Polynómy. Hornerova schéma. Algebrické rovnice

Teoretické základy

Definícia 1 *Nech (koeficienty) $a_0, a_1, \dots, a_n$ sú komplexné čísla a nech n je nezáporné celé číslo. Výraz*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

nazývame polynómom *premennej x. Ak $a_n \neq 0$, tak číslo n nazývame* stupňom polynómu. Nulový výraz *nazývame* nulovým polynómom*.*

Poznámka 1 *Stupeň nulového polynómu nedefinujeme. Premyslite si, aký stupeň budú mať súčet a súčin dvoch polynómov. Z tohoto hľadiska by bolo možné definovať stupeň nulového polynómu rovný $-\infty$.*

Poznámka 2 *Ak budeme mať zadané nejaké (komplexné) čísla a premennú x, potom každý výraz, ktorý z nich získame konečnou kombináciou operácií sčítania, rozdielu a násobenia sa dá zapísať v tvare polynómu. Tieto operácie (spoločne s delením) sú základné operácie, ktoré dokážu vykonávať počítače. Preto hrajú polynómy dôležitú úlohu aj pri aproximácii zložitejších výrazov, resp. funkcií v počítačoch.*

Definícia 2 *Dva (nenulové) polynómy $P(x)$ a $Q(x)$* sa rovnajú *práve vtedy, ak majú* rovnaký stupeň *a* rovnaké koeficienty*.*

Poznámka 3 *Rovnaké polynómy nadobúdajú rovnaké hodnoty pre každú hodnotu x.*

Operácie s polynómami

Medzi základné operácie, ktoré vykonávame s polynómami, patria *súčet*, *rozdiel*, *súčin* a *podiel* polynómov.

Príklad 1 *Určme súčet, rozdiel a súčin polynómov $P_3(x) = 4x^3 - x^2 + 5x + 1$ a $Q_3(x) = -4x^3 + x^2 + 7x - 11$.*

Riešenie. Pri riešení tejto úlohy používame „bežné“ pravidlá na úpravu výrazov, pričom pri násobení uplatňujeme princíp „každý s každým“.

$$P_3(x) + Q_3(x) = 4x^3 - x^2 + 5x + 1 + (-4x^3 + x^2 + 7x - 11) = 12x - 10,$$

$$P_3(x) - Q_3(x) = 4x^3 - x^2 + 5x + 1 - (-4x^3 + x^2 + 7x - 11) = 8x^3 - 2x^2 - 2x + 12,$$

$$P_3(x) \cdot Q_3(x) = (4x^3 - x^2 + 5x + 1)(-4x^3 + x^2 + 7x - 11) =$$
$$= x^6 \cdot (-16) + x^5 \cdot (4+4) + x^4 \cdot (28-1-20) + x^3 \cdot (-44-7+5-4) + x^2 \cdot (11+35+1) + x \cdot (-55+7) - 11 =$$
$$= -16\,x^6 + 8\,x^5 + 7\,x^4 - 50\,x^3 + 47\,x^2 - 48\,x - 11.$$

Pri násobení polynómov sme postupne vyhľadávali koeficienty pri jednotlivých mocninách výsledku. Tým sme ušetrili trochu atramentu, ale jednoduchšie sa aj kontroluje celé násobenie.

Poznámka 4 *Všimnime si ešte stupne výsledných polynómov. Pri súčte sa znížil maximálny stupeň 3 na stupeň 1 (iste tušíte prečo), pri rozdieli sa maximálny stupeň 3 zachoval. Stupeň súčinu 6 je súčet stupňov $3 + 3$.*

Uvažujme teraz operáciu *delenia polynómov*, ktorá je analogická s delením prirodzených čísel so zvyškom. Napríklad môžeme zapísať:

$$\frac{17}{3} = 5 \text{ zv. } 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}.$$

Môžeme tiež zapísať

$$17 = 5 \cdot 3 + 2,$$

pričom hovoríme: „17 delené 3 sa rovná 5 so zvyškom 2". Teda 17 obsahuje 5-násobok čísla 3 (rovný 15) a ešte 2 navyše. Keby sme „nevedeli" deliť, mohli by sme postupne od čísla 17 odoberať menšie násobky 3, až kým nám neostane zvyšok menší ako 3, napríklad:

$$\begin{array}{l} \ \ 17 : 3 = 3 + 2 \\ -(3 \cdot 3) \\ \hline \ \ \ 8 \ (\text{zvyšok} \geqq 3) \\ -(2 \cdot 3) \\ \hline \ \ \ 2 \ (\text{zvyšok} < 3) \end{array}$$

Príklad 2 *Vykonajme delenie polynómu* $2\,x^4 - 11\,x^3 - 15\,x^2 + 95\,x + 9$ *polynómom* $x^3 - 5\,x^2 - 9\,x + 45$.

Riešenie. Delenie vykonáme podľa nasledujúcej schémy, pričom v jednotlivých krokoch najprv delíme člen odpovedajúci najvyššej mocnine zvyšku delenca členom s najvyššou mocninou deliteľa, ďalej vypočítame príslušný násobok deliteľa a odpočítame ho od delenca.

$$\begin{array}{l} \ \ (2\,x^4 - 11\,x^3 - 15\,x^2 + 95\,x + 9) : (x^3 - 5\,x^2 - 9\,x + 45) = 2\,x - 1 \\ -(2\,x^4 - 10\,x^3 - 18\,x^2 + 90\,x) \\ \hline -x^3 + 3\,x^2 + 5\,x + 9 \quad (\text{zvyšok stupňa } 3) \\ -(-x^3 + 5\,x^2 + 9\,x - 45) \\ \hline -2\,x^2 - 4\,x + 54 \quad (\text{zvyšok stupňa } 2) \end{array}$$

Keďže stupeň polynómu $-2\,x^2 - 4\,x + 54$ je 2 a je nižší ako stupeň 3 deliteľa, delenie sme ukončili, pričom polynóm $S_1(x) = 2x - 1$ je výsledok delenia a polynóm $R_2(x) = -2\,x^2 - 4\,x + 54$ sa nazýva *zvyšok po delení*. Môžeme tiež napísať:

$$\frac{2\,x^4 - 11\,x^3 - 15\,x^2 + 95\,x + 9}{x^3 - 5\,x^2 - 9\,x + 45} = 2\,x - 1 + \frac{-2\,x^2 - 4\,x + 54}{x^3 - 5\,x^2 - 9\,x + 45}$$

alebo

$$2\,x^4 - 11\,x^3 - 15\,x^2 + 95\,x + 9 = (2\,x - 1) \cdot (x^3 - 5\,x^2 - 9\,x + 45) + (-2\,x^2 - 4\,x + 54).$$

□

Nasledujúca veta, ktorá sa tiež zvykne nazývať *veta o delení polynómov*, ukazuje, že je možné deliť ľubovoľný polynóm ľubovoľným nenulovým polynómom.

Veta 1 *Nech* $P(x)$ *a* $Q_n(x)$ *sú ľubovoľné polynómy, pričom* $Q_n(x)$ *je nenulový. Potom existujú dva jednoznačne určené polynómy* $S(x)$ *a* $R(x)$*, pričom* $R(x)$ *je buď nulový polynóm alebo polynóm nižšieho stupňa ako je stupeň polynómu* $Q_n(x)$*, také, že platí:*

$$P(x) = S(x) \cdot Q_n(x) + R(x). \tag{1}$$

Poznámka 5 *Veta 1 o delení polynómov sa bude využívať v predmete Matematika 1 pri rozklade racionálnych funkcií na súčet elementárnych zlomkov.*

Poznámka 6 *Ak bude $P(x)$ nenulový polynóm stupňa m, potom ak $m \geqq n$, tak stupeň polynómu $S(x)$ bude $m - n$ a v prípade $m < n$ bude $S(x)$ nulový polynóm a zároveň bude $R(x) = P(x)$.*

Poznámka 7 *Rovnosť* (1) *je možné prepísať v tvare*

$$\frac{P(x)}{Q_n(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}.$$

Poznámka 8 *Pri delení polynómu $P_n(x)$ stupňa $n \geqq 1$ polynómom 1. stupňa (nazývaným tiež* koreňový činiteľ*) v tvare $Q_1(x) = x - \alpha$ bude zvyšok buď nulový alebo polynóm nultého stupňa, t. j. konštanta. Potom platí:*

$$P_n(x) = S_{n-1}(x) \cdot (x - \alpha) + R, \quad \textit{a teda} \quad P_n(\alpha) = S_{n-1}(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) + R = R.$$

Definícia 3 *Hovoríme, že* polynóm $P(x)$ je deliteľný polynómom $Q_n(x)$ *práve vtedy, ak je zvyšok $R(x)$ v* (1) *nulový polynóm.*

Poznámka 9 *Polynóm $P(x)$ je deliteľný polynómom $Q_n(x)$ práve vtedy, ak je jeho „polynomiálnym" násobkom, t. j. existuje polynóm $S(x)$ taký, že $P(x) = S(x) \cdot Q_n(x)$.*

Hornerova schéma

Pri riešení rôznych úloh je dôležité vedieť efektívne počítať hodnotu polynómu $P_n(x)$ pre zadanú hodnotu x. Jedným z najefektívnejších spôsobov z hľadiska počtu vykonávaných aritmetických operácií (najmä násobení) je využitie tzv. *Hornerovej schémy.* Uvažujme najprv polynóm 3. stupňa. Tento môžeme zapísať dvomi rôznymi spôsobmi (zátvorky sme označili dolnými indexami):

$$a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 = ((((a_3)_0 \cdot x + a_2)_1 \cdot x + a_1)_2 \cdot x + a_0)_3.$$

Hodnota vo vnútornej zátvorke – nulovej – sa rovná koeficientu a_3. Hodnoty v ďalších zátvorkách dostávame postupne násobením predchádzajúcich hodnôt zátvoriek premennou x a pridaním ďalšieho koeficienta. Výsledky (hodnoty zátvoriek) je vhodné zapisovať do tabuľky.

Príklad 3 *Určme hodnotu polynómu $P_3(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ pre hodnoty $x = -1$ a $x = 3$.*

Riešenie. Na dosadenie využijeme Hornerovu schému. Pre hodnoty v zátvorkách dostávame pre $x = -1$ postupne:

$$(\cdot)_0 = a_3 = 1, \qquad (\cdot)_1 = x \cdot (\cdot)_0 + a_2 = (-1) \cdot 1 + (-5) = -6,$$

$$(\cdot)_2 = x \cdot (\cdot)_1 + a_1 = (-1) \cdot (-6) + (-9) = -3,$$

$$(\cdot)_3 = x \cdot (\cdot)_2 + a_0 = (-1) \cdot (-3) + 45 = 48 = P_3(-1).$$

a pre $x = 3$ dostávame postupne:

$$(\cdot)_0 = a_3 = 1, \qquad (\cdot)_1 = x \cdot (\cdot)_0 + a_2 = 3 \cdot 1 + (-5) = -2,$$

$$(\cdot)_2 = x \cdot (\cdot)_1 + a_1 = 3 \cdot (-2) + (-9) = -15,$$

$$(\cdot)_3 = x \cdot (\cdot)_2 + a_0 = 3 \cdot (-15) + 45 = 0 = P_3(3).$$

Vyššie uvedený postup je efektívne zapísať do tabuľky, v ktorej prvý riadok obsahuje koeficienty polynómu a v druhom riadku okrem hodnoty x, ktorú dosadzujeme, postupne zapisujeme hodnoty jednotlivých zátvoriek.

	1	-5	-9	45
$x = -1$	1	-6	-3	48
$x = 3$	1	-2	-15	0

Záver: $P(-1) = 48$, $P(3) = 0$. □

Poznámka 10 *Hodnotu polynómu $P(x)$ pri dosadení hodnoty $x = x_0$ označujeme $P(x_0)$. Polynóm sa často stotožňuje s funkciou, ktorá je určená predpisom $y = P(x)$, v tom prípade čítame $P(x_0)$ tiež ako „hodnota polynómu P v bode x_0“.*

Všeobecný zápis Hornerovej schémy pre polynóm $P_n(x)$ stupňa n je teda

$$a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0 = ((\cdots((a_n)_0 \cdot x + a_{n-1})_1 \cdot x + \cdots + a_1)_{n-1} \cdot x + a_0)_n\,.$$

Hodnotu tohoto polynómu pre $x = \alpha$ určíme pomocou tabuľky:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
α	$(\cdot)_0$	$(\cdot)_1$	$\cdots$	$(\cdot)_{n-1}$	$(\cdot)_n = P_n(\alpha)$

,

pričom platí:

$$(\cdot)_0 = a_n, \qquad (\cdot)_i = \alpha \cdot (\cdot)_{i-1} + a_{n-i}, \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Príklad 4 *Porovnajme hodnoty polynómov $P_3(x) = 2x^3 - x^2 + 4$, $Q_3(x) = 2x^3 - x + 4$ a $T_2(x) = 2x^2 - x + 4$ pre hodnotu $x = -2$.*

Riešenie. Pri riešení tejto úlohy si môžeme všimnúť, že všetky tri zadané polynómy majú „rovnaké“ koeficienty 2, -1 a 4. Avšak, ak sa pozrieme pozornejšie, zbadáme, že rovnaké sú v skutočnosti koeficienty pri rôznych mocninách, a teda koeficienty polynómov *nie sú rovnaké*! Častou chybou pri použití Hornerovej schémy je, že sa koeficienty zapíšu hneď po sebe, napríklad v tomto prípade dostávame:

	2	-1	4
$x = -2$	2	-5	14

Je zrejmé, že sme týmto určili hodnotu $T_2(-2)$. Na získanie hodnoty $P_3(-2)$ musíme použiť Hornerovu schému v tvare

	2	-1	0	4
$x = -2$	2	-5	10	$-16 = P_3(-2)$

a podobne na získanie hodnoty $Q_3(-2)$ použijeme

	2	0	-1	4
$x = -2$	2	-4	7	$-10 = Q_3(-2)$

.

Popri efektívnom spôsobe výpočtu hodnôt polynómu poskytuje Hornerova schéma ešte jednu „službu“. Pomocou Hornerovej schémy sa dá vykonávať delenie polynómu „lineárnym dvojčlenom“, alias „koreňovým činiteľom“. Platí veta:

Veta 2 *Nech polynóm* $S_{n-1}(x) = s_{n-1} \cdot x^{n-1} + s_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + s_1 \cdot x + s_0$ *je výsledkom delenia polynómu* $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ *koreňovým činiteľom* $Q_1(x) = x - \alpha$. *Potom pre koeficienty polynómu* $S_{n-1}(x)$ *platí:*

$$s_i = (\cdot)_{n-1-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

kde zátvorky $(\cdot)_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *sú definované v* (2).

Teda „Hornerova schéma delí“. Koeficienty delenca $S_{n-1}(x)$ sú teda hodnoty, ktoré sa objavia v 2. riadku Hornerovej schémy. V oddieli Teoretické doplnky uvádzame „zdôvodnenie“ platnosti Vety 2.

Príklad 5 *Vydeľme polynóm* $P_5(x) = -2x^5 + x^3 - 2x^2 + 6$ *polynómom* $x + 4$.

Riešenie. Delenie polynómu vykonáme pomocou Hornerovej schémy. Keďže $x + 4 = x - (-4)$, je potrebné dosadiť hodnotu $\alpha = -4$:

	-2	0	1	-2	0	6
$x = -4$	-2	8	-31	122	-488	1958

Výsledok môžeme zapísať v tvare

$$-2x^5 + x^3 - 2x^2 + 6 = (-2x^4 + 8x^3 - 31x^2 + 122x - 488) \cdot (x + 4) + 1958.$$

Teda výsledkom podielu je polynóm $S_4(x) = -2x^4 + 8x^3 - 31x^2 + 122x - 488$ a zvyšok je 1958. □

Algebrické rovnice

Uvažujme polynóm

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 \tag{3}$$

s komplexnými koeficientami (koeficienty môžu byť, samozrejme, aj reálne).

Definícia 4 *Komplexné číslo* α *sa nazýva* koreňom polynómu $P_n(x)$ *práve vtedy, ak* $P_n(\alpha) = 0$. *Ak je* α *koreňom polynómu, tak polynóm* $x - \alpha$ *sa nazýva* koreňový činiteľ polynómu.

Poznámka 11 *Polynóm 0-tého stupňa* nemá korene *(zdôvodnite to). Nulový polynóm* má nekonečne veľa koreňov *– po „dosadení“ ľubovoľného komplexného čísla* α *do nulového polynómu, dostávame hodnotu 0.*

Definícia 5 *Rovnica*

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \tag{4}$$

sa nazýva algebrická rovnica. *Ak* $a_n \neq 0$ *a* $n \geqq 1$, *hovoríme o* algebrickej rovnici n-tého stupňa (rádu).

Poznámka 12 *Algebrickú rovnicu môžeme zapísať v tvare* $P_n(x) = 0$. *Vidíme, že číslo* α *je koreňom algebrickej rovnice práve vtedy, ak je koreňom polynómu na ľavej strane rovnice.*

Riešeniu algebrických rovníc sa ľudstvo venuje už niekoľko tisícročí. Rovnice nižších rádov majú aj svoje označenia: rovnice 1. rádu sa nazývajú *lineárne*, rovnice 2. rádu sú *kvadratické*, rovnice 3. rádu sú *kubické*, rovnice 4. rádu sú *kvartické* a rovnice 5. rádu sú *kvintické*.

Lineárne rovnice (a to dokonca aj sústavy lineárnych rovníc) riešili už Babylončania aj Egypťania (a pravdepodobne aj Číňania) v období zhruba 2000 rokov pred naším letopočtom, avšak formulovali ich ako slovné úlohy bez súčasného algebrického zápisu. Každá *lineárna rovnica má práve jedno riešenie* (koreň):

$$a \cdot x + b = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\frac{b}{a}\,.$$

Pripomíname, že lineárna rovnica je rovnica 1. rádu, a teda $a \neq 0$.

Kvadratické rovnice prakticky sformulovali a riešili zrejme Babylončania, samozrejme bez „nášho“ algebrického zápisu. Dnes môžeme napísať, že *kvadratická rovnica* $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ *má práve dva korene*, ktoré môžeme vyjadriť vzorcom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2\,a}.$$

Opäť pripomíname, že $a \neq 0$. Ak bude výraz pod odmocninou rovný nule, je zrejmé, že $x_1 = x_2$. Matematici v tom prípade hovoria, že rovnica má *jeden dvojnásobný koreň* a chápu to v tom zmysle, že rovnica má *dva rovnaké korene*.

Úloha určenia riešenia *všeobecnej kubickej rovnice* bola vyriešená až v 16. storočí. Niekoľko špeciálnych kubických rovníc vyriešili už Babylončania, niekoľko ďalších vyriešil v 12. storočí perzský matematik a básnik Omar Chajjám a viacerí matematici žijúci na území dnešného Talianska v 14. a v 15. storočí. Veľký vklad priniesol bolonský matematik Scipione dal Ferro zrejme koncom 15. storočia a Niccollò Tartaglia v roku 1535. Vzorce na riešenie kubickej rovnice sa dnes nazývajú Cardanove vzorce. Gerolamo Cardano ich opublikoval vo svojej knihe *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus* (Veľké umenie alebo prvá kniha pravidiel algebry) v roku 1545. V tejto knihe bol uvedený aj spôsob riešenia *kvartickej rovnice*, ktorý (zrejme) navrhol Cardanov žiak Ludovico Ferrari.

Ďalšou métou sa prirodzene stali *kvintické rovnice* – rovnice 5. rádu. Nájsť vzorec na ich riešenie sa pokúšalo mnoho matematikov. V roku 1799 Johann Carl Friedrich Gauss – kráľ matematikov – sa skepticky vyjadril o možnosti nájsť hľadaný vzorec, pričom skonštatoval: „Možno nebude také obtiažne túto nemožnosť pre piaty stupeň striktne dokázať“. V tom istom roku vydal Paolo Ruffini dvojdielne pojdenanie *Teoria generale delle equazioni* (Všeobecná teória rovníc), v ktorej podal 516-stranový dôkaz nemožnosti existencie vzorca na základe aritmetických operácií a operácie odmocňovania. Neskôr sa ukázalo, že tento dôkaz nebol úplný. V roku 1823 podal dôkaz nemožnosti 21-ročný nórsky matematik Niels Henrik Abel, ktorý nepoznal Ruffiniho prácu zrejme ani v roku 1826, keď bol opublikovaný podrobnejší a dôkladnejší dôkaz. Évarista Galois, ktorý zomrel ako 20-ročný po súboji v roku 1932, zaviedol pojem *grupy*. Tento pojem zohral neskôr úlohu pri riešení mnohých úloh matematiky a fyziky. S využitím teórie grúp sa mu podarilo stanoviť *podmienky riešiteľnosti rovníc pomocou vzorcov*.

Tak sa teda rozplynul sen o nájdení vzorca na riešenie kvintických rovníc, a teda aj rovníc vyšších rádov. To však neznamená, že tieto rovnice nemajú riešenie. Problematike existencie riešenia algebrických rovníc sa venovali viacerí matematici vrátane Leibniza, Eulera a Lagrangea. Gauss v roku 1799 podal prvý „dôkaz“ *základnej (fundamentálnej) vety algebry* – z ktorej vyplýva, že každá rovnica n-tého rádu má práve n koreňov. Prvý bezchybný dôkaz tejto vety podal až v roku 1814 Jean-Robert Argand. Neskôr Gauss vypracoval ešte ďalšie 3 dôkazy základnej vety. Uveďme túto vetu.

Veta 3 *Každá algebrická rovnica $P_n(x) = 0$ stupňa $n \geqq 1$ má aspoň jedno komplexné riešenie.*

Dôkaz fundamentálnej vety algebry uvádza, napríklad, [5].

Dôsledok základnej vety algebry *Každá algebrická rovnica stupňa $n \geqq 0$ má práve n komplexných koreňov.*

Dôsledok dôsledku *Pre každý polynóm $P_n(x)$ (3) stupňa $n \geqq 1$ existujú korene $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1$, 2, ..., n a polynóm sa dá napísať v nasledujúcom tvare:*

$$P_n(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n). \tag{5}$$

Výraz na pravej strane sa nazýva *súčin koreňových činiteľov polynómu $P_n(x)$.*

Definícia 6 Rozklad (5) sa nazýva *rozklad polynómu $P_n(x)$ na súčin koreňových činiteľov nad poľom komplexných čísel* alebo tiež *kanonický rozklad polynómu $P_n(x)$ v množine $\mathbb{C}$.*

Definícia 7 Koreň α polynómu $P_n(x)$ sa nazýva *k-násobný koreň* práve vtedy, ak existuje taký polynóm $S_{n-k}(x)$, pre ktorý platí $S_{n-k}(\alpha) \neq 0$ a zároveň

$$P_n(x) = S_{n-k}(x) \cdot (x - \alpha)^k.$$

Násobnosť koreňa α môžeme určiť opakovaním nasledujúceho postupu: aktuálny polynóm delíme koreňovým činiteľom $x - \alpha$, čím vzniká nasledujúci aktuálny polynóm. Ak je α znova koreňom aktuálneho polynómu, opakujeme jeho delenie koreňovým činiteľom atď. Tento proces na konci dospeje k aktuálnemu polynómu $S_{n-k}(x)$, pre ktorý platí $S_{n-k}(\alpha) \neq 0$ (môže sa stať, že bude $S_{n-k}(x) = a_n$, vtedy bude koreň α n-násobný) a postup sa zastaví.

Rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov môžeme napísať v nasledujúcom tvare:

$$P_n(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot (x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_l)^{k_l},$$

pričom polynóm má l *rôznych* koreňov α_i, každý s násobnosťou k_i, $i = 1, \ldots, l$ a platí:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n.$$

Ak budeme uvažovať polynómy, resp. algebrické rovnice, s reálnymi koeficientami, môžeme dostať niektoré ďalšie vlastnosti.

Veta 4 *Nech koeficienty polynómu $P_n(x)$ (3) sú* reálne *čísla, $n \geqq 1$. Nech $\alpha = a + \mathrm{i} \cdot b \in \mathbb{C}$ je koreňom algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Potom je koreňom algebrickej rovnice komplexne združené číslo $\bar{\alpha} = a - \mathrm{i} \cdot b$.*

Dôkaz vety uvádzame v oddiele Teoretické doplnky. Veta 4 triviálne platí pre *reálne* korene, pre ktoré je $b = 0$, pretože pre $\alpha \in \mathbb{R}$ platí, že $\bar{\alpha} = \alpha$.

Poznámka 13 *Nereálne korene algebrickej rovnice s reálnymi koeficientami teda vystupujú vždy v komplexne združených dvojiciach. Dá sa jednoducho ukázať, že komplexne združené korene rovnice s reálnymi koeficientami majú rovnakú násobnosť.*

Dôsledok Vety 4 *Každá algebrická rovnica* nepárneho stupňa *s reálnymi koeficientmi* má aspoň jedno reálne riešenie.

Dôkaz. Rovnica nepárneho stupňa s reálnymi koeficientmi má nepárny počet koreňov, pričom nereálne korene vystupujú vo dvojiciach a je ich preto, vrátane násobnosti, párny počet. Preto musí existovať aspoň jeden reálny koreň. ■

Uvažujme teraz dvojicu komplexne združených nereálnych koreňov $a + \mathrm{i} \cdot b$, $a - \mathrm{i} \cdot b$, $b \neq 0$. Súčin ich koreňových činiteľov bude mať tvar:

$$\Big(x - (a + \mathrm{i} \cdot b)\Big) \cdot \Big(x - (a - \mathrm{i} \cdot b)\Big) = x^2 - 2a\,x + (a^2 + b^2). \tag{6}$$

Podarilo sa nám zbaviť imaginárnych jednotiek, t. j. získali sme *reálny* výraz.

Definícia 8 Uvažujme polynóm $P_n(x)$ (3) *s reálnymi koeficientmi*, $n \geqq 1$. Rozklad (5), v ktorom sú súčiny koreňových činiteľov dvojíc komplexne združených nereálnych koreňov nahradené pravou stranou (6), sa nazýva *kanonický rozklad polynómu* $P_n(x)$ *nad poľom reálnych čísel* (v množine $\mathbb{R}$).

Poznámka 14 *Presvedčili sme sa, že* polynóm s reálnymi koeficientmi *môžeme rozložiť na súčin* reálnych *„koreňových činiteľov“, ktorých stupne sú 1 alebo 2.*

Rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov v množine $\mathbb{R}$ môžeme napísať v nasledujúcom tvare:

$$P_n(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_l)^{k_l} \cdot (x^2 - 2a_1\,x + (a_1^2 + b_1^2))^{m_1} \cdots (x^2 - 2a_q\,x + (a_q^2 + b_q^2))^{m_q},$$

pričom polynóm má l *rôznych reálnych* koreňov α_i, každý s násobnosťou k_i, $i = 1, \ldots, l$ a q *rôznych dvojích nereálnych* koreňov, každý s násobnosťou m_j, $j = 1, \ldots, q$ a platí:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_l + 2 \cdot (m_1 + m_2 + \cdots + m_q) = n.$$

Nasledujúca veta sa používa pri riešení vybraných úloh súvisiacich s riešením algebrických rovníc stupňa vyššieho ako 2. Nepredpokladáme totiž, že bežní ľudia ovládajú Cardanove alebo Ferrariho vzorce. V praxi sa rovnice vyšších stupňov riešia skôr numericky.

Veta 5 *Nech koeficienty polynómu* $P_n(x)$ (3) *sú* celé *čísla,* $n \geqq 1$. *Nech* $\alpha = \dfrac{p}{q}$ *je* racionálnym koreňom *algebrickej rovnice* $P_n(x) = 0$, *kde* p *je celé číslo,* q *je prirodzené číslo, pričom* p *a* q *sú nesúdeliteľné. Potom* p *je deliteľom* a_0 *a* q *je deliteľom* a_n.

Poznámka 15 *Ak je koeficient* $a_n = 1$, *tak potom pre racionálny koreň* $\alpha = p/q$ *musí byť* $q = 1$, *a teda racionálny koreň musí byť celočíselný. Ak má algebrická rovnica* racionálne koeficienty, *môžeme ju vynásobiť* spoločným menovateľom všetkých koeficientov *a získať tak rovnicu s celočíselnými koeficientmi.*

Na základe Vety 5 môžeme zostaviť zoznam možných „podozrivých“ racionálnych koreňov algebrickej rovnice. Pomocou Hornerovej schémy potom pre jednotlivé možnosti overíme, či sú koreňmi.

Príklad 6 *Určme rozklad polynómu* $P_6(x) = 3\,x^6 - 8\,x^5 + 22\,x^4 + 54\,x^3 - 5\,x^2 - 26\,x$ *v množine* $\mathbb{C}$ *aj v množine* $\mathbb{R}$ [5].

Riešenie. Na určenie rozkladu potrebujeme poznať korene polynómu. Algebrická rovnica $P_n(x) = 0$ má v tomto prípade celočíselné korene, $a_0 = 0$. Koeficient $a_0 = 0$ ma nekonečne veľa deliteľov, čo by skomplikovalo overovanie. Avšak *v prípade $a_0 = 0$ je $x = 0$ evidentne koreňom rovnice.* Môžeme teda napísať:

$$P_6(x) = x \cdot (3\,x^5 - 8\,x^4 + 22\,x^3 + 54\,x^2 - 5\,x - 26)$$

a môžeme pokračovať určovaním koreňov polynómu $S_5(x) = 3\,x^5 - 8\,x^4 + 22\,x^3 + 54\,x^2 - 5\,x - 26$. Racionálne korene môžu mať teda menovateľa $q = 1$ alebo $q = 3$. Možné hodnoty p sú delitele čísla -26, t. j. ± 1, ± 2, ± 13 a ± 26. Ak má rovnica racionálne korene, môžu to byť len niektoré zo zoznamu $\{\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26, \pm 1/3, \pm 2/3, \pm 13/3, \pm 26/3\}$. Na „overenie“ použijeme Hornerovu schému.

	3	-8	22	54	-5	-26
~~$x = 1$~~	~~3~~	~~-5~~	~~17~~	~~71~~	~~66~~	~~40~~
$x = -1$	3	-11	33	21	-26	0
$x = -1$	3	-14	47	-26	0	
$x = -1$	3	-17	64	-90		

Overovanie „podozrivých“ hodnôt sme začali číslom $x = 1$, ktoré nebolo koreňom, pretože $S_5(1) = 40$. Pokračovali sme dosadením $x = -1$, pričom sme zistili, že $S_5(-1) = 0$, a teda $x = -1$ je koreňom polynómu $S_5(x)$ aj polynómu $P_6(x)$. Môžeme pokračovať s polynómom stupňa 4, ktorého koeficienty 3, -11, 33, 21 a -26 sú v príslušnom riadku Hornerovej schémy. $x = -1$ bolo znova koreňom. Ešte raz sme teda overili hodnotu $x = -1$, avšak hodnota polynómu bola -90. Zistili sme, že $x = -1$ je dvojnásobný koreň polynómu $P_5(x)$ a platí:

$$P_6(x) = x \cdot (x+1)^2 \cdot (3\,x^3 - 14\,x^2 + 47\,x - 26).$$

Pokračujeme v overovaní zvyšných hodnôt. Avšak polynóm $T_3(x) = 3\,x^3 - 14\,x^2 + 47\,x - 26$ má *koeficienty so striedavými znamienkami.* Je známe, že takéto polynómy *nemôžu mať záporné korene* (premyslite si, prečo). Podobne, polynómy, ktorých *koeficienty majú rovnaké znamienka, nemôžu mať kladné korene* (prečo?).

Takže zo zoznamu možných racionálnych koreňov nám ostali $\{2, 13, 26, 1/3, 2/3, 13/3, 26/3\}$. Skúsme pre zmenu dosadiť neceločíselné korene.

	3	-14	47	-26
~~$x = 1/3$~~	~~3~~	~~-13~~	~~$128/3$~~	~~$-106/9$~~
$x = 2/3$	3	-12	39	0

Našli sme koreň $x = 2/3$. Ak si všimneme, že všetky koeficienty výsledného polynómu sú deliteľné číslom 3, dostávame priebežný rozklad

$$P_6(x) = 3 \cdot x \cdot (x+1)^2 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (x^2 - 4\,x + 13).$$

Korene kvadratického polynómu $x^2 - 4\,x + 13$ určíme ľahko pomocou vzorca:

$$x_{5,6} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \mathrm{i} \cdot 6}{2} = 2 \pm 3 \cdot \mathrm{i}.$$

Teda zadaný polynóm s reálnymi koeficientmi má *jednu dvojicu komplexne združených koreňov* $x_{5,6} = 2 \pm 3 \cdot \mathrm{i}$. Predtým, ako vypíšeme odpoveď, vynásobíme koreňové činitele týchto dvoch koreňov $x_{5,6}$ – môžeme použiť vzorec (6):

$$\big(x - (2 + 3 \cdot \mathrm{i})\big) \cdot \big(x - (2 - 3 \cdot \mathrm{i})\big) = x^2 - 4\,x + 13.$$

Záver: *Kanonický rozklad polynómu* $P_6(x)$ *v množine* $\mathbb{C}$ je:

$$P_6(x) = 3 \cdot x \cdot (x+1)^2 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (x - 2 - 3 \cdot \mathrm{i}) \cdot (x - 2 + 3 \cdot \mathrm{i})$$

a *kanonický rozklad polynómu* $P_6(x)$ *v množine* $\mathbb{R}$ je:

$$P_6(x) = 3 \cdot x \cdot (x+1)^2 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (x^2 - 4\,x + 13).$$

Všimnime si, že kanonický rozklad v množine $\mathbb{R}$ sme už „mali“ skôr.

Rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov niekedy získame „*vynímaním pred zátvorku*“ alebo podľa známych vzorcov. Neskúšajte aplikovať tieto metódy na ľubovoľnú algebrickú rovnicu (zdôvodnenie tejto rady by si vyžadovalo hlbšie poznatky o polynómoch).

Príklad 7 *Určme všetky reálne korene (riešenia) rovnice:* $3x^4 + x^3 - 12x^2 - 4x = 0$.

Riešenie. Polynóm danej rovnice rozložíme na súčin

$$\begin{aligned} 3x^4 + x^3 - 12x^2 - 4x &= x(3x^3 + x^2 - 12x - 4) = x[x^2(3x+1) - 4(3x+1)] = \\ &= x\boldsymbol{(x^2 - 4)}(3x+1) = x(x-2)(x+2)(3x+1) \end{aligned} \tag{7}$$

a danú rovnicu môžeme ekvivalentne zapísať v tvare

$$x(x-2)(x+2)(3x+1) = 0.$$

Na určenie všetkých koreňov tejto rovnice stačí zistiť, kedy sú jednotlivé činitele jej ľavej strany rovné nule. Ľahko nahliadneme, že $\mathcal{K} = \{0; 2; -2; -1/3\}$. □

Poznámka 16 *Rovnosť* (7) *môžeme použiť na určenie kanonického rozkladu polynómu na ľavej strane rovnice v množine* $\mathbb{R}$, *a teda aj v množine* $\mathbb{C}$. *Stačí z poslednej zátvorky vytknúť dopredu koeficient 3:*

$$3x^4 + x^3 - 12x^2 - 4x = x(x-2)(x+2)(3x+1) = 3\,(x-0)(x-2)\Big(x - (-2)\Big)\left(x - \frac{-1}{3}\right).$$

Riešenie ďalších príkladov

Príklad 8 *Vykonajme delenie polynómu* $x^3 - 2\,x^2 + x - 1$ *polynómom* $x^2 - 3\,x + 2$.

Riešenie. Zapíšeme:

$$\begin{array}{l} \quad (x^3 - 2\,x^2 + x - 1) : (x^2 - 3\,x + 2) = x + 1 \\ -(x^3 - 3\,x^2 + 2\,x) \\ \hline \quad x^2 - x - 1 \\ -(x^2 - 3\,x + 2) \\ \hline \quad 2\,x - 3 \end{array}$$

Teda

$$\frac{x^3 - 2\,x^2 + x - 1}{x^2 - 3\,x + 2} = x + 1 + \frac{2\,x - 3}{x^2 - 3\,x + 2},$$

pričom výsledok delenia je polynóm $S_1(x) = x + 1$ a polynóm $R_1(x) = 2\,x - 3$ je zvyšok. □

Príklad 9 *Utvorme podiel polynómov*

$$P_4(x) = x^4 + 8x^3 + 2x - 8 \quad a \quad Q_2(x) = x^2 + 1.$$

Riešenie. Doporučujeme pri delení zachovať známy postup:

$$(x^4 + 8x^3 + 2x - 8) : (x^2 + 1) = x^2 + 8x - 1$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-x^4 \;\; -x^2 \qquad\qquad\qquad} \\
\qquad 8x^3 - x^2 + 2x - 8 \\
\qquad \underline{-8x^3 \;\;\; - 8x \qquad} \\
\qquad\qquad\;\; -x^2 - 6x - 8 \\
\qquad\qquad\;\; \underline{\;\; x^2 \quad\;\; + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; -6x - 7
\end{array}$$

Zistili sme, že

$$x^4 + 8x^3 + 2x - 8 = (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 8x - 1) + (-6x - 7),$$

alebo

$$\frac{x^4 + 8x^3 + 2x - 8}{x^2 + 1} = x^2 + 8x - 1 + \frac{-6x - 7}{x^2 + 1}\,.$$

Výsledok delenia je polynóm $S_2(x) = x^2 + 8x - 1$ a zvyšok je $R_1(x) = -6x - 7$. Podiel polynómov teda nemusí byť polynóm. □

Príklad 10 *Utvorme podiel polynómov*

$$P_3(x) = x^3 - 4x^2 + 3 \quad a \quad Q_1(x) = x - 1.$$

Riešenie. Dostávame

$$(x^3 - 4x^2 + 3) : (x - 1) = x^2 - 3x - 3$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-x^3 \;\; +x^2 \qquad\quad} \\
\qquad -3x^2 \quad +3 \\
\qquad \underline{\;\; 3x^2 - 3x \quad} \\
\qquad\qquad\; -3x + 3 \\
\qquad\qquad\; \underline{\;\;\; 3x - 3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Polynóm $Q_1(x)$ delí polynóm $P_3(x)$, pričom ich podiel je $S_2(x) = x^2 - 3x - 3$. □

Poznámka 17 *Predchádzajúcu úlohu sme mohli riešiť pomocou Hornerovej schémy, keďže deliteľ je* koreňový činiteľ*:*

$$\begin{array}{r||c|c|c|c}
 & 1 & -4 & 0 & 3 \\
\hline
x = 1 & 1 & -3 & -3 & 0
\end{array}\,.$$

Príklad 11 *Určme všetky reálne korene (riešenia) rovnice* $3x^4 + x^3 + 12x^2 + 4x = 0$.

Riešenie. Obdobne ako v teoretickej časti dostaneme (porovnaj typograficky zvýraznené odlišnosti: v teoretickej časti je to $(x^2 - 4)$ a v nasledujúcich úpravách $(x^2 + 4)$)

$$3x^4 + x^3 + 12x^2 + 4x = x^3(3x+1) + 4x(3x+1) = x\boldsymbol{(x^2+4)}(3x+1),$$

pričom výraz $x^2 + 4$ sa v $\mathbb{R}$ už nedá rozložiť. Pretože v množine $\mathbb{R}$ je $x^2 + 4 \neq 0$, tak $\mathcal{K} = \{0; -1/3\}$. □

Poznámka 18 *Na určenie kanonického rozkladu polynómu na ľavej strane rovnice v množine* $\mathbb{R}$ *stačí z poslednej zátvorky vytknúť dopredu koeficient 3 a zmeniť znamienko:*

$$3x^4 + x^3 + 12x^2 + 4x = x(x^2+4)(3x+1) = 3(x-0)\left(x - \frac{-1}{3}\right)(x^2+4)\,.$$

Príklad 12 *Určme všetky reálne korene (riešenia) rovnice* $x^2(x-4)(x+4) = 24 - 2x^2(x^2+5)$.

Riešenie. Po jednoduchých úpravách môžeme rovnicu zapísať v tvare

$$3(x^4 - 2x^2 - 8) = 0.$$

Je evidentné, že táto rovnica je po substitúcii $x^2 = t$ ekvivalentná s kvadratickou rovnicou $t^2 - 2t - 8 = 0$. Jej diskriminant je $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$ a jej korene sú

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 4; \\ -2. \end{cases}$$

Teda $x^2 = 4$ alebo $x^2 = -2$. Prvá rovnica má v $\mathbb{R}$ riešenie $x = \pm 2$ a druhá v $\mathbb{R}$ nemá riešenie. Preto $\mathcal{K} = \{2; -2\}$. □

Odporúčame čitateľovi, aby sa presvedčil o tom, že rozklad skúmaného polynómu v $\mathbb{R}$ na súčin koreňových činiteľov má tvar

$$3(x^4 - 2x^2 - 8) = 3(x-2)(x+2)(x^2+2) = 3(x-2)\big(x-(-2)\big)(x^2+2).$$

Príklad 13 *Riešme rovnicu* $x^3 + 4x^2 + 14x + 20 = 0$ *a rozložme polynóm* $P_3(x) = x^3 + 4x^2 + {}$ ${}+ 14x + 20$ *na súčin koreňových činiteľov v množine* $\mathbb{C}$ *aj v množine* $\mathbb{R}$.

Riešenie. Celočíselnými koreňmi rovnice môžu byť len čísla, ktoré delia číslo 20, teda: ± 1, ± 2, ± 4, ± 5, ± 10, ± 20. Všimnime si, že žiadne kladné číslo nemôže byť koreňom tejto rovnice (prečo?). Overujme pomocou Hornerovej schémy záporné korene od najmenšieho v absolútnej hodnote po najväčší; „neúspešné“ riadky vyškrtnime.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 14 & 20 \\ \hline -1 & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{11} & |\cancel{9} \\ \hline -2 & 1 & 2 & 10 & |0 \end{array}.$$

Zistili sme, že $x_1 = -2$ je koreň rovnice. Zároveň sme získali koeficienty polynómu, ktorý vznikne delením polynómu rovnice koreňovým činiteľom $x - x_1 = x + 2$, ktorého korene sú ďalšími koreňmi uvažovanej rovnice:

$$x^3 + 4x^2 + 14x + 20 = (x+2) \cdot (x^2 + 2x + 10)\,, \tag{8}$$

$$x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm \mathrm{i}6}{2} = -1 \pm 3\mathrm{i}\,.$$

Koreňmi rovnice $x^2 + 2x + 10 = 0$ sú čísla $x_2 = -1 + 3\mathrm{i}$ a $x_3 = -1 - 3\mathrm{i}$. Kanonický rozklad polynómu $P_3(x)$ v množine $\mathbb{C}$ je

$$x^3 + 4x^2 + 14x + 20 = (x+2) \cdot (x + 1 - 3\mathrm{i}) \cdot (x + 1 + 3\mathrm{i}).$$

Kanonický rozklad v množine $\mathbb{R}$ sme získali už skôr, je to vzťah (8). □

Úlohy

Úloha 1 Uvažujme dva polynómy stupňov m a n, pričom $m > n$. Aké stupne budú mať súčet, rozdiel a súčin uvažovaných polynómov?

Úloha 2 Určte súčet, rozdiel a súčin polynómov $P_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ a $Q_4(x) = -4x^4 + 2x^2 + 7x - 13$.

Úloha 3 Vykonajte delenie polynómu $2x^5 - 3\,x^3 + 3\,x^2 + 6x - 7$ polynómom $x^3 + 3\,x^2 - 4$.

Úloha 4 Určte korene polynómu $p^3 + 6p^2 - 32$ a napíšte jeho kanonický rozklad v množine $\mathbb{C}$ aj v množine $\mathbb{R}$.

Úloha 5 Určte korene polynómu $x^3+10x^2+33x+36$ a napíšte jeho kanonický rozklad v množine $\mathbb{C}$ aj v množine $\mathbb{R}$.

Úloha 6 Určte korene polynómu $s^3-7s^2+25s-39$ a napíšte jeho kanonický rozklad v množine $\mathbb{C}$ aj v množine $\mathbb{R}$.

Úloha 7 Vypočítajte podiel dvoch polynómov:

a) $(x^3 + 2x^2 - 2x + 1) : (x^2 - 1)$

b) $(4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x) : (x^2 + x - 3)$

c) $(x^5 + 7x^3 + 2x^2 + 5) : (x^3 - 2x + 4)$

d) $(x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 2x + 5) : (x^2 + 3x - 2)$

e) $(3x^5 - 7x^4 + 5x^3 - x^2) : (x^4 - 2x^3 + x^2)$

f) $(2x^5 - 7x^3 + 5x^2 - x) : (x + 3)$

Úloha 8 Vypočítajte hodnotu polynómu $P(x)$ v daných bodoch:

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1;\quad x_1 = 2,\ x_2 = -4$

b) $P(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x;\quad x_1 = 3,\ x_2 = -3$

c) $P(x) = x^5 + 7x^3 + 2x^2 + 5;\quad x_1 = 2,\ x_2 = -2$

d) $P(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 2x + 5;\quad x_1 = 3,\ x_2 = -2$

e) $P(x) = 3x^5 - 7x^4 + 5x^3 - x^2;\quad x_1 = 2,\ x_2 = 1/3$

Úloha 9 Polynóm $P(x)$ rozložte na súčin koreňových činiteľov v $\mathbb{R}$:

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$

c) $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

d) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 9x + 36$

e) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 48$

f) $P(x) = x^3 - 7x - 6$

g) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

h) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

i) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$

j) $P(x) = x^3 + x - 10$

k) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$

l) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

m) $P(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

n) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$

o) $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$

p) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

q) $P(x) = x^4 + x^2 + 1$

r) $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 11x + 10$

s) $P(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2$

t) $P(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x - 2$

u) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

v) $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$

w) $P(x) = x^4 + 2x^2 + 9$

x) $P(x) = 4x^5 - 17x^4 + 24x^3 - 13x^2 + 2x$

y) $P(x) = 3x^5 - 7x^4 + 5x^3 - x^2$

z) $P(x) = 2x^5 + 9x^4 + 6x^3 - 81$

Úloha 10 Nasledujúce algebrické rovnice riešte v množine $\mathbb{R}$:

a) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

c) $3x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$

d) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

e) $x^3 - 12x + 16 = 0$

f) $x^3 + 8x^2 + 21x + 18 = 0$

g) $x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0$

h) $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$

i) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

j) $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$

k) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0$

l) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 6 = 0$

m) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

n) $x^4 - 18x + 81 = 0$

o) $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0$

p) $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x - 2 = 0$

q) $x^4 + x^2 + 1 = 0$

r) $5x^5 + 32x^4 + 72x^3 + 64x^2 + 16x = 0$

s) $2x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 9 = 0$

t) $2x^5 - 3x^4 - x^3 - 19x - 15 = 0$

u) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$

v) $2x^3 + 5x^2 - 6x - 9 = 0$

w) $x^4 + 2x^2 + 9 = 0$

x) $4x^5 - 17x^4 + 24x^3 - 13x^2 + 2x = 0$

y) $3x^5 - 7x^4 + 5x^3 - x^2 = 0$

z) $2x^5 + 9x^4 + 6x^3 - 81 = 0$

Výsledky

Úloha 1: m, m, $m+n$.

Úloha 2: $P_3(x)+Q_4(x) = -4x^4+2x^3-x^2+11x-8$, $P_3(x)-Q_4(x) = 4x^4+2x^3-5x^2-3x+18$, $P_3(x)\cdot Q_4(x) = -8x^7+12x^6-12x^5-12x^4-39x^3+77x^2-17x-65$.

Úloha 3: $2x^2-6x+15$ zv. $-34x^2-18x+53$.

Úloha 4: $p_1 = 2$, $p_{2,3} = -4$, $p^3+6p^2-32 = (p-2)(p+4)^2$.

Úloha 5: $x_1 = -4$, $x_{2,3} = -3$, $x^3+10x^2+33x+36 = (x+4)(x+3)^2$.

Úloha 6: $s_1 = 3$, $s_2 = 2+3\mathrm{i}$, $s_3 = 2-3\mathrm{i}$,
$s^3-7s^2+25s-39 = (s-3)(s-2-3\mathrm{i})(s-2+3\mathrm{i}) = (s-3)(s^2-4s+13)$.

Úloha 7: a) $x+2$ zv. $-x+3$; b) $4x^2-x+11$ zv. $-13x+33$; c) x^2+9 zv. $-2x^2+18x-31$; d) $x^3-7x^2+23x-80$ zv. $284x-155$; e) $3x-1$; f) $2x^4-6x^3+11x^2-28x+83$ zv. -249.

Úloha 8: a) $P(2) = 13$, $P(-4) = -23$; b) $P(3) = 390$, $P(-3) = 222$; c) $P(2) = 101$, $P(-2) = -75$; d) $P(3) = -55$, $P(-2) = -75$; e) $P(2) = 20$, $P(1/3) = 0$.

Úloha 9: a) $(x-1)(x+1)(x-2)$; b) $(x-1)(x^2+4)$; c) $(x+3)(x^2+1)$; d) $(x-4)(x-3)(x+3)$; e) $(x-4)(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$; f) $(x+1)(x+2)(x-3)$; g) $(x-1)(x-2)(x-3)$; h) $(x-1)^2(x-2)$; i) $(x+1)^2(x+3)$; j) $(x-2)(x^2+2x+5)$; k) $(x-3)(x^2-2x+2)$; l) $(x-2)^3$; m) $(x-3)^3$; n) $(x+1)(x+2)(x-3)(x+3)$; o) $(x-1)^2(x-2)(x+3)$; p) $(x-1)(x-2)(x^2+4)$; q) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$; r) $(x+1)(x+2)(x^2-2x+5)$; s) $(x-1)^2(x+1)^2(x+2)$; t) $(x-1)^2(x-2)(x^2+1)$; u) $3(x-1/3)(x-1)(x+2)$; v) $2(x-3/2)(x+1)(x+3)$; w) $(x^2-2x+3)(x^2+2x+3)$; x) $4x(x-1/4)(x-1)^2(x-2)$; y) $3x^2(x-1/3)(x-1)^2$; z) $2(x-3/2)(x+3)^2(x^2+3)$.

Úloha 10: a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -4$; b) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$; c) $x_1 = -2/3$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$; d) $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 2$; e) $x_{1,2} = 2$, $x_3 = -4$; f) $x_{1,2} = -3$, $x_3 = -2$; g) $x_1 = -1$; h) $x_1 = 3$; i) $x_{1,2,3} = -1$; j) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$; k) $x_{1,2} = -1$, $x_3 = -2$, $x_4 = -3$; l) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; m) $x_{1,2} = 1$, $x_{3,4} = -1$; n) $x_{1,2} = 3$, $x_{3,4} = -3$; o) $x_{1,2,3} = -1$, $x_{4,5} = 2$; p) $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 2$; q) rovnica nemá reálne riešenie; r) $x_1 = -2/5$, $x_2 = 0$, $x_{3,4,5} = -2$; s) $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_{4,5} = -1$; t) $x_1 = 5/2$, $x_{2,3} = -1$; u) $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$; v) $x_1 = 3/2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$; w) rovnica nemá reálne riešenie; x) $x_1 = 0$, $x_2 = 1/4$, $x_{3,4} = 1$, $x_5 = 2$; y) $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 1/3$, $x_{4,5} = 1$; z) $x_1 = 3/2$, $x_{2,3} = -3$.

Teoretické doplnky

Dôkaz Vety 2

Vetu 2 ilustrujme najprv na príklade delenia všeobecného polynómu 3. stupňa polynómom $x-\alpha$.

$$
\begin{array}{l}
\quad (a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0) : (x-\alpha) = a_3\,x^2 + (a_3\cdot\alpha + a_2)x + (\alpha(a_3\cdot\alpha + a_2) + a_1) \\
-(a_3\,x^3 - \alpha a_3\,x^2) \\
\hline
(a_3\cdot\alpha + a_2)\,x^2 + a_1\,x + a_0 \quad \text{(zvyšok stupňa 2)} \\
-((a_3\cdot\alpha + a_2)\,x^2 - \alpha(a_3\cdot\alpha + a_2)x) \\
\hline
(\alpha(a_3\cdot\alpha + a_2) + a_1)\,x + a_0 \quad \text{(zvyšok stupňa 1)} \\
-((a_3\cdot\alpha + a_2) + a_1)\,x - (a_3\cdot\alpha + a_2) + a_1)\,\alpha) \\
\hline
(a_3\cdot\alpha + a_2) + a_1)\,\alpha + a_0 \quad \text{(zvyšok stupňa 0)}
\end{array}
$$

Možeme si teda všimnúť, že koeficienty delenca sú skutočne jednotlivé „zátvorky“ – hodnoty z 2. riadku Hornerovej schémy.

Teraz prejdime na delenie všeobecného polynómu stupňa n, pričom postupne nahrádzame výrazy pomocou „zátvoriek“, na základe vzorcov (2). Napríklad v 1. kroku na pravej strane, kde zapisujeme delenca, nahradíme koeficient a_n hodnotou $(\cdot)_0$:

$$
\begin{array}{l}
\quad (a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_{n-2}\,x^{n-2} + \cdots + a_1\,x + a_0) : (x-\alpha) = ()_0\,x^{n-1} + ()_1\,x^{n-2} + \cdots + ()_{n-1} \\
-(()_0 x^n - \alpha()_0 x^{n-1}) \\
\hline
(\alpha\,()_0 + a_{n-1})\,x^{n-1} + a_{n-2}\,x^{n-2} + \cdots + a_1\,x + a_0 \quad \text{(zvyšok stupňa } n-1\text{)} \\
-(()_1\,x^{n-1} - \alpha()_1\,x^{n-2}) \\
\hline
(\alpha\,()_1 + a_{n-2})\,x^{n-2} + \cdots + a_1)\,x + a_0 \quad \text{(zvyšok stupňa } n-2\text{)} \\
\cdots \\
\hline
(\alpha\,()_{n-2} + a_1)\,x + a_0 \quad \text{(zvyšok stupňa 1)} \\
-(\alpha\,()_{n-2} + a_1)\,x - \alpha\cdot()_{n-1})) \\
\hline
\alpha\cdot()_{n-1} + a_0 = ()_n \quad \text{(zvyšok stupňa 0)}
\end{array}
$$

Môžeme sa presvedčiť (pozor, nejedná sa o striktný dôkaz), že sa na mieste koeficientov delenca na pravej strane 1. riadku postupne objavili „zátvorky“ $(\cdot)_i$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.

Na záver uveďme dôkaz Vety 2 podľa [5]. Na základe (2) platí

$$a_n = (\cdot)_0, \qquad a_{n-i} = (\cdot)_i - \alpha\cdot(\cdot)_{i-1}, \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Po dosadení koeficientov a_{n-i}, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ do vyjadrenia polynómu $P_n(x)$ dostávame

$$P_n(x) = ()_0\cdot x^n + \Big(()_1 - \alpha\cdot()_0\Big)\cdot x^{n-1} + \cdots + \Big(()_{n-1} - \alpha\cdot()_{n-2}\Big)\cdot x + \Big(()_n - \alpha\cdot()_{n-1}\Big) =$$

$$= \Big[()_0\cdot x^{n-1} + ()_1\cdot x^{n-2} + \cdots + ()_{n-2}\cdot x + ()_{n-1}\Big]\cdot(x-\alpha) + ()_n =$$

$$= \Big[s_{n-1}\cdot x^{n-1} + s_{n-2}\cdot x^{n-2} + \cdots + s_1\cdot x + s_0\Big]\cdot(x-\alpha) + P_n(\alpha).$$

■

Dôkaz dôsledku základnej vety algebry

Veta 6 *Polynóm $P_n(x)$ je deliteľný svojím koreňovým činiteľom $x - \alpha$.*

Na základe Vety 1 o delení polynómov vieme, že $P_(x) = S(x)\cdot(x-\alpha)+R$, a teda $P_n(\alpha) = R$. Vzhľadom na to, že α je koreňom polynómu $P_n(x)$, je $R = 0$. Teda polynóm $P_n(x)$ je deliteľný svojím koreňovým činiteľom $x - \alpha$.

Keďže polynóm $P_n(x)$ má pre $n \geqq 1$ aspoň jeden koreň $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, tak platí existuje polynóm $S_{n-1}(x)$ taký, že platí

$$P_n(x) = (x - \alpha_1) \cdot S_{n-1}(x).$$

Ak je $n - 1 \geqq 1$, potom na základe fundamentálnej Vety 3, má polynóm $S_{n-1}(x)$ koreň $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ a teda existuje polynóm $Q_{n-2}(x)$ taký, že platí

$$S_{n-1}(x) = (x - \alpha_2) \cdot Q_{n-2}(x) \qquad \Rightarrow \qquad P_n(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot Q_{n-2}(x).$$

Ak budeme pokračovať v týchto úvahách ďalej, zistíme, že existujú korene $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a taký polynóm T_0 stupňa 0, že platí

$$P_n(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) \cdot T_0.$$

Porovnaním koeficientov po roznásobení pravej strany zistíme, že $T_0 = a_n$, a teda

$$P_n(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Výraz na pravej strane sa nazýva *súčin koreňových činiteľov polynómu $P_n(x)$*.

Na záver ešte poznamenajme, že algebrická rovnica 0-tého rádu nemá korene, a teda počet jej koreňov je rovný $n = 0$. ■

Dôkaz Vety 5

Zapíšme rovnosť, ktorá odpovedá tomu, že číslo $\alpha = \dfrac{p}{q}$, kde p a q sú nesúdeliteľné, je riešenie algebrickej rovnice (4) s celočíselnými koeficientmi:

$$a_n \cdot \left[\frac{p}{q}\right]^n + a_{n-1} \cdot \left[\frac{p}{q}\right]^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \left[\frac{p}{q}\right] + a_0 = 0 \tag{9}$$

Rovnosť (9) vynásobíme spoločným menovateľom q^n:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \cdots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0 \tag{10}$$

Ak zapíšeme (10) v tvare

$$a_n \cdot p^n = -q \cdot \left[a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-2} + a_0 \cdot q^{n-1}\right], \tag{11}$$

uvidíme, že a_n je násobok čísla q, t. j. q je deliteľom a_n.

Podobne, ak zapíšeme (10) v tvare:

$$p \cdot \left[a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}\right] = -a_0 \cdot q^n, \tag{12}$$

uvidíme, že a_0 je násobok čísla p, t. j. p je deliteľom a_0. ■

Odporúčané zdroje

[1] Baculíková, B. – Grinčová, A.: *Matematika I. Vzorové a neriešené úlohy,* TU v Košiciach (2013) 157 s., ISBN 978-80-553-1501-0, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/13/Vzorove_a_neriesene_ulohy_0_0.pdf`, [navštívené 18. 6. 2016]

[2] Buša, J. – Schrötter, Š.: *Stredoškolská matematika pre študentov FEI TU v Košiciach,* TU v Košiciach (2015) 180 s., ISBN 978-80-553-2193-6, `http://people.tuke.sk/jan.busa/SM/Busa_Schrotter_Stredoskolska_matematika_2015.pdf`, [navštívené 20. 6. 2016]

[3] Džurina, J. – Grinčová, A. – Pirč, V.: *Úvod do predmetu MATEMATIKA 1*, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/M1-Ucebnica-Dzurina-Grincova-Pirc.pdf`, [navštívené 18. 6. 2016]

[4] Molnárová, M. – Myšková, M.: *Úvod do lineárnej algebry,* (2005) 103 s., ISBN 80-8073-361-9, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/M1-ULA-Ucebnica-Zbierka.pdf`, [navštívené 18. 6. 2016]

[5] Olšák, P.: *Lineární algebra*, 2. vydanie, Praha (2010) 167 s.

[6] *Matematika I*, elektronický učebný text, `http://it4kt.cnl.tuke.sk/c/mat/student/01.html`, [navštívené 18. 6. 2016]

[7] *Systém počítačovej algebry Maxima*, program wxMaxima sa dá stiahnuť z `http://andrejv.github.io/wxmaxima/`, [navštívené 18. 6. 2016]