boxed{1} & -2 & 2 & -6
\end{array}\right]
$$

Vedúce prvky už nie sú nad sebou. Na základe Frobeniovej vety je $4 = h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A'}) = 4 = n$, a preto má sústava jediné riešenie. Spätné substitúcie vykonávame „sprava-doľava“. Pravý vedúci prvok sa nachádza vo 4. stĺpci a v 1. riadku. Preto z prvej rovnice určíme $x_4 = 1$. Druhý vedúci prvok sprava sa nachádza v 3. stĺpci a v 2. riadku. Z 2. rovnice teda určíme x_3:

$$-5\,x_3 + 5x_4 = -5\,x_3 + 5 = -12 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = \frac{17}{5}\,.$$

Ďalší vedúci prvok sprava sa nachádza v 2. stĺpci a vo 4. riadku, preto hodnotu x_2 určíme zo 4. rovnice:

$$x_2 - 2\,x_3 + 2x_4 = x_2 - \frac{34}{5} + 2 = x_2 - \frac{24}{5} = -6 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\frac{6}{5}\,.$$

Všimnime si, že túto hodnotu sme mohli určiť už po prvej fáze eliminácií z poslednej rovnice $5\,x_2 = -6$. Na záver z 3. rovnice určíme hodnotu x_1:

$$x_1 + 10\,x_2 + x_3 = x_1 - \frac{60}{5} + \frac{17}{5} = x_1 - \frac{43}{5} = -9 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -\frac{2}{5}\,.$$

Riešením zadanej sústavy je teda vektor $\bar{\boldsymbol{x}} = \left[-\frac{2}{5}; -\frac{6}{5}; \frac{17}{5}; 1\right]^T$.

Poznámka 14 Danú sústavu by sme možno mohli riešiť efektívnejšie, keby sme si všímali jej štruktúru. Napríklad, keby sme využili niektorú z jednotiek vo 4. stĺpci, mohli by sme vo 4. stĺpci vytvoriť hneď 3 nuly. Výhodou uvedeného algoritmu je však to, že nás vedúce prvky riadkov spoľahlivo vedú k cieľu. Uvedené príklady nás presvedčili, že výmena riadkov len spomaľuje ručný výpočet riešenia sústavy.

Poznámka 15 Prvá fáza GEM sa obyčajne uskutočňuje zľava-doprava, ale nič nám nebráni postupovať sprava-doľava a vytvárať tak nuly pod „vedľajšou diagonálou“ matice sústavy smerujúcej z jej ľavého dolného rohu do pravého horného rohu.

Poznámka 16 Na záver ešte dodajme, že uvedený algoritmus sa dá použiť pri určovaní hodnosti matice (o čom sme sa už dvakrát presvedčili), ale aj pri určovaní hodnoty determinantu, čomu sa budeme venovať v predmete Matematika 1. Uvedené zjednodušené riadkové úpravy 3' použité pre štvorcovú maticu totiž nemenia hodnotu jej determinantu. Na výpočet determinantu už len potrebujeme povymieňať riadky tak, aby sa vedúce prvky dostali na hlavnú diagonálu (pri každej výmene dvoch riadkov sa mení znamienko determinantu), t. j. aby sme dostali trojuholníkovú maticu. Determinant trojuholníkovej matice je rovný súčinu jej prvkov na hlavnej diagonále. Ale, o tom potom ...

V odporúčanej literatúre uvedenej na konci tohto textu je možné nájsť ďalšie riešené príklady alebo neriešené úlohy.

Úlohy

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte sústavu lineárnych algebraických rovníc nad $\mathbb{R}$

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 &= 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 37 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= -8 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

l) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 9x_1 - x_2 + 15x_3 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}$$

m) $$\begin{aligned} 5x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 25x_4 &= 15 \\ 15x_1 + 34x_2 + 25x_3 + 64x_4 &= 40 \\ 20x_1 + 46x_2 + 34x_3 + 89x_4 &= 70 \\ 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 &= 25 \end{aligned}$$

n) $$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 6 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

o) $$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$

p) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 &= 3 \end{aligned}$$

q) $$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12 \end{aligned}$$

r) $$\begin{aligned} 12x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 21x_4 &= 3 \\ 11x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 24x_4 &= 1 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= 0 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9 \end{aligned}$$

s) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 6x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 6x_5 &= -1 \end{aligned}$$

t) $$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 15 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

x) $$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= -1 \\ x_1 - x_2 - 3x_4 &= -1 \\ 7x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 10x_4 &= -2 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 9x_4 &= -4 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 &= -6 \end{aligned}$$

u) $$\begin{aligned} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 10 \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 7x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= -4 \end{aligned}$$

y) $$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 &= 5 \\ 11x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 10 \end{aligned}$$

v) $$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= -6 \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 - x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

z) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 &= -5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= -2 \end{aligned} .$$

Výsledky:

a) $\bar{\boldsymbol{x}} = [1, 3, 2]^T$,

b) $\bar{\boldsymbol{x}} = [2, -1, 0]^T$,

c) sústava nemá riešenie,

d) $\bar{\boldsymbol{x}} = [-1, 4, 0]^T$,

e) $\bar{\boldsymbol{x}} = [3 + p, -1 - 2p, p]^T, \quad p \in \mathbb{R}$,

f) $\bar{\boldsymbol{x}} = [1, 2, 2, 0]^T$,

g) $\bar{\boldsymbol{x}} = [-2, 0, 1, -1]^T$,

h) $\bar{\boldsymbol{x}} = [\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 1]^T$,

i) $\bar{\boldsymbol{x}} = [2, -2, 1, -1]^T$,

j) $\bar{\boldsymbol{x}} = [1, 2, 1, 3]^T$,

k) sústava nemá riešenie,

l) sústava nemá riešenie,

m) sústava nemá riešenie,

n) sústava nemá riešenie,

o) $\bar{\boldsymbol{x}} = [3, 0, -5, 11]^T$,

p) $\bar{\boldsymbol{x}} = [\frac{5}{8} - 3t - s,\ 2t,\ 8s,\ -\frac{1}{4} + 10s]^T, \quad s, t \in \mathbb{R}$,

q) $\bar{\boldsymbol{x}} = [6 - 26t + 17s,\ -1 + 7t - 5s,\ t,\ s]^T, \quad s, t \in \mathbb{R}$,

r) $\bar{\boldsymbol{x}} = [-\frac{3}{2} - 5t - 13s,\ -\frac{7}{2} - 7t - 19s,\ 2t,\ 2s]^T, \quad s, t \in \mathbb{R}$,

s) sústava nemá riešenie

t) $\bar{\boldsymbol{x}} = [3, 0, -2, 0, 1]^T$,

u) $\bar{\boldsymbol{x}} = [8 - 9t - 4s,\ t,\ s,\ -10 + 11t + 5s]^T, \quad s, t \in \mathbb{R}$,

v) sústava nemá riešenie,

x) $\bar{\boldsymbol{x}} = [2, -\frac{9}{2}, 0, \frac{5}{2}]^T$,

y) $\bar{\boldsymbol{x}} = [-\frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{15}{7}, 0]^T$,

z) $\bar{\boldsymbol{x}} = [t,\ t,\ 1 + t,\ 1]^T, \quad t \in \mathbb{R}$.

Odporúčaná literatúra

[1] Baculíková, B. – Grinčová, A.: *Matematika 1. Vzorové a neriešené úlohy*, Košice, 2013, 150 s., ISBN 978-80-553-1501-0, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/13/Vzorove_a_neriesene_ulohy_0_0.pdf`

[2] Molnárová, M. – Myšková, H.: *Úvod do lineárnej algebry*, Košice, 2005, 103 s., ISBN 978-80-8073-361-9, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/M1-ULA-Ucebnica-Zbierka.pdf`