TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH - VÝZVA pre tvoju BUDÚCNOSŤ

Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

DIFERENČNÉ ROVNICE, GRAFOVÉ ALGORITMY A KOMBINATORICKÁ OPTIMALIZÁCIA

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Marián Klešč, Štefan Schrötter

Európska únia
Európsky sociálny fond

Agentúra
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR
pre štrukturálne fondy EÚ

Operačný program
VZDELÁVANIE

Táto publikácia vznikla za finančnej podpory z **Európskeho sociálneho fondu** v rámci Operačného programu **VZDELÁVANIE.**

Prioritná os 1 Reforma vzdelávania a odbornej prípravy

Opatrenie 1.2 Vysoké školy a výskum a vývoj ako motory rozvoja vedomostnej spoločnosti.

Názov projektu: **Balík doplnkov pre ďalšiu reformu vzdelávania na TUKE**

ITMS 26110230093

NÁZOV: Diferenčné rovnice, grafové algoritmy a kombinatorická optimalizácia
AUTORI: doc. RNDr. Marián Klešč, PhD., RNDr. Štefan Schrötter, CSc.
VYDAVATEĽ: Technická univerzita v Košiciach
ROK: 2015
ROZSAH: 85 strán
NÁKLAD: 10 ks
VYDANIE: prvé

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.
Za odbornú a obsahovú stránku zodpovedajú autori.

Katedra matematiky a teoretickej informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Technická univerzita v Košiciach

DIFERENČNÉ ROVNICE, GRAFOVÉ ALGORITMY A KOMBINATORICKÁ OPTIMALIZÁCIA

Marián Klešč, Štefan Schrötter

Košice 2015

Obsah

Kapitola 1

$\mathcal{Z}-$ TRANSFORMÁCIA

1.1 Definícia a základné vlastnosti $\mathcal{Z}-$ transformácie

Nech je daná postupnosť konečných komplexných čísel

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}: \quad a_0,\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n,\, \ldots$$

Definícia 1.1 **$\mathcal{Z}-$transformáciou** *alebo* **Laurentovou transformáciou postupnosti** $\{a_n\}$ *nazývame funkciu F komplexnej premennej z, ktorá je určená súčtom radu*

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}. \tag{1.1}$$

Ak v rovnosti (1.1) budeme chcieť zvýrazniť to, že ide o $\mathcal{Z}-$transformáciu postupnosti $\{a_n\}$ tak budeme namiesto $F(z)$ písať $\mathcal{Z}(a_n)$.

Veta 1.1 *Nutnou a postačujúcou podmienkou existencie $\mathcal{Z}-$ transformácie postupnosti $\{a_n\}$ je existencia takých reálnych konštánt $M > 0$ a $c > 0$, že pre každé $n = 0, 1, \ldots$ platí*

$$|a_n| \leq M c^n.^{*} \tag{1.2}$$

Pritom rad (1.1) absolútne konverguje v ľubovoľnom bode z, pre ktorý platí $|z| > c$.

Dôkaz: Nech existujú konštanty $M > 0$ a $c > 0$, pre ktoré platí (1.2). Potom

$$\left|\frac{a_n}{z^n}\right| \leq \frac{M c^n}{|z|^n} = M\left(\frac{c}{|z|}\right)^n,$$

čo znamená, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{c}{|z|}\right)^n \tag{1.3}$$

*Takúto postupnosť (a_n) nazývame **exponenciálne ohraničenou** je majorantným radom k radu (1.1). Je zrejmé, že rad (1.3) konverguje pre ľubovoľné $|z| > c$.. To znamená, že rad (1.1) je absolútne konvergentný v ľubovoľnom bode z, pre ktorý platí $|z| > c$, pričom funkcia F je súčtom radu (1.1) definovaná pre každé $|z| > c$.

Nech existuje $\mathcal{Z}-$transformácia postupnosti $\{a_n\}$. Rad (1.1) predstavuje analytickú časť Laurentovho rozvoja funkcie F so stredom v bode ∞. To znamená, že existuje prstencové okolie $P(\infty)$, v ktorom je funkcia F analytická. Z jednoznačnosti Laurentovho rozvoja funkcie F a rozvoja (1.1) vyplýva (pozri 6.8)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)z^{n-1}dz \qquad n = 0,\, 1,\, \ldots \tag{1.4}$$

kde $\gamma(t) = \rho e^{it}$, $\quad t \in < 0,\, 2\pi >$, a ρ je ľubovoľne zvolené kladné číslo tak, aby platilo $[\gamma] \subset P(\infty)$. Nech $M = \max |F(z)|$. Potom pre $n = 0,\, 1,\, \ldots$ platí

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_\gamma F(z)z^{n-1}dz\Big| \le \frac{M}{2\pi}2\pi\rho\rho^{n-1} = M\rho^n.$$

Ak položíme $c = \rho$, tak platí (1.2), čím sme dôkaz vety ukončili.

Poznámka 1.1 *Na základe dôkazu vety (1.1) môžeme konštatovať, že funkcia F z (1.1) je analytická v oblasti $G = \{z \in \mathbf{C} :\ |z| > c\}$, kde c je konštanta z (1.2). Je zrejmé, že*

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = a_0.$$

***Príklad* 1.1** Určme $\mathcal{Z}-$transformáciu postupnosti $\{a_n\} = \{b^n\}$, kde $b \in \mathbf{C}$.

Riešenie: Nech $b \neq 0$. Keďže $|a_n| = |b^n| = |b|^n$, stačí v nerovnosti (1.2) položiť $c = |b|$ a $M = 1$, t. j. rad (1.1) absolútne konverguje pre ľubovoľné $|z| > |b|$. **Z** - transformáciou postupnosti $\{b^n\}$ je funkcia F, definovaná pre $|z| > |b|$ predpisom

$$F(z) = 1 + \frac{b}{z} + \frac{b^2}{z^2} + \cdots + \frac{b^n}{z^n} + \cdots \overset{\alpha}{=} \frac{1}{1 - \frac{b}{z}} = \frac{z}{z-b}, \tag{1.5}$$

kde rovnosťou $\overset{\alpha}{=}$ sme určili súčet geometrického radu s kvocientom b/z, ktorý je na uvažovanej množine $|z| > |b|$ v absolútnej hodnote menší ako jedna.
Ak $b = 0$, tak $a_n = 0$ pre $n > 0$ a $a_0 = 1$ (kladieme totiž $0^0 = 1$), a teda v tom prípade $F(z) = 1$ pre $z \neq 0$, čo je v súlade s (1.5).

Poznámka 1.2 *Nech φ je daná funkcia a nech členy postupnosti $\{a_n\}$ sú hodnotami tejto funkcie v ekvidistantných (rovnako od seba vzdialených) bodoch*

$$a_0 = \varphi(0), \quad a_1 = \varphi(T), \quad a_2 = \varphi(2T), \quad \ldots \quad a_n = \varphi(nT), \quad \ldots$$

kde $T > 0$. Funkciu

$$F(Tz) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(nT) z^{-nT}, \tag{1.6}$$

ktorá je priradená tejto postupnosti, nazývame **obraz funkcie φ pri $\mathcal{Z}$−transformácii s periódou opakovania** *T. Ak φ je predmetom (originálom) pre Laplaceovu transformáciu (pozri [3]), tak pre postupnosť $\{\varphi(nT)\}$ je podmienka (1.2) splnená (pozri [3]). Označme*

$$\varphi(nT) = f(n) = a_n \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

Takto získanú postupnosť nazývame **mriežkovou funkciou** *alebo* **predmetom**. *Z vety (1.1) vyplýva, že k mriežkovej funkcii existuje obraz pri $\mathcal{Z}$– transformácii. Vždy môžeme zmeniť mierku na osi t tak, aby sme získali periódu opakovania rovnú jednej: k tomu stačí položiť $\varphi(tT) = f(t)$. Potom $\varphi(nT) = f(n) = a_n$ a (1.6) má tvar*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n},$$

čo je v podstate zápis (1.1).

Poznámka 1.3 *Pre jednoduchšiu formuláciu vlastností $\mathcal{Z}$– transformácie upustíme v ďalšom texte od exaktného označenia mriežkových funkcií: namiesto f budeme písať $f(n)$, čo je vlastne štandardné označenie pre funkčnú hodnotu. Pre obrazy budeme tiež písať $F(z)$ namiesto presného F.*

Korešpondencia (vzťah) medzi mriežkovou funkciou $f(n)$ a jej obrazom $F(z)$ pri $\mathcal{Z}$−transformácii sa v literatúre označuje rôznymi zápismi:

$$f(n) \div F(z), \quad F(z) \div f(n), \quad f(n) \mapsto F(z), \quad F(z) = \mathcal{Z}\{f(n)\}, \quad F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$$

My budeme používať prvé dve označenia: napr. na základe príkladu (1.1) môžeme písať

$$b^n \div \frac{z}{z-b} \qquad \text{alebo} \qquad \frac{z}{z-b} \div b^n. \tag{1.7}$$

Špeciálnym prípadom tejto korešpondencie je často potrebný prípad, keď $b = 1:$

$$1^n = 1 \div \frac{z}{z-1} \qquad \text{alebo} \qquad \frac{z}{z-1} \div 1. \tag{1.8}$$

Veta 1.2 (veta o lineárnosti) *Ak $f_k(n) \div F_k(z)$ a $a_k \in \mathbf{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ sú ľubovoľné konštanty, tak*

$$\sum_{k=1}^{m} a_k f_k(n) \div \sum_{k=1}^{m} a_k F_k(z). \tag{1.9}$$

Dôkaz: Z vlastností Laurentových radov vyplýva

$$\sum_{k=1}^{m} a_k f_k(n) \div \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_m f_m(n)}{z^n} =$$

$$= a_1 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1(n)}{z^n}}_{F_1(z)} + a_2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_2(n)}{z^n}}_{F_2(z)} + \cdots + a_m \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_m(n)}{z^n}}_{F_m(z)} = \sum_{k=1}^{m} a_k F_k(z),$$

čo sme mali dokázať.

Poznámka 1.4 *Poznamenávame, že* $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k F_k(z)$ *z (1.9) existuje na množine* $|z| > \max\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, *kde* $|z| > c_k$ *je množina, na ktorej existuje* $F_k(z)$.

***Príklad* 1.2** Určme $\mathcal{Z}-$transformáciu mriežkovej funkcie: a) $f(n) = \sin \omega n$; b) $f(n) = \cos \omega n$; c) $f(n) = \cos^2 n$ (ω je reálne číslo).

Riešenie:
a) Vzhľadom na (6.6) je

$$\sin \omega n = \frac{1}{2i} \cdot \mathrm{e}^{i\omega n} - \frac{1}{2i} \cdot \mathrm{e}^{-i\omega n}. \tag{1.10}$$

Je zrejmé, že

$$\mathrm{e}^{i\omega n} = \left(\mathrm{e}^{i\omega}\right)^n$$

a ak v korešpondencii (1.7) položíme $b = \mathrm{e}^{i\omega}$, tak

$$\left(\mathrm{e}^{i\omega}\right)^n \div \frac{z}{z - \mathrm{e}^{i\omega}} \qquad \text{a teda} \qquad \mathrm{e}^{i\omega n} \div \frac{z}{z - \mathrm{e}^{i\omega}}.$$

Obdobnými úvahami dostaneme

$$\mathrm{e}^{-i\omega n} = \left(\mathrm{e}^{-i\omega}\right)^n \div \frac{z}{z - \mathrm{e}^{-i\omega}}.$$

Na základe (1.10) a vety o lineárnosti (1.9) jednoduchými úpravami dostaneme

$$\frac{1}{2i} \cdot \mathrm{e}^{i\omega n} - \frac{1}{2i} \cdot \mathrm{e}^{-i\omega n} \div \frac{1}{2i} \cdot \frac{z}{z - \mathrm{e}^{i\omega}} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{z}{z - \mathrm{e}^{-i\omega}} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{z\left(\mathrm{e}^{i\omega} - \mathrm{e}^{-i\omega}\right)}{(z - \mathrm{e}^{i\omega})(z - \mathrm{e}^{-i\omega})} =$$

$$= \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{i\omega} - \mathrm{e}^{-i\omega}}{2i}}_{\sin \omega} \cdot \frac{z}{z^2 - z\underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\omega} + \mathrm{e}^{-i\omega}\right)}_{2\cos \omega} + 1}.$$

Ak si uvedomíme, že $\mathrm{e}^{i\omega} + \mathrm{e}^{-i\omega} = 2\cos\omega$, tak získame korešpondenciu

$$\sin\omega n \div \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}. \tag{1.11}$$

Dá sa ukázať, že táto korešpondencia platí pre $|z| > 1$.
b) Analogickým postupom ako v časti a) zo vzťahu (6.7) dostaneme

$$\cos\omega n \div \frac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \qquad \text{pre } |z| > 1.. \tag{1.12}$$

c) Je známe, že

$$\cos^2 n = \frac{1+\cos 2n}{2}.$$

Odtiaľ z vety o lineárnosti a korešpondencií (1.8) a (1.12) dostaneme

$$\cos^2 n = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\cos 2n \div \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z(z-\cos 2)}{z^2 - 2z\cos 2 + 1}.$$

Poznámka 1.5 *Ako súvisí korešpondencia (1.11) so zápisom*

$$\mathcal{Z}(\sin\omega n) = \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}.$$

Veta 1.3 (veta o substitúcii nezávislej premennej v obraze *alebo* **veta o tlmení)** *Ak $f(n) \div F(z)$ pre $|z| > c$ a $a \neq 0$ je ľubovoľné komplexné číslo, tak*

$$a^n f(n) \div F\left(\frac{z}{a}\right). \tag{1.13}$$

pre $|z| > c|a|$.

Dôkaz: Z definície $\mathcal{Z}-$transformácie po jednoduchých úvahách dostaneme

$$a^n f(n) \div \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n f(n)}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)}{\left(\frac{z}{a}\right)^n} = F\left(\frac{z}{a}\right),$$

čo je v súlade s (1.13).

***Príklad* 1.3** Určme $\mathcal{Z}-$transformáciu postupnosti $3^n\sin 7n$.

Riešenie:
Ak v (1.11) položíme $\omega = 7$, tak dostaneme

$$\sin 7n \div \frac{z\sin 7}{z^2 - 2z\cos 7 + 1}.$$

Ak teraz použijeme vetu o tlmení pre $a = 3$, tak $\mathcal{Z}-$transformáciu postupnosti $3^n \sin 7n$ dostaneme tým, že v poslednej korešpondencii „nahradíme písmeno“ z výrazom $\dfrac{z}{3}$:

$$3^n \sin 7n \div \frac{\frac{z}{3}\sin 7}{\left(\frac{z}{3}\right)^2 - 2\frac{z}{3}\cos 7 + 1} = \frac{3z \sin 7}{z^2 - 6z\cos 7 + 9}.$$

Veta 1.4 (veta o posunutí vľavo *alebo* **veta o predstihu)** *Ak $f(n) \div F(z)$ a k je ľubovoľné celé kladné číslo, tak*

$$f(n+k) \div z^k \left[F(z) - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{f(r)}{z^r}\right]. \tag{1.14}$$

Dôkaz: Je

$$f(n+k) \div \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+k)}{z^n}$$

Ak tu položíme $n + k = r$, tak

$$f(n+k) \div \sum_{r=k}^{\infty} \frac{f(r)}{z^{r-k}} = z^k \sum_{r=k}^{\infty} \frac{f(r)}{z^r} =$$

$$= z^k \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{f(r)}{z^r} - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{f(r)}{z^r}\right] = z^k \left[F(z) - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{f(r)}{z^r}\right]$$

Tým sme vetu dokázali.

***Príklad* 1.4** Určme $\mathcal{Z}-$transformáciu postupnosti $\left\{\sin \frac{\pi(n+2)}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Riešenie:
Nech $f(n) = \sin \frac{\pi n}{2}$. Potom našou úlohou je určiť $\mathcal{Z}-$transformáciu mriežkovej funkcie $f(n+2)$. Vzhľadom na (1.11) je ($\omega = \pi/2$)

$$f(n) = \sin \frac{\pi n}{2} \div \frac{z \sin \frac{\pi}{2}}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{2} + 1} = \frac{z}{z^2+1} = F(z),$$

a tak na základe (1.14) je pre $k = 2$:

$$\sin \frac{\pi(n+2)}{2} \div z^2 \left[\frac{z}{z^2+1} - \left(\frac{\sin 0}{z^0} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{z^1}\right)\right] = \frac{-z}{z^2+1}.$$

Poznámka 1.6 *V poslednom príklade sme mohli použiť súčtový vzorec*

$$\sin\frac{\pi(n+2)}{2}=\sin\left(\frac{\pi n}{2}+\pi\right)=\sin\frac{\pi n}{2}\cdot\cos\pi+\cos\frac{\pi n}{2}\cdot\sin\pi=-\sin\frac{\pi n}{2}$$

a korešpondenciu (1.11) pre $\omega=\pi/2$.

Veta 1.5 (veta o derivovaní obrazu) *Ak $f(n)\div F(z)$, tak*

$$\left.\begin{array}{rcl} nf(n) & \div & -zF'(z); \\ n(n+1)f(n) & \div & z^2F''(z); \\ \hline n(n+1)\cdots(n+k-1)f(n) & \div & (-1)^k z^k F^{(k)}(z). \end{array}\right\} \tag{1.15}$$

Dôkaz: V súlade s definíciou $\mathcal{Z}-$transformácie je

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}.$$

Derivovaním oboch strán tejto rovnosti dostaneme

$$F'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-n)f(n)z^{-n-1}=-z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}nf(n)z^{-n}, \tag{1.16}$$

odtiaľ

$$-zF'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nf(n)z^{-n}$$

a teda prvá časť tvrdenia $nf(n)\div -zF'(z)$ je tým dokázaná.
Opätovným derivovaním rovnosti (1.16) dostaneme

$$F''(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-n)(-n-1)f(n)z^{-n-2}=z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)f(n)z^{-n},$$

a preto

$$z^2F''(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)f(n)z^{-n},$$

čo znamená, že druhá korešpondencia z (1.15) je dokázaná.
Ľahko vidno, že

$$\begin{aligned} F^{(k)}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)f(n)z^{-n-k}= \\ &= (-1)^k z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)\cdots(n+k-1)f(n)z^{-n}, \end{aligned}$$

a teda

$$n(n+1)\cdots(n+k-1)f(n)\div(-1)^k z^k F^{(k)}(z).$$

Poznámka 1.7 *Ak poznáme $\mathcal{Z}$– transformáciu postupnosti mriežkovej funkcie $f(n)$, tak m - násobné použitie prvej korešpondencie z (1.15) nám umožňuje určiť $\mathcal{Z}$– transformáciu postupnosti typu $n^m \cdot f(n)$ (pozri príklad 1.5).*

***Príklad* 1.5** Určme $\mathcal{Z}$–transformáciu postupnosti: a) $g(n) = n$; b) $h(n) = n^3$; c) $s(n) = n^4 \cdot \sin \omega n$.

Riešenie:
a) Ak v korešpondencii (1.8) označíme

$$f(n) = 1 \div \frac{z}{z-1} = F(z),$$

tak na základe prvej časti (1.15) dostaneme

$$n \cdot 1 \div -z \left(\frac{z}{z-1} \right)'$$

a teda

$$n \div \frac{z}{(z-1)^2}. \tag{1.17}$$

b) Keďže $n^3 = n^3 \cdot 1$, tak môžeme postupovať podľa poznámky 1.7, pričom $\mathcal{Z}$–transformáciu postupnosti n sme určili v časti a). Ak v korešpondencii (1.17) označíme

$$f(n) = n \div \frac{z}{(z-1)^2} = F(z),$$

tak opäť na základe prvej časti (1.15) dostaneme

$$n \cdot n \div -z \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)'.$$

Po úpravách získame

$$n^2 \div \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}. \tag{1.18}$$

Zopakujeme tento postup ešte raz: ak v (1.18) označíme

$$f(n) = n^2 \div \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = F(z),$$

tak

$$n \cdot n^2 \div -z \left(\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \right)',$$

čo po jednoduchých výpočtoch dáva

$$n^3 \div \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}. \tag{1.19}$$

c) Ak štvornásobne aplikujeme na korešpondenciu (1.11)

$$\sin \omega n \div \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$$

prvú časť korešpondencie (1.15), tak

$$n^4 \sin \omega n \div -z \left(-z \left\{ -z \left[-z \left(\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} \right)' \right]' \right\}' \right)'.$$

Úpravu pravej strany tejto korešpondencie nechávame pre dobrovoľníkov.

Veta 1.6 (veta o diferencii mriežkovej funkcie) *Ak $f(n) \div F(z)$, tak*

$$\triangle f(n) \div (z-1)F(z) - zf(0) \tag{1.20}$$

Dôkaz: Prvá diferencia $\triangle f(n)$ je definovaná vzťahom (6.1)

$$\triangle f(n) = f(n+1) - f(n).$$

Z vety o predstihu (1.14) vyplýva ($k = 1$)

$$f(n+1) \div z[F(z) - f(0)].$$

Na základe vety o lineárnosti dostaneme

$$\triangle f(n) = f(n+1) - f(n) \div z[F(z) - f(0)] - F(z)$$

a po úprave pravej strany tejto korešpondencie je

$$\triangle f(n) \div (z-1)F(z) - zf(0).$$

Veta 1.7 (veta o k–tej diferencii mriežkovej funkcie) *Ak k je prirodzené číslo a $f(n) \div F_(z)$, tak*

$$\left. \begin{aligned} \triangle^k f(n) \div (z-1)^k F(z) - z\big[(z-1)^{k-1} f(0) + (z-1)^{k-2} \triangle f(0) + \cdots \\ \cdots + (z-1) \triangle^{k-2} f(0) + \triangle^{k-1} f(0)\big]. \end{aligned} \right\} \tag{1.21}$$

Dôkaz: Nájdeme obraz pri $\mathcal{Z}$– transformácii druhej diferencie $\triangle^2 f(n)$. Označme (pozri (1.20)) $\triangle f(n) \div (z-1)F(z) - zf(0) = G(z)$. Potom

$$\begin{aligned} \triangle^2 f(n) &= \triangle[\triangle f(n)] \div (z-1)G(z) - z \triangle f(0) = \\ &= (z-1)[(z-1)F(z) - zf(0)] - z \triangle f(0) = \\ &= (z-1)^2 F(z) - z[(z-1)f(0) + \triangle f(0)] \end{aligned}$$

a teda

$$\triangle^2 f(n) \div (z-1)^2 F(z) - z[(z-1)f(0) + \triangle f(0)],$$

čo je v súlade s korešpondenciou (1.21) pre $k = 2$. Matematickou indukciou sa ľahko dokáže, že (1.21) platí pre ľubovoľné $k \in N$.

Poznámka 1.8 *Posledné dve vety o diferenciách mriežkovej funkcie sa využívajú pri riešení diferenčných rovníc.*

Definícia 1.2 *Sumáciou mriežkovej funkcie f nazývame mriežkovú funkciu g, ktorá je definovaná predpisom*

$$f(0)=0, \qquad g(n)=\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \qquad pre \qquad n=1,2,\ldots \tag{1.22}$$

Špeciálne, $g(1)=f(0)$, $g(2)=f(0)+f(1)$, … atď. Prvou diferenciou mriežkovej funkcie g je funkcia f: skutočne, na základe (1.22) máme

$$\triangle g(n)=g(n+1)-g(n)=\sum_{k=0}^{n} f(k)-\sum_{k=0}^{n-1} f(k)=f(n).$$

Veta 1.8 (veta o sumácii mriežkovej funkcie) *Ak $f(n)\div F(z)$, tak*

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\div\frac{F(z)}{z-1} \tag{1.23}$$

Dôkaz: Nech $g(n)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k)\div G(z)$. Pretože $g(0)=0$, na základe (1.20) platí

$$\triangle g(n)\div(z-1)G(z)$$

Keďže $\triangle g(n)=f(n)\div F(z)$, je $F(z)=(z-1)G(z)$, čo znamená, že

$$G(z)=\frac{F(z)}{z-1}$$

***Príklad* 1.6** Určme $\mathcal{Z}$–transformáciu postupnosti, ktorej n-tý člen je určený súčtom $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^3$.

Riešenie: Použijeme vetu o sumácii mriežkovej funkcie: k tomu je nutné zabezpečiť, aby dolná aj horná hranica uvažovanej sumy boli v súlade s predpokladmi vety. Horná hranica $k=n-1$ je v poriadku. Pre dolnú hranicu $k=0$ si stačí uvedomiť, že $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^3=\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^3$. Na základe (1.19) platí

$$f(n)=n^3\div\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}=F(z)$$

z (1.23) dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3\div\frac{\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}}{z-1}=\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^5}. \tag{1.24}$$

Definícia 1.3 *Konvolúciou (konvolučným súčinom) mriežkových funkcií f a g nazývame mriežkovú funkciu h, ktorá je definovaná predpisom*

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} f(n-k)g(k) \tag{1.25}$$

a označujeme $h = f \star g$ (teda $h(n) = (f \star g)(n)$).

Ľahko sa dá overiť, že h je mriežkovou funkciou a že konvolúcia je komutatívna, t. j. $f \star g = g \star f$.

Veta 1.9 (veta o násobení obrazov) *Ak $f(n) \div F(z)$ pre $|z| > c_f$ a $g(n) \div G(z)$ pre $|z| > c_g$, tak*

$$(f \star g)(n) \div F(z)G(z) \qquad pre\ |z| > \max\{c_f, c_g\}, \tag{1.26}$$

t. j. konvolučnému súčinu mriežkových funkcií zodpovedá súčinu obrazov.

Dôkaz tejto vety je uvedený napr. v [3].

***Príklad* 1.7** Určme $\mathcal{Z}-$transformáciu postupnosti, ktorej n-tý člen je určený súčtom $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

Riešenie:
Ak porovnáme tento príklad s príkladom 1.6, tak vidno, že odlišnosť je len v hornej hranici uvažovaného súčtu.
Uvedieme dve možnosti vyriešenia tohto príkladu.
1. Keďže

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^3,$$

tak na základe vety o lineárnosti $\mathcal{Z}-$transformácie a korešpondencií (1.19) a (1.24) dostaneme

$$n^3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \div \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} + \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^5} = \frac{z^2(z^2+4z+1)}{(z-1)^5}.$$

2. Ak si uvedomíme, že (pozri (1.25))

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} \left(1 \cdot k^3\right) = 1 \star n^3,$$

tak vzhľadom na (1.26) a taktiež (1.19) a (1.8) je

$$1 \star n^3 \div \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} = \frac{z^2(z^2+4z+1)}{(z-1)^5},$$

čo je v súlade s predchádzajúcim výsledkom.

Poznámka 1.9 *Ak položíme v (1.25) $f(n) = 1$, tak na základe (1.26) a (1.8) dostaneme*

$$\sum_{k=0}^{n} g(k) = 1 \star g(n) \div \frac{z}{z-1} G(z)$$

(pozri druhú možnosť riešenia posledného príkladu).

1.2 Spätná (inverzná) $\mathcal{Z}-$transformácia

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali určením $\mathcal{Z}-$transformácie F mriežkovej funkcie (postupnosti) f, pričom funkcia F bola daná súčtom nekonečného radu (1.1):

$$F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \cdots + \frac{f(n)}{z^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}.$$

$\mathcal{Z}-$transformáciou sme definovali zobrazenie $\mathcal{Z}$ z množiny exponenciálne ohraničených mriežkových funkcií $\mathcal{M}$ do množiny $\mathcal{K}$ komplexných funkcií komplexnej premennej, t. j. $\mathcal{Z} : \mathcal{M} \to \mathcal{K}$. Toto zobrazenie je prosté, a preto existuje k nemu inverzné zobrazenie. Inverzné zobrazenie $\mathcal{Z}^{-1}$ k zobrazeniu $\mathcal{Z}$ nazývame **spätnou** (alebo **inverznou**) $\mathcal{Z}-$transformáciou. Teda spätná $\mathcal{Z}-$transformácia priradí komplexnej funkcii F komplexnej premennej mriežkovú funkciu f, pre ktorú platí korešpondencia $f(n) \div F(z)$.

Tu vzniká prirodzená otázka: aké podmienky by mala spĺňať funkcia F, ak má existovať jej spätná $\mathcal{Z}-$transformácia? Odpoveď je pomerne jednoduchá (terminológiu pozri v kapitole Doplnky alebo napr. v [3]): ak je funkcia F analytická v prstencovom okolí bodu ∞ a

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = A \neq \infty \tag{1.27}$$

tak existuje jediná mriežková funkcia f, pre ktorú platí $f(n) \div F(z)$ (vyplýva to z jednoznačnosti koeficientov Laurentovho rozvoja danej funkcie F so stredom v bode ∞). Je zrejmé, že pre hľadanú funkciu f platí

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = f(0). \tag{1.28}$$

Táto mriežková funkcia je určená koeficientami Laurentovho rozvoja funkcie F so stredom v bode ∞ v jeho prstencovom okolí $P(\infty)$, ktoré na základe (6.10) získame v našom prípade takto

$$f(n) = a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) z^{n-1}\,\mathrm{d}z, \qquad (n = 0,\, 1,\, 2, \dots), \tag{1.29}$$

kde $\gamma(t) = \rho\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in< 0, 2\pi >$, pričom ρ je ľubovoľné kladné číslo, pre ktoré platí $[\gamma] \subset P(\infty)$. Ak funkcia $F(z)z^{n-1}$ má konečný počet $b_1, b_2, \dots, b_k$ konečných singulárnych bodov, tak pri výpočte integrálu (1.29) môžeme použiť základnú vetu o rezíduách: k tomu stačí zvoliť ρ tak, aby všetky singulárne body funkcie F ležali vnútri krivky γ. Potom zo základnej vety o rezíduách je (pozri [3])

$$\int_\gamma F(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=b_j},$$

kde zápis $\operatorname{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=b_j}$ označuje rezíduum funkcie $F(z)z^{n-1}$ v singulárnom bode $z = b_j$. To znamená, že (1.29) nadobúda tvar

$$f(n) = a_n = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=b_j}. \tag{1.30}$$

Nesmieme zabúdať na to, že v uvažovanej sume sú zahrnuté všetky konečné singulárne body funkcie $F(z)z^{n-1}$. V ďalšom texte sa obmedzíme len na prípad, keď F je racionálna funkcia, t. j. je tvaru $F = A/B$, kde A a B sú polynómy. Aby bola splnená podmienka (1.27), tak nemôže mať polynóm A väčší stupeň ako polynóm B.
Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že zlomok A/B sa nedá krátiť (ak by sa dal krátiť, tak ho „vykrátime“). Potom každý nulový bod menovateľa B (násobnosti m) je súčasne singulárnym bodom funkcie $F = A/B$, pričom je to pól funkcie A/B rovnakej násobnosti m (viac konečných singulárnych bodov funkcia F nemá).[1] Požadované rezíduá v (1.30) dostaneme na základe vzťahu (pozri [3])

$$\operatorname{res}\left[F(z)\right]_{z=b} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to b} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-b)^m F(z)z^{n-1}\right], \tag{1.31}$$

kde b je m-násobným pólom funkcie $F(z)z^{n-1}$. Pre $m = 1$ máme tzv. jednoduchý pól, pre ktorý je

$$\operatorname{res}\left[F(z)\right]_{z=b} = \lim_{z\to b}\left[(z-b)F(z)z^{n-1}\right]. \tag{1.32}$$

V praxi sa najčastejšie stretávame s prípadom, keď polynómy A a B majú len reálne koeficienty. Vtedy môžeme singulárne body funkcie F (teda nulové body polynómu B, prípadne aj nulu) rozdeliť do dvoch skupín:

1. reálne singulárne body;

2. nie reálne (teda komplexné s nenulovou imaginárnou časťou) body.

[1] Teda body $b_1, b_2, \dots, b_k$ v (1.30) sú všetky nulové body menovateľa B, prípadne medzi ne patrí aj bod 0 - pozri príklad 1.9b).

Je známe, že ak bod (číslo) b patrí do druhej skupiny, tak tam patrí aj komplexne združené číslo $\bar{b}$, pričom platí $b + \bar{b} = 2 \cdot \Re e\, b$, kde zápis $\Re e$ označuje reálnu časť. Dá sa ukázať, že v našom prípade platí táto analógia aj pre rezíduá:

$$\operatorname{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=b} + \operatorname{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=\bar{b}} = 2 \cdot \Re e \left\{\operatorname{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=b}\right\}.$$

To znamená, že súčet rezíduí v (1.30) môžeme rozdeliť na dve časti: súčet rezíduí vo všetkých reálnych singulárnych bodoch a na dvojnásobok súčtu reálnych častí rezíduí vo všetkých nie reálnych singulárnych bodoch, ktorých reálna časť je napr. kladná:

$$f(n) = \sum_{b_j \in R} \operatorname{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=b_j} + 2 \sum_{\Im m\, b_j > 0} \Re e \left\{\operatorname{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=b_j}\right\}. \tag{1.33}$$

Požadované rezíduá vypočítame podľa (1.31), špeciálne podľa (1.32) alebo v prípade, keď b je jednoduchý nulový bod polynómu B, tak je niekedy vhodnejšie použiť túto rovnosť (pozri [3])

$$\operatorname{res}\left[\frac{A(z)z^{n-1}}{B(z)}\right]_{z=b} = \frac{A(b)b^{n-1}}{B'(b)}. \tag{1.34}$$

***Príklad* 1.8** Určme spätnú $\mathcal{Z}-$transformáciu funkcie: a) $F(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-1)^2}$; b) $F(z) = \dfrac{z}{3z^2+6z+4}$; c) $F(z) = \dfrac{z}{z^4-16}$.

Riešenie:
a) Je zrejmé, že daná funkcia F je racionálna funkcia, ktorej stupeň menovateľa je väčší ako stupeň čitateľa, a preto existuje jej spätná $\mathcal{Z}-$transformácia.
Pre $n = 0, 1, \ldots$ má funkcia, ktorá je určená predpisom

$$F(z)z^{n-1} = \; = \frac{z}{(z-2)(z-1)^2} \cdot z^{n-1} = \frac{z^n}{(z-2)(z-1)^2},$$

jednoduchý pól v bode $z = 2$ (m=1) a dvojnásobný pól v bode $z = 1$ (m=2). Na základe (1.30) a potom (1.32) a (1.31) dostaneme

$$\begin{aligned} f(n) = &\operatorname{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=2} + \operatorname{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=1} = \\ &= \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z \cdot z^{n-1}}{(z-2)(z-1)^2} + \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{z \cdot z^{n-1}}{(z-2)(z-1)^2}\right]' = \\ &= \lim_{z\to 2}\frac{z^n}{(z-1)^2} + \lim_{z\to 1}\frac{[z(n-1)-2n]z^{n-1}}{(z-2)^2} = 2^n - n - 1. \end{aligned}$$

b) Pre funkciu F opäť existuje jej spätná $\mathcal{Z}-$transformácia.
Ľahko overíme, že komplexne združené čísla $(-3 \pm i\sqrt{3})/3$ sú jednoduché nulové

body menovateľa $3z^2 + 6z + 4$, a taktiež jednoduché póly funkcie $F(z)z^{n-1}$. Na základe (1.33) dostaneme (prvý súčet je rovný nule, lebo funkcia nemá reálne singulárne body a druhý súčet pozostáva len z jedného člena, ktorý zodpovedá rezíduu funkcie v bode $(-3 + i\sqrt{3})/3$):

$$f(n) = 2\Re e \left\{ \text{res}\left[\frac{z^n}{3z^2+6z+4}\right]_{z=\frac{-3+i\sqrt{3}}{3}} \right\}. \tag{1.35}$$

Uvažované rezíduum vypočítame pomocou (1.34) (môžeme použiť aj (1.32)):

$$res\left[\frac{z^n}{3z^2+6z+4}\right]_{\frac{-3+i\sqrt{3}}{3}} = \left[\frac{z^n}{(3z^2+6z+4)'}\right]_{\frac{-3+i\sqrt{3}}{3}} = \left[\frac{z^n}{(6z+6)}\right]_{\frac{-3+i\sqrt{3}}{3}} = \frac{\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{3}\right)^n}{2i\sqrt{3}}.$$

Na určenie reálnej časti získaného výrazu použijeme Moivreov vzorec (6.5), podľa ktorého z rovnosti $\frac{-3+i\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ vyplýva

$$\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \left(\cos\frac{5\pi n}{6} + i\sin\frac{5\pi n}{6}\right).$$

Teda

$$res\left[\frac{z^n}{3z^2+6z+4}\right]_{\frac{-3+i\sqrt{3}}{3}} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \left(\cos\frac{5\pi n}{6} + i\sin\frac{5\pi n}{6}\right)}{2i\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \left(\sin\frac{5\pi n}{6} - i\cos\frac{5\pi n}{6}\right)}{2\sqrt{3}}$$

a vzhľadom na (1.35) zoberieme dvojnásobok reálnej časti posledného výrazu, čím dostaneme

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \sin\frac{5\pi n}{6}.$$

c) Platí

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{z^4-16} = 0 \neq \infty,$$

a preto k danej racionálnej funkcii F existuje spätná $\mathcal{Z}-$transformácia. Najprv určíme typy singulárnych bodov funkcie F: menovateľ je rovný nule práve vo dvoch reálnych bodoch: ± 2 a vo dvoch komplexne združených bodoch $\pm 2i$. Na základe (1.33) je

$$f(n) = \text{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=2} + \text{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=-2} + 2\,\Re e\left\{\text{res}\left[F(z)z^{n-1}\right]_{z=2i}\right\}. \tag{1.36}$$

Všetky tri uvažované body sú jednoduché nulové body menovateľa a tak na výpočet rezíduí môžeme opäť použiť (1.34). Dostaneme

$$f(n) = \left[\frac{z^n}{(z^4-16)'}\right]_{z=2} + \left[\frac{z^n}{(z^4-16)'}\right]_{z=-2} + 2\,\Re e\left\{\text{res}\left[\frac{z^n}{(z^4-16)'}\right]_{z=2i}\right\} =$$

$$= \frac{2^n}{32} + \frac{(-2)^n}{-32} + 2\,\Re e\left\{\frac{(2i)^n}{32i^3}\right\} = 2^{n-5} + (-2)^{n-5} + 2\cdot 2^{n-5}\Re e\left\{i\cdot i^n\right\} \stackrel{\star}{=}$$
$$\stackrel{\star}{=} 2^{n-5}\left[1 - (-1)^n - 2\sin\frac{n\pi}{2}\right],$$

kde v rovnosti $\stackrel{\star}{=}$ sme využili to, že platí:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad i^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \Re e\left\{i\cdot i^n\right\} = -\sin\frac{n\pi}{2}.$$

***Príklad* 1.9** Určme spätnú $\mathcal{Z}$–transformáciu funkcie: a) $F(z) = \dfrac{z^5+1}{z(z-2)^3}$;
b) $F(z) = \dfrac{z^5+1}{z^2(z-2)^3}$.

Riešenie:
a) Keďže

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^5+1}{z(z-2)^3} = \infty,$$

tak nie je splnená požiadavka (1.27) na existenciu spätnej $\mathcal{Z}$–transformácie. Preto k danej funkcii F neexistuje spätná $\mathcal{Z}$–transformácia.

b) Tentoraz je

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^5+1}{z^2(z-2)^3} = 1 \neq \infty.$$

Urobíme rozbor singulárnych bodov funkcie, ktorá je daná predpisom

$$G(z) = F(z)z^{n-1} = \frac{z^5+1}{(z-2)^3}\cdot z^{n-3}. \tag{1.37}$$

Pre $n \geq 3$ je bod 2 jediný konečný singulárny bod: ide o trojnásobný pól. Na základe (1.30) a (1.31) dostaneme ($m = 3$):

$$f(n) = \operatorname{res}\left[\frac{z^5+1}{(z-2)^3}\cdot z^{n-3}\right]_{z=2} = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 2}\left[(z-2)^3\frac{z^5+1}{(z-2)^3}\cdot z^{n-3}\right]'' =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(n+2)(n+1)z^n + (n-3)(n-4)z^{n-5}\right]_{y=2} = (33n^2 + 89n + 76)\cdot 2^{n-6}.$$

Pre $n = 2$ má funkcia G predpis $G(z) = \dfrac{z^5+1}{z(z-2)^3}$. Je evidentné, že bod 0 je jej jednoduchý pól a bod 2 trojnásobný pól. Preto z (1.30) a (1.31) dostaneme

$$f(2) = \operatorname{res}\left[\frac{z^5+1}{z(z-2)^3}\right]_{z=0} + \operatorname{res}\left[\frac{z^5+1}{z(z-2)^3}\right]_{z=2} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[z\frac{z^5+1}{z(z-2)^3}\right] + \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\left[(z-2)^3\frac{z^5+1}{z(z-2)^3}\right]'' = 24.$$

Pre $n = 1$ má funkcia G predpis $G(z) = \dfrac{z^5+1}{z^2(z-2)^3}$. Je evidentné, že bod 0 je jej dvojnásobný pól a bod 2 opäť trojnásobný pól. Preto

$$f(1) = \operatorname{res}\left[\frac{z^5+1}{z^2(z-2)^3}\right]_{z=0} + \operatorname{res}\left[\frac{z^5+1}{z^2(z-2)^3}\right]_{z=2} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{z^5+1}{z^2(z-2)^3}\right]' + \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\left[(z-2)^3\frac{z^5+1}{z^2(z-2)^3}\right]'' = 6.$$

Pre $n = 0$ je $G(z) = \dfrac{z^5+1}{z^3(z-2)^3}$, pričom oba body 0 a 2 sú trojnásobné póly. Potom

$$f(0) = \operatorname{res}\left[\frac{z^5+1}{z^3(z-2)^3}\right]_{z=0} + \operatorname{res}\left[\frac{z^5+1}{z^3(z-2)^3}\right]_{z=2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[z^3\frac{z^5+1}{z^3(z-2)^3}\right]'' + \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\left[(z-2)^3\frac{z^5+1}{z^3(z-2)^3}\right]'' = 1.$$

Poznámka 1.10 *Všimnime si, že v príklade 1.9b sme mohli hodnotu $f(0)$ dostať aj takto:*

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{z^5+1}{z^2(z-2)^3} = 1.$$

Ak je vám známa problematika Laurentovho rozvoja danej funkcie, tak sa presvedčte o tom, že na množine $|z| > 2$ (prstencové okolie bodu ∞) platí tento rozvoj našej funkcie do Laurentovvho radu so stredom v bode ∞:

$$\frac{z^5+1}{z^2(z-2)^3} = 1 + \frac{6}{z} + \frac{24}{z^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(33n^2+89n+76)\cdot 2^{n-6}}{z^n},$$

čo je v súlade s našimi výpočtami.

***Príklad* 1.10** Určme súčet: a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$; b) $\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k)^2 k$.

Riešenie:
V oboch prípadoch najprv určíme $\mathcal{Z}-$transformáciu danej sumy. Túto $\mathcal{Z}-$transformáciu upravíme a nájdeme jej spätnú $\mathcal{Z}-$transformáciu, ktorá bude hľadaným súčtom (vyplýva to z jednoznačnosti $\mathcal{Z}-$transformácie a spätnej $\mathcal{Z}-$transformácie).

a) Na základe (1.19) máme $f(n) = n^3 \div \dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} = F(z)$ a vzhľadom na vetu o sumácii mriežkovej funkcie (1.23) je

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \div \frac{F(z)}{z-1} \quad \text{a teda} \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \div \frac{\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}}{z-1} = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^5}. \tag{1.38}$$

Teraz nájdeme spätnú $\mathcal{Z}-$transformáciu získanej funkcie $G(z) = \dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^5}$. Je zrejmé, že funkcia $g(z)z^{n-1} = \dfrac{(z^2+4z+1)\cdot z^n}{(z-1)^5}$ má pre každé $n \in \{0,\, 1,\, \ldots$ jediný singulárny bod 1, ktorý je päťnásobným pólom. Podľa (1.30) a (1.31) dostaneme $(m=5)$:

$$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^5} \div \frac{1}{4!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^5\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^5}\cdot z^{n-1}\right]^{(\mathrm{IV})} \stackrel{\star}{=} \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

kde (IV) označuje štvrtú deriváciu a overenie rovnosti $\stackrel{\star}{=}$ ponechávame na čitateľa. Odtiaľto na základe korešpondencie (1.38) dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

Keďže $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^3 = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^3$, tak ak zameníme n s $(n+1)$ získame

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

b) Ak porovnáme súčet $\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k)^2k = \sum\limits_{k=0}^{n}(n-k)^2k$ s definíciou konvolučného súčinu z (1.25) $\sum\limits_{k=0}^{n} f(n-k)g(k) = f(n)\star g(n)$, tak vidno, že

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)^2k = n^2\star n.$$

Z vety 1.9 o násobení obrazov vieme, že konvolučnému súčinu mriežkových funkcií zodpovedá pri $\mathcal{Z}-$transformácii súčin ich obrazov. To znamená, že ak prihliadneme na známe korešpondencie

$$n^2 \div \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \qquad \text{a} \qquad n \div \frac{z}{(z-1)^2},$$

tak dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)^2k = n^2 \star n \div \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^5}.$$

Teraz stačí nájsť spätnú $\mathcal{Z}-$transformáciu získanej funkcie $G(z) = \dfrac{z^2(z+1)}{(z-1)^5}$. Táto funkcia má pre každé n jediný singulárny bod, a to päťnásobný pól 1. Ďalej postupujeme obdobným spôsobom ako v časti a) tohto príkladu:

$$\frac{z^2(z+1)}{(z-1)^5} \div \frac{1}{4!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^5\frac{z^2(z+1)}{(z-1)^5}\cdot z^{n-1}\right]^{(\mathrm{IV})} = \frac{1}{24}\lim_{z\to 1}\left[z^{n+2}+z^{n+1}\right]^{(\mathrm{IV})} = \frac{n^2(n-1)^2}{12}.$$

Teda

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)^2k = \frac{n^2(n-1)^2}{12}.$$

1.3 Úlohy

1. Určte $\mathcal{Z}-$transformáciu mriežkovej funkcie, ktorej predpis pre $n \in \{0, 1, \dots\}$ je:

a) $3 - 2\cdot 3^n$; $\left[\dfrac{3z}{z-1} - \dfrac{2z}{z-3}\right]$

b) $3^{2n+1} - 2^{3n+1}$; $\left[\dfrac{3z}{z-9} - \dfrac{2z}{z-8}\right]$

c) $2^n - n^2$; $\left[\dfrac{z}{z-2} - \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right]$

d) $2^n\cdot n^2$; $\left[\dfrac{2z(z+2)}{(z-2)^3}\right]$

e) $\mathrm{e}^{-i\omega n}$; $\left[\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{-i\omega}}\right]$

f) $4^n\cdot\cos\omega n$; $\left[\dfrac{z(z-4\cos\omega)}{z^2-8z\cos\omega+16}\right]$

g) $\dfrac{\sin\omega n}{(-2)^{n+1}}$; $\left[\dfrac{z\sin\omega}{4z^2+4z\cos\omega+1}\right]$

h) $n\cdot\sin\omega n$; $\left[\dfrac{z(z^2-1)\sin\omega}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}\right]$

i) $n\cdot\cos\omega n$; $\left[\dfrac{(z^3+z)\cos\omega-2z^2}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}\right]$

j) $(n+1)\cdot\sin\omega n$; $\left[\dfrac{2z^2\sin\omega(z-\cos\omega)}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}\right]$

k) $n\cdot\sin(n+1)\omega$; $\left[\dfrac{2z^2\sin\omega(z\cos\omega-1)}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}\right]$

ℓ) $(n-1)\cdot\sin\omega n$; $\left[\dfrac{2z\sin\omega(z\cos\omega-1)}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}\right]$

m) $n\cdot\sin(n-1)\omega n$; $\left[\dfrac{2z\sin\omega(z-\cos\omega)}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}\right]$

n) $\sin\frac{n\pi}{2}-n\cos\frac{(n+1)\pi}{2}$; $\left[\dfrac{2z^3}{(z^2+1)^2}\right]$

o) $n\cdot(-1)^n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$; $\left[\dfrac{z(1-z^2)}{(z^2+1)^2}\right]$

p) $n^2\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$; $\left[\dfrac{z(z^4-6z^2+1)}{(z^2+1)^3}\right]$

q) $2^n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$; $\left[\dfrac{2z}{z^2+4}\right]$

r) $n\cdot\cos\frac{n\pi}{2}$; $\left[\dfrac{-2z^2}{(z^2+1)^2}\right]$

s) $(-3)^n\cdot n\cdot\cos\frac{n\pi}{2}$; $\left[\dfrac{-18z^2}{(z^2+9)^2}\right]$

t) $n^3\cdot\cos n\pi$; $\left[\dfrac{z(4z-z^2-1)}{(z+1)^4}\right]$

u) $\sin^2 n$; $\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z(z-\cos 2)}{z^2-2z\cos 2+1}\right)\right]$

2. Určte $\mathcal{Z}$–transformáciu mriežkovej funkcie f, ktorej predpis je:

a) $f(n)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{0,5n}}{(n+1)!} & \text{pre párne } n, \quad n\geq 0,\\ 0 & \text{pre nepárne } n;\end{cases}$ $\left[F(z)=z\sin\dfrac{1}{z}\right]$

b) $f(n)=\begin{cases} n & \text{pre } |n-3|<3,\ n\in N,\\ 0 & \text{pre } |n-3|\geq 3;\end{cases}$ $\left[F(z)=\dfrac{z^4+2z^3+3z^2+4z+5}{z^5}\right]$

c) $f(n)=\cos n\pi$; $\left[F(z)=\dfrac{z}{z+1}\right]$

d) $f(n) = \dfrac{\cos n\pi}{n!}$; $\left[F(z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{z}} = exp\left(-\dfrac{1}{z}\right)\right]$

e) $f(n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} k^3$; $\left[F(z) = \dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^5}\right]$

f) $f(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^3$; $\left[F(z) = \dfrac{z^2(z^2+4z+1)}{(z-1)^5}\right]$

g) $f(n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{\sin \omega n}{a^n}$; $\left[F(z) = \dfrac{az\sin\omega}{(a^2z^2-2az\cos\omega+1)(z-1)}\right]$

h) $f(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (n-k)^2 \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\dfrac{n\pi}{4}$; $\left[F(z) = \dfrac{z^2(z+1)}{(z^2-2z+2)(z-1)^3}\right]$

i) $f(n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (n-k+1)^2 k^2$; $\left[F(z) = \dfrac{z^2(z+1)^2}{(z-1)^6}\right]$

j) $f(n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (n-k+1)k^3$; $\left[F(z) = \dfrac{z^2(z^2+4z+1)}{(z-1)^6}\right]$.

3. Určte mriežkovú funkciu f, ktorej obraz pri $\mathcal{Z}-$transformácii je

a) $F(z) = \dfrac{z(3z-17)}{z^2-3z-4}$; $[f(n) = 4\cdot(-1)^n - 4^n]$

b) $F(z) = \dfrac{3z-17}{z(z^2-3z-4)}$; $[f(n) = 4(-1)^{n-2} - 4^{n-2}$ pre $n \geq 2$ a $f(0)=f(1)=0]$

c) $F(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2}$; $[f(n) = n3^{n-1}]$

d) $F(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$; $\left[f(n) = \sin\frac{n\pi}{2}\right]$

e) $F(z) = \dfrac{z^2}{z^3-1}$; $\left[f(n) = \dfrac{1}{3}\left(1-\cos\frac{2n\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\right]$

f) $F(z) = \dfrac{z^2}{z^4-1}$; $\left[f(n) = \dfrac{1+(-1)^n}{4} - \dfrac{1}{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}\right]$

g) $F(z) = \dfrac{z}{3z^2-6az+4a^2}$, $a > 0$; $\left[f(n) = \dfrac{1}{a\sqrt{3}}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)^n \sin\frac{n\pi}{6}\right]$

h) $F(z) = \dfrac{z}{z^2+2az+2a^2}$, $a > 0$; $\left[f(n) = \dfrac{1}{a}\left(a\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{3n\pi}{4}\right]$

i) $F(z) = \dfrac{z^2(1-z)}{(z+1)(z^2+1)}$; $\left[f(n) = \sin\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right]$

j) $F(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z^2 - z + 1)^2}$; $\left[f(n) = \dfrac{2(n-1)}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3} \right]$

k) $F(z) = \dfrac{3z^4 - 7z + 8}{z^6}$; $[f(2)=3,\ f(5)=-7,\ f(6)=8,\ f(n)=0$ pre $n \notin \{2,\ 5,\ 6\}]$

ℓ) $F(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}} = \mathrm{e}xp\left(\frac{1}{z^2}\right)$. $\left[f(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{0{,}5n} & \text{pre párne } n, \quad n \geq 0, \\ 0 & \text{pre nepárne } n; \end{cases} \right]$

4. Určte súčet:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$; $\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)$; $\left[\dfrac{n(n-1)(n+1)}{6} \right]$

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)$; $\left[\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3} \right]$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2(n-k)$; $\left[\dfrac{n^2(n^2-1)}{12} \right]$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k}$; $\left[\begin{array}{ll} \dfrac{n(1-a) - a(1-a^n)}{a^n(a-1)^2} & \text{pre } a \notin \{1;\ 0\} \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{pre } a = 1 \end{array} \right]$

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k+1)^2 k^2$. $\left[\dfrac{n(n+1)(n+2)(n^2+2n+2)}{30} \right]$

Kapitola 2

Diferenčné rovnice a $\mathcal{Z}-$transformácia

2.1 Lineárna diferenčná rovnica

V tejto časti ukážeme použitie $\mathcal{Z}-$transformácie pri riešení lineárnej diferenčnej rovnice.

Definícia 2.1 Lineárnou diferenčnou rovnicou k-tého rádu s konštantnými koeficientmi *nazývama rovnicu*

$$\triangle^k x(n) + a_1 \triangle^{k-1} x(n) + \cdots + a_{k-1} \triangle x(n) + a_k x(n) = f(n), \tag{2.1}$$

kde $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k$ sú konštanty, $f(n)$ je mriežková funkcia (tzv. pravá strana), $\triangle^m$ $(m = 0, 1, \ldots, k)$ je označenie m-tej diferencie hľadaného riešenia $x(n)$.

Riešiť diferenčnú rovnicu (2.1) znamená nájsť všetky funkcie $x(n)$, ktoré vyhovujú tejto rovnici.

Poznámka 2.1 *My sa budeme zaoberať prípadmi, keď pravá strana diferenčnej rovnice $f(n)$ je exponenciálne ohraničená (v praxi je táto požiadavka temer vždy splnená). Dá sa ukázať (pozri [4]), že v tom prípade je aj riešenie tejto rovnice exponenciálne ohraničené. To znamená, že existuje $\mathcal{Z}-$transformácia hľadaného riešenia $x(n)$. To nám umožňuje vyriešiť diferenčnú rovnicu (2.1) pomocou týchto krokov:*

1. *ak $f(n) \div F(z)$, tak predpokladajme, že $x(n) \div X(z)$;*
2. *na základe (1.21) pomocou $\mathcal{Z}-$transformácie pretransformujeme ľavú aj pravú stranu našej diferenčnej rovnice. K tomu potrebujeme poznať hodnoty*

$$f(0), \quad \triangle f(0), \quad \triangle^{k-2} f(0), \quad \triangle^{k-1} f(0).$$

Ak tieto hodnoty nie sú nám známe, tak ich pokladáme za ľubovoľné konštanty (tým v konečnom dôsledku dostaneme všeobecné riešenie našej diferenčnej rovnice).
Týmto získame „prepísanú diferenčnú rovnicu v obraze pri $\mathcal{Z}$– transformácii“ s neznámou funkciou $X(z)$. Tejto rovnici budeme hovoriť **operátorová rovnica k rovnici (2.1)***;*

3. *vyriešime operátorovú rovnicu, t. j. určíme $X(z)$;*

4. *spätnou $\mathcal{Z}$– transformáciou k funkcii $X(z)$ určíme $x(n)$ – riešenie našej pôvodnej diferenčnej rovnice (2.1).*

***Príklad* 2.1** Riešme diferenčnú rovnicu

$$\triangle^2 x(n) - 3\triangle x(n) + 2x(n) = 0, \qquad \text{ak} \quad x(0) = 1 \text{ a } \triangle x(0) = -1.$$

Riešenie:
Ide o tzv. homogénnu diferenčnú rovnicu s nulovou pravou stranou $f(n) = 0$. Je evidentné, že táto funkcia je exponenciálne ohraničená, a preto podľa poznámky 2.1 je aj riešenie $x(n)$ našej diferenčnej rovnice exponenciálne ohraničené. To znamená, že existuje jeho obraz pri $\mathcal{Z}$– transformácii. Nech teda $x(n) \div X(z)$. Potom vzhľadom na (1.20) je

$$\triangle x(n) \div (z-1)X(z) - zx(0) = (z-1)X(z) - z$$

a na základe (1.21) pre $k = 2$ dostaneme

$$\triangle^2 x(n) \div (z-1)^2 X(z) - z[(z-1)x(0) + \triangle x(0) = (z-1)^2 X(z) - z[(z-1) - 1].$$

Keďže $0 \div 0$, tak operátorová rovnica k našej diferenčnej rovnici má tvar

$$\underbrace{(z-1)^2 X(z) - z[(z-1)-1]}_{\div\triangle^2 x(n)} - 3\underbrace{[(z-1)X(z) - z]}_{\div\triangle x(n)} + 2\underbrace{X(z)}_{\div x(n)} = \underbrace{0.}_{\div 0}$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$(z^2 - 5z + 6)X(z) - z^2 + 5z = 0$$

a teda

$$X(z) = \frac{z(z-5)}{(z-3)(z-2)}.$$

Body 3 a 2 sú jednoduché póly funkcie $X(z)$. Presvedčte sa, že pre jej spätnú $\mathcal{Z}$– transformáciu platí:

$$X(z) \div x(n) = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n, \tag{2.2}$$

Poznámka 2.2 *O správnosti našich výpočtov sa môžeme presvedčiť tým, že overíme, či riešenie z (2.4) vyhovuje danej diferenčnej rovnici a daným tzv. začiatočným podmienkam $x(0) = 1$ a $\triangle x(0) = -1$. Čitateľovi odporúčame overiť aspoň začiatočnú podmienku $x(0) = 1$ – to nezaberie veľa času. Z (2.4) máme*

$$x(0) = 3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 3^0 = 3 - 2 = 1,$$

čo je v súlade s požiadavkou. Teda výsledok (2.4) „je asi dobrý".

V diferenčnej rovnici (2.1) môžeme každú diferenciu m-tého rádu riešenia x v bode n vyjadriť pomocou hodnôt riešenia x v bodoch $n + r$ ($r = 0, 1 \ldots, m$) (pozri (6.3)). Dostaneme tak ekvivalentnú rovnicu v tvare

$$x(n+k) + b_1 x(n+k-1) + \cdots + b_{k-1} x(n+1) + b_k x(n) = f(n), \tag{2.3}$$

ktorú tiež nazývame **lineárnou diferenčnou rovnicou k-tého rádu s konštantnými koeficientmi** $b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k$. Aj túto rovnicu môžeme riešiť pomocou $\mathcal{Z}-$transformácie: myšlienka použita je podobná ako pri rovnici (2.1), len s tým rozdielom, že k určeniu operátorovej rovnice použijeme z vety o predstihu korešpondenciu (1.14).

***Príklad* 2.2** Riešme diferenčnú rovnicu

$$2x(n+2) - 5x(n+1) + 2x(n) = \cos\frac{n\pi}{3}, \qquad \text{ak} \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Riešenie:
Je to diferenčná rovnica druhého rádu ($k = 2$), ktorá sa dá upraviť na tvar (2.3): stačí obe jej strany vydeliť číslom 2. Nie je to ale nutné.
Nech $x(n) \div X(z)$, potom na základe (1.14) dostaneme

$$x(n+1) \div z\,[X(z) - x(0)] = zX(z),$$

$$x(n+2) \div z^2 \left[X(z) - x(0) - \frac{x(1)}{z}\right] = z^2 X(z)$$

a z korešpondencie (1.12) pre $\omega = \frac{\pi}{3}$ je

$$\cos\frac{n\pi}{3} \div \frac{z(z - \cos\frac{\pi}{3})}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{3} + 1} = \frac{z(z - 0{,}5)}{z^2 - z + 1}.$$

Z uvedeného vyplýva, že danej diferenčnej rovnici zodpovedá táto operátorová rovnica

$$2\underbrace{z^2 X(z)}_{\div x(n+2)} - 5\underbrace{zX(z)}_{\div x(n+1)} + 2\underbrace{X(z)}_{\div x(n)} = \underbrace{\frac{z(z-0{,}5)}{z^2 - z + 1}}_{\div \cos\frac{n\pi}{3}}.$$

Keďže $2z^2 - 5z + 2 = 2(z-2)(z-0{,}5)$, tak riešením operátorovej rovnice je

$$X(z) = \frac{z(z-0{,}5)}{2(z-2)(z-0{,}5)(z^2-z+1)} = \frac{z}{2(z-2)(z^2-z+1)} \tag{2.4}$$

Teraz stačí určiť spätnú $\mathcal{Z}$– transformáciu funkcie X. Pretože funkcia X má jednoduché póly v bodoch 2 a $(1 \pm i\sqrt{3})/2$, tak na základe (2.4) a (1.33) je

$$X(z) \div x(n) = \operatorname{res}\left[\frac{z}{2(z-2)(z^2-z+1)} z^{n-1}\right]_{z=2} + \\ + 2\Re e\left\{\operatorname{res}\left[\frac{z}{2(z-2)(z^2-z+1)} z^{n-1}\right]_{z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\right\}.$$

Keďže $[2(z-2)(z^2-z+1)]' = [2(z^3-3z^2+3z-2)]' = 6(z-1)^2$, tak vzhľadom na (1.34) je

$$x(n) = \left[\frac{z^n}{6(z-1)^2}\right]_{z=2} + 2\Re e\left\{\left[\frac{z^n}{6(z-1)^2}\right]_{z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\right\}. \tag{2.5}$$

Je potrebné určiť reálnu časť: je zrejmé, že

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \underset{\text{Moivreov vzorec (6.5)}}{\Longrightarrow} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$$

a úpravami dostaneme

$$\left[\frac{1}{6(z-1)^2}\right]_{z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{6\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{6}.$$

Ak si uvedomíme, že

$$\Re e\left\{\left[\frac{z^n}{6(z-1)^2}\right]_{z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\right\} = \Re e\left\{\left[\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right] \cdot \left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{6}\right]\right\} = \\ = \frac{-\cos\frac{n\pi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}}{6},$$

tak na základe (2.5) dostaneme

$$x(n) = \frac{2^n}{6} + \frac{-\cos\frac{n\pi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}}{3}.$$

Ak sú vám známe goniometrické identity, tak môžete si overiť, že získané riešenie sa dá zapísať aj v tvare

$$x(n) = \frac{1}{6}\left[2^n - 2\cos\frac{(n-1)\pi}{3}\right].$$

Urobíme ešte „pseudoskúšku“ správnosti:

$$x(0) = \frac{1}{6}\left[2^0 - 2\cos\frac{(0-1)\pi}{3}\right] = \frac{1}{6}\left[1 - 2\cos\frac{-\pi}{3}\right] = \frac{1}{6}\left[1 - 2\cdot\frac{1}{2}\right] = 0,$$

čo je v súlade so začiatočnými podmienkami. Obdobne overíme, že je splnená aj druhá začiatočná podmienka $x(1) = 0$. Teda „asi sme dobre počítali“. Čo je potrebné ešte urobiť, aby sme mali úplnú skúšku správnosti našich výpočtov?

2.2 Sústava lineárnych diferenčných rovníc

$\mathcal{Z}-$transformáciu môžeme použiť aj na vyriešenie sústavy lineárnych diferenčných rovníc. Neurobíme detailnejší rozbor postupu. Veríme, že čitateľovi postačí na pochopenie problematiky vyriešený príklad.

***Príklad* 2.3** Riešme systém diferenčných rovníc

$$x(n{+}1) - 2x(n) - 2y(n) = 3^n,\ x(0) = 0,$$
$$y(n{+}1) - x(n) - 3y(n) = 2^n,\ y(0){=}0.$$

Riešenie:
Keďže pravé strany rovníc (3^n a 2^n) sú exponenciálne ohraničené funkcie, tak aj mriežkové funkcie $x(n)$ a $y(n)$ budú exponenciálne ohraničené, a preto môžeme predpokladať, že existujú ich $\mathcal{Z}-$transformácie. Nech teda

$$x(n) \div X(z) \qquad \text{a} \qquad y(n) \div Y(z).$$

Potom na základe začiatočných podmienok $x(0) = 0$ a $y(0) = 0$ a vety o prestihu dostaneme

$$\begin{aligned} x(n+1) &\div zX(z) \\ y(n+1) &\div zY(z). \end{aligned}$$

Vzhľadom na to, že

$$3^n \div \frac{z}{z-3} \qquad \text{a} \qquad 2^n \div \frac{z}{z-2},$$

tak ľahko vidno, že danému systému diferenčných rovníc zodpovedá tento operátorový systém

$$\begin{aligned} zX(z) - 2X(z) - 2Y(z) &= \frac{z}{z-3}, \\ zY(z) - X(z) - 3Y(z) &= \frac{z}{z-2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} (z-2)X(z) - 2Y(z) &= \frac{z}{z-3}, \\ -X(z) + (z-3)Y(z) &= \frac{z}{z-2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Riešením systému (2.7) je (odporúčame použiť Cramerovo pravidlo):

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-4)} \qquad \text{a} \qquad Y(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z-1)(z-3)(z-4)}.$$

Čitateľ sa ľahko môže presvedčiť o tom, že

$$X(z) \div x(n) = \frac{1}{3}\left[1 - 3\cdot 2^n + 2\cdot 4^n\right]$$

a

$$Y(z) \div y(n) = \frac{1}{6}\left[-1 - 3\cdot 3^n + 4^{n+1}\right].$$

Taktiež si môže urobiť „pseudoskúšku správnosti“, t. j. overiť začiatočné podmienky $x(0) = 0$ a $y(0) = 0$.

2.3 Úlohy

1. Riešte diferenčnú rovnicu s danými začiatočnými podmienkami:

a) $\triangle^2 x(n) - 2\triangle x(n) + x(n) = 2,\ x(0) = 0,\ \triangle x(0) = 1;$ $\left[x(n) = 2 + (3n-4)2^{n-1}\right]$

b) $\triangle^2 x(n) - 8\triangle x(n) + 16x(n) = -16n^2 + 16n + 6,\ x(0) = 0,\ x(1) = 4;$ $\left[x(n) = n5^n - n^2\right]$

c) $\triangle^2 x(n) + 3\triangle x(n) + 3x(n) = 0,\ x(0) = 1,\ \triangle x(0) = -2;$ $\left[x(n) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2(n+1)\pi}{3}\right]$

d) $\triangle^3 x(n) + 6\triangle^2 x(n) + 12\triangle x(n) + 8x(n) = \cos n\pi,\ x(0) = x(1) = \triangle^2 x(0) = 0;$ $\left[x(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}(-1)^{n+1}\right]$

e) $x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) = 0,\ x(0) = 1,\ x(1) = 0;$ $\left[x(n) = (-1)^n(2 - 2^n)\right]$

f) $x(n+2) + x(n+1) + x(n) = 0,\ x(0) = 1,\ x(1) = -1;$ $\left[x(n) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2(n+1)\pi}{3}\right]$

g) $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 2^n,\ y(0) = y(1) = 0;$ $\left[y(n) = 1 + (n-2)2^{n-1}\right]$

i) $x(n+2) - 6x(n+1) + 9x(n) = n3^n,\ x(0) = x(1) = 0;$ $\left[x(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}3^{n-1}\right]$

j) $x(n+2) + x(n) = 1 - (-1)^n,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1;$ $\left[x(n) = \frac{1-(-1)^n}{2}\right]$

k) $x(n+3) - x(n+2) - x(n+1) + x(n) = n^2$, $x(0) = x(1) = x(2) = 0$.

$$\left[x(n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\right]$$

2. Riešte diferenčný systém s danými začiatočnými podmienkami:

a) $x(n+1) + 7x(n) - y(n) = 0,$
$y(n+1) + x(n) + 5y(n) = 0,\ x(0) = y(0) = 1;$

$$\left[\begin{array}{l} x(n) = (-6)^n \\ y(n) = (-6)^n \end{array}\right]$$

b) $x(n+1) - 3x(n) - y(n) = 0,$
$y(n+1) + 5x(n) + y(n) = 0,\ x(0) = y(0) = 1;$

$$\left[\begin{array}{l} x(n) = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + 3\sin\frac{n\pi}{4}\right) \\ y(n) = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} - 7\sin\frac{n\pi}{4}\right) \end{array}\right]$$

c) $x(n+2) + 2y(n) = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1$
$y(n+2) - 2x(n) = 0,\ y(0) = y(1) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x(n) = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \sin\frac{n\pi}{2} \cos\frac{(n-1)\pi}{4} \\ y(n) = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \sin\frac{n\pi}{2} \cos\frac{(n+1)\pi}{4} \end{array}\right]$$

d) $f(n+1) = -f(n) + g(n) + h(n),\ \ f(0) = 1$
$g(n+1) = f(n) - g(n) + h(n),\quad g(0) = 0$
$h(n+1) = f(n) + g(n) - h(n).\quad h(0) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} f(n) = \frac{1}{3}\left[1 - (-2)^{n+1}\right] \\ g(n) = \frac{1}{3}\left[1 - (-2)^{n}\right] \\ h(n) = \frac{1}{3}\left[1 - (-2)^{n}\right] \end{array}\right]$$

Kapitola 3

Kombinatorika

3.1 Množiny

Jedným zo základných pojmov v matematike je pojem množiny. Vlastnosti množín budeme intenzívne využívať v kapitolách o kombinatorike. Pojem množiny nebudeme definovať, ale budeme ho chápať v intuitívnom zmysle. Pod **množinou** rozumieme súhrn (skupinu, súbor) nejakých navzájom odlišných objektov, ktoré podľa nejakého kritéria tvoria jeden celok.

Množinu považujeme za určenú, ak o každom objekte vieme rozhodnúť, či je alebo nie je prvkom danej množiny. Množiny budeme označovať pomocou veľkých písmen:

$$A, B, \ldots, X, Y, \ldots, M, N, \ldots$$

a podobne, a prvky množín budeme označovať malými písmenami $a, b, \ldots, x, y, \ldots, m, n, \ldots$. Skutočnosť, že a **je prvkom množiny** A zapíšeme

$$a \in A\ .$$

Ak a **nie je prvkom množiny** A, tak zapíšeme

$$a \notin A\ .$$

Namiesto a je (nie je) prvkom množiny A zvykneme hovoriť aj a **patrí (nepatrí)** do množiny A.

Množinu, ktorá neobsahuje žiadny prvok, nazývame **prázdnou množinou** a označujeme ju symbolom $\emptyset$.

Poznáme rôzne spôsoby určenia množín. Ak množina M obsahuje konečný počet prvkov $x_1, x_2, \ldots, x_n$, vtedy používame zápis

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\ .$$

Symbolom $|M|$ označujeme počet prvkov konečnej množiny M. My budeme pracovať predovšetkým s konečnými množinami.

Uvedomme si, že

$$D = \{\emptyset\}$$

je neprázdna množina obsahujúca jeden prvok $\emptyset$, a preto $D \neq \emptyset$. Stretávame sa aj s množinami, ktoré sú určené takto: K je množina všetkých prvkov $x \in B$, ktoré majú vlastnosť P. V tomto prípade píšeme:

$$K = \{x \in B;\ P(x)\}\,.$$

Niektoré množiny, hlavne číselné, majú všeobecne zaužívané označenia. Tak napríklad pre množinu všetkých **prirodzených** čísel, t.j. množinu $\{1, 2, 3, \dots\}$, používame symbol $\mathbb{N}$. Množinu všetkých **celých** čísel označujeme $\mathbb{Z}$. Racionálne čísla sú zlomky s celočíselným čitateľom aj menovateľom. Množinu všetkých **racionálnych** čísel označujeme $\mathbb{Q}$. Znak $\mathbb{R}$ je symbolom pre množinu všetkých **reálnych** a $\mathbb{C}$ pre množinu všetkých **komplexných** čísel.

***Príklad* 3.1**

$$P = \{x \in N;\ 3 < x^2 < 30\}$$

je množina všetkých prirodzených čísel, ktorých druhá mocnina je väčšia než 3 a menšia ako 30, teda

$$P = \{2, 3, 4, 5\}\,.$$

Definícia 3.1 *Množina A je* ***podmnožinou*** *množiny B práve vtedy, ak každý prvok množiny A patrí aj do množiny B. Zapisujeme*

$$A \subset B\ .$$

Je zrejme, že $A = B$ práve vtedy, keď $A \subset B$ a súčasne aj $B \subset A$. Každá neprázdna množina A obsahuje najmenej dve podmnožiny a to $\emptyset$ a A.

Definícia 3.2 ***Potenčná množina*** *množiny A je množina $\mathcal{P}(A)$, ktorej prvkami sú všetky podmnožiny množiny A.*

Napríklad, ak $A = \{1, 2, 3\}$, tak

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3, \}\}\,.$$

Predpokladajme, že všetky množiny, s ktorými pracujeme, sú prvkami istej univerzálnej množiny U.

Definícia 3.3 ***Zjednotenie*** *množín A a B je množina*

$$A \cup B = \{x \in U;\ x \in A \ \ alebo\ \ x \in B\}$$

a ***prienik*** *množín A a B je množina*

$$A \cap B = \{x \in U;\ x \in A \ \ a\ \ x \in B\}\,.$$

Teda do $A \cup B$ patria práve tie prvky, ktoré sú prvkami aspoň jednej z množín A a B, a do $A \cap B$ patria práve tie prvky, ktoré sú prvkami množiny A aj množiny B.

Definícia 3.4 *Dve množiny A a B sú* ***disjunktné****, ak ich prienikom je prázdná množina, t.j.*

$$A \cap B = \emptyset\,.$$

Definícia 3.5 ***Rozdiel*** *množín A a B je množina*

$$A \setminus B = \{x \in U;\ x \in A \ \text{ a } \ x \notin B\}\,.$$

To znamená, že prvkami množiny $A \setminus B$ sú tie prvky množiny A, ktoré nepatria do B.

Definícia 3.6 ***Komplement*** *(doplnok) množiny A je množina*

$$\overline{A} = U \setminus A\ .$$

Operáciu zjednotenia a prieniku môžeme rozšíriť na ľubovoľný počet množín. Nech I je množina, ktorej budeme hovoriť množina indexov a pre každé $i \in I$ je definovaná množina $A_i \subset U$. Tým je daný systém množín $\{A_i;\ i \in I\}$.

Definícia 3.7 ***Zjednotenie*** *systému množín $\{A_i;\ i \in I\}$ je množina $\bigcup_{i\in I} A_i$ práve tých prvkov z U, ktoré patria do niektorej z množín A_i.*
Prienik *systému množín $\{A_i;\ i \in I\}$ je množina $\bigcap_{i\in I} A_i$ práve tých prvkov z U, ktoré patria do všetkých množín A_i.*

Poznámka. Ak $I = \{1, 2, \ldots, k\}$, tak systém množín je $\{A_1, A_2, \ \ldots, A_k\}$. Ich zjednotenie a prienik označujeme

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad \text{a} \quad \bigcap_{i=1}^{k} A_i\ .$$

Definícia 3.8 *Množiny systému $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ sú* ***po dvojiciach disjunktné****, ak*

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

pre každú dvojicu indexov $i, j \in I,\ i \neq j$.

Definícia 3.9 ***Rozklad*** *množiny $A \neq \emptyset$ je taký systém $\{A_i;\ i \in I\}$, pre ktorý platí*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A \quad a \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad pre\ \ i, j \in I,\ i \neq j\ .$$

Veta 3.1 *Nech A, B a C sú podmnožiny množiny U. Potom platí:*

1.	$A \cup B = B \cup A\,,$	$A \cap B = B \cap A\,,$
2.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,,$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,,$
3.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,,$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,,$
4.	$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A\,,$	$A \cap U = U \cap A = A\,,$
5.	$A \cup \overline{A} = \overline{A} \cup A = U\,,$	$A \cap \overline{A} = \overline{A} \cap A = \emptyset\,,$
6.	$\overline{(\overline{A})} = A\,,$	
7.	$A \cup A = A\,,$	$A \cap A = A\,,$
8.	$A \cup U = U\,,$	$A \cap \emptyset = \emptyset\,,$
9.	$A \cup (A \cap B) = A\,,$	$A \cap (A \cup B) = A\,,$
10.	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}\,,$	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}\,.$

Tvrdeniam 10 vety 3.1 hovoríme **de Morganove pravidlá**. Vetu nebudeme dokazovať, čitateľ si jednotlivé vlastnosti môže overiť pomocou tzv. Vennových diagramov.

3.2 Základné kombinatorické princípy

Princíp násobenia (multiplikačný)

Ak činnosť môže pozostávať z t po sebe nasledujúcich krokov a
1. krok môže byť uskutočnený n_1 spôsobmi,
2. krok môže byť uskutočnený n_2 spôsobmi,
$\vdots$
t-tý krok môže byť uskutočnený n_t spôsobmi,
tak počet rôznych spôsobov vykonania celej činnosti je

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_t\,.$$

***Príklad* 3.2** Koľko reťazcov dĺžky 4 je možné vytvoriť z písmen A, B, C, D a E, ak:
a) písmená sa neopakujú,
b) písmená sa neopakujú a každý reťazec začína písmenom B,
c) písmená sa neopakujú a reťazce nezačínajú písmenom B?

Riešenie. Na riešenie úlohy je vhodný multiplikačný princíp. Každý reťazec dĺžky štyri je možné vytvoriť v štyroch po sebe nasledujúcich krokoch: vyberieme prvé písmeno, vyberieme druhé písmeno, vyberieme tretie písmeno a vyberieme štvrté písmeno. Prvé písmeno vyberáme z piatich. Keď je už prvé písmeno vybrané, na výber druhého písmena máme iba štyri ostávajúce písmená. Podobne pri výbere tretieho písmena môžeme voliť iba z troch ostávajúcich písmen a pri výbere posledného štvrtého písmená už ostávajú iba dve možnosti. Takže v prípade a) je to

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

reťazcov.

V prípade b) začínajú všetky reťazce písmenom B, takže v prvom kroku máme iba jednu možnosť a to voľbu písmena B. V druhom kroku vyberáme jedno písmeno z ostatných štyroch, takže tento krok môže byť uskutočnený štyrmi spôsobmi. Teraz podobne ako v prípade a) máme na výber tretieho písmena tri možnosti a na výber štvrtého písmena dve možnosti. Takže

$$1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

reťazcov začína písmenom B.

V prípade c) môžeme postupovať podobne. Avšak, ak si uvedomíme, že našej požiadavke vyhovujú všetky reťazce z prípadu a), ktoré nie sú reťazcami z prípady b), tak

$$120 - 24 = 96$$

reťazcov dĺžky štyri s neopakujúcimi sa písmenami je takých, ktoré nezačínajú písmenom B.

***Príklad* 3.3** Pomocou princípu násobenia ukážte, že k množine obsahujúcej n prvkov je možné vytvoriť práve 2^n jej rôznych podmnožín.

Riešenie. Uvažujme n prvkovú množinu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Proces vytvorenia ľubovoľnej podmnožiny tej n prvkovej množiny je možné rozdeliť do n po sebe nasledujúcich krokov nasledovne. V prvom kroku rozhodneme či prvok x_1 do nej zaradíme, alebo nie. To sú dve možnosti. V druhom kroku máme opäť dve možnosti a to, či prvok x_2 do vytváranej podmnožiny zaradíme, alebo nie. Takto máme vždy dve možnosti, a keďže naša množina má n prvkov, v n-tom kroku sa rozhodujeme o zaradení prvku x_n. Ak pri vytváraní nejakej podmnožiny aspoň v jednom kroku urobíme inú voľbu (z dvoch možností), než sme urobili pri vytváraní inej, tak tie podmnožiny sú určite rôzne. To znamená, že počet rôznych podmnožín množiny s n prvkami je

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n \,.$$

***Príklad* 3.4** Určte počet usporiadaných trojíc množín X_1, X_2, X_3, ktorých zjednotením je množina $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ a prienik ktorých je prázdna množina.

Riešenie. Príkladom takýchto usporiadaných trojíc množín sú napríklad nasledujúce dve trojice

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 8\}, \{2, 5, 6, 7\}$$

a

$$\{1,4,8\},\{1,2,3\},\{2,5,6,7\}\,.$$

Každý prvok množiny X je prvkom práve jednej z nasledujúcich množín

$$Y_1=\overline{X}_1\cap X_2\cap X_3\,,\quad Y_2=X_1\cap \overline{X}_2\cap X_3\,,\quad Y_3=X_1\cap X_2\cap \overline{X}_3\,,$$

$$Y_4=\overline{X}_1\cap \overline{X}_2\cap X_3\,,\quad Y_5=\overline{X}_1\cap X_2\cap \overline{X}_3\,,\quad Y_6=X_1\cap \overline{X}_2\cap \overline{X}_3\,.$$

Skonštruovať požadovanú usporiadanú trojicu množín je možné v ôsmich po sebe následujúcich krokoch takto: zvolíme j, $1\le j\le 6$, a dáme prvok 1 do množiny Y_j; zvolíme j, $1\le j\le 6$, a dáme prvok 2 do množiny Y_j, …; zvolíme j, $1\le j\le 6$, a dáme prvok 8 do množiny Y_j. Napríklad pre skonštruovanie usporiadanej trojice

$$\{1,2,3\},\{1,4,8\},\{2,5,6,7\}$$

zvolíme najprv $j=3$ a dáme prvok 1 do množiny $Y_3=X_1\cap X_2\cap \overline{X}_3$. Potom volíme $j=2$ a dáme prvok 2 do množiny $Y_2=X_1\cap \overline{X}_2\cap X_3$. Ďalšie voľby j sú $6,5,4,4,4,5$.

Pre každú voľbu j existuje šesť možnosti. Podľa princípu násobenia teda existuje

$$6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6=6^8=1\ 679\ 616$$

požadovaných usporiadaných trojíc množín X_1,X_2,X_3.

V tejto učebnici v kapitolách o kombinatorike budeme občas pracovať s bitovými reťazcami. Myslíme tým reťazce pozostávajúce z núl a jedničiek.

***Príklad* 3.5** Koľko je rôznych 8-bitových reťazcov, ktoré začínajú buď trojicou 101 alebo trojicou 111.

Riešenie. Princíp násobenia nám umožní zistiť počet reťazcov začínajúci trojicou 101 tak, že doplnenie zvyšných pozícií vykonáme v piatich po sebe idúcich krokoch. V prvom doplníme znak na štvrtú pozíciu, v druhom doplníme znak na piatu pozíciu. Takto pokračujeme až do piateho kroku, v ktorom doplníme znak na ôsmu pozíciu. V každom kroku sa rozhodujeme, či doplníme 0 alebo 1. Máme teda dve možnosti na vykonanie každého kroku. To znamená, že počet rôznych 8-bitových reťazcov začínajúcich trojicou 101 je

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^5=32\,.$$

Podobne zistíme, že počet rôznych 8-bitových reťazcov začínajúcich trojicou 111 je tiež

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^5=32\,.$$

My sme sa však pýtali na to, koľko je rôznych 8-bitových reťazcov začínajúcich trojicou 101 alebo trojicou 111. Na to potrebujeme nasledujúci kombinatorický princíp.

Princíp sčítavania (aditívny)
Nech $X_1, X_2, \ldots X_t$ *sú množiny a nech* i*-tá množina* X_i *obsahuje* n_i *prvkov,* $i = 1, 2, \ldots, t$*. Ak množiny* $X_1, X_2, \ldots, X_t$ *sú po dvojiciach disjunktné, t.j. pre* $i \neq j$ *je* $X_i \cap X_j = \emptyset$*, tak počet rôznych prvkov v zjednotení* $X_1 \cup X_2 \cdots \cup X_t$ *je*

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t\,.$$

Teraz môžeme uvažovať množinu X_1 obsahujúcu všetky 8-bitové reťazce začínajúce trojicou 101. Počet jej prvkov je 32. Podobne, nech X_2 je množina všetkých 8-bitových reťazcov, ktoré začínajú trojicou 111. Tá má tiež 32 prvkov. Tieto dve množiny sú disjunktné, pretože ak nejaký reťazec má na začiatku 101, tak nemôže mať na začiatku 111 a naopak. V ďalšej časti riešenia môžeme teda použiť princíp sčítavania a dostaneme, že počet rôznych 8-bitových reťazcov, ktoré majú na začiatku 101 alebo 111 je rovný súčtu počtu prvkov v množinách X_1 a X_2, teda

$$|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| = 32 + 32 = 64\,.$$

Zhrnime teda, kedy použijeme princíp násobenia a kedy princíp sčítavania. Ak počítame objekty, ktoré sú konštruované postupnými krokmi, použijeme princíp násobenia. Ak máme disjunktné množiny objektov a chceme poznať počet objektov v nich, použijeme princíp sčítavania. Nasledujúci príklad ilustruje použitie oboch princípov.

***Príklad* 3.6** Koľko je možností vybrať dvojicu kníh rôznych žánrov, ak máme k dispozícii tri žánre: matematiku, fyziku a beletriu. Z matematicky máme na výber z piatich rôznych kníh, z fyziky sú v ponuke tri rôzne knihy a beletria ponúka šesť titulov.

Riešenie. Výber dvoch kníh vykonáme v dvoch po sebe idúcich krokoch. Ak sa rozhodneme pre dvojicu žánrov matematika a fyzika, je $5 \cdot 3 = 15$ možností voľby. Podobne pre dvojicu žánrov matematika a beletria je počet rôznych výberov $5 \cdot 6 = 30$. A nakoniec pre dvojicu žánrov fyzika a beletria je to $3 \cdot 6 = 18$ rôznych možností. Keďže takto vybrané množiny kníh dvojíc žánrov sú disjunktné, podľa princípu sčítavania je

$$15 + 30 + 18 = 63$$

možností výberu dvojice kníh, ak z matematiky, z fyziky aj z beletrie je vo výbere najviac jedna kniha.

3.3 Permutácie, variácie a kombinácie

Často je potrebné určiť počet rôznych usporiadaní alebo zoradení prvkov, napríklad ľudí do zástupu. Túto problematiku riešia permutácie.

Definícia 3.10 *Nech* $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. ***Permutácia*** *n prvkov* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *je bijektívne zobrazenie* $f: S \to S$.

Pripomeňme, že zobrazenie je bijektívne, ak rôznym vzorom odpovedajú rôzne obrazy a tiež každý prvok z druhej množiny má v prvej množine svoj vzor. V definícii je prvá a druhá množina tá istá, čo znamená, že ak máme pevne zoradené vzory, tak im odpovedá nejaké pevné zoradenie obrazov pozostávajúce z tých istých prvkov. Permutáciu môžeme definovať aj voľnejším jazykom takto:
Permutácia n *prvkov* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *je ľubovoľné usporiadanie tých* n *prvkov.*
To znamená, že za permutáciu n prvkov považujeme usporiadanie obrazov v zobrazení $f: S \to S$, pričom vzory boli dopredu pevne usporiadané.

Pre tri písmená A, B, C sa ľahko presvedčíme, že počet ich rôznych usporiadaní je 6 a to: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB a CBA. Nasledujúca veta nám dáva odpoveď na otázku, koľko existuje rôznych permutácii pre ľubovoľný počet prvkov.

Veta 3.2 *Existuje práve* $n!$ *permutácií* n *prvkov.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme pomocou princípu násobenia. Permutácia n prvkov môže byť zostrojená postupným vykonaním n krokov takto: zvolíme prvý prvok permutácie, zvolíme druhý prvok, atď., až zvolíme posledný n-tý prvok. Prvý prvok je možné vybrať z ponuky všetkých n prvkov, máme teda n možností pre prvý krok. Ak je prvý prvok permutácie zvolený, v druhom kroku už môžeme vyberať iba z $n-1$ ostatných prvkov, takže je $n-1$ možností, ako vykonať druhý krok. Takto postupujeme ďalej, až v poslednom n-tom kroku už máme iba jednu možnosť, pretože všetky ostatné prvky už sú zaradené v permutácii. Podľa princípu násobenia je

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

rôznych permutácií n prvkov. □

Počet rôznych permutácií n prvkov označujeme symbolom $P(n)$. Podľa vety 3.2 teda platí

$$P(n) = n!\,.$$

***Príklad* 3.7** Koľko permutácií písmen ABCDEF obsahuje podreťazec DEF?

Riešenie. Aby sme zabezpečili, že písmená DEF budú spolu a v tomto poradí, môžeme túto konfiguráciu písmen považovať za jeden prvok. Ten, spolu s ostatnými tromi písmenami, tvorí štvoricu prvkov, ktorú potrebujeme usporiadať všetkými možnými spôsobmi. Uvažujeme teda permutácie zo štyroch prvkov a tých je

$$4! = 24\,.$$

***Príklad* 3.8** Koľko permutácií písmen ABCDEF obsahuje skupinu DEF spolu v ľubovoľnom poradí?

Riešenie. Tento problém môžeme riešiť v dvoch po sebe nasledujúcich krokoch. V prvom kroku zostrojíme skupinu pozostávajúcu z písmen DEF. V druhom kroku považujeme túto skupinu za jeden prvok a konštruujeme permutáciu zo štyroch prvkov, a to s písmen A, B, C a štvrtým prvkom je skupina DEF.

Podľa vety 3.2 existuje $3! = 6$ rôznych výsledkov po uskutočnení prvého kroku. Podľa príkladu 3.7 je 24 možných výsledkov druhého kroku. Ak teraz použijeme princíp násobenia, dostaneme, že počet všetkých možných usporiadaní písmen ABCDEF s podmienkou, že pismená DEF sú spolu, je

$$3! \cdot 4! = 6 \cdot 24 = 144\,.$$

Niekedy nastanú situácie, že zo skupiny n prvkov potrebujeme usporiadať iba niektoré. K tomu potrebujeme nasledujúci pojem.

Definícia 3.11 ***Variácia*** *k-tej triedy z n prvkov $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je usporiadanie ľubovoľnej k-prvkovej podmnožiny množiny $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.*

Je zrejmé, že definícia 3.11 vyžaduje, aby číslo k nebolo väčšie ako číslo n. Tiež si všimnime, že záleží na usporiadaní vybraných prvkov. Počet rôznych variácií k-tej triedy z n prvkov označujeme symbolom $V(n,k)$. Nasledujúca veta hovorí o tom, čomu je toto číslo rovné.

Veta 3.3 *Nech $k \leq n$. Potom počet variácií k-tej triedy z n prvkov je*

$$V(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\,.$$

Dôkaz. Počítajme, koľko je rôznych možností usporiadania k prvkov z množiny, ktorá obsahuje n prvkov. Je n možností na vybratie prvého prvku. Ak je ten zvolený, na vybratie druhého prvku zostáva už iba $n-1$ možností. Takto pokračujeme ďalej. Keď je už vybraných $k-1$ prvkov, na výber posledného k-tého prvku ostáva $n-k+1$ možností, pretože práve toľko prvkov sme ešte nevybrali. Podľa princípu násobenia teda je

$$V(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

rôznych možností ako usporiadať k prvkov z n prvkovej množiny, t.j. je práve toľko rôznych variácií k-tej triedy z n prvkov. □

Číslo $V(n,k)$ sa často zapisuje v tvare pomocou faktoriálov. Všimnime si nasledujúcu úpravu:

$$\begin{aligned} V(n,k) &= n(n-1)\cdots(n-k+1) \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\,. \end{aligned}$$

***Príklad* 3.9** Máme usporiadať sedem mužov a päť žien do radu tak, aby žiadne dve ženy neboli vedľa seba. Koľko je takých možností?

Riešenie. Postupujeme v dvoch po sebe nasledujúcich krokoch. V prvom kroku usporiadame sedem mužov. To sú permutácie zo siedmich prvkov, takže k dispozícii je $7! = 5040$ možností. V druhom kroku rozmiestnime päť žien. Medzi dvoch mužov je možné umiestniť iba jednu ženu, alebo žiadnu. To isté platí pre pozíciu pred začiatkom mužského radu a tiež pre pozíciu na jeho konci. Máme teda k dispozícii osem miest, pričom na každé môžeme umiestniť najviac ak jednu ženu. Stačí teda z nich vybrať 5-prvkovú podmnožinu a na tieto pozície umiestňovať ženy. Samozrejme, že poradie žien tiež hrá úlohu. To znamená, že počet rôznych rozmiestnení žien je rovný počtu variácií 5-tej triedy z 8 prvkov, t.j. $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$. Podľa princípu násobenia potom počet rôznych usporiadaní 7 mužov a 5 žien tak, že ženy nie sú vedľa seba je

$$P(7) \cdot V(8,5) = 5040 \cdot 6720 = 33\ 868\ 800\ .$$

Definícia 3.12 ***Kombinácia*** *k-tej triedy z n prvkov $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je ľubovoľný výber k-prvkovej podmnožiny z množiny $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.*

Aj definícia 3.12 vyžaduje, aby číslo k nebolo väčšie ako číslo n. Na rozdiel od variácií, v prípade kombinácií nezáleží na usporiadaní vybraných prvkov. Počet rôznych kombinácií k-tej triedy z n prvkov označujeme symbolom $C(n,k)$. Nasledujúca veta hovorí o tom, čomu je toto číslo rovné.

Veta 3.4 *Nech $k \le n$. Potom počet kombinácií k-tej triedy z n prvkov je*

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}\ .$$

Dôkaz. Z množiny, ktorá obsahuje n prvkov, vyberieme k prvkov. To je jedna kombinácia k-tej triedy z n prvkov. Je $k!$ možností usporiadania tých k prvkovš. Každé také usporiadanie je variáciou k-tej triedy z n prvkov. Je teda zrejmé, že počet všetkých variácií k-tej triedy z n prvkov je $k!$-krát väčší ako je počet kombinácií k-tej triedy z n prvkov. Teda

$$C(n,k) = \frac{V(n,k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}\ .$$

□

Poznámka. Na označenie čísla $V(n,k)$ je často používaný symbol $\binom{n}{k}$. Takže

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}\ .$$

3.4 Zovšeobecnené permutácie, variácie a kombinácie

Ak sme doteraz uvažovali o permutáciách, variáciách a kombináciách, uvažovali sme o výberoch, resp. usporiadaných výberoch, v ktorých sa každý objekt mohol vyskytnúť najviac raz. Často sa však stretávame s výbermi, v ktorých sa objekty záujmu môžu vyskytovať viackrát. Napríklad v telefónnych číslach sa jednotlivé číslice môžu opakovať.

***Príklad* 3.10** Koľko rôznych rozlíšiteľných slov môžeme zostrojiť, ak každé z nasledujúcich 11 písmen použijeme práve raz?

ABRAKADABRA

Riešenie. Skúmaný počet je určite menší ako $11!$, pretože niektoré písmena sa v ponuke vyskytujú viackrát. Uvažujme 11 pozícií, ako je vyznačené,

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

a umiestňujme písmená z našej ponuky na tieto pozície. Nezáleží pritom, ktorým písmenom začneme. V prvom kroku napríklad môžeme rozmiestniť 5 písmen A. Je jasné, že na poradí, v akom ich rozmiestnime, nezáleží. Rozhodujúce sú pozície, ktoré obsadia. Vyberáme teda päť pozícií z jedenástich voľných. Počet rôznych možných takýchto výberov je rovný počtu kombinácii piatej triedy z jedenástich prvkov, teda $C(11,5)$. V druhom kroku rozmiestníme napríklad 2 písmená B na ešte voľné pozície. Týchto možností je $C(6,2)$. Podobne v treťom kroku pri rozmiestňovaní dvoch písmen R je počet možností $C(4,2)$. Ostali nám ešte dve voľné pozície, na ktoré je potrebné umiestniť jedno K a jedno D. Na umiestnenie písmena K vo štvrtom kroku máme $C(2,1)$ možností a v poslednom kroku je už iba jedno voľné miesto pre písmeno D. Počet týchto možností je však možné vyjadriť výrazom $C(1,1)$. Podľa princípu násobenia je počet všetkých možností

$$\begin{aligned} &C(11,5)\cdot C(6,2)\cdot C(4,2)\cdot C(2,1)\cdot C(1,1)\\ &=\frac{11!}{5!\cdot 6!}\,\frac{6!}{2!\cdot 4!}\,\frac{4!}{2!\cdot 2!}\,\frac{2!}{1!\cdot 1!}\,\frac{1!}{1!\cdot 0!}=83\ 160\,. \end{aligned}$$

V predchádzajúcom príklade sa nejednalo o permutácie, ako sme ich poznali doteraz. Záležalo v ncih na usporiadaní, ale nerozlíšiteľné objekty sa mohli opakovať. Takéto usporiadanie zvykneme nazývať **zovšeobecnená permutácia** alebo **permutácia s opakovaním**. O počte rôznych zovšeobecnených permutácií hovorí nasledujúca veta.

Veta 3.5 *Ak postupnosť S pozostávajúca z n rôznych pozícií obsahuje*
n_1 *rovnakých prvkov typu* 1 ,
n_2 *rovnakých prvkov typu* 2 ,
$\vdots$
n_t *rovnakých prvkov typu* t ,
pričom $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$, *tak počet rôznych usporiadaní postupnosti S je*

$$P(n_1, n_1, \ldots, n_t) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_t!}\,.$$

Dôkaz. Uvažujme n pozícií pre vytváranú postupnosť S. Na označenie n_1 pozícií prvkom typu 1 máme $C(n, n_1)$ možností. Ak už tieto sú označené, tak pre výber n_2 pozícií pre prvky typu 2 na zvyšných $n - n_1$ pozíciách je $C(n - n_1, n_2)$ možností, atď. Podľa princípu násobenia je teda počet všetkých možných postupností dĺžky n z uvažovaných prvkov

$$C(n, n_1) \cdot C(n - n_1, n_2) \cdot C(n - n_1 - n_2, n_3) \cdots C(n - n_1 - \ldots - n_{t-1}, n_t)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \, \frac{(n - n_1)!}{n_2!(n - n_1 - n_2)!} \cdots \frac{(n - n_1 - \ldots - n_{t-1})!}{n_t! \cdot 0!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_t!}\,.$$

□

Ďalšie zovšeobecnenie našich úvah ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

***Príklad* 3.11** Tri deti Janko, Anička a Maroš si chcú rozdeliť balíček desiatich rovnakých cukríkov. Koľko možností rôznych rozdelení majú k dispozícií?

Riešenie. Zadanie úlohy nežiada, aby každé z detí dostalo nejaký cukrík. Ak teda uvažujeme, že Janko dostane x_1 cukríkov, Anička dostane x_2 cukríkov a Maroš bude mať x_3 cukríkov, tak každé x_i, $i = 1, 2, 3$, môže nadobúdať celočíselné hodnoty od 0 do 10. Keďže žiadny cukrík nie je možné prideliť dvom a viac deťom, počet rôznych možností rozdelenia tohto balíčka cukríkov trom deťom je ten istý ako je počet rôznych riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10\,,$$

pričom každá hodnota x_i, $i = 1, 2, 3$, je z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

Takto upravenú úlohu môžeme riešiť nasledovnou úvahou: Predstavme si že v rade desiatich pozícií pre jedničky oddelíme prvých x_1 pozícií zľava nejakým oddeľovačom. Po ďalších x_2 jedničkách dáme druhý oddeľovač. Za ním ostane ešte x_3 jedničiek. Takto spolu s dvojicou oddeľovačov sme obsadili 12 pozícií. Je jasné, že $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ a máme jedno z riešení našej rovnice. Napríklad usporiadanie

$$1 \quad 1 \quad 1 \mid 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \mid 1 \quad 1$$

znamená, že $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ a $x_3 = 2$.

Akékoľvek premiestnenie oddeľovačov na uvažovaných 12 pozíciách má za následok vznik iného riešenia. Počet všetkých riešení je teda rovný počtu rôznych rozmiestnení dvoch oddeľovačov na nami uvažovaných 12 pozíciách. Keďže sa jedná o voľbu dvojprvkovej podmnožiny z 12 pozícií, počet riešení našej rovnice a tiež počet rôznych rozdelení 10 cukríkov Jankovi, Aničke a Marošovi je

$$C(12, 2) = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = 66 \, .$$

Takýmto výberom s možnosťou opakovania zvykneme hovoriť **zovšeobecnené kombinácie** alebo **kombinácie s opakovaním**. Je veľmi náročné rozhodnúť, či v konkrétnom prípade, ktorý máme riešiť, sa jedná o zovšeobecnené kombinácie alebo nie. Ak sa nám však podarí úlohu preformulovať do podoby počtu celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = y \, ,$$

pričom y je kladné celé číslo a x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, sú nezáporné celé čísla nie väčšie ako y, tak sa jedná o zovšeobecnené kombinácie. O ich počte pojednáva nasledujúca veta.

Veta 3.6 *Ak množina X obsahuje n prvkov, tak počet neusporiadaných k-prvkových výberov s možnosťou opakovania prvkov je*

$$C(k + n - 1, n - 1) = C(k + n - 1, k) \, .$$

Dôkaz. Nech $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Uvažujme $k + n - 1$ pozícií,

$$\text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \ldots \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—}$$

na ktoré umiestnime $k + n - 1$ symbolov pozostávajúcich z k znakov $\times$ a z $n - 1$ oddeľovačov $|$. Každé rozmiestnenie týchto symbolov určuje jeden výber. Pred prvým oddeľovačom umiestníme t_1 znakov $\times$, ktoré odpovedajú prvkom a_1. Počet t_2 symbolov $\times$ medzi prvým a druhým oddeľovačom reprezentuje t_2 vybraných prvkov a_2, atď. Napríklad rozmiestnenie

$$\times \quad \times \quad \times \mid \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \mid \times \quad \times$$

znamená, že z množiny $\{a_1, a_2, a_3\}$ boli vybrané tri prvky a_1, päť prvkov a_2 a dva prvky a_3.

Keďže je $C(k + n - 1, n - 1)$ možností pre výber pozícií oddeľovačov $|$, je tiež $C(k + n - 1, n - 1)$ možných k-prvkových výberov s možnosťou opakovania prvkov z množiny, ktorá obsahuje n prvkov. Tento počet je zároveň rovný číslu $C(k + n - 1, k)$, čo predstavuje počet možných výberov pozícií pre znaky $\times$. To znamená, že počet neusporiadaných k-prvkových výberov s možnosťou opakovania prvkov je

$$C(k+n-1, n-1) = C(k+n-1, k)\,.$$

□

Počet kombinácií z n prvkov s opakovaním budeme označovať symbolom $C'(n,k)$, takže

$$C'(n,k) = C(k+n-1, n-1) = C(k+n-1, k)\,.$$

V príklade 3.11 nezáležalo na poradí, ktoré z detí dostalo cukríky ako prvé, resp. druhé či tretie. Rozhodujúci bol počet pridelených cukríkov jednotlivým deťom. Sú však situácie, keď na poradí záleží.

***Príklad* 3.12** Koľko existuje šesťmiestnych telefónnych čísel, ktoré neobsahujú číslice $0, 1,$ ani 8?

Riešenie. Konštruujme telefónne číslo v šiestich po sebe nasledujúcich krokoch. V prvom kroku vyberieme číslicu na prvú pozíciu, v druhom kroku vyberieme číslicu na druhú pozíciu, atď. Keďže počet číslic, ktoré môžeme použiť pri zostrojovaní požadovaného telefónneho čísla je sedem, v každom kroku je sedem možností. Podľa princípu násobenia potom počet takýchto čísel je

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6\,.$$

Veta 3.7 *Ak množina X obsahuje n prvkov, tak počet usporiadaných k-prvkových výberov s možnosťou opakovania prvkov je*

$$V'(n,k) = n^k\,.$$

Takéto usporiadané výbery s možnosťou opakovania prvkov zvykneme nazývať **zovšeobecnené variácie**, alebo **variácie s opakovaním**.

3.5 Binomické koeficienty a binomické identity

Na otázku, či algebraický výraz $(a+b)^n$ nejako súvisí s kombinatorikou, by sme asi odpovedali záporne. Avšak, ako uvidíme, vzorec pre rozvoj výrazu $(a+b)^n$ je možné pomerne jednoducho získať pomocou doterajších znalostí z kombinatoriky.

Keďže

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n}\,,$$

po roznásobení dostaneme súčty výrazov, v ktorých mocniny a-čiek sú násobené mocninami b-čiek a tieto sčítavame. Ukážeme si to najprv na jednoduchom príklade pre $n=3$. Dostávame

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\,.\end{aligned}$$

Je iba jedna možnosť pre výber a-čka z každej zátvorky, takže a^3 sa v rozvoji nachádza iba raz. Podobne je to s výrazom b^3. Výber dvoch a-čiek je možný z prvých dvoch zátvoriek, z druhých dvoch zátvoriek, alebo z prvej a tretej, teda vyberáme dve zátvorky z troch a tých možností je $C(3,2)=3$. Podobne je to pre výber dvoch b-čiek. Takže, ak berieme do úvahy, z koľkých zátvoriek vyberáme b-čko (výber a-čiek z ostatných), máme

$$(a+b)^3 = C(3,0)\,a^3 + C(3,1)\,a^2b + C(3,2)\,ab^2 + C(3,3)\,b^3\,.$$

Podobnú úvahu môžeme zopakovať pre ľubovoľné n. Súčin $a^{n-k}b^k$ výberom b-čka z k zátvoriek a výberom a-čka z ostatných $n-k$ zátvoriek. Takýchto rôznych výberov je $C(n,k)$. Po úprave teda máme

$$\begin{aligned}(a+b)^n = C(n,0)\,a^nb^0 + C(n,1)\,a^{n-1}b^1 + \cdots + C(n,k)\,a^{n-k}b^k + \dots\\ + C(n,n-1)\,a^1b^{n-1} + C(n,n)\,a^0b^n\,.\end{aligned}$$

Tento výsledok je známy ako **binomická veta**.

Veta 3.8 *Nech a aj b sú reálne čísla a nech n je kladné celé číslo. Potom*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\,a^{n-k}b^k\,.$$

Vďaka tejto vete čísla $C(n,k)=\binom{n}{k}$ nazývame aj **binomické koeficienty**. Dôkaz binomickej vety vyplýva z predchádzajúcej úvahy. Existujú samozrejme aj iné dôkazy tejto vety, napríklad pomocou matematickej indukcie.

***Príklad* 3.13** Určte n a koeficient pri člene a^5b^7 v rozvoji výrazu $(a+b)^n$.

Riešenie. Keďže súčet mocnín je $5+7=12$, $n=12$. Podľa binomickej vety je $k=7$ a príslušný sčítanec je rovný

$$C(n,k)\,a^{n-k}b^k = C(12,7)\,a^5b^7 = 792\,a^5b^7\,.$$

Takže koeficient pri člene a^5b^7 je 792.

Často sa hodnoty binomických koeficientov určujú z takzvaného **Pascalovho trojuholníka** (Obr. 1.1). Všimnime si, že v každom riadku prvá a posledná hodnota je číslo 1. Pre každú inú hodnotu platí, že je súčtom dvoch susedných hodnôt nad ňou. To, že takto usporiadané čísla do trojuholníka naozaj predstavujú hodnoty binomických koeficientov vyplýva z nasledujúceho vzťahu známeho ako **Pascalova identita**.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Obr. 1.1

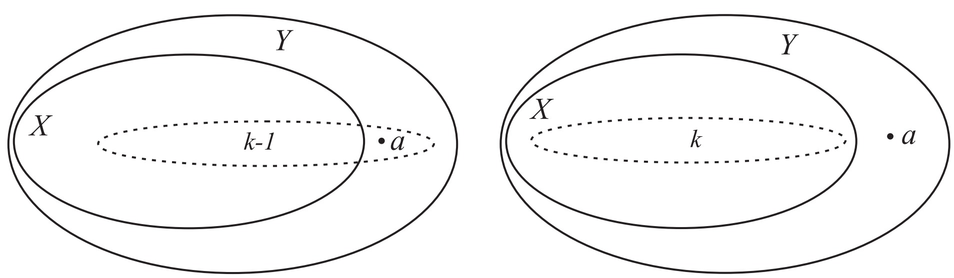
Veta 3.9 (Pascalova identita) *Nech* n *a* k *sú prirodzené čísla. Pre* $1 \leq k \leq n$ *platí*

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)\,.$$

Dôkaz. Nech X je množina obsahujúca n prvkov. Uvažujme prvok $a \notin X$ a množinu $Y = X \cup \{a\}$. Potom množina Y obsahuje $n+1$ prvkov.

Uvažujme najprv výber k prvkov z množiny Y bez ohľadu na to, či prvok a vyberieme alebo nie. Počet rôznych k-prvkových výberov z $(n+1)$-prvkovej množiny Y je v tomto prípade $C(n+1,k)$.

Iný postup dostaneme, ak berieme do úvahy, či sme vybrali prvok a alebo nie. Ak prvok a vyberieme, tak vyberáme zvyšných $k-1$ prvkov iba z množiny X, ktorá má n prvkov. Počet takých rôznych výberov je $C(n,k-1)$, pozri Obr. 1.2(a). Ak však prvok a nevyberieme, tak všetky prvky vyberáme z množiny X a takých možností je $C(n,k)$, ako to znázorňuje Obr. 1.2(b).



(a) (b)

Obr. 1.2

Keďže oba postupy sú rovnocenné, platí rovnosť

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)\,.$$

□

Pascalovu identitu môžeme zapísať aj pomocou kombinačných čísel takto:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Priamym dôsledkom takejto rovnosti je Pascalov trojuholník. Prvý riadok odpovedá výrazu $(a+b)^0 = 1$. V riadku pre koeficienty rozvoja výrazu $(a+b)^n$ sú kombinačné čísla od $\binom{n}{0}$ až po $\binom{n}{n}$. V nasledujúcom riadku pre rozvoj výrazy $(a+b)^{n+1}$ je číslo $\binom{n+1}{k}$ umiestnené v strede pod číslami $\binom{n}{k-1}$ a $\binom{n}{k}$ takto:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}\cdots\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{k}$$

To nás oprávňuje zapísať príslušnú hodnotu v Pascalovom trojuholníku na Obr. 1.1 ako súčet čísel nad touto počítanou hodnotou o riadok vyššie.

Podobných identít, ako je Pascalova identita, je v kombinatorike veľa. Z niektorými z nich sa stretneme neskôr.

***Príklad* 3.14** Ukážte, že platí rovnosť

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n.$$

Riešenie. Výraz na ľavej strane rovnosti je podobný ako je zápis binomickej vety

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, a^{n-k}b^k,$$

avšak chýba výraz $a^{n-k}b^k$. Ak si uvedomíme, že $a^{n-k}b^k = 1$ pre $a = b = 1$, tak z binomickej vety dostávame

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, 1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k).$$

3.6 Dirichletov princíp

Dirichletov princíp, alebo **princíp holubníka**, sa trochu líši od kombinatorických princípov, ktorým sme sa venovali v predchádzajúcich paragrafoch. Na rozdiel od nich neurčuje počet nejakých možností, ale odpovedá na otázku, či je možná skutočnosť, na ktorú sa pýtame. Odpovedá teda iba áno, resp. nie, nedáva nám ani návod, ako je možné to, načo sa pýtame, dosiahnuť. Uvedieme tri verzie tohto princípu.

Najjednoduchšia verzia je nenáročná na pochopenie a nepracuje s matematickými pojmami. Položme si otázku, či je možné rozmiestniť n holubov do k klietok, pričom počet klietok je menší ako počet holubov tak, aby neexistovala klietka s viac holubmi. Bez veľkej matematiky vieme odpovedať, že to nie je možné. Prečo? No, ak by to bolo možné, tak v každej klietke by bol najviac ak jeden holub. Potom ale, keďže holubov je viac ako klietok, po obsadení všetkých klietok by nám ešte ostal aspoň jeden neumiestnený holub. Zhrňme to do nasledovnej formulácie.

Dirichletov princíp - 1. verzia

Ak n je počet holubov a k je počet klietok, pričom $k < n$, tak po rozmiestnení všetkých holubov do klietok aspoň v jednej klietke sú aspoň dva holuby.

Poznamenajme, že tento princíp nehovorí nič o tom, ako nájsť klietku, v ktorej je viac holubov. Iba zabezpečuje existenciu takejto klietky. Takto voľne formulovaný princíp je jednoduchý na pochopenie. Jeho nasledujúca formulácia je matematicky oveľa serióznejšia.

Dirichletov princíp - 2. verzia

Ak f je funkcia z konečnej množiny X do konečnej množiny Y a $|X| > |Y|$, tak pre nejaké $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) = f(x_2)$.

Táto verzia odpovedá 1. verzii Dirichletovho princípu, ak X je množina holubov a Y je množina klietok a funkcia f každému holubovi priradí klietku, do ktorej je umiestnený. To znamená, že funkcia f aspoň dvom rôznym holubom $x_1, x_2 \in X$, priradí tú istú funkčnú hodnotu, teda klietku, z množiny Y.

***Príklad* 3.15** Majme 20 navzájom rôzne prepojených procesorov. Ukážte, že aspoň dva procesory sú spojené s rovnakým počtom iných.

Riešenie. Označme procesory číslami $1, 2, 3, \ldots, 20$. Nech a_i je počet procesorov, s ktorými je i-tý procesor spojený. Ukážeme, že pre nejaké $i \neq j$ je $a_i = a_j$, čo znamená, že i-tý aj j-tý procesor sú spojené s rovnakým počtom iných. Nech $X = \{1, 2, \ldots, 20\}$ je množina procesorov a nech Y je množina čísel predstavujúcich počty možných susedov pre jeden procesor. Zrejme $Y = \{0, 1, 2, \ldots, 19\}$, pretože najmenší počet pripojených procesorov k nejakému konkrétnemu je 0 a najväčší predstavujú všetky ostatné a tých je 19. Funkcia f nech zobrazuje prvky z X na prvky z Y. Pri prvom pohľade sa zdá, že Dirichletov princíp je nepoužiteľný, pretože $|X| = |Y|$.

Pozrime sa na problém podrobnejšie. Ak existuje procesor, ktorý nie je spojený so žiadnym iným, tak hociktorý iný môže byť spojený najviac ak s 18 ostatnými a $Y = \{0, 1, 2, \ldots, 18\}$. Naopak, ak taký procesor neexistuje, tak $Y = \{1, 2, \ldots, 19\}$.

To znamená že $|X| = 20 < 19 = |Y|$. Keďže $a_i = f(i)$ a $a_j = f(j)$, podľa 2. verzie Dirichletovho princípu teda existujú $i, j \in X,\ i \neq j$ také, že $a_i = a_j$ a teda i-tý aj j-tý procesor sú spojené s rovnakým počtom iných.

Dirichletov princíp - 3. verzia

Veta 3.10 *Nech f je funkcia z konečnej množiny X do konečnej množiny Y. Nech $|X| = n$ a nech $|Y| = m$. Nech $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$. Potom existuje aspoň k hodnôt $a_1, a_2, \ldots, a_k \in X$ takých, že*

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_k)\,.$$

Dôkaz. Dôkaz vykonáme sporom. Nech $Y = \{y_1, y_1, \ldots, y_m\}$. Predpokladajme, že tvrdenie vety nie je pravdivé. V takom prípade pre každé $i = 1, 2, \ldots, m$ existuje najviac ak $k-1$ prvkov $x \in X$ takých, že $f(x) = y_i$. To ale znamená, že definičný obor hodnôt funkcie f obsahuje najviac ak $m(k-1)$ hodnôt, teda že $|X| < m(k-1)$.

Z predpokladu $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$ vyplýva, že $k - 1 < \frac{n}{m}$. Potom

$$m(k-1) < m\frac{n}{m} = n\,,$$

čo je v spore s tým, že $|X| = n$. Pravdivé je teda tvrdenie, že existuje aspoň k hodnôt $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takých, že

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_k)\,.$$

□

Použitie Dirichletovho princípu na riešenie úloh často nie je priamočiare, ale úlohu je potrebné matematicky spracovať a upraviť formuláciu do vhodného tvaru tak, aby nasadenie princípu bolo možné.

***Príklad* 3.16** Ukážte, že ak sa stretne šesť ľudí, tak tam buď bude trojica, v ktorej sa navzájom všetci poznajú, alebo tam bude trojica taká, že žiadni dvaja z nej sa nepoznajú.

Riešenie. Nech $P_1, P_2, \ldots, P_6$ je šestica, o ktorú sa zaujímame. Pre každú z dvojíc

$$\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_1, P_4\}, \{P_1, P_5\}, \{P_1, P_6\}$$

je pravdivá jedna z odpovedí *poznajú sa*, resp. *nepoznajú sa*. Nech X je množina uvažovaných piatich dvojíc $\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_1, P_4\}, \{P_1, P_5\}, \{P_1, P_6\}$ a nech $Y = \{A, N\}$, pričom A znamená odpoveď *poznajú sa* a N znamená odpoveď *nepoznajú sa*. Nech f je funkcia z X do Y. Potom podľa vety 3.10 aspoň $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ dvojiciam z množiny X je priradená rovnaká hodnota z množiny Y, teda rovnaká odpoveď.

Uvažujme, že rovnaká odpoveď je priradená trom dvojiciam

$$\{P_1, P_i\}, \{P_1, P_j\}, \{P_1, P_k\}\,.$$

Mech je to odpoveď *poznajú sa.* Ak sa pozná aspoň jedna z dvojíc

$$\{P_i, P_j\}, \{P_i, P_k\}, \{P_j, P_k\}\,,$$

tak táto dvojica spolu s P_1 tvorí trojicu, v ktorej sa všetci navzájom poznajú. V opačnom prípade máme trojicu P_i, P_j, P_k, v ktorej sa žiadna dvojica nepozná. Podobne postupujeme, ak odpoveď pre všetky tri dvojice

$$\{P_1, P_i\}, \{P_1, P_j\}, \{P_1, P_k\}\,.$$

je *nepoznajú sa.*

3.7 Úlohy

1.1. Nech $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Vytvorte
 a) všetky permutácie prvkov tejto množiny,
 b) všetky permutácie týchto prvkov, ktoré končia číslom 3,
 c) všetky permutácie čísel množiny, v ktorých čísla 2 a 3 sú spolu v tomto poradí,
 d) všetky permutácie čísel množiny, v ktorých čísla 2 a 3 sú vedľa seba.

1.2. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 12, ktoré
 a) obsahujú práve jednu jedničku,
 b) obsahujú aspoň jednu jedničku,
 c) obsahujú práve tri jedničky,
 d) obsahujú najviac tri jedničky,
 e) obsahujú aspoň tri jedničky,
 f) obsahujú rovnaký počet jedničiek a núl?

1.3. Koľko existuje permutácií z písmen A, B, C, D, E, F, ktoré
 a) obsahujú konfiguráciu CDE,
 b) obsahujú konfiguráciu BECF,
 c) obsahujú konfigurácie BA a CE,
 d) neobsahujú konfiguráciu DE?

1.4. Anglická abeceda má 21 spoluhlások a 5 samohlások. Koľko reťazcov dĺžky 6 môžeme zostrojiť nad touto abecedou tak, aby
 a) obsahovali práve jednu samohlásku,
 b) obsahovali práve tri samohlásky,
 c) neobsahovali viac ako jednu samohlásku,
 d) obsahovali maximálne tri samohlásky?

1.5. Koľko rôznych postupnosti pozostávajúcich z piatich znakov je možné vytvoriť z množiny troch znakov, ak sa znaky môžu opakovať?

1.6. Koľko je možných rôznych výberov piatich prvkov do postupnosti, ak vyberáme z päťprvkovej množiny a prvky sa môžu opakovať?

1.7. Koľko existuje reťazcov pozostávajúcich zo šiestich rôznych písmen?

1.8. Koľko existuje 8-bitových reťazcov, ktoré
a) začínajú konfiguráciou $1100\ldots$,
b) začínajú jedničkou,
c) na druhej alebo štvrtej pozícií majú jedničku,
d) na druhej aj štvrtej pozícií majú jedničku,
e) obsahujú práve jednu jedničku,
f) obsahujú práve dve jedničky,
g) obsahujú aspoň jednu jedničku?

1.9. Koľko členov má rozvoj výrazu

$$(x+y)(a+b+c)(e+f+g)(h+i)\,?$$

1.10. Určte koeficient člena $x^4y^2z^5$ z rozvoja $(x+y+z)^{11}$.

1.11. Koľko existuje rôznych výberov piatich kariet zo sady 52 kariet (4 farby po 13 kariet), ak požadujeme, aby vo výbere boli karty práva dvoch farieb?

1.12. Koľko existuje rôznych výberov pätice po sebe idúcich kariet tej istej farby, ak vyberáme zo sady 52 kariet a požadujeme, aby
a) eso mohlo byť umiestnené iba za kráľom, nie pred dvojkou,
b) eso mohlo byť umiestnené tak pred dvojkou, ako aj za kráľom, ale nie medzi nimi,
c) eso mohlo byť umiestnené aj medzi dvojkou a kráľom (t.j. vyhovuje ktorákoľvek pätica po sebe idúcich kariet bez "roztrhnutia")?

1.13. Koľko existuje možností pre zoskupenie $2n$ ľudí do n dvojíc?

1.14. Pomocou binomickej vety ukážte, že

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\, C(n,k) = 3^n\,.$$

1.15. Dokážte platnosť identity

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}\,.$$

1.16. Dokážte platnosť identity

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

1.17 Pomocou binomickej vety rozviňte výraz $(2c-3d)^5$.

1.18 Určte koeficienty pri nasledujúcich členoch v príslušných rozvojoch:
a) x^7y^4 pre rozvoj $(x+y)^{11}$,
b) x^6y^6 pre rozvoj $(2x-y)^{12}$,
c) $x^2y^3z^5$ pre rozvoj $(x+y+z)^{10}$,
d) a^3x^4 pre rozvoj $(a+\sqrt{ax}+x)^2(a+x)^5$.

1.19 Ku riadku

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

napíšte nasledujúci riadok Pascalovho trojuholníka.

1.20 Pomocou binomickej vety dokážte platnosť rovnosti

$$0 = \sum_{k-0}^{n}(-1)^k C(n,k)\,.$$

1.21 Zdôvodnite platnosť rovnosti

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}.$$

1.22 Ukážte, že ak z 10 párov topánok náhodne zvolíme 11, tak medzi vybranými topánkami je aspoň jedna dvojica, ktorá tvorí pôvodný pár topánok.

1.23 Je možné pospájať päť procesorov tak, že práve dva procesory sú spojené s rovnakým počtom iných? Zdôvodnite svoje rozhodnutie.

1.24 Obdĺžník je rozdelený na 21 štvorčekov tak, že tvorí 3 riadky a v každom riadku je 7 štvorčekov. Každý z 21 štvorčekov je zafarbený buď bielou alebo čiernou farbou. Ukážte, že nech farbíme štvorčeky akokoľvek, vždy existuje netriviálny štvorec, ktorého 4 rohové štvorčeky majú tú istu farbu. Netriviálny štvorec má rozmer aspoň 2×2.

1.25 Pri inventúre v sklade sa zaradom kontroluje 80 položiek a pri každej sú možné dva zápisy: "je na sklade", resp. "nie je na sklade". Ukážte, že ak 45 z kontrolovaných položiek je v sklade, tak pozície aspoň dvoch odpovedí "je na sklade"sú vo vzdialenosti 9. Napríklad na 13. a 22. pozícii je odpoveď "je na sklade".

1.26 Nech d je kladné celé číslo. Ukážte, že v množine ľubovoľných $d+1$ celých kladných čísel existuje dvojica takých, ktoré pri delení čislom d dávajú rovnaký zvyšok.

1.27 Nech n je kladné celé číslo. Ukážte, že v ľubovoľnej množine n po sebe nasledujúcich kladných celých čísel je presne jedno číslo deliteľné číslom n.

1.28 Ukážte, že ak 101 osôb rôznej výšky je zoradených do radu, tak v tom rade je možné nájsť buď 11 po sebe nasledujúcich osôb so vzrastajúcou výškou, alebo 11 po sebe nasledujúcich osôb s klesajúcou výškou.

Kapitola 4

Inklúzia a exklúzia

4.1 Mohutnosť zjednotenia množín

Ak konečné množiny sú disjunktné a poznáme počty prvkov v jednotlivých množinách, tak odpovedať na otázku koľko prvkov je v zjednotení tých množín je ľahké. Jednoducho spočítame počty prvkov v týchto množinách. Platí teda

$$|A \cup B| = |A| + |B|\,.$$

Oveľa zložitejšie je na takto postavenú otázku odpovedať, ak príslušné množiny majú neprázdne prieniky.

Príklad **4.1** Koľko je celých čísel od 1 do 90 vrátane jedničky a deväťdesiatky, ktoré sú deliteľné číslom štyri alebo číslom päť?

Riešenie. Vzhľadom na to, že množina všetkých čísel, o ktorých máme rozhodovať, nie je veľmi početná, má 90 prvkov, môžeme o každom čísle rozhodnúť, či vyhovuje našej požiadavke, alebo nie. Tento postup však nie je možný pri veľmi početných množinách. Vyriešime teda príklad všeobecne tak, ako by sme postupovali aj pri väčších množinách.

Nech A je množina všetkých čísel od 1 do 90, ktoré sú deliteľné číslom štyri. Podobne nech B je množina tých čísel od 1 do 90, ktoré sú deliteľné číslom päť. Je zrejmé, že potom $A \cup B$ je množina tých čísel od 1 do 90, ktoré sú deliteľné číslom štyri alebo číslom päť. Zaujíma nás teda počet prvkov množiny $A \cup B$. Pre počty prvkov v množinách A a B platí

$$|A| = \left\lfloor \frac{90}{4} \right\rfloor = 22 \qquad \text{a} \qquad |\mathrm{B}| = \left\lfloor \frac{90}{5} \right\rfloor = 18\,,$$

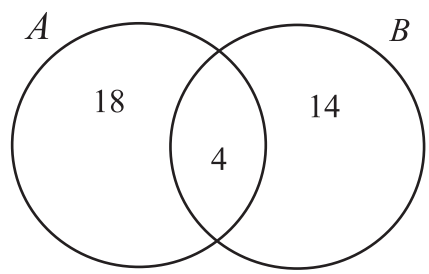
pričom symbol $\lfloor x \rfloor$ predstavuje najväčšie celé číslo nie väčšie ako číslo x. Je to *celá časť* z čísla x. V množine celých čísel od 1 do 90 sú však aj čísla, ktoré sú deliteľné štvorkou aj päťkou. Tie sú v tomto prípade číslami množiny $A \cap B$ a platí

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{90}{4 \cdot 5} \right\rfloor = 4\,.$$

Ak teda sčítame počty čísel v A a v B, tak sme čísla patriace do A aj do B započítali dvakrát. Pre počet prvkov množiny $A \cup B$ teda dostávame

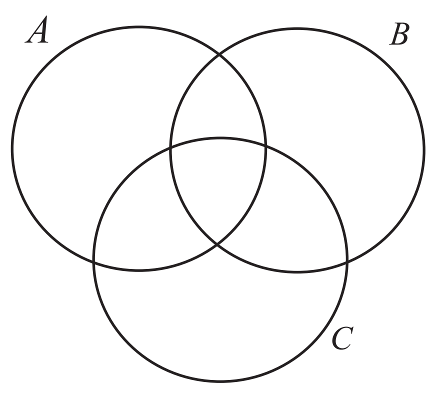
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 22 + 18 - 4 = 36\,.$$

Schématicky túto situáciu znázorňuje obrázok 2.1.



Obr. 2.1

Vo všeobecnosti sa zaujímame o to, koľko je prvkov v zjednotení konečného počtu množín. Metóda, ktorou sa to rieši sa nazýva **princíp inklúzie a exklúzie**. Predtým, ako sformulujeme jeho všeobecný tvar, uvažujme situáciu pre tri množiny A, B a C. Všeobecnú situáciu pre vzťah týchto množín znázorňuje Vennov diagram na obrázku 2.2.



Obr. 2.2

Ak sme spočítali mohutnosti jednotlivých množín, tak sme prvky z prieniku množín A a B započítali dvakrát. To isté platí pre prvky patriace do $A \cap C$ a tiež pre prvky v $B \cap C$. Je zrejmé, že ak chceme každý prvok z množiny $A \cup B \cup C$ započítať iba raz, tak počty prvkov z prienikov $A \cap B$, $A \cap C$ a $B \cap C$ musíme od čísla $|A| + |B| + |C|$

odčítať. Teraz si však môžeme všimnúť, že prvky z prieniku všetkých troch množín sme započítali trikrát do $|A|+|B|+|C|$, ale aj odpočítali trikrát v prienikoch dvojíc. To znamená, že prvky z $A \cap B \cap C$ je nutné ešte raz pripočítať. Takto započítame každý prvok zjednotenia množín $A \cup B \cup C$ práve raz. Dostávame

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \,.$$

Veta 4.1 *Nech A_1, A_2, ..., A_n sú konečné množiny. Potom*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \,.$$

Dôkaz. Ukážeme, že každý prvok zjednotenia množín $A_1, A_2, \dots, A_n$ je na pravej strane rovnosti započítaný práve raz.

Uvažujme prvok a z množiny $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Nech a je prvkom práve r z množín $A_1, A_2, \dots, A_n$, $1 \le r \le n$. Ten prvok je v čísle $|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i|$ započítaný práve r krát, pričom $r = C(r, 1)$. V prieniku $A_i \cap A_j$ je prvok a započítaný, iba ak je prvkom oboch množín A_i aj A_j. Počet takých prienikov dvojíc množín je rovný počtu dvojíc, ktoré môžeme vytvoriť z tých r množín, v ktorých sa nachádza prvok a. Takých dvojíc je $C(r, 2)$, a teda v $\sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$ je prvok a započítaný práve $C(r, 2)$ krát. Podobne vo všetkých prienikoch m množín obsahujúcich prvok a $(m \le r)$ je prvok a započítaný presne $C(r, m)$ krát.

To znamená, že na pravej strane rovnosti je prvok a započítaný presne

$$C(r,1) - C(r,2) + C(r,3) - \cdots + (-1)^{r+1} C(r,r)$$

krát. Teraz stačí ukázať, že toto číslo je rovné jedničke. Z binomickej vety vieme, že platí rovnosť

$$0 = (1 + (-1))^r = \sum_{k=0}^{r} C(r,k) 1^{r-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C(r,k) \,,$$

t.j.

$$0 = C(r,0) - C(r,1) + C(r,2) - \cdots + (-1)^r C(r,r) \,.$$

Vzhľadom na to, že $C(r, 0) = 1$, dostávame

$$C(r,1) - C(r,2) + C(r,3) - \cdots + (-1)^{r+1} C(r,r) = 1$$

a dôkaz je ukončený. □

4.2 Použitie princípu inklúzie a exklúzie

Princíp inklúzie a exklúzie je použiteľný pri riešení mnohých úloh, hoci na prvý pohľad nevyzerajú, že by sa jednalo o počet prvkov v zjednoteni nejakých množín. Napríklad pri určení počtu prvočísel menších ako nejaké zvolené celé číslo. Skôr ako si uvedieme niekoľko vybraných úloh, pri riešení ktorých je vhodné použiť princíp inklúzie a exklúzie, uvedieme formuláciu tohto princípu v inom, často užitočnejšom, tvare.

4.2.1 Alternatívny tvar princípu inklúzie a exklúzie

Tvar princípu inklúzie a exklúzie, ktorý teraz sformulujeme, je používaný v úlohách, v ktorých nás zaujíma počet prvkov, ktoré nemajú žiadnu z nejakej skupiny vymenovaných vlastností.

Uvažujme n vlastností $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Nech pre $i = 1, 2, \ldots, n$ je A_i podmnožina množiny A obsahujúca iba tie prvky z A, ktoré majú vlastnosť P_i. Nech $N(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_k})$ je počet takých prvkov, ktoré majú všetky z vlastností P_{i_1}, P_{i_2}, $\ldots$, P_{i_k}. To znamená, že

$$N(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_k}) = |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \,.$$

Symbolom N označme počet všetkých uvažovaných prvkov, t.j. $N = |A|$. Počet takých prvkov z množiny A, ktoré nemajú ani jednu z vlastností $P_1, P_2, \ldots, P_n$ označme symbolom $N(P_1' P_2' \ldots P_n')$. Potom zrejme platí

$$N(P_1' P_2' \ldots P_n') = N - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \,.$$

Ak teraz počet prvkov v množine $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ vyjadrime pomocou princípu inklúzie a exklúzie, dostávame, že

$$N(P_1' P_2' \ldots P_n') = N - \sum_{1 \le i \le n} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j)$$
$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(P_i P_j P_k) + \ldots + (-1)^n N(P_1 P_2 \ldots P_n) \,.$$

Nasledujúce príklady predstavuje typickú situáciu, kedy je vhodné pri riešeni použiť alternatívny tvar princípu inklúzie a exklúzie. Najprv uvedieme príklad, spôsob riešenia ktorého využijeme v príklade po ňom.

***Príklad* 4.2** Koľko existuje rôznych riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29 \,,$$

ak
a) každé x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, je nezáporné celé číslo,
b) každé x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, je celé číslo a naviac $x_1 > 0$, $x_2 > 1$, $x_3 > 2$ a $x_4 \ge 0$.

Riešenie. Riešenie prípadu a) je podobné ako riešenie príkladu 3.11. To znamená, že predpokladáme výber 29 jedničiek a tri oddeľovače. Ak berieme do úvahy formuláciu vety 3.6, tak môžeme povedať, že vyberáme 29 prvkov z množiny $\{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$, pričom každý prvok 1_i predstavuje jedničku. Potom x_i je číslo rovné počtu vybraných jedničiek typu 1_i. Na základe tvrdenia vety 3.6 potom počet všetkých riešení úlohy pre prípad a) je

$$C(29+4-1, 4-1) = C(32,3) = 4960\,.$$

Riešenie úlohy po b) je trochu komplikovanejšie. Vo výbere prvkov z množiny $\{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$ musí byť aspoň jeden prvok 1_1, aspoň dva prvky 1_2 a aspoň tri prvky 1_3. To znamená, že šesť prvkov do počtu 29 je už jasných a ľubovoľne zo štvorprvkovej množiny $\{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$ vyberáme už iba 23 prvkov. Veta 3.6 vraví, že počet takých výberov je

$$C(23+4-1, 4-1) = C(26,3) = 2600\,.$$

To znamená, že aj počet riešení rovnice zo zadania pre prípad b) je $C(26,3) = 2600$.

***Príklad* 4.3** Koľko existuje rôznych riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21\,,$$

ak každé x_i, $i = 1,2,3,4,5$, je nezáporné celé číslo a naviac $x_1 \leq 9$, $x_2 \leq 12$, $x_3 \leq 10$ a $x_5 \leq 11$.

Riešenie. Podobne ako v príklade 4.2 máme obmedzenia pre hodnoty x_i, avšak tentokrát sú prípustné hodnoty riešení ohraničené zhora. Preto nie je možné jednoducho zopakovať postup z príkladu 4.2. Čo však je možné riešiť podobne, sú opačné nerovnosti pre hodnoty x_i, než sú určené v zadani príkladu. Toto budeme formulovať pomocou vlastností, ktoré naše neznáme x_i majú mať.

Nech vlastnosť P_1 znamená, že číslo x_1 je aspoň 10, t.j, $x_1 \geq 10$. Podobne nech vlastnosť P_2 znamená, že $x_2 \geq 13$, P_3 znamená, že $x_3 \geq 11$ a nakoniec vlastnosť P_4 žiada $x_4 \geq 12$. Podľa alternatívneho tvaru princípu inklúzie a exklúzie je počet riešení našej rovnice s podmienkami $x_1 \leq 9$, $x_2 \leq 12$, $x_3 \leq 10$ a $x_5 \leq 11$ rovný číslu

$$N(P_1'P_2'P_3'P_4') = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4) + N(P_1P_2) + N(P_1P_3)$$
$$+N(P_1P_4) + N(P_2P_3) + N(P_2P_4) + N(P_3P_4) - N(P_1P_2P_3) - N(P_1P_2P_4)$$
$$-N(P_1P_3P_4) - N(P_2P_3P_4) + N(P_1P_2P_3P_4)\,.$$

Na výpočet čísel potrebných na pravej strane tejto rovnosti použijeme rovnaký postup ako v príklade 4.2 po b).

- N je počet všetkých riešení bez podmienok pre jednotlivé x_i, teda $N = C(21+5-1, 5-1) = C(24, 4) = 25\,300$.
- $N(P_1)$ je počet riešení s podmienkou $x_1 \geq 10$, čo znamená, že $N(P_1) = C(11+5-1, 5-1) = C(15, 4) = 2\,730$.
- $N(P_2)$ je počet riešení s podmienkou $x_2 \geq 13$, a preto dostávame $N(P_2) = C(8+5-1, 5-1) = C(12, 4) = 990$.
- $N(P_3)$ je počet riešení s podmienkou $x_3 \geq 11$, čo znamená, že $N(P_3) = C(10+5-1, 5-1) = C(14, 4) = 2\,002$.
- $N(P_4)$ je počet riešení s podmienkou $x_5 \geq 12$ a $N(P_4) = C(9+5-1, 5-1) = C(13, 4) = 1\,430$.
- $N(P_1P_2)$ je počet riešení s podmienkami $x_1 \geq 10$ a $x_2 \geq 13$, teda $N(P_1P_2) = C(-2+5-1, 5-1) = C(2, 4) = 0$.
- $N(P_1P_3)$ je počet riešení s podmienkami $x_1 \geq 10$ a $x_3 \geq 11$, teda $N(P_1P_3) = C(0+5-1, 5-1) = C(4, 4) = 1$.
- $N(P_1P_4)$ je počet riešení s podmienkami $x_1 \geq 10$ a $x_4 \geq 12$, teda $N(P_1P_4) = C(-1+5-1, 5-1) = C(3, 4) = 0$.

Ak si uvedomíme, že okrem podmienok $x_1 \geq 10$ a $x_3 \geq 11$, všetky ostatné dvojice, tretice aj štvorice podmienok v súčte prevyšujú hodnotu 21, čo je pravá strana našej rovnice, tak je z predchádzajúceho postupu jasné, že $N(P_2P_3) = N(P_2P_4) = N(P_3P_4) = 0$ a tiež $N(P_iP_jP_k) = 0$ pre všetky $1 \leq i < j < k \leq 4$. Samozrejme aj $N(P_1P_2P_3P_4) = 0$.

Dosadením príslušných čísel teda dostávame

$$N(P_1'P_2'P_3'P_4') = 25\,300 - 2\,730 - 990 - 2\,002 - 1\,430 + 0 + 1 + 0 + \cdots + 0 = 18\,143\,.$$

Počet prvočísel do určitej hodnoty.

V tomto odseku ukážeme, ako sa dá princíp inklúzie a exklúzie v modifikovanom tvare vhodne využiť pri určovaní počtu prvočísel, ktoré neprekročia určitú dopredu zvolenú hodnotu. Ako je známe, prvočíslo je kladné celé číslo, ktoré má práve štyroch celočíselných deliteľov. Tak napríklad číslo 7 je prvočíslo, lebo je bez zvyšku deliteľné iba číslami 1, -1, 7 a -7. Číslo 1 nie je prvočíslom, pretože bez zvyšku ho delia iba dve čísla a to 1 a -1. Číslo 2 je najmenším prvočíslom a je zároveň aj jediným párnym prvočíslom. Kladné celé číslo väčšie ako 1 je zloženým číslom, ak nie je prvočíslom. Dá sa vyjadriť ako súčin prvočísel. To znamená, že zložené číslo je deliteľné nejakým prvočíslom, ktoré nie je väčšie ako hodnota jeho druhej odmocniny. V opačnom prípade by totiž toto zložené číslo bolo súčinom prvočísel z ktorých súčin každej dvojice by bol väčší, ako uvažované zložené číslo.

***Príklad* 4.4** Koľko je prvočísel nie väčších ako 100?

Riešenie. Z predchádzajúceho odseku je zrejmé, že zložené číslo menšie alebo rovné 100 musí mať prvočíselného deliteľa, ktorého hodnota neprekročí 10, t.j. musí byť deliteľné niektorým z čísel 2, 3, 5 a 7. Nech vlastnosť P_1 znamená, že celé kladné číslo je deliteľné jedničkou, P_2 znamená, že je deliteľné dvojkou, P_3 nech znamená, že je deliteľné číslom 5 a konečne vlastnosť P_4 nech znamená, že zložené číslo je deliteľné číslom 7. Potom

$$N(P_1'P_2'P_3'P_4')$$

je počet takých čísel od 1 do 100, ktoré nie sú deliteľné ani jedným z čísel 2, 3, 5 a 7. Sú to teda všetky prvočísla v intervale od 10 do 100 a číslo 1. Vzhľadom na to, že číslo 1 nie je prvočíslom, tak ho nechceme zarátať. Preto uvažujeme iba čísla v intervale od 2 do 100 a celkový počet nami uvažovaných čísel je $N = 99$. Prvočísla v intervale od 2 do 9 tam zarátané nie sú, pretože každé z nich delí seba. To znamená, že počet prvočísel od 2 do 100 je

$$4 + N(P_1'P_2'P_3'P_4')\,.$$

Potom podľa modifikovaného princípu inklúzie a exklúzie máme

$$\begin{gathered}
N(P_1'P_2'P_3'P_4') = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4) + N(P_1P_2) + N(P_1P_3) \\
+N(P_1P_4) + N(P_2P_3) + N(P_2P_4) + N(P_3P_4) - N(P_1P_2P_3) - N(P_1P_2P_4) \\
-N(P_1P_3P_4) - N(P_2P_3P_4) + N(P_1P_2P_3P_4) \\
= 99 - \left\lfloor\frac{100}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{100}{7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{2\cdot 3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{2\cdot 5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{2\cdot 7}\right\rfloor \\
+\left\lfloor\frac{100}{3\cdot 5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{3\cdot 7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{5\cdot 7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{100}{2\cdot 3\cdot 5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{2\cdot 3\cdot 7}\right\rfloor \\
+\left\lfloor\frac{100}{2\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{3\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{100}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor
\end{gathered}$$

$$= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 4 - 2 - 1 - 0 + 0 = 21\,.$$

Dostávame, že počet všetkých prvočísel neprevyšujúcich hodnotu 100 je

$$4 + N(P_1'P_2'P_4'P_4') = 4 + 21 = 25\,.$$

Počet surjektívnych zobrazení.

Zobrazenie f množiny A do množiny B je predpis, ktorý každému prvku množiny A priradí práve jeden prvok z množiny B. Zapisujeme to symbolom $f:\ A \to B$.

Zobrazenie $f:\ A \to B$ je *injektívne*, ak dva rôzne prvky množiny A sa vždy zobrazia na rôzne prvky množiny B, t.j.

$$\forall x_1, x_2 \in A:\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\,.$$

Zobrazenie $f:\ A \to B$ je *surjektívne*, ak každý prvok množiny B je obrazom nejakého prvku množiny A, t.j.

$$\forall y \in B, \exists x \in A:\ y = f(x)\,.$$

Zobrazenie je *bijektívne*, ak je injektívne aj surjektívne zároveň.

Uvažujme situáciu, že trom deťom chceme rozdeliť šesť rôznych koláčikov tak, aby každé dieťa dostalo aspoň jeden koláčik. Zaujíma nás, koľko je takých rôznych možností rozdelenia koláčikov deťom. Ak si prideľovanie koláčikov deťom predstavíme ako zobrazenie množiny $A = \{k_1, k_2, \ldots, k_6\}$ obsahujúcej šesť kolačíkov do množiny $B = \{d_1, d_2, d_3\}$ troch detí, tak požiadavka, aby každé dieťa dostalo aspoň jeden koláčik, je vlastne požiadavkou surjektívnosti tohto zobrazenia. Úlohu môžeme riešiť pomocou modifikovaného princípu inklúzie a exklúzie.

Nech P_1, P_2 a P_3 sú vlastnosti, ktoré odpovedajúco znamenajú, že dieťa d_1, d_2 a d_3 nedostane koláčik. V reči zobrazenia teda vlastnosť P_i, $i = 1, 2, 3$, predstavuje situáciu, keď na prvok d_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, z množiny B sa nezobrazí ani jeden prvok k_t, $t \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, z množiny A. Preto je potrebné vypočítať počet $N(P_1'P_2'P_3')$ tých možností, kedy nenastane žiadna z vlastností P_i, čo znamená, že ani jedno dieťa nezostane bez koláčika. Do vzťahu pre modifikovaný princíp inklúzie a exklúzie je potrebné dosadiť nasledújúce hodnoty.

N predstavuje počet všetkých rôznych zobrazení zo 6-prvkovej množiny A do 3-prvkovej množiny B, ak nekladieme žiadne obmedzenie. Zostrojenie takého zobrazenia môžeme vykonať v šiestich po sebe nasledujúcich krokoch tak, že v každom kroku sa o prvku z A rozhodujeme, na ktorý z troch prvokov z B sa zobrazí. V každom kroku teda máme tri možnosti a podľa princípu násobenia dostávame

$$N = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6\,.$$

$N(P_i)$ je počet takých zobrazení množiny A do B, že na i-tý prvok d_i z B sa nezobrazí žiadny prvok z A. To znamená, že na priradenie obrazu pre každý prvok $k_t \in A$ pripadajú dve možnosti a platí

$$N(P_i) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6\,.$$

Zároveň existuje $C(3,1)$ možností voľby prvku d_i, na ktorý sa nič nezobrazí.

Podobne $N(P_iP_j) = 1^6$, pričom možných volieb indexov i a j je $C(3,2)$. Nakoniec $N(P_1P_2P_3) = 0$, pretože také zobrazenie neexistuje. Dostávame

$$N(P_1'P_2'P_3') = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3)$$

$$+N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_2P_3) - N(P_1P_2P_3)$$

$$= 3^6 - C(3,1) \cdot 2^6 + C(3,2) \cdot 1^6 - 0$$

$$= 729 - 3 \cdot 64 + 3 \cdot 1 = 540\,.$$

Predchádzajúcu úvahu zhrnieme v nasledujúcej všeobecnej vete.

Veta 4.2 *Nech m, n sú prirodzené čísla, $m \geq n$. Potom existuje*

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m$$

rôznych surjektívnych zobrazení m-prvkovej množiny na n-prvkovú množinu.

Subfaktoriál.

Dve permutácie z n prvkov sú rôzne, ak existuje prvok, ktorý nie je v oboch na tej istej pozícii. Princíp inklúzie a exklúzie umožňuje vyjadriť aj počet špeciálnych permutácií, teda takých, v ktorých pre každý prvok platí, že nie je na dopredu určenej pozícii, pričom pre každý prvok je táto dopredu určená pozícia iná.

Uvažujme nasledujúci príklad.

***Príklad* 4.5** V šatni na n vešiačikoch je zavesených n klobúkov. Ak celý vešiak padne, tak nešťastná šatnárka ho zdvihne a klobúky zavesí na vešiačiky náhodne tak, že opäť na každom vešiačiku je práve jeden klobúk. Aká je pravdepodobnosť toho, že ani jeden hosť nedostane svoj klobúk?

Riešenie. Táto pravdepodobnosť je rovná podielu všetkých vyhovujúcich prípadov a všetkých možných. Počet všetkých prípadov je jasný. Je to počet všetkých permutácií z n prvkov, teda $n!$. Počet vyhovujúcich prípadov je v našom príklade rovný počtu takých rozmiestnení klobúkov po zdvihnutí vešiaka, že ani jeden klobúk nebude na pôvodnom vešiačiku. Je to teda počet takých permutácií z n prvkov, že ani jeden prvok nebude na svojej pôvodnej pozícii vzhľadom na štartovaciu permutáciu.

Majme konkrétnu permutáciu n prvkov. Označme symbolom D_n počet takých permutácií z tých n prvkov, že žiadny prvok nezopakuje svoje umiestnenie z pôvodnej permutácie. Potom riešenie nášho príkladu je

$$P = \frac{D_n}{n!}\ .$$

Hodnota čísla D_n je stanovená v nasledujúcej vete. Je to počet **subfaktoriálov** z n prvkov.

Veta 4.3 *Nech $n \in \mathbb{N}$, potom počet subfaktoriálov z n prvkov je*

$$D_n = n!\left\{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right\}.$$

Dôkaz. Nech P_i je vlastnosť, že v novej permutácií zostane i-tý prvok dopredu zvolenej permutácie na svojom pôvodnom mieste. Potom

$$D_n = N(P_1' P_2' \dots P_n').$$

Podľa alternatívneho tvaru princípu inklúzie a exklúzie teda dostávame

$$D_n = N - \sum_{1 \le i \le n} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j)$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(P_i P_j P_k) + \dots + (-1)^n N(P_1 P_2 \dots P_n).$$

Ostáva vyčísliť jednotlivé symboly použité v zápise. Jasné, že počet všetkých možností bez obmedzenia je rovný počtu permutácií z n prvkov. Počet takých možností, že nejaký prvok ostane na svojej pôvodnej pozícii, je rovný počtu permutácií z ostatných $n-1$ prvkov. Je pritom jedno, o ktorom prvku uvažujeme. Podobne je to, ak žiadame, aby dva prvky boli umiestnené na pôvodných pozáciách, atď. Platí teda

$N = n!$
$N(P_i) = (n-1)!$
$N(P_i P_j) = (n-2)!$
$N(P_i P_j P_k) = (n-3)!$
$\vdots$
$N(P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_m}) = (n-m)!$
$\vdots$

Zároveň vieme, že existuje $C(n,m)$ spôsobov voľby m prvkov z n, $m \le n$. Takže

$\sum\limits_{1 \le i \le n} N(P_i) = C(n,1)(n-1)!$
$\sum\limits_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j) = C(n,2)(n-2)!$
$\vdots$
$\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 \dots i_m \le n} N(P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_m}) = C(n,m)(n-m)!$
$\vdots$

Dostávame teda

$$D_n = n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \dots (-1)^n C(n,n)(n-n)!$$

$$= n! - \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!}(n-1)! + \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}(n-2)! - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n! \cdot 0!} 0!\,,$$

čo po úprave dáva

$$D_n = n! \Big\{ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \Big\}\,.$$

□

Ak sa ešte vrátime k príkladu 4.5 o klobúkoch, tak pravdepodobnosť, že každý z n hostí pôjde domov s cudzím klobúkom je

$$P = \frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\,.$$

4.3 Úlohy

2.1. Koľko prvkov je v zjednotení $A_1 \cup A_2$, ak A_1 obsahuje 12 prvkov, A_2 obsahuje 18 prvkov a platí
- a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$?
- b) $|A_1 \cap A_2| = 1$?
- c) $|A_1 \cap A_2| = 6$?
- d) $A_1 \subset A_2$?

2.2 Na fakulte je 345 študentov, ktorí majú zapísanú matematickú analýzu, 212 študentov, ktorí majú zapísanú diskrétnu matematiku a 188 študentov, ktorí majú zapísanú matematickú analýzu aj diskrétnu matematiku. Koľko je na fakulte takých študentov, ktorí majú zapísaný aspoň jeden z predmetov matematická analýza a diskrétna matematika?

2.3 Určte počet prvkov v zjednotení množín $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, ak v každej množine je 100 prvkov a ak
- a) množiny sú po dvojiciach disjunktné.
- b) každá dvojica množín má 50 spoločných prvkov, ale ani jeden prvok sa nenachádza vo všetkých troch.
- c) každá dvojica množín má 50 spoločných prvkov a 25 prvkov je takých, že sú vo všetkých troch množinách.
- d) množiny sú rovnaké.

2.4 Určte počet kladných celých čísel nie väčších ako 1 000, ktoré sú druhou alebo treťou mocninou nejakého celého kladného čísla.

2.5 Určte počet kladných celých čísel nie väčších ako 100, ktoré nie sú deliteľné sedmičkou alebo päťkou.

2.6 Koľko existuje permutácií z desiatich číslic, pre ktoré platí, že začínajú trojicou 987, alebo obsahujú dvojicu 45 na piatej a šiestej pozícii, alebo končia trojicou 123?

2.7 Koľko existuje rôznych riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, ak x_1, x_2 a x_3 sú nezáporné celé čísla menšie ako 6?

2.8 Určte počet rôznych riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$, ak každé x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, je nezáporné celé číslo, pričom $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$, $x_3 \leq 5$ a $x_4 \leq 8$.

2.9 Koľko je prvočísel menších ako 200?

2.10 Koľko subfaktoriálov existuje k permutácii $1, 2, 3, 4$?

Kapitola 5

Rekurentné vzťahy

5.1 Definícia a príklady rekurentných vzťahov

V problematike týkajúcej sa kombinatoriky a počítania rôznych možností majú rekurentné vzťahy nezastupiteľné miesto. Pomocou nich je možné vyjadriť n-tý člen nejakej postupnosti pomocou niektorých jeho predchodcov. Sú tiež prirodzeným prostriedkom na analýzu rekurentných algoritmov.

Skôr, ako uvedieme presnú definíciu, priblížme si problematiku na príklade, ktorý ako prvý uviedol stredoveký taliansky matematik Leonardo Pisansky, nazývaný tiež Fibinacci. Ten po svojom návrate z orientu v roku 1202 napísal známu knihu *Liber abaci*. V nej okrem uvedeného príkladu prvýkrát v Európe boli použité indo-arabské číslice, s ktorými dnes matematika pracuje. Postupnosť čísel $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots,$ ktorá je zadaná vzťahom odvodeným v nasledujúcom príklade, sa podľa Fibonacciho nazýva Fibonacciho postupnosť. V matematike sa vyskytuje v rôznych súvislostiach a má aj neočakávané aplikácie.

***Príklad* 5.1** Predstavme si, že na ostrov, na ktorom doteraz neboli žiadne králiky, vysadíme pár dospelých králikov. Tento zvláštny druh králikov sa vyznačuje tým, že každý pár má raz mesačne mláďatá, a to presne jeden párik, samčeka a samičku. Takýto mladý párik má prvé mláďatá po dvoch mesiacoch života a potom už pravidelne každý mesiac. Samozrejme tiež vždy jeden párik mláďat. Je potrebné rozhodnúť, koľko párov králikov bude na ostrove po jednom roku.

Riešenie. Úlohu budeme riešiť všeobecnejšie a riešenie uvedieme pomocou vzťahu, ktorý nám umožní určiť počet párov králikov na ostrove po n mesiacoch.

- Po 0 mesiacoch, t.j. na začiatku, je na ostrove 1 párik.

- Po 1 mesiaci sú na ostrove 2 páry králikov, pretože prinesená dvojica má čerstvé mláďatá.

- Po 2 mesiacoch sú na ostrove 3 páry králikov. Prinesená dvojica má opäť mláďatá, jednomesačný párik ešte nie.
- Po 3 mesiacoch sa situácia už viac komplikuje. Mláďatá má prinesený starý párik, ale aj prvý narodený párik, pretože už je vo veku 2 mesiace. Ak pripočítame aj jednomesačný párik, tak spolu je na ostrove už 5 párov králikov.

Takéto počítanie ďalej je už neúnosné, preto si situáciu zapíšeme formálne. Nech f_n je počet párov králikov po n mesiacoch. Ten počet pozostáva zo všetkých párov, ktoré tam boli aj pred mesiacom a tiež z nových párov čerstvo narodených. Takých je rovnaký počet, ako je počet králikov starých aspoň 2 mesiace, t.j. počet králikov na ostrove pred dvomi mesiacmi. Dostávame teda

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,.$$

Keďže $f_0 = 1$ a $f_1 = 2$, ľahko si z takejto formuly vieme vypočítať počet párov králikov na ostrove po $2, 3, 4, \ldots$ mesiacoch. Napríklad po pol roku, teda po šiestich mesiacoch na ostrove bude

$$f_6 = f_5 + f_4 = (f_4 + f_3) + (f_3 + f_2) = f_4 + 2f_3 + f_2 = (f_3 + f_2) + 2(f_2 + f_1) + (f_1 + f_0)$$

$$= f_3 + 3f_2 + 3f_1 + f_0 = (f_2 + f_1) + 3(f_1 + f_0) + 3f_1 + f_0$$

$$= f_2 + 7f_1 + 4f_0 = (f_1 + f_0) + 7f_1 + 4f_0 = 8f_1 + 5f_0 = 8 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 21$$

párov králikov. Takýto postup pre veľké n ale nie je výhodný. Neskôr si ukážeme, ako určiť počet f_n priamo. Teda nie pomocou predchodcov f_{n-1} a f_{n-2}, čo je typické pre rekurentný vzťah.

Definícia 5.1 ***Rekurentný vzťah*** *pre postupnosť* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je rovnosť, ktorá dáva do vzťahu* n*-tý člen* a_n *postupnosti s niektorými jeho predchodcami* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. ***Začiatočné podmienky*** *sú presné hodnoty konečného počtu členov (väčšinou začiatočných) danej postupnosti.*

Najprv ešte uvedieme niekoľko typických príkladov, ktoré je možné riešiť vytvorením príslušného rekurentného vzťahu. V jednoduchších prípadoch vyjadríme n-tý člen postupnosti aj priamo pomocou vzorca, do ktorého stačí za n dosadiť príslušnú hodnotu. Viaceré z nasledujúcich príkladov, podobne ako príklad 5.1, sú známe z úloh rekreačnej matematiky. Neskôr sa budeme venovať postupom, ako z rekurentného vzťahu, ak sa to dá, vyjadriť n-tý člen postupnosti explicitne.

Príklad **5.2** Ak vložíme na bankový účet 1 000 eur a ročná úroková miera je 12%, koľko eur budeme mať na účte po 5 rokoch, ak počas celej doby nebudeme z účtu čerpať?

Riešenie. Úlohu budeme riešiť všeobecne, teda odvodíme vzťah pre stav účtu po ľubovoľnom počte rokov. Označme symbolom A_n hodnotu na účte po n rokoch. Zaujíma nás teda hodnota A_5. Našim cieľom je vyjadriť n-tý člen A_n pomocou rekurentného vzťahu.

Po n rokoch máme na účte celý obnos, ktorý tam bol po $n-1$ rokoch, zväčšený o 12% hodnoty obnosu po $n-1$ rokoch. Teda

$$A_n = A_{n-1} + (0,12)A_{n-1} = (1,12)A_{n-1}\,.$$

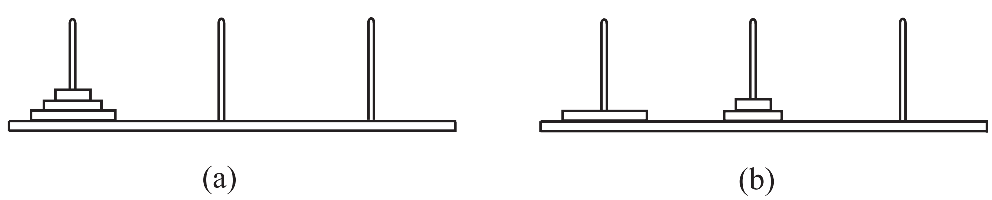
Toto je rekurentný vzťah pre člen A_n, pričom začiatočná podmienka je $A_0 = 1\,000$. Podobne, ako sme v príklade 5.1 vyjadrili hodnotu f_6, môžeme teraz vyjadriť A_5.

$$\begin{aligned}A_5 &= (1,12)A_4 = (1,12)(1,12)A_3\\ &= (1,12)(1,12)(1,12)A_2\\ &= (1,12)(1,12)(1,12)(1,12)A_1\\ &= (1,12)(1,12)(1,12)(1,12)(1,12)A_0\\ &= (1,12)^5A_0 = (1,12)^5\cdot 1\,000 \approx 1\,573,52\,.\end{aligned}$$

Po piatich rokoch bude teda na účte približne 1 537,52 eur.

V 19. storočí bol veľmi populárny hlavolam nazývaný *Hanojské veže*. Uvedieme ho v nasledujúcom príklade.

***Príklad* 5.3** Na doske s tromi kolíkmi na jednom kolíku sú nasunuté disky rôznej veľkosti tak, že každý vyššie umiestnený je menší ako všetky pod ním, pozri obr. 3.1(a). Úlohou je prekladať disky po jednom na iné kolíky tak, aby nikdy nenastala situácia, že pod nejakým diskom je menší od neho, obr. 3.1(b). Aký najmenší počet preložení diskov je potrebný na to, aby výsledkom bola nová veža na inom kolíku?



Obr. 3.1

Riešenie. Nech symbol H_n predstavuje minimálny počet prenosov diskov na iný kolík, po ktorých je n-poschodová veža umiestnená na inom kolíku. Na prenos $n-1$ vrchných diskov z prvého kolíka na iný, napr. na druhý kolík, potrebujeme teda H_{n-1} prenosov. Ak toto máme, prenesieme posledný spodný disk z prvého kolíka na voľný tretí kolík. To je jeden prenos. Potom je potrebné ešte premiestniť n-1 diskov z druhého kolíka na tretí. Na to je opäť treba H_{n-1} prenosov. Takže premiestnenie n diskov z prvého kolíka na tretí vyžaduje

$$H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 1$$

prenosov. Je to rekurentný vzťah, pričom začiatočná podmienka je $H_1 = 1$, čo je počet prenosov veže pozostávajúcej iba z jedného disku.

***Príklad* 5.4** Nech S_n predstavuje počet n-bitových reťazcov pozostávajúcich z núl a jedničiek, ktoré neobsahujú konfiguráciu 111. Odvoďte rekurentný vzťah pre hodnotu S_n a určte začiatočné podmienky.

Riešenie. Množinu všetkých n-bitových reťazcov z núl a jedničiek rozložíme do troch disjunktných množín podľa toho, ako začínajú:
a) reťazce začínajúce konfiguráciou $0\ldots$
b) reťazce začínajúce konfiguráciou $10\ldots$
c) reťazce začínajúce konfiguráciou $11\ldots$
Je zrejmé, každý reťazec je v niektorej z uvažovaných množín a žiadny z reťazcov sa nevyskytuje vo viac ako jednej z tých množín.

Pre reťazce typu a) ostáva $n-1$ voľných pozícií, ktoré je možné doplniť ľubovoľným reťazcom dĺžky $n-1$, ktorý neobsahuje konfiguráciu 111. Teda reťazcov tohto typu je S_{n-1}.

Pre reťazce typu b) ostáva $n-2$ voľných pozícií, ktoré je možné doplniť ľubovoľným reťazcom dĺžky $n-2$, ktorý neobsahuje konfiguráciu 111. Teda reťazcov tohto typu je S_{n-2}.

Trochu komplikovanejšia je situácia s reťazcami typu c). Tu na zostávajúce pozície nie je možné doplniť ľubovoľný reťazec dĺžky $n-2$ bez konfigurácie 111. Na tretej pozícii totiž musí byť nula. Ak ju tam máme, tak zostávajúce pozície, ktorých je $n-3$, je možné doplniť ľubovoľným reťazcom dĺžky $n-3$ bez konfigurácie 111. Reťazcov typu c) je teda S_{n-3}.

Ak teraz spočítame počty n-bitových reťazcov všetkých troch typov, dostaneme počet n-bitových reťazcov bez konfigurácie 111, t.j.

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}\,.$$

Toto je teda rekurentný vzťah pre výpočet počtu n-bitových reťazcov z núl a jedničiek, ak poznáme počty $(n-1)$-bitových, $(n-2)$-bitových a $(n-3)$-bitových reťazcov bez konfigurácie 111. Je zrejmé, že prvá hodnota, ktorá je takto vypočítateľná, je S_4. Potrebujeme ale poznať hodnoty S_1, S_2 a S_3. Keďže existujú iba dve 1-bitové reťazce z núl a jedničiek a to 0 a 1, $S_1 = 2$. Reťazce dĺžky dva sú 00, 01, 10 a 11. Ani jeden neobsahuje konfiguráciu 111, takže $S_2 = 4$. Ľahko sa presvedčíme, že 3-bitových reťazcov z núl z jedničiek je osem, ale keďže jeden z nich je zhodný so zakázanou konfiguráciou 111, tak $S_3 = 7$. To znamená, že máme aj začiatočné podmienky a riešením úlohy je rekurentný vzťah

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}\ , \qquad \text{ak} \qquad S_1 = 2,\ \ S_2 = 4,\ \ S_3 = 7\,.$$

5.2 Riešenie niektorých rekurentných vzťahov

Riešiť rekurentný vzťah znamená nájsť explicitné vyjadrenie n-tého člena postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ vzorcom, do ktorého stačí dosadiť za n konkrétne číslo a dostávame príslušný člen postupnosti. V tejto časti textu uvedieme dve metódy riešenia rekurentných vzťahov. Prvou je *iteračná metóda*. Druhá metóda sa týka *lineárnych homogénnych rekurentných vzťahov s konštantnými koeficientmi.*

5.2.1 Iteračná metóda

Riešiť rekurentný vzťah iteráciou znamená postupne vyjadrovať predchádzajúce členy v rekurentnom vzťahu opätovným použitím rekurentného vzťahu na tieto členy. Takto pokračujeme až dovtedy, kým nedostaneme presný vzťah pre n-tý člen, v ktorom jedinou premennou je n. Metódu ilustrujeme na nasledujúcich dvoch príkladoch.

***Príklad* 5.5** Riešme najprv rekurentný vzťah z príkladu 5.2 o úrokovej miere. Hodnota úspor po n rokoch bola vyjadrená rekurentným vzťahom $A_n = (1,12)A_{n-1}$, pričom začiatočná podmienka bola $A_0 = 1\,000$.

Riešenie. Postupne dosadzujeme za A_{n-1} hodnotu $(1,12)A_{n-2}$, za A_{n-2} hodnotu $(1,12)A_{n-3}$, a tak ďalej, až za hodnotu A_1 dosadíme $(1,12)A_0$. Dostávame

$$\begin{aligned}
A_n &= A_{n-1} + (0,12)A_{n-1} = (1,12)A_{n-1} = (1,12)\{(1,12)A_{n-2}\} \\
&= (1,12)^2 A_{n-2} = (1,12)^2\{(1,12)A_{n-3}\} = (1,12)^3 A_{n-3} \\
&= (1,12)^3\{(1,12)A_{n-4}\} = (1,12)^4 A_{n-4} \\
&= \cdots = (1,12)^n A_0 = (1,12)^n \cdot 1\,000\,.
\end{aligned}$$

Teraz máme hodnotu A_n vyjadrenú explicitne vzťahom

$$A_n = (1,12)^n \cdot 1\,000\,.$$

Takto vyjadrená hodnota n-tého člena je riešením rekurentného vzťahu. Jednoducho môžeme určiť napríklad výšku vkladu na účte po 20 rokoch, teda $A_{20} = (1,12)^{20} 1\,000$ eur. Je to približne $9\,646,30$ eur, čo je takmer desaťnásobok začiatočného vkladu.

***Príklad* 5.6** Odvoďme explicitný vzťah pre minimálny počet prenosov diskov v príklade 5.3 o Hanojských vežiach, ktoré sú potrebné na prenesenie veže na iný kolík.

Riešenie. V príklade 5.3 sme odvodili rekurentný vzťah

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

so začiatočnou podmienkou $H_1 = 1$, pričom H_n je symbol pre potrebný minimálny počet prenosov diskov na iný kolík. Ak si uvedomíme, že $H_{n-1} = 2H_{n-2} + 1$, že $H_{n-2} = 2H_{n-3} + 1$ a tak ďalej, tak iteratívným vyjadrovanín až do posledného člena $H_1 = 1$ dostávame

$$\begin{aligned} H_n = 2H_{n-1} + 1 = 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\ = 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ = 2^3(2H_{n-4} + 1) + 2^2 + 2 + 1 \\ = 2^4 H_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = \ldots \\ = 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \\ = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \\ = 2^n - 1\,. \end{aligned}$$

Posledná rovnosť platí na základe známeho vzorca na výpočet súčtu prvých n členov geometrickej postupnosti, pričom v našom prípade je prvý člen postupnosti rovný 1 a quocient rovný 2.

Vyjadrenie

$$H_n = 2^n - 1$$

je riešením rekurentného vzťahu

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

so začiatočnou podmienkou

$$H_1 = 1$$

a umožňuje nám určiť minimálny počet premiestnení diskov potrebných na premiestnenie n-poschodovej veže priamo, t.j. iba dosadením za n.

5.2.2 Lineárny homogénny rekurentný vzťah s konštantnými koeficientmi

V tejto časti textu naznačíme možnosti riešenia niektorých špeciálnych, respektíve vhodných, rekurentných vzťahov. Nekladieme si za cieľ vysvetliť možnosti a spôsoby riešenia všetkých rekurentných vzťahov tohto typu.

Definícia 5.2 *Lineárny homogénny rekurentný vzťah rádu k s konštantnými koeficientmi je rovnica*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}\,,$$

pričom $c_i,\ i = 1, 2, \ldots, k,$ sú reálne čísla s podmienkou $a_k \neq 0$.

Poznamenajme, že na jednoznačné riešenie lineárneho homogénneho rekurentného vzťahu rádu k s konštantnými koeficientmi je nutné poznať k začiatočných podmienok, teda číselné hodnoty členov

$$a_0 = C_0, \quad a_1 = C_1, \ \ldots\,, \ a_k = C_k\,.$$

Odvodenie metódy riešenia budeme ilustrovať na nasledujúcom príklade. Riešme rekurentný vzťah

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 8\,a_{n-2}$$

so začiatočnými podmienkami

$$a_0 = 4\,, \qquad a_1 = 10\,.$$

V matematike sa často stretávame s postupom, v ktorom najprv riešime jednoduchšiu úlohu a na základe tohto riešenia odvodzujeme postup pri riešení zložitejšej úlohy. Pokúsme sa najprv vyriešiť rekurentný vzťah

$$b_n = 2\,b_{n-1}\,, \qquad ak \qquad b_0 = 1\,.$$

Postupujeme už uvedenou metódou iterácie

$$b_n = 2\,b_{n-1} = 2(2b_{n-2}) = 2(2(2\,b_{n-3})) = \cdots = 2^n\,b_o = 2^n\,.$$

Riešenie tohto rekurentného vzťahu je teda v tvare

$$b_n = r^n\,, \qquad \text{pre} \quad r = 2\,.$$

Uvažujme, či riešenie pôvodného rekurentného vzťahu

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 8\,a_{n-2}$$

môže mať tiež tvar r^n pre zatiaľ neznámu konštantu r. Ak to je riešením, tak po dosadení do riešeného rekurentného vzťahu musí platiť rovnosť. Po dosadení dostávame

$$r^n = 6\,r^{n-1} - 8\,r^{n-2}\,,$$

čo po vydelení výrazom r^{n-2} a úprave pravej strany rovnice na nulu dáva

$$r^2 - 6\,r + 8 = 0\,.$$

Získaná rovnica je **charakteristickou rovnicou** riešeného rekurentného vzťahu $a_n = 6\,a_{n-1} - 8\,a_{n-2}$ a jej koreňmi sú $r_1 = 2$ a $r_2 = 4$. Podľa našej úvahy, riešeniami rekurentného vzťahu $a_n = 6\,a_{n-1} - 8\,a_{n-2}$ by mali byť výrazy $a_n = 2^n$ aj $a_n = 4^n$. O tom, že $a_n = 2^n$ aj $a_n = 4^n$ sú riešeniami, sa čitateľ ľahko presvedčí ich dosadením do rekurentného vzťahu. V oboch prípadoch dostane rovnosť.

Otvorenou ostáva otázka, či sú to všetky riešenia nášho rekurentného vzťahu. Vyskúšajme riešenie v tvare

$$a_n = \alpha\, 2^n + \beta\, 4^n\,,$$

pričom α a β sú ľubovoľné konštanty. Dosadením do pravej strany rekurentného vzťahu $a_n = 6\,a_{n-1} - 8\,a_{n-2}$ dostávame

$$\begin{aligned}
&6(\alpha\, 2^{n-1} + \beta\, 4^{n-1}) - 8(\alpha\, 2^{n-2} + \beta\, 4^{n-2})\\
&= \alpha(6 \cdot 2^{n-1} - 8 \cdot 2^{n-2}) + \beta(6 \cdot 4^{n-1} - 8 \cdot^{n-2})\\
&= \alpha(3 \cdot 2^n - 2 \cdot 4^n) + \beta(\frac{6}{4} \cdot 4^n - \frac{8}{10} \cdot 4^n)\\
&= \alpha\, 2^n + \beta\, 4^n\,,
\end{aligned}$$

čo je rovné ľavej strane rekurentného vzťahu. Riešením teda je aj ľubovoľná lineárna kombinácia výrazov 2^n a 4^n.

Ak vezmeme do úvahy začiatočné podmienky $a_0 = 4$, a $a_1 = 10$, tak zo sústavy rovníc

$$\begin{aligned}
n = 0: &\qquad 4 = \alpha\, 2^0 + \beta\, 4^0\\
n = 1: &\qquad 10 = \alpha\, 2^1 + \beta\, 4^1
\end{aligned}$$

dostaneme presné hodnoty konštánt $\alpha = 3$ a $\beta = 1$.

Našu úvahu zovšeobecníme. **Charakteristickou rovnicou** lineárneho homogénneho rekurentného vzťahu

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

je algebraická rovnica rovnica

$$r^k - c_1\, r^{k-1} - c_2\, r^{k-2} - \ldots - c_{k-1}\, r - c_k = 0\,.$$

Algebraická rovnica stupňa k má práve k koreňov, ak uvažujeme aj ich násobnosť. Samozrejme, že koreňmi takejto rovnice môžu byť aj komplexné čísla. Vzhľadom na rozsah tohto textu, obmedzíme sa na prípady, kedy koreňmi charakteristickej rovnice budú iba reálne čísla. Dve nasledujúce vety dávajú odpoveď na otázku, ako vyzerá všeobecné riešenie lineárneho homogénneho rekurentného vzťahu rádu 2 podľa toho, či korene charakteristickej rovnice sú iba jednoduché, resp. či sú viacnásobné.

Veta 5.1 *Nech* c_1 *a* c_2 *sú reálne čísla. Nech charakteristická rovnica* $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ *má dva rôzne reálne korene* r_1 *a* r_2*. Potom postupnosť* $\{a_n\}$ *je riešením rekurentného vzťahu*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

so začiatočnými podmienkami $a_0 = C_0$ *a* $a_1 = C_1$ *práve vtedy, ak*

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n \,, \qquad n = 0, 1, \dots \,,$$

pričom α *a* β *sú ľubovoľné konštanty.*

Poznamenajme, že r_1^n a r_2^n sú elementárnymi riešeniami rekurentného vzťahu. Riešenie $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ je všeobecným riešením. Ak zohľadníme začiatočné podmienky $a_0 = C_0$ a $a_1 = C_1$, získame presné hodnoty konštánt α a β.

Pre riešenie Fibonacciho postupnosti z príkladu 5.1, ktorá je daná rekurentným vzťahom

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \,, \qquad f_o = 1 \,, \quad f_1 = 2 \,,$$

máme charakteristickú rovnicu

$$r^2 - r - 1 = 0 \,,$$

s koreňmi

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{a} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \,.$$

Všeobecným riešením Fibonacciho postupnosti je vzťah

$$f_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \,.$$

Po zohľadnení začiatočných podmienok pre konštanty α a β platí

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \qquad \text{a} \qquad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \,.$$

Veta 5.2 *Nech* c_1 *a* c_2 *sú reálne čísla,* $c_2 \neq 0$*. Nech charakteristická rovnica* $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ *má dvojnásobný reálny koreň* r_0*. Potom postupnosť* $\{a_n\}$ *je riešením rekurentného vzťahu*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

so začiatočnými podmienkami $a_0 = C_0$ *a* $a_1 = C_1$ *práve vtedy, ak*

$$a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n \,, \qquad n = 0, 1, \dots \,,$$

pričom α *a* β *sú ľubovoľné konštanty.*

V tomto prípade elementárnymi riešeniami sú r_0^n a nr_0^n.

Na záver zovšeobecníme poznatky z posledných dvoch viet. Nech rekurentný vzťah

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

s podmienkami

$$a_0 = C_0,\ a_1 = C_1,\ \ldots\ a_k = C_k$$

má charakteristickú rovnicu

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_k = 0\,.$$

Ak $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_i$ sú rôzne reálne korene charakteristickej rovnice, tak

$$r_1^n,\ r_2^n,\ \ldots,\ r_i^n$$

sú rôzne elementárne riešenia rekurentného vzťahu.
Ak r_j je l-násobným reálnym koreňom charakteristickej rovnice, tak

$$r_j^n,\ nr_j^n,\ n^2 r_j^n,\ \ldots,\ n^{l-1} r_j^n$$

sú rôzne elementárne riešenia rekurentného vzťahu.
Počet rôznych lineárne nezávislých elementárnych riešení lineárneho homogénneho rekurentného vzťahu rádu k je presne k.

Každá lineárna kombinácia k lineárne nezávislých elementárnych riešení lineárneho homogénneho rekurentného vzťahu rádu k je tiež riešením tohto vzťahu. Je to všeobecné riešenie rekurentného vzťahu. Začiatočné podmienky určujú presné hodnoty konštánt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ v lineárnej kombinácii, ktorá je všeobecným riešením.

5.3 Úlohy

3.1. Je postupnosť $\{a_n\}$ riešením rekurentného vzťahu $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$, ak
- a) $a_n = 0\,?$
- b) $a_n = 1\,?$
- c) $a_n = 2^n\,?$
- d) $a_n = 4^n\,?$
- e) $a_n = (-4)^n\,?$
- f) $a_n = 2 \cdot 4^n + 3n \cdot 4^n\,?$
- g) $a_= n^2 4^n\,?$
- h) $a_n = n4^n\,?$

3.2 Pre každú z nasledujúcich postupností nájdite rekurentný vzťah, pre ktorý je táto postupnosť jeho riešením. (Odpoveď nie je jednoznačná, pretože existuje nekonečne veľa rôznych rekurentných vzťahov pre každú z uvedených postupností.)
a) $a_n = 3$
b) $a_n = 2n$
c) $a_n = 2n + 3$
d) $a_n = 5^n$
e) $a_n = n^2$

3.3 Riešte nasledujúce rekurentné vzťahy. Použite pritom metódu iterácií.
a) $a_n = 3a_{n-1},\ a_0 = 2$
b) $a_n = a_{n-1} + 2,\ a_o = 3$
c) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3,\ a_0 = 4$
d) $a_n = n\, a_{n-1},\ a_0 = 5$
e) $a_n = 2\, n\, a_{n-1},\ a_0 = 1$

3.4 Ktorý z nasledujúcich vzťahov je lineárny homogénny rekurentný vzťah s konštantnými koeficientmi?
a) $a_n = 3\, a_{n-1} + 4\, a_{n-2} + 5\, a_{n-3}$
b) $a_n = 2\, n\, a_{n-1} + a_{n-2}$
c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$
d) $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$

3.5 Riešte nasledujúce rekurentné vzťahy.
a) $a_n = a_{n-1} + 6\, a_{-2}$ for $n \geq 2,\ a_0 = 3,\ a_1 = 6$
b) $a_n = 7\, a_{n-1} - 10\, a_{n-2}$ for $n \geq 2,\ a_0 = 2,\ a_1 = 1$
c) $a_n = 2\, a_{n-1} - a_{n-2}$ for $n \geq 2,\ a_0 = 4,\ a_1 = 1$
d) $a_n = -6\, a_{n-1} - 9\, a_{n-2}$ for $n \geq 2,\ a_0 = 3,\ a_1 = -3$

Kapitola 6

DOPLNKY

6.1 Diferencie mriežkovej funkcie

Prvou diferenciou (alebo **diferenciou prvého rádu**) **mriežkovej funkcie** f v bode n nazývame číslo $f(n+1) - f(n)$ a označujeme

$$\triangle f(n) = f(n+1) - f(n) \tag{6.1}$$

Obdobne **druhou diferenciou** (alebo **diferenciou druhého rádu**) **mriežkovej funkcie** f v bode n nazývame číslo

$$\triangle^2 f(n) = \triangle[\triangle f(n)] = \triangle f(n+1) - \triangle f(n)$$

a k**–tou diferenciou** (alebo **diferenciou** k**–tého rádu**) **mriežkovej funkcie** f v bode n nazývame číslo

$$\triangle^k f(n) = \triangle[\triangle^{k-1} f(n) = \triangle^{k-1} f(n+1) - \triangle^{k-1} f(n) \qquad (k > 1) \tag{6.2}$$

Diferenciu k–tého rádu funkcie f v bode n môžeme vyjadriť pomocou hodnôt mriežkovej funkcie f v bodoch $n+r$ $(r = 0,\, 1\, \ldots,\, k)$:

$$\begin{aligned}
\triangle^2 f(n) &= \triangle f(n+1) - \triangle f(n) = [f(n+2) - f(n+1)] - [f(n+1) - f(n)] = \\
&= f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = \binom{2}{0} f(n+2) - \binom{2}{1} f(n+1) + \binom{2}{2} f(n) \\
\triangle^3 f(n) &= \binom{3}{0} f(n+3) - \binom{3}{1} f(n+2) + \binom{3}{2} f(n+1) - \binom{3}{3} f(n)
\end{aligned}$$

Všeobecne

$$\left.\begin{aligned}
\triangle^k f(n) = f(n+k) - \binom{k}{1} f(n+k-1) + \binom{k}{2} f(n+k-2) + \ldots \\
\cdots + (-1)^k f(n) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} f(n+k-r)
\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Platí aj obrátene: Hodnoty funkcie f v bodoch n, $n+1$, ... , $n+k$ môžeme vyjadriť pomocou $f(n)$, $\triangle f(n)$, ... , $\triangle^k f(n)$. Naozaj, z definície diferencií máme

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + \triangle f(n) \\ f(n+2) &= f(n+1) + \triangle f(n+1) = [f(n) + \triangle f(n)] + [\triangle f(n) + \triangle^2 f(n)] = \\ &= f(n) + 2 \triangle f(n) + \triangle^2 f(n) \end{aligned}$$

a všeobecne

$$f(n+k) = f(n) + \binom{k}{1} \triangle f(n) + \binom{k}{2} \triangle^2 f(n) + \cdots + \triangle^k f(n) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \triangle^r f(n) \quad (6.4)$$

kde $\triangle^0 f(n) = f(n)$.

***Príklad* 6.1** Nájdite diferenciu tzv. zovšeobecnenej mocniny (tiež faktoriálnej funkcie) $f(n) = n^{[s]} = n(n-1)\dots(n-s+1)$, $s \in N$, kde $n^{[0]} = 1$.

Riešenie: Z definícií diferencií máme

$$\begin{aligned} \triangle n^{[s]} &= (n+1)^{[s]} - n^{[s]} = (n+1)n(n-1)\dots(n-s+2) - \\ &\quad -n(n-1)\dots(n-s+1) = sn^{[s-1]}, \\ \triangle^2 n^{[s]} &= \triangle(n+1)^{[s]} - \triangle n^{[s]} = s(n+1)^{[s-1]} - sn^{[s-1]} = \\ &= s(s-1)n^{[s-2]} \end{aligned}$$

Matematickou indukciou sa dá overiť, že

$$\triangle^r n^{[s]} = s(s-1)\dots(s-r+1)n^{[s-r]} \qquad \text{pre} \quad r = 1, 2 \dots, s$$

a

$$\triangle^r n^{[s]} = 0 \qquad \text{pre} \quad r > s$$ [1]

6.2 Poznatky z teórie funkcie komplexnej premennej

Veta 6.1 *Ak $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je nenulové komplexné číslo (v goniometrickom tvare), tak pre každé prirodzené číslo n platí*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (6.5)$$

[1] Tieto diferencie majú obdobný tvar ako derivácie mocninovej funkcie $f(t) = t^s$.

Rovnosť (6.5) nazývame **Moivreov vzorec**.

Pre každé konečné komplexné číslo z platí:

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i} \tag{6.6}$$

a

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}. \tag{6.7}$$

Poznámka 6.1 *Funkciu f nazývame analytickou v bode $a \in \mathbf{C}$ práve vtedy, keď má deriváciu v nejakom okolí $K(a)$ bodu a.*

Veta 6.2 *(***veta o rozvoji analytickej funkcie do Laurentovho radu so stredom** *$a \in \mathbf{C}$) Nech je funkcia f analytická na otvorenom medzikruží $M(a; r, R)$, kde $a \in \mathbf{C}$ a $r < R$. Potom existuje práve jeden Laurentov rad , ktorý na medzikruží $M(a; r, R)$ konverguje k funkcii f. Koeficienty tohto Laurentovho radu sú jednoznačne určené vzťahmi*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{6.8}$$

kde $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in < 0, 2\pi >$, pričom ρ je ľubovoľné číslo, pre ktoré platí $r < \rho < R$ (t. j. $[\gamma] \subset M(a; r, R)$).

Veta 6.3 *(***Rozvoj analytickej funkcie do Laurentovho radu so stredom v bode** *∞) Funkciu f, ktorá je analytická na medzikruží $M(\infty; r, R)$ môžeme jednoznačne rozvinúť v tomto medzikruží do Laurentovho radu tvaru*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \qquad z \in M(\infty; r, R) \tag{6.9}$$

pričom

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{6.10}$$

kde $\gamma(t) = \rho e^{it}$, $t \in < 0, 2\pi >$, pričom ρ je ľubovoľné číslo, pre ktoré platí $R^{-1} < \rho < r^{-1}$ (t. j. $[\gamma] \subset M(\infty; r, R)$).

Poznámka 6.2 *Pre spätnú* **Z** *– transformáciu je dôležitý prípad, keď je funkcia f analytická v bode ∞: vtedy je $M(\infty : r, R) = \{z \in \mathbf{C} : |z| > \delta = R^{-1}\}$ vlastne prstencové okolie bodu ∞ a koeficienty analytickej časti radu (6.9) sú rovné nule a koeficienty hlavnej časti Laurentovho rozvoja v tomto okolí bodu ∞ vypočítame podľa (6.10).*

Poznámka 6.3 *Bod $a \in \mathbf{C}$ nazývame* **izolovaný singulárny bod funkcie** *f práve vtedy, keď existuje nejaké prstencové okolie $P(a)$ bodu a, v ktorom je funkcia f analytická a nie je analytická v bode a.*

Literatúra

[1] M. Bučko, M. Klešč: *Diskrétna matematika*, Academic Press *elfa, s.r.o.*, Košice 1999.

[2] J. Johnsonbaugh: *Discrete Mathematics*, Macmillan Publishing Company, New York 1990.

[3] P. Galajda, Š. Schrötter: *Funkcie komplexnej premennej a operátorový počet*, Alfa, Bratislava 1991.

[4] W. Kelley, A. Peterson: *Difference Equations An Introduction with Applications*, Academic Press, London 2001.

[5] K. H. Rosen: *Discrete Mathematics and Its Applications*, AT&T Information Systems, New York 1988.

[6] E. R. Scheinerman: *Mathematics a Discrete Introduction* Books/Cole Publ. Company. 2000.