

**Katedra matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky**

Technická univerzita v Košiciach

DISKRÉTNÁ MATEMATIKA

Marián Klešč

Košice 2006

**Katedra matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky**

Technická univerzita v Košiciach

DISKRÉTNÁ MATEMATIKA

Marián Klešč

Košice 2006

RECENZOVALI: RNDr. Vladimír Lacko, PhD.
RNDr. Štefan Berežný, PhD.

1. vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedá autor.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

©Marián klešč

ISBN 80-8073-698-7

Obsah

Úvod	3
1 Množiny a relácie	5
1.1 Množiny a množinové operácie	5
1.2 Binárne relácie	8
1.3 Ekvivalencia	11
1.4 Zobrazenia	13
1.5 Úlohy	15
2 Boolovská algebra	17
2.1 Čiastočne usporiadané množiny	17
2.2 Zväzy	19
2.3 Boolovské funkcie	23
2.4 Úlohy	27
3 Grupy, telesá a polia	29
3.1 Grupy	29
3.2 Cyklické grupy	32
3.3 Podgrupy a rozklady grúp	33
3.4 Okruhy, telesá, polia	35
3.5 Úlohy	37
4 Neorientované grafy	39
4.1 Definícia a základné typy grafov	39
4.2 Stupne vrcholov, súvislosť a metrika	42
4.3 Eulerovkosť, hamiltonovkosť a planárnosť	45
4.4 Úlohy	48
5 Orientované grafy	49
5.1 Definícia digrafu	49
5.2 Súvislosť a silná súvislosť	50
5.3 Acyklické digrafy	52

5.4	Úlohy	53
6	Grafy a matice	55
6.1	Maticové reprezentácie grafov	55
6.2	Úlohy	59
7	Stromy	61
7.1	Stromy a ich vlastnosti	61
7.2	Kostry a kružnice	63
7.3	Úlohy	66
8	Aplikácie grafov a digrafov	67
8.1	Minimálne cesty a spojenia	67
8.1.1	Dĺžka minimálnej cesty	67
8.1.2	Dĺžka minimálneho spojenia	69
8.2	Minimálna kostra grafu	71
8.3	Problém okružnej cesty	73
8.4	Problém obchodného cestujúceho	74
8.5	Metóda kritickej cesty	76
8.6	Toky v sieťach	78
8.7	Úlohy	83
	Literatúra	85

Úvod

Učebný text je adresovaný študentom Fakulty elektrotechniky a informatiky TU v Košiciach na prvom stupni štúdia v študijnom odbore „Výpočtová technika a informatika“ a pokrýva učebnú látku predmetu Diskrétna matematika v letnom semestri prvého ročníka. Text nemá nahradiť prednášky z daného predmetu, ale pomôcť študentom v systematickom zorientovaní sa v predmete. Preto v texte nie sú uvádzané dôkazy. Paralelne s touto učebnicou je vydaná Zbierka uloh z Diskrétnej matematiky. Tieto dva učebné texty spolu predstavujú minimum potrebné na úspešné zvládnutie štúdia v predmete Diskrétna matematika v prvom ročníku.

Učebná látka je členená do ôsmich kapitol, za ktorými sú úlohy na samostatné precvičovanie preberaného učiva. V prvých dvoch kapitolách sú základné poznatky o binárnych reláciách, zobrazeniach, čiastočne usporiadaných množinách a zväzoch, ktoré vyúsťujú do boolovskej algebry a použitia boolovských funkcií. Tretia kapitola je venovaná algebraickým systémom s jednou aj s dvoma binárnymi operáciami. Ďalšie kapitoly sú postupne venované neorientovaným aj orientovaným grafom, stromom, využitiu maticového počtu pri spracovaní úloh pomocou grafov a aplikácií grafov pri riešení konkrétnych úloh. Na záver je ukážka využitia teórie grafov v transportných sieťach pri určovaní maximálnych tokov.

Pre lepšiu orientáciu v diskrétnej matematike a príbuzných disciplínach je učebný text doplnený zoznamom použitej literatúry.

Autor vyslovuje poďakovanie RNDr. Vladimírovi Lackovi, PhD. a RNDr. Štefanovi Berežnému, PhD., ktorí starostlivo prečítali rukopis a cennými radami prispeli k jeho skvalitneniu.

Kapitola 1

Množiny a relácie

1.1 Množiny a množinové operácie

Jedným zo základných pojmov v matematike je pojem množiny. Nebudeme ho definovať, ale budeme ho chápať v intuitívnom zmysle. Pod **množinou** rozumieme súhrn (skupinu, súbor) nejakých navzájom odlišných objektov, ktoré podľa nejakého kritéria tvoria jeden celok.

Množinu považujeme za určenú, ak o každom objekte vieme rozhodnúť, či je alebo nie je prvkom danej množiny. Množiny budeme označovať pomocou veľkých písmen:

$$A, B, \dots, X, Y, \dots, M, N, \dots$$

a podobne, a prvky množín budeme označovať malými písmenami $a, b, \dots, x, y, \dots, m, n, \dots$. Skutočnosť, že a je prvkom množiny A zapíšeme

$$a \in A .$$

Ak a nie je prvkom množiny A , tak zapíšeme

$$a \notin A .$$

Namiesto a je (nie je) prvkom množiny A zvykneme hovoriť aj a patrí (nepatrí) do množiny A .

Množinu, ktorá neobsahuje žiadny prvok, nazývame **prázdnu množinou** a označujeme ju symbolom \emptyset .

Poznáme rôzne spôsoby určenia množín. Ak množina M obsahuje konečný počet prvkov x_1, x_2, \dots, x_n , vtedy používame zápis

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} .$$

Uvedomme si, že

$$D = \{0\}$$

je neprázdna množina obsahujúca jeden prvok 0, a preto $D \neq \emptyset$. Stretávame sa aj s množinami, ktoré sú určené takto: K je množina všetkých prvkov $x \in B$, ktoré majú vlastnosť P . V tomto prípade píšeme:

$$K = \{x \in B; P(x)\}.$$

Niektoré množiny, hlavne číselné, majú všeobecne zaužívané označenia. Tak napríklad pre množinu všetkých **prirodzených** čísel, t.j. množinu $\{1, 2, 3, \dots\}$, používame symbol \mathbb{N} . Množinu všetkých **celých** čísel označujeme \mathbb{Z} . Racionálne čísla sú zlomky s celočíselným čitateľom aj menovateľom. Množinu všetkých **racionálnych** čísel označujeme \mathbb{Q} . Znak \mathbb{R} je symbolom pre množinu všetkých **reálnych** a \mathbb{C} pre množinu všetkých **komplexných** čísel.

PRÍKLAD 1.1.

$$P = \{x \in \mathbb{N}; 3 < x^2 < 30\}$$

je množina všetkých prirodzených čísel, ktorých druhá mocnina je väčšia než 3 a menšia ako 30, teda

$$P = \{2, 3, 4, 5\}.$$

DEFINÍCIA 1.1. *Množina A je **podmnožinou** množiny B práve vtedy, ak každý prvok množiny A patrí aj do množiny B . Zapisujeme*

$$A \subset B.$$

Je zrejmé, že $A = B$ práve vtedy, keď $A \subset B$ a súčasne aj $B \subset A$. Každá neprázdna množina A obsahuje najmenej dve podmnožiny a to \emptyset a A .

DEFINÍCIA 1.2. **Potenčná množina** množiny A je množina $\mathcal{P}(A)$, ktorej prvkami sú všetky podmnožiny množiny A .

Napríklad, ak $A = \{1, 2, 3\}$, tak

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Predpokladajme, že všetky množiny, s ktorými pracujeme, sú prvkami istej univerzálnej množiny U .

DEFINÍCIA 1.3. **Zjednotenie množín** A a B je množina

$$A \cup B = \{x \in U; x \in A \text{ alebo } x \in B\}$$

a **prienik** množín A a B je množina

$$A \cap B = \{x \in U; x \in A \text{ a } x \in B\}.$$

Teda do $A \cup B$ patria práve tie prvky, ktoré sú prvkami aspoň jednej z množín A a B , a do $A \cap B$ patria práve tie prvky, ktoré sú prvkami množiny A aj množiny B .

DEFINÍCIA 1.4. **Rozdiel** množín A a B je množina

$$A \setminus B = \{x \in U; x \in A \text{ a } x \notin B\}.$$

Čiže prvkami množiny $A \setminus B$ sú tie prvky množiny A , ktoré nepatria do B .

DEFINÍCIA 1.5. **Komplement** (doplňok) množiny A je množina

$$\bar{A} = U \setminus A.$$

Operáciu zjednotenia a prieniku môžeme rozšíriť na ľubovoľný počet množín. Nech I je množina, ktorej budeme hovoriť množina indexov a pre každé $i \in I$ je definovaná množina $A_i \subset U$. Hovoríme, že je daný systém množín $\{A_i; i \in I\}$.

DEFINÍCIA 1.6. **Zjednotenie** systému množín $\{A_i; i \in I\}$ je množina $\bigcup_{i \in I} A_i$ práve tých prvkov z U , ktoré patria do niektorej z množín A_i .

Prienik systému množín $\{A_i; i \in I\}$ je množina $\bigcap_{i \in I} A_i$ práve tých prvkov z U , ktoré patria do všetkých množín A_i .

POZNÁMKA. Ak $I = \{1, 2, \dots, k\}$, tak systém množín je $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$. Ich zjednotenie a prienik označujeme

$$\bigcup_{i=1}^k A_i \quad \text{a} \quad \bigcap_{i=1}^k A_i.$$

DEFINÍCIA 1.7. **Rozklad** množiny $A \neq \emptyset$ je taký systém $\{A_i; i \in I\}$, pre ktorý platí

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A \quad \text{a} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{pre } i, j \in I, i \neq j.$$

VETA 1.1. Nech A, B a C sú podmnožiny množiny U . Potom platí:

- | | |
|--|---|
| 1. $A \cup B = B \cup A,$ | $A \cap B = B \cap A,$ |
| 2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$ | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$ |
| 3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ |
| 4. $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A,$ | $A \cap U = U \cap A = A,$ |
| 5. $A \cup \bar{A} = \bar{A} \cup A = U,$ | $A \cap \bar{A} = \bar{A} \cap A = \emptyset,$ |
| 6. $\overline{(\bar{A})} = A,$ | |
| 7. $A \cup A = A,$ | $A \cap A = A,$ |
| 8. $A \cup U = U,$ | $A \cap \emptyset = \emptyset,$ |
| 9. $A \cup (A \cap B) = A,$ | $A \cap (A \cup B) = A,$ |
| 10. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B},$ | $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}.$ |

Tvrdeniam 10 vety 1.1 hovoríme **de Morganove pravidlá**. Vetu 1.1 nebudeme dokazovať, čitateľ si jednotlivé vlastnosti môže overiť pomocou tzv. Vennových diagramov.

1.2 Binárne relácie

Je pozoruhodné, ako veľa matematických pojmov sa dá vyjadriť pomocou množín a rôznych množinových konštrukcií. Je to prekvapivé hlavne preto, že teória množín bola do matematiky zavedená pomerne nedávno. Dnes sa však už stala súčasťou bežného matematického vyjadrovania a je jazykom, ktorý napomáha chápať matematiku ako jeden celok so spoločnými základmi. Ukážeme si, ako sa pomocou jednoduchých množinových prostriedkov môžu definovať ďalšie matematické pojmy.

Ak x a y sú prvky (nejakej množiny), potom symbol $\{x, y\}$ označuje množinu obsahujúcu práve prvky x a y a nazýva sa **neusporiadaná dvojica** prvkov x a y . Pripomeňme, že $\{x, y\}$ je to isté ako $\{y, x\}$. Zavedieme tiež označenie (x, y) pre **usporiadanú dvojicu** prvkov x a y . V tomto prípade závisí na poradí prvkov v zátvorkách. Podobne definujeme **usporiadanú n-ticu** prvkov x_1, x_2, \dots, x_n , ktorú budeme označovať (x_1, x_2, \dots, x_n) . Platí, že

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \text{ práve vtedy ak } x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n .$$

DEFINÍCIA 1.8. Karteziánsky súčin $A \times B$ množín A a B je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) , kde $a \in A$ a $b \in B$. Formálne zapisujeme

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\} .$$

Karteziánsky súčin $A \times A$ niekedy zapisujeme ako mocninu, t.j. A^2 , a podobne $A^3 = A \times A \times A$ atď.

Je zrejmé, že $C \times \emptyset = \emptyset \times C$ pre ľubovoľnú množinu C .

DEFINÍCIA 1.9. Binárna relácia z množiny A do množiny B je ľubovoľná podmnožina \mathcal{R} karteziánskeho súčinu $A \times B$. Ak $A = B$, hovoríme o binárnej relácii na množine A , čo je ľubovoľná podmnožina $\mathcal{R} \subset A^2$.

Ak nemôže dôjsť k omylu a je jasné, že sa jedná o binárnu reláciu, slovo *binárna* môžeme vynechať a hovoriť iba o relácii.

POZNÁMKA Binárna relácia \mathcal{R} je množina, a teda by sme mali použiť symbol pre množinu, t.j. R . Symbol \mathcal{R} budeme používať preto, aby sme jasne rozlíšili, že sa jedná o reláciu.

Ak $(a, b) \in \mathcal{R}$, hovoríme, že prvok a je v relácii \mathcal{R} s prvkom b a zapisujeme $a\mathcal{R}b$. Analogicky namiesto $(a, b) \notin \mathcal{R}$ píšeme $a\overline{\mathcal{R}}b$.

Názov *karteziánsky súčin* pochádza z geometrickej interpretácie (a pôvodne teda z mena Descartes): Keď napríklad $A = B = R$, potom $A \times B$ môžeme interpretovať ako všetky body roviny a v tomto prípade x a y sú (karteziánske) súradnice bodu (x, y) roviny. Toto znázornenie používame nielen pre číselné množiny, ale napríklad aj pre karteziánsky súčin konečných množín. Binárnu reláciu

potom znázorňujeme ako množinu v rovine, ktorá je podmnožinou množiny znázorňujúcej karteziánsky súčin. Hovoríme tomu **grafická interpretácia** binárnej relácie.

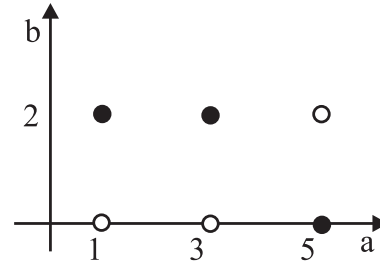
PRÍKLAD 1.2. Nech $A = \{1, 3, 5\}$, a $B = \{0, 2\}$. Nájdite a graficky znázornite reláciu \mathcal{R} , ktorá je definovaná:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |a-2| = |2b-3|, \quad a \in A, \quad b \in B.$$

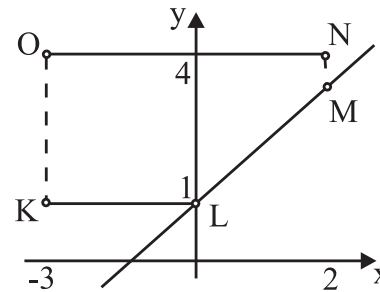
Riešenie. Výpočtom zistíme, že $\mathcal{R} = \{(5, 0), (1, 2), (3, 2)\}$. Grafická interpretácia je na obr. 1.1. Plné krúžky sú prvkami množiny \mathcal{R} , všetky krúžky (plné aj prázdne) sú prvkami karteziánskeho súčinu $A \times B$.

PRÍKLAD 1.3. Majme podmnožiny reálnych čísel $X = \{x; -3 < x < 2\}$ a $Y = \{y; 1 \leq y \leq 4\}$. Nájdite a graficky znázornite reláciu \mathcal{R} , ktorá je definovaná: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y \leq x + 1$.

Riešenie. \mathcal{R} je časť roviny (päťuholník KLMNO) z obr. 1.2.



Obr. 1.1



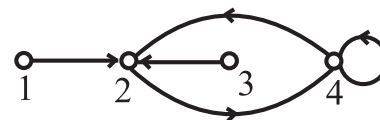
Obr. 1.2

Ďalšími vhodnými interpretáciami binárnej relácie sú **maticová** a **grafová**. Ak $\mathcal{R} \subset A \times B$, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, môžeme \mathcal{R} zapísať pomocou matice $\mathbf{M} = (m_{i,j})$ typu (n, m) , kde

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ak } a_i\mathcal{R}a_j, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Pri grafovej interpretácii (presnú definíciu grafu uvedieme neskôr) prvky množín A a B znázorňujeme krúžkami, ktoré budeme nazývať **vrcholy**. Usporiadanú dvojicu (a_i, b_j) znázorníme *šípkou* v smere od a_i k b_j , ktorú nazývame **orientovaná hrana**. Tak napríklad pre reláciu $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$ na množine $\{1, 2, 3, 4\}$ máme maticu

$$\mathbf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Obr. 1.3

a grafová reprezentácia je obr. 1.3.

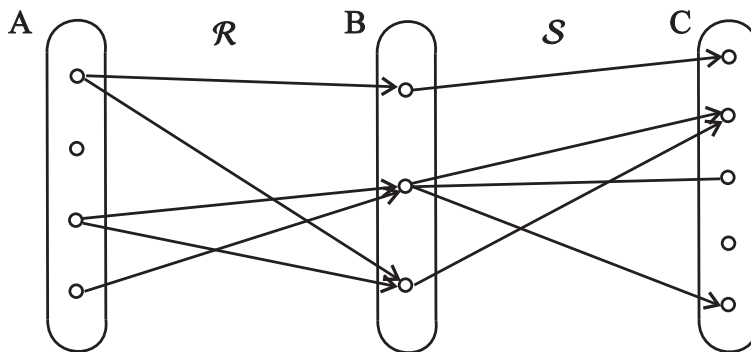
DEFINÍCIA 1.10. **Inverzná relácia** k binárnej relácii \mathcal{R} je binárna relácia $\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a); (a, b) \in \mathcal{R}\}$, pričom $a \in A$ a $b \in B$.

Je zrejmé, že

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}^{-1}a \quad \text{a} \quad (\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}.$$

DEFINÍCIA 1.11. Nech A, B, C sú množiny, $\mathcal{R} \subset A \times B$ je relácia z A do B , a $\mathcal{S} \subset B \times C$ je relácia z B do C . **Súčinom binárnych relácií (zložením)** \mathcal{R} a \mathcal{S} nazveme binárnu reláciu $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subset A \times C$ takú, že pre $a \in A$ a $c \in C$ je $a(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})c$ práve vtedy, ak existuje aspoň jedno $b \in B$ také, že $a\mathcal{R}b$ a zároveň $b\mathcal{S}c$. Súčin relácii \mathcal{R} a \mathcal{S} tiež niekedy označujeme \mathcal{RS} .

Súčin relácii sa dá dobre znázorniť pomocou grafovej reprezentácie. Na obr. 1.4 je vidieť, že dvojica (a, c) je v relácii $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ vždy keď z a do c sa dá dostať po orientovaných hranách cez nejaké b z množiny B .



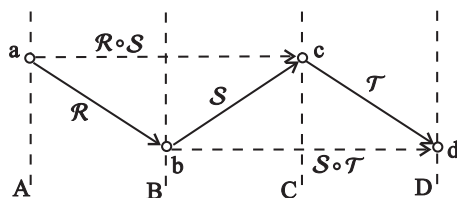
Obr. 1.4

Všimnime si, že súčin nie je definovaný pre každé dve binárne relácie. Aby sa dali relácie skladať, musia mať spoločnú „prostrednú“ množinu (v definícii sme ju označili B). Ak sú však \mathcal{R} aj \mathcal{S} relácie na tej istej množine, ich súčin je vždy dobre definovaný. V tomto prípade záleží na poradí skladania, t.j. $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ je vo všeobecnosti iná relácia ako $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

VETA 1.2. Pre súčin binárnych relácií platí asociatívny zákon. Ak $\mathcal{R} \subset A \times B$, $\mathcal{S} \subset B \times C$ a $\mathcal{T} \subset C \times D$ sú binárne relácie, tak

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} = \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{T}).$$

Dôkaz vety vyplýva z Definície 1.11 a zo schémy na obr. 1.5.



Obr. 1.5

POZNÁMKA. Pojem binárnej relácie môžeme zovšeobecniť. Nech A_1, A_2, \dots, A_n sú ľubovoľné množiny. Karteziánsky súčin $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ množín A_1, A_2, \dots, A_n je množina všetkých usporiadaných n -tíc (a_1, a_2, \dots, a_n) , kde $a_i \in A_i$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$. Špeciálne, ak $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, potom $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n$ je množina všetkých usporiadaných n -tíc prvkov množiny A . Potom n -árna relácia je ľubovoľná podmnožina karteziánskeho súčinu $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

1.3 Ekvivalencia

V tejto časti textu sa budeme zaoberať iba binárnymi reláciami *na množine*, t.j. keď $\mathcal{R} \subset A \times A$.

DEFINÍCIA 1.12. *Binárna relácia \mathcal{R} na množine A sa nazýva:*

reflexívna, ak pre všetky $a \in A$ platí $a\mathcal{R}a$;

symetrická, ak pre všetky $a, b \in A$ platí, že ak $a\mathcal{R}b$, tak aj $b\mathcal{R}a$;

antisymetrická, ak pre všetky $a, b \in A$ platí, že ak $a\mathcal{R}b$ aj $b\mathcal{R}a$, tak $a = b$;

tranzitívna, ak pre všetky $a, b, c \in A$ platí, že ak $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$, tak aj $a\mathcal{R}c$.

Ak znázorňujeme reláciu pomocou matice, tak matica odpovedajúca reflexívnej relácii má na hlavnej diagonále len jedničky. Matica reprezentujúca symetrickú reláciu je symetrická podľa hlavnej diagonály. Pri grafovej reprezentácii reflexívnej relácii odpovedá graf s orientovanou slučkou pri každom vrchole. V grafe reprezentujúcom symetrickú reláciu každú dvojicu vrcholov spájajú orientované hrany v oboch smeroch. Aj podmienka tranzitívnosti sa dá dobre vyjadriť pomocou orientovaných hrán: ak sú v grafe hrany z x do y a z y do z , musí tam byť aj hrana z x do z .

DEFINÍCIA 1.13. *Hovoríme, že relácia \mathcal{R} na množine A je **ekvivalencia** na množine A , ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.*

Pojem ekvivalencie je zastrešujúci pojem pre všetky pojmy vyjadrujúce rovnakosť, podobnosť, izomorfizmus atď. Často sa relácia ekvivalencie zvykne označovať symbolmi $=, \equiv, \simeq, \approx, \cong, \dots$. Príklady ekvivalencie sa vyskytujú napríklad v geometrii: podobnosť trojuholníkov, rovnobežnosť priamok a podobne.

Nech \mathcal{R} je ekvivalencia na množine A a nech a je ľubovoľný prvok množiny A . Označme symbolom $\mathcal{R}[a]$ množinu všetkých prvkov x , ktoré sú v relácii s prvkom a (teda $\mathcal{R}[a] = \{x; a\mathcal{R}x\}$). $\mathcal{R}[a]$ sa nazýva **trieda ekvivalencie \mathcal{R}** určená prvkom a .

Platí nasledujúca

VETA 1.3. *Pre každú ekvivalenciu \mathcal{R} na množine A platí*

(i) $\mathcal{R}[a]$ je neprázdna množina pre každý prvok $a \in A$.

(ii) Pre každé dva prvky a, b z množiny A buď $\mathcal{R}[a] = \mathcal{R}[b]$, alebo $\mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[b] = \emptyset$.

(iii) Triedy ekvivalencie jednoznačne určujú (popisujú) reláciu \mathcal{R} .

Skôr, ako pristúpime k dôkazu, vysvetlime zmysel bodu (iii). Presný význam je nasledujúci: Ak sú \mathcal{R} a \mathcal{S} dve ekvivalencie na množine A a pre každý prvok a z množiny A platí rovnosť $\mathcal{R}[a] = \mathcal{S}[a]$, potom $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

Dôkaz. (i) Množina $\mathcal{R}[a]$ vždy obsahuje aspoň prvok a , pretože \mathcal{R} je reflexívna relácia.

(ii) Nech a, b sú dané prvky. Ak $a\mathcal{R}b$, ukážeme najprv že $\mathcal{R}[a] \subset \mathcal{R}[b]$. Je to tak, pretože ak nejaké $x \in \mathcal{R}[a]$, potom $a\mathcal{R}x$ a zo symetrie vyplýva, že aj $x\mathcal{R}a$. Keďže $x\mathcal{R}a$ a $a\mathcal{R}b$, z tranzitívnosti vyplýva že aj $x\mathcal{R}b$. Ak opäť použijeme symetriu, máme $b\mathcal{R}x$, čo znamená, že $x \in \mathcal{R}[b]$, a teda $\mathcal{R}[a] \subset \mathcal{R}[b]$. Podobne sa ukáže, že aj $\mathcal{R}[b] \subset \mathcal{R}[a]$, z čoho vyplýva, že $\mathcal{R}[a] = \mathcal{R}[b]$.

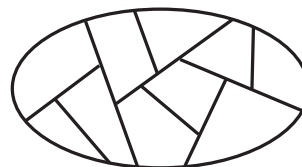
Teraz ukážeme, že ak neplatí $a\mathcal{R}b$, tak $\mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[b] = \emptyset$. Postupujeme sporom: Nech existuje $x \in \mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[b]$. Potom $a\mathcal{R}x$ a zo symetrie aj $x\mathcal{R}b$. Z tranzitívnosti dostávame $a\mathcal{R}b$, čo je spor.

(iii) Táto časť tvrdenia vety je zrejímavá, pretože triedy ekvivalencie \mathcal{R} určujú \mathcal{R} vzťahom

$$a\mathcal{R}b \text{ práve vtedy, ak } \{a, b\} \subset \mathcal{R}[a].$$

□

Obrázok 1.6 znázorňuje tvrdenia vety 1.3. Podmnožiny danej množiny A , ktoré sú navzájom disjunktné a ktoré spolu obsahujú všetky prvky množiny A , tvoria rozklad množiny A (pozri definíciu 1.7). Tvrdenia vety zaručujú, že triedy ekvivalencie tvoria rozklad množiny a že vzťah medzi všetkými ekvivalenciami na danej množine A a všetkými rozkladmi množiny A je vzájomne jednoznačný.



Obr. 1.6

Uvedieme si jednu konkrétnu ekvivalenciu, ktorá rozkladá množinu celých čísel. Hovoríme, že nenulové celé číslo b delí celé číslo a , ak existuje také celé číslo q , že $a = b \cdot q$. Zapisujeme to symbolom $b|a$.

Nech $m \in \mathbb{N}$ a nech

$$\mathcal{R}_m = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; m|(a - b)\}.$$

Ukážeme si, že binárna relácia \mathcal{R}_m na množine \mathbb{Z} je ekvivalencia. Reflexívnosť platí, pretože pre každé $a \in \mathbb{Z}$ je $a - a = 0$ a nulu delí každé nenulové číslo, teda aj naše dopredu zvolené číslo m . Je zrejmé, že pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{Z}$, ak $m|(a - b)$, tak aj $m|(b - a)$ a relácia je symetrická. Uvažujme teraz ľubovoľné $a, b, c \in \mathbb{Z}$, pre ktoré platí že $m|(a - b)$ a tiež $m|(b - c)$. Potom existujú celé

čísla q_1 a q_2 také, že $a - b = m \cdot q_1$ a $b - c = m \cdot q_2$. Z toho však vyplýva, že $a - c = (a - b) + (b - c) = m \cdot (q_1 + q_2)$, kde $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$, a teda $m|(a - c)$. Tým sme ukázali, že relácia je aj tranzitívna. Keďže sa jedná o ekvivalenciu, môžeme teraz zostrojiť množinu tried ekvivalencie

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\},$$

ktoré tvoria rozklad množiny všetkých celých čísel \mathbb{Z} , pričom trieda \bar{k} ($0 \leq k \leq n - 1$) má tvar

$$\bar{k} = \{\dots, -2m + k, -m + k, k, m + k, 2m + k, \dots\}.$$

Množinu \mathbb{Z}_m nazývame **množinou všetkých zvyškových tried** množiny \mathbb{Z} podľa modulu m . Napríklad pre $m = 5$ dostávame:

$$\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\},$$

kde

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}, \\ \bar{1} &= \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}, \\ \bar{2} &= \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}, \\ \bar{3} &= \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}, \\ \bar{4} &= \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\}.\end{aligned}$$

1.4 Zobrazenia

Pojem zobrazenie sa zhoduje s pojmom funkcie a je jedným zo základných pojmov v matematike. Trvalo dosť dlho, kým sa dospelo k dnešnému chápaniu zobrazenia ako špeciálneho typu binárnej relácie. Ešte v nedávnej dobe sa uvažovali iba reálne alebo komplexné funkcie a „pochtivá“ funkcia musela byť vyjadrená nejakým vzorcom alebo súčtom nekonečného radu.

DEFINÍCIA 1.14. Zobrazenie z množiny A do množiny B je binárna relácia $f \subset A \times B$ s vlastnosťami:

- ku každému $a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že $(a, b) \in f$,
- ak $(a, b) \in f$ a $(a, c) \in f$, tak $b = c$.

Namiesto slova *zobrazenie* sa v rovnocennom význame často používa slovo *funkcia*. Teda zobrazenie f z množiny A do množiny B môžeme chápať ako pravidlo, ktoré každému prvku $a \in A$ priradí práve jeden prvok b z množiny B . To, že f je zobrazenie z množiny A do množiny B , zapisujeme takto: $f : A \rightarrow B$. Prvok a je **vzorom** prvku b a prvok b je **obrazom** prvku a pri zobrazení f . Namiesto

$$afb \quad \text{alebo} \quad (a, b) \in f$$

obvykle píšeme

$$b = f(a).$$

Všetky tri zápisy vyjadrujú to isté: prvok a je v relácii s prvkom b .

POZNÁMKA. Všimnime si, že aj keď zobrazenie je reláciou, nepoužíva sa na jeho označenie veľké písmeno ako pre reláciu, ale malé. Čitateľ sa určite častejšie stretával so zápisom $y = f(x)$, teda s prípadom funkcie (zobrazenia) z množiny X do množiny Y . Je to to isté, ak si uvedomíme, že množiny A a B v definícii zobrazenia boli ľubovoľné.

PRÍKLAD 1.4. Nech $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Potom

$$f_1 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4)\}$$

je zobrazenie, ale

$$f_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

nie je zobrazenie, lebo nie je splnená vlastnosť b) definície 1.14 a ani

$$f_3 = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

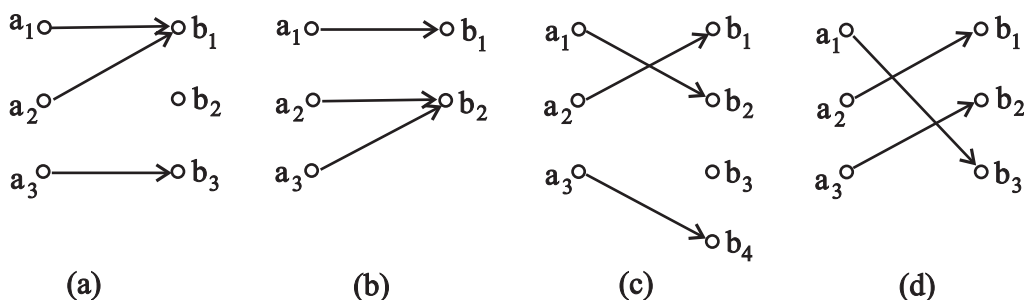
nie je zobrazenia, lebo nie je splnená vlastnosť a) definície 1.14.

DEFINÍCIA 1.15. Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ sa nazýva:

surjektívne, ak ku každému $b \in B$ existuje aspoň jedno $a \in A$ tak, že $b = f(a)$,

injektívne, ak z $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$ vyplýva $f(a_1) \neq f(a_2)$,

bijektívne, ak je surjektívne aj injektívne.



Obr. 1.7

Na obr. 1.7 sú znázornené jednotlivé typy zobrazení. Zobrazenie (a) nie je surjektívne ani injektívne, (b) je surjektívne, ale nie je injektívne, (c) je injektívne, ale nie je surjektívne a (d) je surjektívne aj injektívne, teda bijektívne.

Každé zobrazenie f je binárne relácia z A do B , preto existuje aj binárna relácia f^{-1} z B do A , ktorá vo všeobecnosti nie je zobrazením (funkciou).

VETA 1.4. *Nech f je zobrazenie z A do B . Potom f^{-1} je zobrazenie z B do A práve vtedy, ak f je bijektívne zobrazenie.*

Dôkaz. Nech f^{-1} je zobrazenie z B do A . Potom každý prvok $b \in B$ má práve jeden obraz $f^{-1}(b) \in A$, a teda každý prvok $b \in B$ je obrazom práve jedného prvku z A v zobrazení f , čo je bijektívnosť zobrazenia f .

Naopak, nech f je bijektívne zobrazenie z A do B . Potom každý prvok $b \in B$ má práve jeden vzor v množine A , a teda f^{-1} je zobrazenie, lebo každý prvok $b \in B$ má práve jeden obraz $f^{-1}(b) \in A$. \square

DEFINÍCIA 1.16. *Majme zobrazenia $f : A \rightarrow B$ a $g : B \rightarrow C$. **Súčinom** (zložením) zobrazení f a g je zobrazenie $h : A \rightarrow C$ definované predpisom*

$$h(a) = g(f(a))$$

pre každé $a \in A$.

Zobrazenie h budeme označovať $g \circ f$. Platí teda $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ pre každý prvok $a \in A$. Je tu odlišnosť oproti súčinu relácií, kde sa skladanie zapisuje v poradí „zľava doprava“. Pri zobrazeniach skladanie zapisujeme „sprava doľava“.

Pre súčin zobrazení platí asociatívny zákon, ale nie komutatívny. Ak má $f \circ g$ zmysel, potom $g \circ f$ vôbec nemusí byť definované.

1.5 Úlohy

- 1.1. Majme množiny $S = \{1, 2, 3, 5\}$ a $T = \{-3, 0, 7\}$. Utvorte $S \times T$, $T \times S$, $S \times S$ a $T \times T$.
- 1.2. Je daná množina $L = \{(1, 0), (0, 1), (2, 1), (0, 0), (2, 2), (0, 2), (2, 0)\}$. Rozhodnite, či existujú také množiny M a P , pre ktoré by platilo $L = M \times P$.
- 1.3. Nájdite bijektívne zobrazenie množiny $A \times B$ na množinu $B \times A$ pre dve zvolené množiny A a B .
- 1.4. Zistite, ktoré z vlastností reflexívnosť, symetrickosť, antisymetrickosť, tranzitívnosť platia v nasledujúcich binárnych reláciách:
 - a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2; y = x + 1\}$,
 - b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2; y > x\}$,
 - c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; |x - y| = 1\}$,
 - d) $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; |x - y| \leq m, m \in \mathbb{N}, (m\text{-- pevne zvolené})\}$,
 - e) $\mathcal{R}_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq y\}$,
 - f) $\mathcal{R}_6 = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2; x = y\}$, pričom A je ľubovoľná množina.
- 1.5. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich binárnych relácií sú ekvivalencie. V prípade ekvivalencie nájdite aj triedy ekvivalencií:

- a) „Mať rovnaký polomer ako“ na množine kružníc v rovine,
- b) $|x - y| \leq 1$, $x, y \in \mathbb{R}$,
- c) $|x| = |y|$, $x, y \in \mathbb{C}$.

1.6. Utvorte množinu \mathbb{Z}_6 zvyškových tried množiny \mathbb{Z} .

1.7. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich zobrazení je injektívne, surjektívne, bijektívne:

- a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$,
- b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 1$ pre všetky $x \in \mathbb{Z}$,
- c) $f : \langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$, $f(x) = \sin x$ pre všetky $x \in \langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Kapitola 2

Boolovská algebra

2.1 Čiastočne usporiadané množiny

Čitateľ určite pozná usporiadanie množiny prirodzených čísel alebo iných číselných množín podľa veľkosti. Takéto usporiadanie sa v matematike chápe ako špeciálny typ relácie, t.j. ako vzťah dvojice čísel, a relácia sa obyčajne označuje symbolom „ \leq “ (menší alebo rovný). Iné binárne relácie nám umožňujú usporiadať množiny (nielen číselné) podľa iných kritérií.

DEFINÍCIA 2.1. Relácia čiastočného usporiadania na nejakej množine $A \neq \emptyset$ je každá relácia na množine A , ktorá je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Príkladmi relácií čiastočného usporiadania sú napr.: relácia deliteľnosti $|$ na množine \mathbb{N} , relácia inklúzie \subset na systéme množín, usporiadanie čísel podľa veľkosti \leq na \mathbb{R} , ... Ak nebudeme presne špecifikovať, o akú binárnu reláciu sa jedná, budeme na označenie relácie čiastočného usporiadania používať symbol \preceq . Potom môžeme definíciu 2.1 sformulovať takto:

DEFINÍCIA 2.2. Nech $A \neq \emptyset$. Binárna relácia \preceq na množine A je **reláciou čiastočného usporiadania** práve vtedy, ak pre všetky $a, b, c \in A$ platí:

$$\begin{aligned} a &\preceq a, \\ a &\preceq b \wedge b \preceq a \Rightarrow a = b, \\ a &\preceq b \wedge b \preceq c \Rightarrow a \preceq c. \end{aligned}$$

Usporiadaná dvojica $(A; \preceq)$ sa nazýva **čiastočne usporiadaná množina**.

Ak porovnáваме čísla (okrem komplexných) podľa veľkosti, tak ľubovoľné dve čísla sa dajú porovnať. Táto vlastnosť pre mnohé čiastočne usporiadané množiny naplatí.

DEFINÍCIA 2.3. Čiastočne usporiadaná množina $(A; \preceq)$, v ktorej pre všetky $a, b \in A$ je $a \preceq b$ alebo $b \preceq a$ sa nazýva **lineárne usporiadaná**.

PRÍKLAD 2.1. Nech $A = \{a, b, c\}$. Utvoríme potenčnú množinu $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\},$

$\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$. Ľahko overíme, že $(\mathcal{P}(A); \subset)$ je čiastočne usporiadaná množina. Nie je však lineárne usporiadaná, lebo napríklad $\{c\} \not\subset \{a, b\}$ ani $\{a, b\} \not\subset \{c\}$.

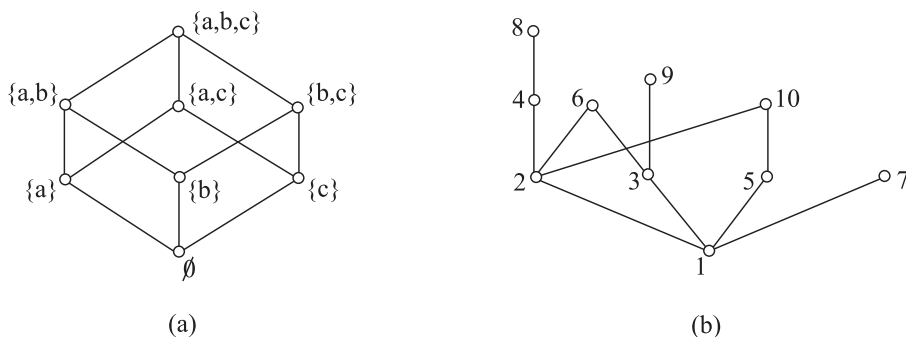
PRÍKLAD 2.2. Nech A je neprázdna podmnožina množiny reálnych čísel \mathbb{R} . Potom $(A; \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina a je aj lineárne usporiadaná.

Konečné čiastočne usporiadané množiny môžeme znázorňovať pomocou grafov podobne ako ktorékoľvek iné binárne relácie. V takých obrázkoch by však bolo veľmi veľa hrán. Skôr ako si vysvetlíme, ktoré hrany netreba zakresľovať, potrebujeme pojem *pokrývajúci prvok*.

DEFINÍCIA 2.4. Nech $(A; \preceq)$ je čiastočne usporiadaná množina a nech $a, b \in A$. Hovoríme, že prvok a **pokrýva** prvok b , ak $a \neq b$ a platí:

1. $a \preceq b$,
2. neexistuje $x \in A$, $x \neq a$, $x \neq b$ taký, že $a \preceq x \preceq b$.

Čiastočne usporiadané množiny $(A; \preceq)$ budeme znázorňovať pomocou tzv. **Hasseho diagramov**. Vrcholy odpovedajúce prvkom množiny A umiestnime v rovine tak, že ak $a \preceq b$, tak vrchol a umiestnime nižšie ako vrchol b . Vrcholy a, b spojíme čiarou (hranou) práve vtedy, ak prvok b pokrýva prvok a . Tým si ušetríme kreslenie šípky, pretože orientácia hrany je uvažovaná zdola nahor, a nekreslíme ani hrany medzi dvojicami prvkov, ktorých relačný vzťah vyplýva z tranzitívnosti. Reflexívnosť relácie dovoľuje nekresliť ani slučky pri vrchoch. Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny z príkladu 2.1 je na obr. 2.1(a).



Obr. 2.1

PRÍKLAD 2.3. Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $(A; |)$ je čiastočne usporiadaná množina, pretože relácia deliteľnosti $|$ je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Hasseho diagram je na obr. 2.1(b).

DEFINÍCIA 2.5. Nech $(A; \preceq)$ je čiastočne usporiadaná množina. Prvok $a \in A$ sa nazýva **najmenší (najväčší)** prvok v $(A; \preceq)$, ak pre každý prvok $x \in A$ platí $a \preceq x$ ($x \preceq a$).

Prvok $a \in A$ sa nazýva **minimálny (maximálny) prvok** v $(A; \preceq)$, ak neexistuje prvok $x \in A$, $x \neq a$ taký, že $x \preceq a$ ($a \preceq x$).

Najmenší (najväčší) prvok je zároveň aj minimálnym (maximálnym) prvkom čiastočne usporiadanej množiny, ale naopak to neplatí. Ak čiastočne usporiadaná množina má najmenší, resp. najväčší prvok, je jediným a je zároveň aj jej jediným minimálnym, resp. maximálnym prvkom. Napríklad v $(A; \preceq)$ z príkladu 2.3 číslo 1 je najmenším prvkom a je zároveň aj jediným minimálnym, maximálnymi prvkami sú čísla 6, 7, 8, 9 a 10 a najväčší prvok neexistuje. V $(\mathcal{P}(A); \subset)$ z príkladu 2.1 je \emptyset jediným minimálnym a súčasne aj najmenším prvkom a prvok $\{1, 2, 3\}$ je jediným maximálnym a zároveň aj najväčším prvkom.

Nech M je neprázdna podmnožina množiny A . Ak $(A; \preceq)$ je čiastočne usporiadaná množina, tak aj $(M; \preceq)$ je čiastočne usporiadaná množina. Hovoríme, že d je **najväčší (najmenší, maximálny, minimálny)** prvok množiny $M \subset A$, ak je najväčším (najmenším, maximálnym, minimálnym) prvkom čiastočne usporiadanej množiny $(M; \preceq)$.

DEFINÍCIA 2.6. Nech $(A; \preceq)$ je čiastočne usporiadaná množina a $\emptyset \neq M \subset A$. Množina

$$h(M) = \{x \in A; (\forall a \in M : a \preceq x)\}$$

je **množina všetkých horných ohraničení** množiny M a množina

$$d(M) = \{x \in A; (\forall a \in M : x \preceq a)\}$$

je **množina všetkých dolných ohraničení** množiny M . Najmenší (najväčší) prvok množiny $h(M)$ ($d(M)$), ak existuje, sa nazýva **supremum (infimum)** množiny M a zapisuje sa **sup** M (**inf** M).

PRÍKLAD 2.4. Hľadajme supremum a infimum niektorých podmnožín množiny A z príkladu 2.3. Napríklad:

$$\begin{array}{ll} \sup\{2, 3, 6\} = 6, & \inf\{2, 3, 6\} = 1, \\ \sup\{2, 3, 5, 6\} \text{ neexistuje,} & \inf\{2, 3, 5, 6\} = 1, \\ \sup\{2, 5\} = 10, & \inf\{2, 5\} = 1, \\ \sup\{2, 10\} = 10, & \inf\{2, 10\} = 2. \end{array}$$

2.2 Zväzy

Teória zväzov sa využíva v teórii konštrukcie počítačov a pri dokazovaní správnosti programov. Jej výsledky a metódy sa používajú aj pri štúdiu grúp a iných algebraických štruktúr. My sa zameriame na použitie teórie zväzov v Boolovskej algebre.

Nech $(A; \preceq)$ je čiastočne usporiadaná množina a nech $x, y \in A$. Pre $\inf \{x, y\}$ a $\sup \{x, y\}$, ak existujú, zavedieme tieto označenia:

$$\inf \{x, y\} = x \wedge y$$

a čítame **priesek** prvkov x a y . Ďalej

$$\sup \{x, y\} = x \vee y$$

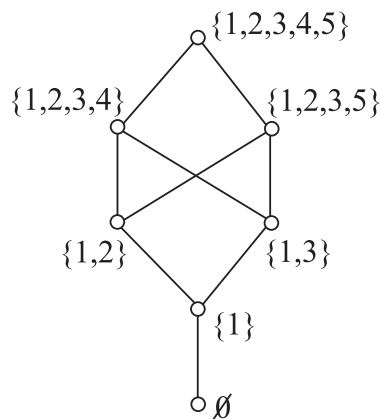
a čítame **spojenie** prvkov x a y .

V príklade 2.4 sme videli, že nie pre každú dvojicu prvkov čiastočne usporiadanej množiny existuje spojenie (nie každá dvojica prvkov má spojenie). Podobne je to aj s priesekom. V lineárne usporiadanej množine majú každé dva prvky priesek aj spojenie, je nim menší, resp. väčší z nich.

DEFINÍCIA 2.7. **Zväz** je čiastočne usporiadaná množina, v ktorej každé dva prvky majú spojenie aj priesek.

PRÍKLAD 2.5. Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a nech $B = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ je jej podmnožina. Ľahko sa presvedčíme, že $(B; \subset)$ je čiastočne usporiadaná množina. Jej Hasseho diagram je na obr. 2.2. Nie je to však zväz, lebo prvky $\{1, 2\}$ a $\{1, 3\}$ nemajú spojenie (množina ich horných ohraničení nemá najmenší prvok) a prvky $\{1, 2, 3, 4\}$ a $\{1, 2, 3, 5\}$ nemajú priesek (množina ich dolných ohraničení nemá najväčší prvok).

Čiastočne usporiadaná množina $(A; \subset)$ z príkladu 2.1 je zväz a v jej Hasseho diagrame na obr. 2.1 sa ľahko presvedčíme, že každá dvojica prvkov má priesek aj spojenie.



Obr. 2.2

VETA 2.1. Nech $(L; \preceq)$ je zväz. Potom pre ľubovoľné $x, y, z \in L$ platí:

$$\begin{array}{lll} x \vee x = x, & x \wedge x = x, & \text{idempotentnosť,} \\ x \vee y = y \vee x, & x \wedge y = y \wedge x, & \text{komutatívnosť,} \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z, & x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z, & \text{asociatívnosť,} \\ x \vee (y \wedge x) = x, & x \wedge (y \vee x) = x, & \text{absorbcia.} \end{array}$$

POZNÁMKA. Vo zväze priesek a spojenie môžeme chápať ako zobrazenia:

$$\wedge : A \times A \rightarrow A, \quad \vee : A \times A \rightarrow A,$$

čo sú **binárne operácie**. Binárna operácia teda priradí dvom prvkom množiny jeden prvok z tej istej množiny. Podobne **unárna operácia** priradí len jednému

prvku jeden prvok z tej istej množiny. Rovnocennou definíciou zväzu je aj nasledujúca:

DEFINÍCIA 2.8. **Zväz** je algebraický systém $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge})$, kde $L \neq \emptyset$ a pre operácie prieseku $\dot{\wedge}$ a spojenia $\dot{\vee}$ platia vlastnosti: idempotentnosť, komutatívnosť, asociatívnosť a absorbcia.

PRÍKLAD 2.6. Na zväz $(A; \subset)$ z príkladu 2.5, ktorého Hasseho diagram je na obr. 2.1, sa môžeme pozeráť aj ako na množinu s definovanými binárnymi operáciami zjednotenia a prieniku. Čitateľ si ľahko preverí, že algebraický systém $(\mathcal{P}(A); \cup, \cap)$ vyhovuje definícii 2.8.

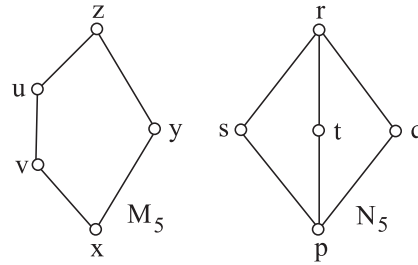
Algebraický systém $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ zväzom nie je, lebo hneď prvá vlastnosť – idempotentnosť neplatí.

DEFINÍCIA 2.9. Zväz $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge})$ sa nazýva **distributívny**, ak pre všetky $x, y, z \in L$ platí:

$$\begin{aligned} x \dot{\wedge} (y \dot{\vee} z) &= (x \dot{\wedge} y) \dot{\vee} (x \dot{\wedge} z), \\ x \dot{\vee} (y \dot{\wedge} z) &= (x \dot{\vee} y) \dot{\wedge} (x \dot{\vee} z). \end{aligned}$$

PRÍKLAD 2.7. Na obr. 2.3 sú Hasseho diagramy zväzov N_5 a M_5 (tieto označenia sú zaužívané v literatúre). Nie sú distributívne, lebo v každom sa dá nájsť trojica prvkov, pre ktorú neplatí aspoň jedna z rovností v definícii 2.9. Napr. v N_5 je $u \dot{\wedge} (v \dot{\vee} y) = u \dot{\wedge} z = u$, ale $(u \dot{\wedge} v) \dot{\vee} (u \dot{\wedge} y) = v \dot{\vee} x = v$.

Podobne v M_5 je $s \dot{\wedge} (t \dot{\vee} q) = s \dot{\wedge} r = s$, ale $(s \dot{\wedge} t) \dot{\vee} (s \dot{\wedge} q) = p \dot{\vee} p = p$.



Obr. 2.3

V Každom konečnom zväze existuje jediný najväčší prvok I (**horné univerzálne ohraničenie**) a jediný najmenší prvok 0 (**dolné univerzálne ohraničenie**). Tieto prvky môžeme označiť aj v symbolickom zápise zväzu takto: $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$.

DEFINÍCIA 2.10. Nech $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$ je zväz. Prvok $x' \in L$ nazývame **komplementom** prvku $x \in L$ práve vtedy, ak

$$x \dot{\wedge} x' = 0 \quad a \quad x \dot{\vee} x' = I.$$

PRÍKLAD 2.8. Pre prvky zväzu z príkladu 2.6, ktorého Hasseho diagram je na obr. 2.1(a), platí $0 = \emptyset$ a $I = \{a, b, c\}$. Ďalej je $0' = I$, $I' = 0$, $\{a\}' = \{b, c\}$, $\{b\}' = \{a, c\}$, $\{c\}' = \{a, b\}$, $\{a, b\}' = \{c\}$, $\{a, c\}' = \{b\}$, $\{b, c\}' = \{a\}$. Ku každému prvku teda existuje práve jeden komplement.

Pre zväz M_5 na obr. 2.3 platí $0 = p$ a $I = r$. Ďalej $0' = I$, $I' = 0$, $s' = t$, $s' = q$, $t' = s$, $t' = q$, $q' = s$, $q' = t$,

teda prvky s, t, q majú po dva komplementy. Existujú zväzy, v ktorých niektoré prvky majú viac komplementov.

DEFINÍCIA 2.11. *Zväz $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$ sa nazýva **komplementárny práve vtedy, ak každý jeho prvok má komplement. Distributívny a komplementárny zväz nazývame boolovským zväzom.***

LEMA 2.2. *V boolovskom zväze $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$ má každý prvok práve jeden komplement.*

POZNÁMKA. Dá sa ukázať, že ak je zväz konečný a každý jeho prvok má práve jeden komplement, tak je aj distributívny. Už sme si ukázali, že $(\mathcal{P}(A); \subset)$, kde $A = \{a, b, c\}$, je zväz, že je distributívny aj komplementárny, teda boolovský. Platí aj to pre každú inú konečnú množinu, t.j keď $|A| = n$. Taký zväz má 2^n prvkov a môžeme ho zapisovať aj $(\mathcal{P}(A); \cup, \cap)$. Dá sa tiež ukázať, že každý konečný boolovský zväz má 2^n prvkov pre nejaké nezáporné celé číslo n , a že jeho Hasseho diagram je zhodný s Hasseho diagramom zväzu $(\mathcal{P}(A); \cup, \cap)$ pre to isté n .

Komplement v boolovskom zväze $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$ môžeme chápať ako unárnu operáciu z množiny L do množiny L . Potom sa na boolovský zväz môžeme pozeráť ako na algebraický systém $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, ', 0, I)$, kde $L \neq \emptyset$, operácie $\dot{\vee}, \dot{\wedge}$ sú binárne operácie a $'$ je unárna operácia na L . Takému vyjadreniu zväzu budeme hovoriť **boolovská algebra**. Okrem už uvedených vlastností idempotentnosť, komutatívnosť, asociatívnosť, absorpcia, distributívnosť a existencia komplementu ku každému prvku platí v boolovskej algebre aj mnoho ďalších vlastností. Uvedieme len najhlavnejšie z nich, ktoré budeme neskôr používať pri úprave boolovských funkcií:

- | | |
|--|---|
| (1) $x \dot{\vee} 0 = x,$ | (2) $x \dot{\wedge} I = x,$ |
| (3) $x \dot{\vee} x' = I,$ | (4) $x \dot{\wedge} x' = 0,$ |
| (5) $x \dot{\wedge} 0 = 0,$ | (6) $x \dot{\vee} I = I,$ |
| (7) $(x \dot{\vee} y)' = x' \dot{\wedge} y',$ | (8) $(x \dot{\wedge} y)' = x' \dot{\vee} y',$ |
| (9) $x \dot{\vee} (x' \dot{\wedge} y) = x \dot{\vee} y,$ | (10) $x \dot{\wedge} (x' \dot{\vee} y) = x \dot{\wedge} y.$ |

POZNÁMKA. Vlastnosti (7) a (8) sú známe pod názvom de Morganové pravidlá. Doporučujeme čitateľovi všimnúť si podobnosť množinových vlastností z vety 1.1 a vlastností boolovskej algebr.

PRÍKLAD 2.9. Majme dvojprvkovú množinu $D = \{0, 1\}$. Nech pre prvky množiny D sú definované binárne operácie priesek a spojenie a unárna operácia $'$ pomocou tabuliek:

$\dot{\wedge}$	0	1	$\dot{\vee}$	0	1	$'$	
0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0

V tomto prípade dolné univerzálne ohraničenie je 0 a horné univerzálne ohraničenie je 1 (musíme si uvedomiť, že nie sú to čísla 0 a 1). Bez väčších ťažkosti si môžeme overiť, že algebraický systém $(D; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, ', 0, 1)$ je boolovská algebra.

2.3 Boolovské funkcie

V tejto časti poukážeme na aplikácie boolovských algebier v elektrotechnike a v logike.

DEFINÍCIA 2.12 *Nech $(D; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, ', 0, 1)$ je boolovská algebra, kde $D = \{0, 1\}$. Zobrazenie $f : D^n \rightarrow D$ sa nazýva **boolovská funkcia** s n premennými. Zapisujeme ju*

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

kde $y, x_i \in D$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$.

Z uvedeného vyplýva, že boolovská funkcia s n premennými každej usporiadanej n -tici núl a jedničiek z množiny D^n priradí hodnotu 0 alebo 1.

VETA 2.3. *Existuje práve 2^{2^n} rôznych boolovských funkcií s n premennými.*

PRÍKLAD 2.10. Z vety 2.3 vyplýva, že existuje práve 16 rôznych boolovských funkcií s 2 premennými. Každéj zo štyroch usporiadaných dvojíc (x_1, x_2) funkcia f_i , $i = 1, 2, \dots, 16$, priradí hodnotu 0 alebo 1. Všetkých 16 funkcií je vypísaných v nasledujúcej tabuľke.

(x_1, x_2)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
(0,0)	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
(0,1)	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
(1,0)	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
(1,1)	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1

DEFINÍCIA 2.13. *Nech x_i^* označuje hodnotu $x_i \in D$ alebo hodnotu jeho komplementu x_i' pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$. Boolovskú funkciu*

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^* \dot{\wedge} x_2^* \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} x_n^*$$

*nazývame **elementárna konjunkcia** a boolovskú funkciu*

$$d(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^* \dot{\vee} x_2^* \dot{\vee} \dots \dot{\vee} x_n^*$$

*nazývame **elementárna disjunkcia**.*

Nech k_1, k_2, \dots, k_j , kde $0 \leq j \leq 2^n$, sú rôzne elementárne konjunkcie. Funkcia

$$f = 0 \dot{\vee} k_1 \dot{\vee} k_2 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} k_j$$

*je boolovská funkcia s n premennými v **normálnom disjunktívnom tvare (NDT)**.*

Nech d_1, d_2, \dots, d_r , kde $0 \leq r \leq 2^n$, sú rôzne elementárne disjunkcie. Funkcia

$$f = 1 \dot{\wedge} d_1 \dot{\wedge} d_2 \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} d_r$$

*je boolovská funkcia v **normálnom konjunktívnom tvare (NKT)**.*

Vzniká prirodzene otázka, či sa dá každá boolovská funkcia napísať v niektorom z týchto tvarov.

VETA 2.4. *Každá boolovská funkcia sa dá zapísať v normálnom disjunktívnom tvare aj v normálnom konjunktívnom tvare.*

PRÍKLAD 2.11. Upravme na normálny disjunktívny tvar boolovskú funkciu $f = (x'_1 \wedge x'_3) \vee (x'_2 \wedge x'_3)$. Využijeme vlastnosti boolovskej algebry a robíme postupné úpravy tak, aby sme neporušili rovnosť.

$$\begin{aligned} f &= (x'_1 \wedge x'_3) \vee (x_2 \wedge x_3) = [(x'_1 \wedge x'_3) \wedge (x'_2 \vee x_2)] \vee [(x_2 \wedge x_3) \wedge (x'_1 \vee x_1)] = \\ &= (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3). \end{aligned}$$

Využili sme, že $(x'_1 \vee x_1) = (x'_2 \vee x_2) = 1$ podľa vlastnosti (3) predchádzajúceho paragrafu. Použili sme aj vlastnosť (6), z ktorej sme dostali $(x'_1 \wedge x'_3) \wedge (x'_2 \vee x_2) = (x'_1 \wedge x'_3)$ a $(x_2 \wedge x_3) \wedge (x'_1 \vee x_1) = (x_2 \wedge x_3)$. Okrem toho sme použili vlastnosť distributívnosť v opačnom poradí, tzv. vyberanie pred zátvorku ako aj komutatívnosť a asociatívnosť.

Uvedieme aj iný spôsob ako boolovskú funkciu previesť na normálny disjunktívny, resp. konjunktívny tvar. Pre porovnanie pracujme s tou istou funkciou f ako v predchádzajúcom príklade. Vyrobíme si tabuľku, v ktorej v prvých troch stĺpcoch sú všetky trojice hodnôt premenných x_1, x_2 a x_3 . V stĺpci f budú hodnoty boolovskej funkcie pre príslušné usporiadané trojice núl a jedničiek. V stĺpci k_i vytvoríme v každom riadku, v ktorom hodnota funkcie je 1, elementárnu konjunkciu tak, aby jej hodnota pre príslušnú trojicu premenných bola tiež 1. Podobne v stĺpci d_i v každom riadku s hodnotou funkcie rovnou 0 vytvoríme elementárnu disjunkciu dávajúcu hodnotu 0 pre príslušnú trojicu premenných.

x_1	x_2	x_3	f	k_i	d_i
0	0	0	1	$x'_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3$	
0	0	1	0		$x_1 \vee x_2 \vee x'_3$
0	1	0	1	$x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3$	
0	1	1	1	$x'_1 \wedge x_2 \wedge x_3$	
1	0	0	0		$x'_1 \vee x_2 \vee x_3$
1	0	1	0		$x'_1 \vee x_2 \vee x'_3$
1	1	0	0		$x'_1 \vee x'_2 \vee x_3$
1	1	1	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$	

Ak vytvoríme disjunkciu elementárnych konjunktív zo stĺpca k_i a konjunkciu elementárnych disjunktív zo stĺpca d_i , tak dostaneme:

$$f = (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3),$$

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x'_3) \wedge (x'_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x'_1 \vee x_2 \vee x'_3) \wedge (x'_1 \vee x'_2 \vee x_3).$$

POZNÁMKA. V definícii 2.13 na začiatku NKT je jednička a na začiatku NDT je nula. Tieto konštanty vo väčšine prípadov nemusíme písať, ale dôležitú úlohu zohrávajú, ak sa jedná o funkciu, ktorá pre všetky hodnoty premenných nadobúda hodnotu 1, resp. 0.

Vo výrokovej logike pod *výrokom* rozumieme ľubovoľné tvrdenie, o ktorom má zmysel hovoriť, či je pravdivé alebo nepravdivé. Každému výroku môžeme priradiť jeho pravdivostnú hodnotu t.j. pravda (označujeme symbolom 1), resp. nepravda (používame symbol 0). Rozoznávame *elementárne výroky*, alebo výroky *zložené* z elementárnych pomocou logických operácií. Zloženým výrokom hovoríme aj *výrokové formuly*. Základnými logickými operáciami sú: *negácia* $'$, *konjunkcia* \wedge , *disjunkcia* \vee , *implikácia* \Rightarrow a *ekvivalencia* \Leftrightarrow . Čitateľ sa s nimi už určite stretol na strednej škole, preto ich nebudeme bližšie popisovať.

Každá formula výrokovej logiky sa dá zapísať (realizovať) pomocou boolovskej funkcie. Je tým daná jednoznačná korešpondencia medzi \wedge a \vee (*a* a *alebo*) na jednej strane a $\hat{\wedge}$ a $\hat{\vee}$ na strane druhej. Preto v ďalšom texte pri boolovských funkciách nemusíme používať symboly prieseku a spojenia $\hat{\wedge}$ a $\hat{\vee}$ „zdedené“ zo zväzov, ale budeme písať symboly logickej konjunkcie a disjunkcie, t.j. \wedge a \vee . Samozrejme v zápise výrokovej formuly pomocou boolovskej funkcie sa nevyskytuje implikácia ani ekvivalencia.

PRÍKLAD 2.12. Zapišme pomocou boolovskej funkcie výrokovú formulu

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)].$$

Zostrojíme si pravdivostnú tabuľku pre túto výrokovú formulu a stĺpec s pravdivostnými hodnotami celej formuly je zároveň stĺpcom hodnôt boolovskej funkcie pre príslušné hodnoty premenných (pravdivostných hodnôt elementárnych výrokov) p a q . Ďalej postupujeme podľa už opísaného postupu pri zapisovaní boolovskej funkcie v NDT alebo NKT. Takto získané zápisy sa často dajú pomocou vlastností boolovskej algebry značne zjednodušiť. Uvedený postup ukazuje nasledujúca tabuľka a potom zápis získaných funkcií v NDT a NKT. Je vidieť, že sa jedná o tzv. *tautológiu*, t.j. vždy pravdivý výrok.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	f
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Potom v normálnom disjunktívnom tvare je

$$f = (p \wedge q) \vee (p \wedge q') \vee (p' \wedge q) \vee (p' \wedge q')$$

a v normálnom konjunktívnom tvare je

$$f = 1,$$

pretože počet príslušných elementárnych disjunkcií je nula.

Boolovskú algebru možno s výhodou využiť pri navrhovaní kontaktných sietí. Kontaktné siete v praxi využívame pri kontrole práce nejakých zložitých sústav, pričom poruchu sústavy obyčajne signalizuje rozsvietená signalizačná žiarovka. Ukážeme, ako možno navrhnúť kontaktnú sieť na kontrolu takého systému.

PRÍKLAD 2.13. Pre sústavu troch strojov navrhňte kontaktnú sieť tak, aby signalizovala, že nastala niektorá z uvedených porúch:

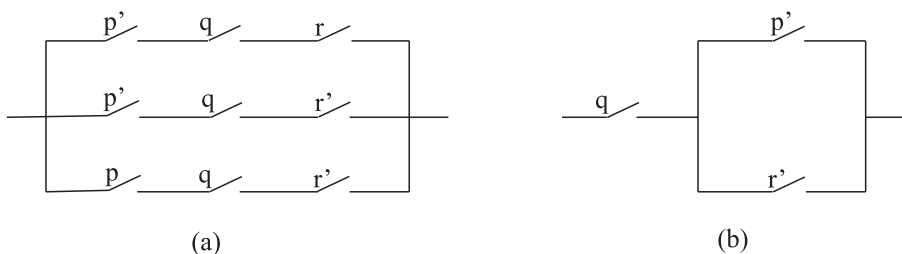
- a) prvý stroj nepracuje, druhý pracuje,
- b) prvý a druhý stroj pracujú, ale tretí nepracuje.

Riešenie. Stačia nám tri základné kontakty, pričom sa dohodáme, že kontaktom p prechádza prúd práve vtedy, keď pracuje prvý stroj, kontaktom q práve vtedy, keď pracuje druhý stroj a kontaktom r práve vtedy, keď pracuje tretí stroj. Celou sieťou bude prechádzať prúd práve vtedy, keď nastane niektorá z uvedených porúch. To znamená, že v našom prípade bude sieťou prechádzať prúd práve vtedy, ak nastane niektorá z nasledujúcich možností:

1. prvý stroj nepracuje, druhý pracuje a tretí pracuje,
2. prvý stroj nepracuje, druhý pracuje a tretí nepracuje,
3. prvý a druhý stroj pracujú, tretí nepracuje.

Túto situáciu môžeme realizovať napríklad kontaktnou sieťou na obr. 2.4(a) a sieť môžeme „boolovsky“ charakterizovať pomocou funkcie

$$f = (p' \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r') \vee (p \wedge q \wedge r')$$



Obr. 2.4

Mohli sme si pomôcť aj tabuľkou na výrobu elementárnych konjunkcií a elementárnych disjunkcií. Funkcia f je teraz zapísaná v NDT. Kontaktná sieť na obr. 2.4(a) je zbytočne zložitá. Ak využijeme vlastnosti boolovskej algebry, dá sa funkcia značne zjednodušiť:

$$\begin{aligned} f &= (p' \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r') \vee (p \wedge q \wedge r') = \\ &= [(p' \wedge q) \wedge (r \vee r')] \vee (p \wedge q \wedge r') = \\ &= (p' \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r') = q \wedge [p' \vee (p \wedge r')] = \end{aligned}$$

$$q \wedge [(p' \vee p) \wedge (p' \vee r')] = q \wedge (q' \vee r').$$

Tomuto výrazu zodpovedá kontaktná sieť na obr. 2.4(b), ktorá je podstatne jednoduchšia (je dokonca minimálna).

2.4 Úlohy

- 2.1. Ukážte, že relácia rovnosti na množine je súčasne čiastočným usporiadaním aj ekvivalenciou. Je to jediná relácia, pre ktorú to platí.
- 2.2. Ukážte, že každá konečná lineárne usporiadaná množina má súčasne najmenší aj najväčší prvok.
- 2.3. Nech F je množina všetkých reálnych funkcií f_i jednej reálnej premennej, ktorých definičný obor je $D \subset \mathbb{R}$. Reláciu \mathcal{R} definujme takto: Pre všetky $f_1, f_2 \in F$ je $f_1 \mathcal{R} f_2$ práve vtedy, ak pre všetky $x \in D$ je $f_1(x) \leq f_2(x)$. Ukážte, že $(F; \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina.
- 2.4. Nakreslite Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny $(M; |)$ (ak to je čiastočne usporiadaná množina), kde $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$ a $|$ je relácia deliteľnosti celých čísel.
- 2.5. Rozhodnite, či $(A; \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina, ak $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a relácia \mathcal{R} je definovaná:
 - a) $(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow a + b \leq c \wedge b \leq d$ pre všetky $(a, b), (c, d) \in A$,
 - b) $(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$ pre všetky $(a, b), (c, d) \in A$.
- 2.6. Ukážte, že každá lineárne usporiadaná množina je zväzom.
- 2.7. Presvedčte sa, že $(S; |)$, kde $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30, 60\}$ a $|$ je relácia deliteľnosti celých čísel, je zväz. Nakreslite jeho Hasseho diagram. Zistite, či tento zväz je distributívny a či každý jeho prvok má komplement.
- 2.8. Ukážte, že v každom distributívnom zväze pre ľubovoľné tri prvky x, y, z platí rovnosť

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$$

- 2.9. Nech x, y sú ľubovoľné prvky boolovskej algebry. Dokážte, že $x = y$ práve vtedy, ak $(x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = 0$.
- 2.10. Upravte boolovskú funkciu $f = x_1 \wedge [(x_2' \wedge x_4) \vee x_3']$ na normálny konjunktívny tvar aj na normálny disjunktívny tvar.

2.11. Zistite, či boolovské funkcie

$$f = [(x \wedge y) \vee (x \vee z)]' \vee x \quad \text{a} \quad g = [x' \wedge (z \vee (y' \wedge z))] \vee x$$

sa rovnajú.

2.12. Svetlo v chodbe je ovládané z troch vypínačov a v každom momente môže byť zapnuté aj vypnuté ktorýmkoľvek z nich. Navrhnite kontaktnú sieť pre takéto zapojenie.

2.13. Výrobná linka pozostáva z troch strojov. Navrhnite minimálnu kontaktnú sieť, ktorá signalizuje, že nastal niektorý z uvedených stavov:

- a) prvý stroj pracuje a z ostatných jeden pracuje a jeden nie,
- b) prvý stroj nepracuje a z ostatných jeden pracuje a jeden nie.

2.14. Zapište pomocou boolovskej funkcie v normálnom konjunktívnom aj v normálnom disjunktívnom tvare výrokovú formulu

$$(((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow A$$

a minimalizujte získanú boolovskú funkciu.

Kapitola 3

Grupy, telesá a polia

3.1 Grupy

Teória grúp patrí medzi mladé matematické disciplíny. Jej začiatky siahajú do prvej polovice minulého storočia, keď v roku 1826 nórsky matematik Henrik Abel podal dôkaz neriešiteľnosti algebraickej rovnice 5. stupňa pomocou odmocnín. Grupy našli široké uplatnenie v matematických i nematematických disciplínach a ich význam s rozvojom informatiky rastie.

Vieme, že usporiadanej dvojici celých čísel (a, b) môžeme priradiť celé číslo $c = a + b$. Sčítavanie je vlastne zobrazenie f , v tomto prípade $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, kde $f(a, b) = a + b$. Zobrazenie takého typu sa nazýva **binárnou operáciou**.

PRÍKLAD 3.1. Riešme rovnicu $3x = 4$. Obyčajný postup si rozpišeme podrobnejšie (pozri pravý stĺpec):

Pritom využívame, že $\frac{1}{3}$ je vzhľadom na násobenie *inverzný* prvok k číslu 3, pri zmene poradia zátvoriek využívame *asociatívnosť* násobenia, potom to, že číslo 1 je vzhľadom na násobenie *neutrálny* prvok a v neposlednom rade to, že súčin dvoch reálnych čísel je opäť reálne číslo, t.j. *uzavretosť* množiny reálnych čísel vzhľadom na operáciu násobenia. Práve vymenované štyri vlastnosti nám umožňujú zaviesť pojem grupy.

$$\begin{aligned} 3x &= 4 & / \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}(3x) &= \frac{1}{3} \cdot 4 \\ \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right)x &= \frac{4}{3} \\ 1 \cdot x &= \frac{4}{3} \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

DEFINÍCIA 3.1. *Nech $G \neq \emptyset$ je množina. Grupa je algebraický systém $(G; *)$, pre ktorý platí:*

1. *Pre všetky $x, y \in G$ aj $x * y \in G$.*
2. *Pre všetky $x, y, z \in G$ je $x * (y * z) = (x * y) * z$.*
3. *V G existuje prvok e taký, že pre každé $x \in G$ je $x * e = e * x = x$.*

4. Ku každému $x \in G$ existuje taký prvok $x' \in G$, že $x * x' = x' * x = e$. Ak G je konečná množina a $|G| = n$, tak číslo n je **rád** grupy $(G; *)$.

POZNÁMKA. Vlastnosť 1. z definície vyjadruje **uzavretosť** množiny vzhľadom na operáciu $*$. Vlastnosť 2. poznáme pod názvom **asociatívnosť**. Prvok e z vlastnosti 3. sa nazýva **neutrálny prvok** vzhľadom na operáciu $*$ a prvok x' z vlastnosti 4. je **inverzný prvok** k prvku x vzhľadom na operáciu $*$.

Ak pre $(G; *)$ platí vlastnosť 1. (uzavretosť) a vlastnosť 2. (asociatívnosť), algebraický systém $(G; *)$ nazývame **pologrupa**.

VETA 3.1. V každej grupe $(G; *)$ existuje práve jeden neutrálny prvok e a ku každému prvku x existuje práve jeden inverzný prvok x' .

DEFINÍCIA 3.2. Grupa $(G; *)$ sa nazýva **komutatívna** alebo **abelovská**, ak pre všetky $x, y \in G$ platí

$$x * y = y * x.$$

PRÍKLAD 3.2. Algebraický systém $(\mathbb{N}; -)$ nie je grupa, pretože existujú prirodzené čísla m, n také, že $m - n$ je záporné číslo, a teda neplatí uzavretosť.

Pre algebraický systém $(\mathcal{P}(A); \cap)$ platí, že pre každé $A_i, A_j \in \mathcal{P}(A)$ aj $A_i \cap A_j \in \mathcal{P}(A)$, platí asociatívnosť prieniku množín, a tiež existuje neutrálny prvok $e = A$ taký, že pre každú množinu $A_i \in \mathcal{P}(A)$, teda $A_i \subset A$, je $A_i \cap e = e \cap A_i = A_i$. Nie je to však grupa, lebo v $\mathcal{P}(A)$ žiadna vlastná podmnožina množiny A nemá inverzný prvok.

Lahko sa preverí, že $(\mathbb{Z}; +)$ je grupa a tiež $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ je grupa.

Algebraický systém $(\mathbb{R}; \cdot)$ grupou nie je, lebo k číslu 0 neexistuje inverzný prvok.

Vlastnosti grupy sú zovšeobecnením sčítavania a násobenia reálnych čísel. Ak sa jedná o grupu s binárnou operáciou sčítavania $(G; +)$, hovoríme o **aditívnej** grupe. Podobne **multiplikatívna** grupa je grupa $(G; \cdot)$ s operáciou násobenia.

VETA 3.2. Nech $(G; *)$ je grupa a nech $a, b \in G$. Potom rovnica

$$a * x = b \quad (x * a = b)$$

má práve jedno riešenie

$$x = a' * b \quad (x = b * a').$$

Z vety 3.2 vyplýva **pravidlo o krátení** zľava (sprava): Pre všetky $a, x_1, x_2 \in G$ platí:

$$a * x_1 = a * x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$(x_1 * a = x_2 * a \Leftrightarrow x_1 = x_2).$$

V abelovskej grupe teda rovnice $x_1 * a = b$ a $a * x_2 = b$ majú rovnaké riešenie

$$x_1 = x_2 = b * a'.$$

Táto veta nám vraví kedy rovnice toho typu majú pre operácie sčítavania a násobenia čísel jednoznačné riešenie a kedy nie. Väčšinou riešime takéto rovnice už na základných a stredných školách a ani si neuvedomujeme, že pracujeme napr. na grupách $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ a podobne. O číselných množinách a operáciách sčítavania a násobenia čísel vieme veľa. Veľkou prednosťou grúp je, že vlastností grúp „rovnakého typu“ sa zhodujú bez ohľadu na to, o akú množinu a akú binárnu operáciu sa jedná. Potom stačí ukázať, že sa jedná o určitý typ grupy a môžeme využívať všetky vlastnosti dokázané na inej grupe rovnakého typu. Čo rozumieme pod grupami rovnakého typu nám vystihuje pojem *izomorfizmus*.

DEFINÍCIA 3.3. Dve grupy $(A; \square)$ a $(B; \triangle)$ sú **izomorfné** práve vtedy, ak existuje bijektívne zobrazenie $\varphi : A \rightarrow B$ také, že pre všetky $a_1, a_2 \in A$ je

$$\varphi(a_1 \square a_2) = \varphi(a_1) \triangle \varphi(a_2).$$

PRÍKLAD 3.3. Na množine zvyškových tried modulo m (pozri paragraf 1.3) si definujeme operácie \oplus a \odot takto:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a + b} \quad \text{a} \quad \bar{a} \odot \bar{b} = \overline{a \cdot b}.$$

Nech $K = \{1, -1, i, -i\}$ je podmnožina komplexných čísel. Zistite, či algebraické systémy $(\mathbb{Z}_4; \oplus)$ a $(K; \cdot)$ sú izomorfné grupy.

Riešenie. Všetky výsledky binárnych operácií \oplus a \cdot na uvedených množinách môžeme zapísať do **Cayleyho** tabuliek:

\oplus	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

\cdot	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Obe množiny sú uzavreté vzhľadom na operáciu, lebo v poli tabuľky sú iba prvky príslušnej množiny. Neutrálnym prvkom v prvom prípade je $\bar{0}$ a v druhom 1. V tabuľke to vidíme tak, že sa v riadku (stĺpci) odpovedajúcemu neutrálnemu prvku zopakuje riadok (stĺpec) zo záhlavia. Inverzný prvok k nejakému prvku nájdeme tak, že v riadku, ktorý tomu prvku odpovedá, nájdeme neutrálny prvok a nad ním v záhlaví tabuľky je inverzný. Platí to aj pre stĺpce. V prvom prípade je $\bar{0}' = \bar{0}$, $\bar{1}' = \bar{3}$, $\bar{2}' = \bar{2}$ a $\bar{3}' = \bar{1}$, v druhom $1' = 1$, $-1' = -1$, $i' = -i$ a $-i' = i$. Iba asociatívnosť sa nedá zistiť priamo z tabuľky. Pre $(K; \cdot)$ asociatívnosť platí, pretože

platí pre násobenie ľubovoľných troch komplexných čísel. Pri sčítavaní zvyškových tried modulo m pre ľubovoľné $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_m$ je

$$\bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z}) = \bar{x} \oplus \overline{(y+z)} = \overline{x+(y+z)}$$

$$(\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z} = \overline{x+y} \oplus \bar{z} = \overline{(x+y)+z}.$$

Keďže $x + (y + z) = (x + y) + z$, asociatívnosť sčítavania v \mathbb{Z}_m platí, a teda platí aj v \mathbb{Z}_4 . (Podobne sa ukáže asociatívnosť násobenia \odot zvyškových tried.)

Algebraické systémy $(\mathbb{Z}_4; \oplus)$ a $(K; \cdot)$ sú teda grupy. Uvažujme teraz bijektívne zobrazenie $\varphi : \mathbb{Z}_4 \rightarrow K$ definované

$$\varphi = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Dá sa bez ťažkostí preveriť, že pre každú dvojicu prvkov $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_4$ je

$$\varphi(\bar{x} \oplus \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) \cdot \varphi(\bar{y}).$$

Ide teda o izomorfné grupy.

POZNÁMKA. Ak máme dve izomorfné grupy s malým počtom prvkov, potom sa ich Cayleyho tabuľky dajú zostrojiť tak, že po položení na seba sa prekrývajú presne podľa zvoleného izomorfného zobrazenia φ . Doporučujeme čitateľovi zmeniť poradie prvkov v záhlaví jednej tabuľky tak aby sa prekrývali $\bar{0}$ s 1, $\bar{1}$ s i , $\bar{2}$ s -1 a $\bar{3}$ s $-i$.

3.2 Cyklické grupy

Grupy uvedené v predchádzajúcom príklade majú aj ďalšiu vlastnosť, sú *cyklické*. Pred definovaním pojmu cyklickosť potrebujeme pojem *mocniny* prvku.

DEFINÍCIA 3.4. *Nech $(G; *)$ je grupa a nech $n \in \mathbb{Z}$. Potom **n-tou mocninou** prvku $x \in G$ nazývame taký prvok $x^n \in G$, pre ktorý platí:*

$$\begin{aligned} x^n &= \overbrace{x * x * \dots * x}^n, & \text{ak } n > 0, \\ x^n &= 1, & \text{ak } n = 0, \\ x^n &= (x')^{-n}, & \text{ak } n < 0. \end{aligned}$$

DEFINÍCIA 3.5. *Nech $(G; *)$ je grupa a nech $x \in G$. Ak existuje také prirodzené číslo n , že $x^n = 1$, hovoríme, že prvok x má **konečný rád**. Najmenšie prirodzené číslo n , pre ktoré je $x^n = 1$, nazývame **rád prvku** x . Ak neexistuje také n , prvok x má nekonečný rád.*

DEFINÍCIA 3.6. *Nech $(G; *)$ je grupa. Ak existuje taký prvok $x \in G$, že každý prvok množiny G je jeho mocninou, tak $(G; *)$ nazývame **cyklickou grupou** a prvok x je **generátorom** tejto grupy.*

PRÍKLAD 3.4. Pre grupu $(\mathbb{Z}_4; \oplus)$ z príkladu 3.3 dostávame:

$$\bar{1}^1 = \bar{1}, \quad \bar{1}^2 = \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{2}, \quad \bar{1}^3 = \bar{2} \oplus \bar{1} = \bar{3}, \quad \bar{1}^4 = \bar{3} \oplus \bar{1} = \bar{0} = e,$$

teda prvok $\bar{1}$ je generátorom grupy a grupa je cyklická. Rád prvku $\bar{1}$ je 4. Grupa má aj druhý generátor, a to prvok $\bar{3}$. Overte, že prvok $\bar{0}$ má rád 1 a $\bar{2}$ má rád 2. Keďže grupa $(K; \cdot)$ je izomorfná s grupou $(\mathbb{Z}_4; \oplus)$. Prvky, ktoré sa v izomorfizme navzájom na seba zobrazujú, majú rovnaký rád. Teda grupa $(K; \cdot)$ má tiež dva generátory a je cyklická. Overte to!

POZNÁMKA. Ak sú dve grupy izomorfné, tak sa zhodujú vo všetkých vlastnostiach. Ak sa grupy líšia čo len v jednej vlastnosti, izomorfné nie sú.

VETA 3.3. *Nech $(G; *)$ je cyklická grupa s generátorom a . Ak existujú také celé čísla $r < s$, že $a^r = a^s$, tak grupa $(G; *)$ je konečná. Ak $|G| = n$, tak*

$$G = \{a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}\},$$

kde a^0 je neutrálny prvok.

PRÍKLAD 3.5. Nech $A = \{2^n; n \in \mathbb{Z}\}$. Potom $(A; \cdot)$ je nekonečná cyklická grupa s generátorom 2^n .

VETA 3.4. *Každé dve cyklické grupy rovnakého rádu sú izomorfné.*

3.3 Podgrupy a rozklady grúp

DEFINÍCIA 3.7. *Nech $(G; *)$ je grupa a $\emptyset \neq H \subset G$. Ak $(H; *)$ je grupa, tak sa nazýva **podgrupou** grupy $(G; *)$.*

VETA 3.5. *Nech $\emptyset \neq H \subset G$ a nech $(G; *)$ je grupa. Algebraický systém $(H; *)$ je podgrupou grupy $(G; *)$ práve vtedy, ak platia podmienky:*

1. pre každé $a, b \in H$ aj $a * b \in H$,
2. pre každé $a \in H$ aj $a' \in H$.

PRÍKLAD 3.6. Nech $A = \{1, 2, 3\}$. Potom množina všetkých permutácií na množine A je množina $S_3 = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$, kde

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tieto permutácie sú zobrazeniami a môžeme ich skladať. Napr.

$$P_2 \circ P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_4,$$

$$P_3 \circ P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = P_5.$$

Výsledky všetkých súčinov (zložení) sa dajú prehľadne zapísať do tabuľky:

\circ	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	P_2	P_1	P_4	P_3	P_6	P_5
P_3	P_3	P_5	P_1	P_6	P_2	P_4
P_4	P_4	P_6	P_2	P_5	P_1	P_3
P_5	P_5	P_3	P_6	P_1	P_4	P_2
P_6	P_6	P_4	P_5	P_2	P_3	P_1

Keďže z prvej kapitoly vieme, že pre skladanie zobrazení platí asociatívny zákon, z tabuľky je zrejmé, že $(S_3; \circ)$ je nekomutatívna grupa. Nech $H_1 = \{P_1, P_4, P_5\} \subset S_3$. Ak sa obmedzíme iba na časť tabuľky s prvkami P_1, P_4 a P_5 v záhlaví, vidíme, že $(H_1; \circ)$ je tiež grupa, a teda podgrupa grupy $(S_3; \circ)$. Navyše ľahko sa dá zistiť, že grupa $(S_3; \circ)$ nie je cyklická, ale jej podgrupa $(H_1; \circ)$ cyklická je. Jej generátormi sú prvky P_4 a P_5 . Podobne aj prvky P_1, P_2, P_3 a P_6 nám generujú podmnožiny

$$H_2 = \{P_1\}, \quad H_3 = \{P_1, P_2\}, \quad H_4 = \{P_1, P_3\}, \quad H_5 = \{P_1, P_6\},$$

pričom každý algebraický systém $(H_i; \circ)$ pre $i = 2, 3, 4, 5$ je cyklickou podgrupou grupy $(S_3; \circ)$, aj keď grupa $(S_3; \circ)$ cyklická nie je.

Pre podgrupy cyklickej grupy platí nasledujúca veta.

VETA 3.6. Každá podgrupa cyklickej grupy je cyklická.

Zavedieme si nasledujúce označenia. Nech $(G; *)$ je grupa a $(H; *)$ je jej podgrupa. Symbolom xH označíme množinu všetkých prvkov $x * h$, kde $x \in G$ a $h \in H$. Teda pre prvok $x \in G$ je

$$xH = \{x * h; h \in H\}.$$

Je zrejmé, že pre abelovskú grupu $(G; *)$ je $xH = Hx$.

VETA 3.7. Nech $(H; *)$ je podgrupou grupy $(G; *)$. Potom množina

$$G/H = \{xH; x \in G\}$$

tvorí rozklad množiny G .

POZNÁMKA. Množina G/H sa nazýva **pravým rozkladom grupy** $(G; *)$ podľa jej podgrupy $(H; *)$. Jeho prvky xH nazývame **pravými triedami rozkladu**. Mohutnosť množiny G/H nazývame **indexom** podgrupy $(H; *)$ v grupe $(G; *)$.

PRÍKLAD 3.7. Urobme rozklad grupy $(S_3; \circ)$ z príkladu 3.6 podľa jej podgrupy $(H_1; \circ)$, kde $H_1 = \{P_1, P_4, P_5\}$.

Riešenie. Pre každé $x \in G$ utvorme množinu xH_1 :

pre $x = P_1$ je $xH_1 = \{P_1 \circ P_1, P_1 \circ P_4, P_1 \circ P_5\} = \{P_1, P_4, P_5\}$
 pre $x = P_2$ je $xH_1 = \{P_2 \circ P_1, P_2 \circ P_4, P_2 \circ P_5\} = \{P_2, P_3, P_6\}$
 pre $x = P_3$ je $xH_1 = \{P_3 \circ P_1, P_3 \circ P_4, P_3 \circ P_5\} = \{P_3, P_6, P_2\}$
 pre $x = P_4$ je $xH_1 = \{P_4 \circ P_1, P_4 \circ P_4, P_4 \circ P_5\} = \{P_4, P_5, P_1\}$
 pre $x = P_5$ je $xH_1 = \{P_5 \circ P_1, P_5 \circ P_4, P_5 \circ P_5\} = \{P_5, P_1, P_4\}$
 pre $x = P_6$ je $xH_1 = \{P_6 \circ P_1, P_6 \circ P_4, P_6 \circ P_5\} = \{P_6, P_2, P_3\}$.

Takže

$$S_3/H_1 = \{\{P_1, P_4, P_5\}\{P_2, P_3, P_6\}\}$$

a index podgrupy $(H_1; \circ)$ v grupe $(S_3; \circ)$ je 2. Je vidieť, že v tomto prípade je

$$|S_3/H_1| = \frac{|S_3|}{|H_1|}.$$

O tom, že to platí všeobecne, nás informuje nasledujúca veta.

VETA 3.8. (Lagrangeova veta.) *Rád konečnej grupy je celočíselným násobkom rádu každej jej podgrupy.*

VETA 3.9. *Každá grupa prvočíselného rádu je cyklická a každý jej prvok, okrem neutrálneho, je jej generátorom.*

POZNÁMKA. Z prehľadu o grupách vyplýva, že existuje (až na izomorfizmus) práve jedna grupa rádu 1, 2, 3, 5, 7, a to cyklická grupa. Rád 4 majú dve grupy (neizomorfne): cyklická grupa, ktorá sa objavovala v našich príkladoch, a grupa necyklická. Najmenšou neabelovskou grupou je grupa $(S_3; \circ)$. Existujú cyklické grupy ľubovoľného rádu.

3.4 Okruhy, telesá, polia

V ďalšom texte budeme pracovať s množinami, na ktorých sú definované dve binárne operácie. Napríklad na množine \mathbb{Z} všetkých celých čísel sú definované dve binárne operácie, a to sčítavanie $+$ a násobenie \cdot . Vieme, že algebraický systém $(\mathbb{Z}; +)$ je komutatívna (abelovská) grupa a algebraický systém $(\mathbb{Z}; \cdot)$ je pologrupa (platí uzavretosť množiny \mathbb{Z} vzhľadom na operáciu \cdot a tiež asociatívnosť). Okrem toho pre všetky $x, y, z \in \mathbb{Z}$ je

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Hovoríme, že násobenie je **distributívne** vzhľadom na operáciu sčítavania.

DEFINÍCIA 3.8. *Nech na množine $A \neq \emptyset$ sú definované dve binárne operácie \square a $*$. Algebraický systém $(A; \square, *)$ sa nazýva **okruh**, práve vtedy, ak:*

1. $(A; \square)$ je komutatívna grupa,
2. $(A; *)$ je pologrupa,

3. Operácia $*$ je distributívna vzhľadom na operáciu \square , to znamená, že pre všetky $x, y, z \in A$ platí

$$x * (y \square z) = (x * y) \square (x * z) \quad a \quad (x \square y) * z = (x * z) \square (y * z).$$

POZNÁMKY.

1. V algebraickom systéme $(A; \square, *)$ je dôležité poradie operácií, nemôžeme ich poradie vymeniť. Napr. algebraický systém $(\mathbb{Z}; \cdot, +, \cdot)$ nie je okruh, pretože $(\mathbb{Z}; \cdot)$ nie je grupa, ale $(\mathbb{Z}; +)$ okruhom je.

2. Neutrálny prvok operácie \square budeme označovať $e(\square)$ (často sa nazýva nula). Neutrálny prvok operácie $*$ (ak existuje) označíme symbolom $e(*)$ (zvykne sa nazývať jednotka). V okruhu $(A; +, \cdot)$ je to 0, resp. 1.

3. Ak operácia $*$ je komutatívna, okruh nazývame komutatívny.

4. Pod triviálnym okruhom rozumieme okruh, ktorý obsahuje iba prvok $e(\square)$. V ostatných prípadoch hovoríme o netriviálnom okruhu.

Príkladmi okruhov sú napríklad číselné $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$, $(\mathbb{R}; +, \cdot)$, $(\mathbb{C}; +, \cdot)$. Skúmanie okruhov začalo práve na číselných množinách s operáciami $+$ a \cdot , ale ich vlastnosti sa ľahko dajú preniesť a na iné okruhy.

PRÍKLAD 3.8. Nech M_n je množina všetkých štvorcových matíc rádu n (n je pevne zvolené), $n \geq 2$, ktorých prvky sú reálne čísla. Ľahko sa preverí, že $(M_n; +, \cdot)$, kde $+$ a \cdot je sčítavanie a násobenie matíc, je okruh. Nech $a \neq 0$ je reálne číslo. Utvorme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice na ľavej strane majú práve po jednom nenulovom prvku a , teda sú nenulové. Súčin matíc stručne zapíšeme

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0},$$

kde \mathbf{K} , \mathbf{M} , $\mathbf{0}$ sú uvažované matice z množiny M_n . Zistili sme, že súčin dvoch nenulových matíc je nulová matica, čiže súčin dvoch nenulových prvkov (rôznych od $e(+)$) \mathbf{K} a \mathbf{M} je nulový prvok $\mathbf{0}$ (neutrálny prvok vzhľadom na operáciu $+$). Obdoba toho v číselných okruhoch $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$, $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ a $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ neexistuje.

DEFINÍCIA 3.9. Hovoríme, že prvok $a \in A$, $a \neq e(\square)$, v okruhu $(A; \square, *)$ je netriviálnym deliteľom nuly práve vtedy, ak existuje prvok $b \in A$, $b \neq e(\square)$, taký, že

$$a * b = e(\square) \quad \text{alebo} \quad b * a = e(\square).$$

V príklade 3.8 matice \mathbf{K} a \mathbf{M} sú netriviálnymi deliteľmi nuly v okruhu $(M_n; +, \cdot)$.

DEFINÍCIA 3.10. Okruh, ktorý má aspoň dva prvky a nemá netriviálne delitele nuly, nazývame **obor integrity**.

PRÍKLAD 3.9. Presvedčíte sa, že algebraické systémy $(\mathbb{Z}_5; \oplus, \odot)$ a $(\mathbb{Z}_6; \oplus, \odot)$ sú okruhy. Z Cayleyho tabuliek pre príslušné operácie ľahko zistíte, že $(\mathbb{Z}_5; \oplus, \odot)$ je obor integrity. $(\mathbb{Z}_6; \oplus, \odot)$ oborom integrity nie je, pretože napr. $\bar{3} \odot \bar{2} = \bar{0}$.

LEMA 3.10. Okruh $(\mathbb{Z}_n; \oplus, \odot)$ je oborom integrity práve vtedy, ak n je prvočíslo.

DEFINÍCIA 3.11. Okruh $(A; \square, *)$ nazývame **telesom** práve vtedy, ak $(A \setminus \{e(\square)\}; \square, *)$ je grupa.

LEMA 3.11. Každé teleso je oborom integrity.

DEFINÍCIA 3.12. Teleso $(A; \square, *)$, v ktorom $(A \setminus \{e(\square)\}; *)$ je komutatívna (abelovská) grupa nazývame **pole**.

POZNÁMKA. Dá sa dokázať, že okruh $(\mathbb{Z}_n; \oplus, \odot)$ je pole práve vtedy, ak n je prvočíslo.

3.5 Úlohy

- 3.1. Na množine všetkých nepárnych prirodzených čísel sú definované operácie \square a $*$ takto:

$$\begin{aligned}x \square y &= x + y + 1, \\x * y &= 0,5(x + 1)(y + 1) - 1.\end{aligned}$$

Dokážte, že operácia $*$ je distributívna vzhľadom na operáciu \square .

- 3.2. Nech pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{N}$ je $x \diamond y = y^x$. Nájdite všetky $x \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí $x \diamond 2 = 2 \diamond x$. Ďalej nájdite aspoň jednu trojicu $x, y, z \in \mathbb{N}$, pre ktorú platí

$$(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z).$$

- 3.3. Označme $p\mathbb{Z}$ ($n\mathbb{Z}$) množinu všetkých párnych (nepárnych) celých čísel. Zistite, ktoré z nasledujúcich algebraických systémov sú uzavreté vzhľadom na operáciu:

a) $(p\mathbb{Z}; +)$, b) $(p\mathbb{Z}; \cdot)$, c) $(n\mathbb{Z}; \cdot)$.

- 3.4. Zistite, ktoré z nasledujúcich algebraických systémov sú grupy:

a) $(A; \cdot)$, kde $A = \{z \in \mathbb{C}; z^6 - 1 = 0\}$,
 b) $(B; \cdot)$, kde $B = \{z \in \mathbb{C}; z^6 + 1 = 0\}$,
 c) $(\mathbb{Z}; \diamond)$, kde $a \diamond b = a + b - 5$ pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}$,
 d) $(\mathbb{Z}; \square)$, kde $a \square b = a + b + a \cdot b$ pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}$.

- 3.5. Zistite, ktoré z nasledujúcich podmnožín množiny všetkých komplexných čísel \mathbb{C} s operáciou $+$ sú podgrupami grupy $(\mathbb{C}; +)$:

- a) množina všetkých rýdzo imaginárnych čísel,
- b) množina všetkých komplexných čísel $a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$,
- c) množina všetkých komplexných čísel s absolútnou hodnotou rovnou 1.

3.6. Zistite, či $(A; \circ)$ je grupa, ak $A = \{f_1, f_2, \dots, f_6\}$, kde pre $i = 1, 2, \dots, 6$ sú f_i zobrazenia z množiny $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ do množiny $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ definované:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x, & f_2(x) &= \frac{1}{x}, & f_3(x) &= 1 - x, \\ f_4(x) &= \frac{1}{1-x}, & f_5(x) &= 1 - \frac{1}{x}, & f_6 &= \frac{x}{x-1}. \end{aligned}$$

3.7. Nájdite všetky generátory cyklickej grupy $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$.

3.8. Zistite, či algebraický systém $(A; +, \cdot)$ je okruh, ak:

- a) $A = \{a + b\sqrt[3]{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$,
- b) $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$,
- c) $A = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$,
- d) $A = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$,
- e) $A = \{a + ib; a, b \in \mathbb{Q}\}$.

3.9. Zistite, či $(H; \cdot)$ je podgrupou grupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$, ak $H = \{-1, 1\}$.

3.10. Overte, či algebraický systém $(A; +, \cdot)$ je okruh, teleso alebo pole, ak:

- a) $A = \{a + b\sqrt{7}; a, b \in \mathbb{Q}\}$,
- b) $A = \{a + b\sqrt{7}; a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Kapitola 4

Neorientované grafy

4.1 Definícia a základné typy grafov

V predchádzajúcich kapitolách sme viackrát využili možnosť vyjadriť určité vzťahy pomocou grafov. Boli to napríklad diagramy binárnych relácií, zobrazení, alebo čiastočných usporiadaní. Nešlo pritom o grafy funkcií, ktoré vyjadrujú vzťahy medzi veličinami (premennými), ktoré poznáme z matematickej analýzy.

Teória grafov je pomerne mladá matematická disciplína, aj keď prvá práca z teórie grafov, Eulerovo pojednanie o mostoch mesta Kráľovca (dnešný Kaliningrad), je z roku 1736. Prudký rozvoj teórie grafov nastal až v druhej polovici 20. storočia v súvislosti s rozvojom počítačov a veľkými požiadavkami na algoritmizáciu rôznych úloh. V tomto učebnom texte sa oboznámime so stručnými základmi neorientovaných a orientovaných grafov a s niektorými ich aplikáciami v elektrotechnike ako aj pri algoritmickom riešení rôznych úloh z praxe.

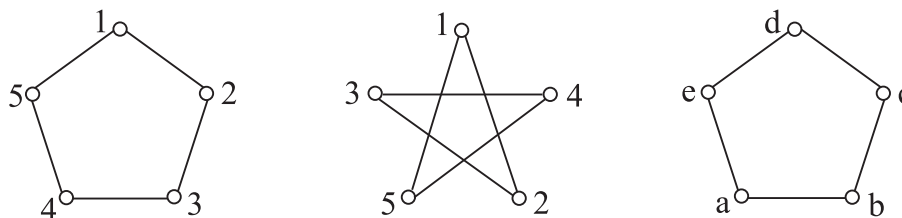
DEFINÍCIA 4.1. *Graf G je usporiadaná dvojica (V, H) , kde V je nejaká neprázdna množina a H je množina dvojprvkových podmnožín množiny V . Prvky množiny V nazývame **vrcholy** grafu G a prvky množiny H nazývame **hrany** grafu G .*

V našom texte budeme uvažovať grafy s konečnou množinou vrcholov (v niekoľkých prípadoch, keď budeme uvažovať nekonečné grafy, to zvlášť zdôraznime).

Ak chceme zdôrazniť, že graf má množinu vrcholov V a množinu hrán H , píšeme $G = (V, H)$. Ak hovoríme o nejakom známom grafe G , jeho množinu vrcholov označujeme $V(G)$, podobne množinu hrán grafu G označujeme $H(G)$.

Graf je teda rýdzo kombinatorický objekt, ktorý dáva do vzájomných vzťahov prvky dvoch množín. Zdôrazňujeme to preto, že postupne sa budeme vyjadrovať dosť obrazne a grafy znázorňovať kreslením do roviny. Vrcholom grafu sa priradia body roviny (vyznačené krúžkami) a hrany sa vyjadrujú spojením príslušných dvojíc bodov rovnými alebo zakrivenými čiarami. Takému znázorneniu grafu budeme hovoriť **diagram grafu**. Pozor, dva rôzne grafy môžu mať rovnaký diagram a naopak, ten istý graf sa dá znázorniť pomocou dosť nepodobných „obrázkov“.

PRÍKLAD 4.1. Na obr. 4.1 sú dva rôzne diagramy grafu $G_1 = (V_1, H_1)$, kde $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $H_1 = \{\{1, 2\}\{2, 3\}\{3, 4\}\{4, 5\}\{1, 5\}\}$ a diagram grafu $G_2 = (V_2, H_2)$, kde $V_2 = \{a, b, c, d, e\}$ a $H_2 = \{\{a, b\}\{b, c\}\{c, d\}\{d, e\}\{e, a\}\}$.



Obr. 4.1

Budeme hovoriť, že hrana $\{u, v\}$ **inciduje** s vrcholmi u a v (v diagrame sú vrcholy u a v spojené čiarou). Tiež sa dá povedať, že vrchol inciduje s hranou. Dva vrcholy sa nazývajú **susedné**, ak incidujú s tou istou hranou, dve hrany nazývame **susedné**, ak incidujú s tým istým vrcholom.

POZNÁMKA. Niekedy sa na riešenie problémov z praxe využívajú aj grafy s viacnásobnými hranami (v diagrame je dvojica vrcholov spojená viacerými čiarami), tzv. **multigrafy**, alebo grafy, v ktorých hrana (tzv. **slučka**) inciduje dvakrát s tým istým vrcholom. Ak graf môže obsahovať slučky aj násobné hrany, hovoríme o **pseudografe**.

Uvedieme si niekoľko typov grafov, ktoré sa často využívajú, a preto dostali špeciálne pomenovania:

Kompletný graf na $n \geq 1$ vrcholoch je graf $K_n = (V, H)$, kde $|V| = n$ a H obsahuje všetky dvojprvkové podmnožiny vrcholovej množiny (v diagrame je spojená hranou každá dvojica vrcholov).

Kompletný bipartitný graf $K_{m,n} = (V, H)$, kde $m, n \geq 1$, je graf, v ktorom

$$V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}, \quad H = \{\{u_i, v_j\}; i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Kružnica dĺžky $n \geq 1$ je graf $C_n = (V, H)$, kde

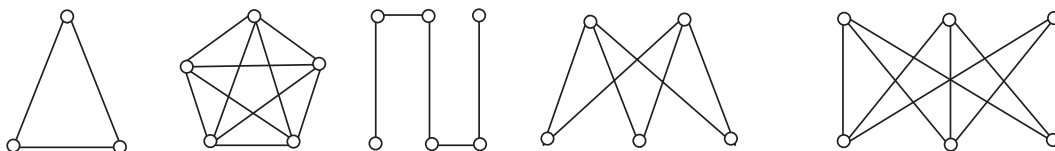
$$V = \{1, 2, \dots, n\}, \quad H = \{\{i, i+1\}; i = 1, \dots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}.$$

Cesta dĺžky $n \geq 0$ je graf $P_n = (V, H)$, kde

$$V = \{0, 1, \dots, n\}, \quad H = \{\{i-1, i\}; i = 1, \dots, n\}.$$

Komplement grafu $G = (V, H)$ je graf $\bar{G} = (V, H')$, kde H' obsahuje všetky hrany chýbajúce v grafe G k tomu, aby bol kompletným grafom, pričom $H \cup H' = \emptyset$.

Kružnica C_5 je na obr. 4.1. Na obr. 4.2 sú postupne grafy: K_3 , K_5 , P_5 , $K_{2,3}$ a $K_{3,3}$.



Obr. 4.2

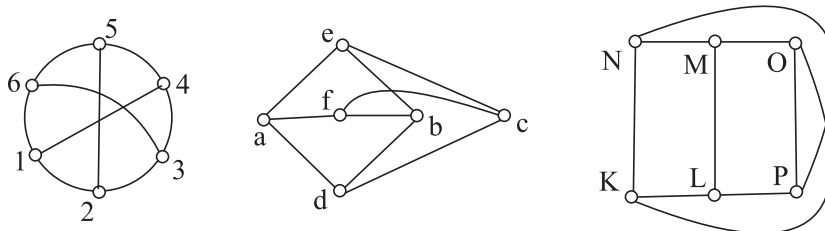
Dva grafy G a G' považujeme za rovnaké, ak majú totožné množiny vrcholov a hrán, teda $G = G'$ znamená, že $V(G) = V(G')$ a $E(G) = E(G')$. Mnoho grafov sa však líši iba označením svojich vrcholov a hrán. Toto vystihuje pojem *izomorfizmus*.

DEFINÍCIA 4.2. Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sa nazývajú **izomorfné**, ak existuje bijektívne zobrazenie $f : V \rightarrow V'$ také že pre všetky $u, v \in V$:

$$\{u, v\} \in E \quad \text{práve keď} \quad \{f(u), f(v)\} \in E', .$$

Zobrazenie f nazývame **izomorfizmus** grafov G a G' . Fakt, že grafy G a G' sú izomorfné zapisujeme $G \cong G'$.

PRÍKLAD 4.2. Na obr. 4.3 sú diagramy troch izomorfných grafov. Nájdite príslušné izomorfizmy.



Obr. 4.3

Riešenie. Jeden z izomorfizmov medzi prvým a druhým grafom je napríklad

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & d & b & e & c & f \end{pmatrix}.$$

Existuje viac možností. Zvyšok ponecháme na čitateľa. Všetky tri grafy sú izomorfné s grafom $K_{3,3}$.

Z definície 4.2 vyplýva, že pre dva izomorfné grafy $G_1 = (V_1, H_1)$ a $G_2 = (V_2, H_2)$ platí

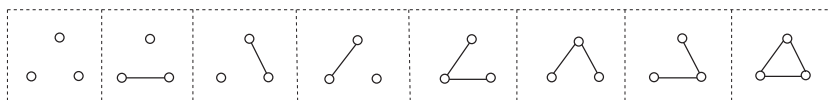
$$|V_1| = |V_2|, \quad |H_1| = |H_2|.$$

Je zrejmé, že splnenie týchto dvoch podmienok ešte nezaručuje, že nejaké dva grafy sú izomorfné.

DEFINÍCIA 4.3. *Hovoríme, že graf G_1 je **podgrafom** grafu G , ak $V(G_1) \subset V(G)$ a $H(G_1) \subset H(G)$. Zapisujeme to: $G_1 \subset G$.*

DEFINÍCIA 4.4. *Podgraf $G' = (V, H')$ grafu $G = (V, H)$ nazývame **faktor** grafu G .*

Faktor grafu je teda taký podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy daného grafu. Rôzne faktory sa môžu líšiť nielen počtom hrán, ale aj rôznym zložením hranových množín.



Obr. 4.4

Na obr. 4.4 sú diagramy všetkých faktorov grafu K_3 . Je ich 6 (vrcholy na tej istej pozícii môžeme uvažovať za rovnako označené), ale ak by sme za rôzne považovali iba neizomorfné faktory, tak by boli iba 4 rôzne. Je vidieť, že v niektorých faktoroch (grafoch) sú aj vrcholy, ktoré neincidujú so žiadnou hranou.

4.2 Stupne vrcholov, súvislosť a metrika

DEFINÍCIA 4.5. *Nech G je graf a v jeho vrchol. Symbolom $\delta_G(v)$ označme počet hrán incidujúcich s vrcholom v . Číslo $\delta_G(v)$ nazývame **stupeň vrcholu** v v grafe G . Ak $\delta_G(v) = 0$, vrchol v nazývame **izolovaný vrchol**.*

Ak nemôže dôjsť k zámene, tak index G v $\delta_G(v)$ vynechávame. Graf nemôže mať úplne ľubovoľné stupne vrcholov. Maximálny stupeň (označuje sa symbolom $\Delta(G)$) v grafe s n vrcholmi je $n - 1$ a minimálny 0.

LEMA 4.1. *Pre každý graf $G = (V, H)$ platí*

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|H|.$$

Je to zrejmé, pretože každá hrana inciduje s dvoma vrcholmi a keď spočítavame stupne vrcholov, tak každú hranu zarátame dvakrát. Z tejto vety vyplýva dôležitý dôsledok.

DÔSLEDOK 4.1. *Počet vrcholov s nepárnyim stupňom je v každom grafe číslo párne.*

Ak má graf všetky vrcholy rovnakého stupňa k , nazývame ho **pravidelným grafom stupňa k** . Je zrejmé, že kompletný graf K_n je pravidelným grafom stupňa

$n - 1$. Z dôsledku je zrejmé, že pravidelný graf nepárneho stupňa nemôže mať nepárny počet vrcholov.

Nech pre danú dvojicu vrcholov u a v v grafe $G = (V, H)$ existuje postupnosť vrcholov a hrán

$$v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \dots, v_{n-1}, h_n, v_n,$$

kde $v_i \in V$ pre $i = 0, 1, 2, \dots, n$, pričom $v_0 = u$, $v_n = v$ a $h_{i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$ pre $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Takúto postupnosť nazývame **sledom** dĺžky n medzi vrcholmi u a v . Ak $u = v$ ($u \neq v$), tak sled je **uzavretý (otvorený)**. Obvykle na určenie sledu zapisujeme iba postupnosť vrcholov, teda $v_0v_1v_2 \dots v_n$.

Všimnime si, že pre sled sme nepožadovali aby vrcholy (hrany) boli rôzne. Preto medzi dvojicou vrcholov grafu buď existuje nekonečne veľa sledov, alebo neexistuje žiadny. Sledy môžeme rozdeliť na nasledujúce typy:

Ťah je sled, v ktorom sú všetky hrany rôzne.

Cesta je ťah, v ktorom sú všetky vrcholy (a tým aj hrany) rôzne. Cestu dĺžky n (počet jej hrán) označujeme P_n .

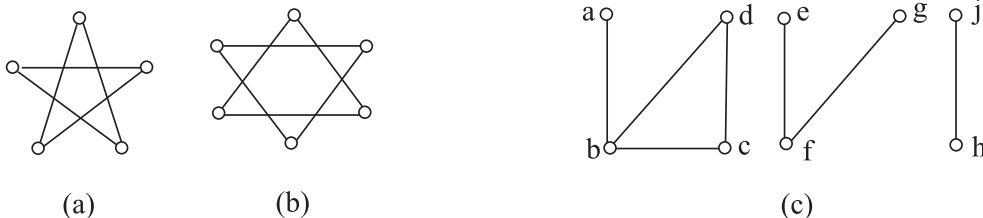
Kružnica je uzavretá cesta dĺžky aspoň 3. Kružnica C_n dĺžky n má práve n vrcholov. (Všimnite si, že už skôr sme zaviedli ten istý pojem iným spôsobom.)

Je zrejmé, že z každého sledu S medzi vrcholmi u a v grafu G môžeme vybrať cestu, ktorá spája tieto vrcholy.

DEFINÍCIA 4.6. *Hovoríme, že graf G je **súvislý**, ak pre každé dva jeho vrcholy u a v existuje v ňom sled (cesta) z u do v . Graf, ktorý nie je súvislý, sa nazýva **nesúvislý**.*

Ak v nejakom grafe G zvolíme vrchol v , môžeme sa zaujímať o všetky vrcholy, do ktorých sa dá dostať po sledoch začínajúcich vo vrchole v . Tieto vrcholy a hrany, ktoré s nimi incidujú, tvoria súvislý podgraf grafu G , ktorý nazývame *komponent* grafu obsahujúci vrchol v . Presnejšia definícia je:

DEFINÍCIA 4.7. Komponent grafu je každý jeho maximálny súvislý podgraf (t.j. taký súvislý podgraf, ktorý nie je vlastným podgrafom iného súvislého podgrafu grafu G).



Obr. 4.5

Na obr. 4.5(a) je príklad súvislého grafu, zatiaľ čo na obr. 4.5(b) je príklad nesúvislého grafu. Na obr. 4.5(c) je nesúvislý graf s tromi komponentmi. Jeho podgraf

pozostávajúci z troch vrcholov a, b, d a z dvoch hrán $\{a, b\}$ a $\{b, d\}$ nie je komponentom, hoci jeho diagram vyzerá rovnako ako diagram komponentu s vrcholmi e, f, g . Je totiž vlastným podgrafom komponentu so štyrmi vrcholmi a, b, c, d .

Súvislý graf má iba jeden komponent. Rozhodnúť, či graf je súvislý, poprípade nájsť všetky jeho komponenty, nie je ťažké, hoci z diagramu to nemusí byť vždy na prvý pohľad zrejmé. Súvislosť grafu je typická globálna vlastnosť grafu. Niekedy sa však o nej dá rozhodnúť na základe lokálnych vlastností grafu, teda z vlastností bezprostredného okolia jednotlivých vrcholov a hrán.

VETA 4.2. *Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$, je graf, v ktorom súčet stupňov ľubovoľnej dvojice nesusedných vrcholov je aspoň $n - 1$. Potom graf G je súvislý.*

VETA 4.3. *Nech $G = (V, H)$, $|V| \geq 2$, je súvislý graf. Potom v grafe G existujú aspoň dva vrcholy také, že vynechaním ľubovoľného z nich sa súvislosť neporuší.*

Artikulácia je vrchol grafu, ktorý ak z grafu vynecháme (aj hrany, ktoré s ním incidujú), poruší sa súvislosť grafu (v nesúvislom grafe sa zväčší počet komponentov). Hranu s tou istou vlastnosťou nazývame **most**.

VETA 4.4. *Nech $G = (V, H)$ je konečný súvislý graf s n vrcholmi. Potom platí*

$$n - 1 \leq |H| \leq \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Predstavme si cestnú sieť mesta vyjadrenú grafom. Je namieste pýtať sa na najkratšiu dopravnú trasu pre jazdu autom z miesta A do miesta B . Takéto a podobné úvahy vedú k zavedeniu pojmu vzdialenosti v grafe.

DEFINÍCIA 4.8. *Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf. **Vzdialenosť** $d(u, v)$ vrcholov u, v grafu G je dĺžka najkratšej cesty spájajúcej vrcholy u a v .*

Na vzdialenosť v grafe sa môžeme pozeráť ako na zobrazenie $d : V \times V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, ktoré má nasledujúce vlastnosti:

1. $d(u, v) \geq 0$; $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,
2. $d(u, v) = d(v, u)$,
3. $d(u, v) \leq d(u, z) + d(z, v)$ pre všetky $z \in V$.

Tieto vlastnosti sú axiómy metriky, preto usporiadaná dvojica (V, d) je metrický priestor. Pritom V je vrcholová množina grafu a d je metrika – vzdialenosť vrcholov v grafe. Uvedené vlastnosti sa pri izomorfizme zachovávajú, preto sú užitočné aj pojmy, ktoré sú definované pomocou metriky. Nasledujúca definícia uvádza niektoré u nich.

DEFINÍCIA 4.9. *Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf.*

Exentricita vrcholu $u \in V$ je číslo

$$e(u, G) = \max_{v \in V} d(u, v).$$

Priemer grafu G je číslo

$$P(G) = \max_{v \in V} e(v, G).$$

Polomer grafu G je číslo

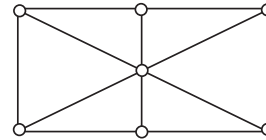
$$r(G) = \min_{v \in V} e(v, G).$$

Stred grafu G je množina vrcholov, ktorých excentricita je rovná polomeru.

POZNÁMKA. Priemer grafu G môžeme definovať aj vzťahom

$$P(G) = \max_{u, v \in V} d(u, v).$$

Pre grafy neplatí obdoba vzťahu medzi priemerom a polomerom z geometrickej kružnice. Napríklad pre graf, ktorého diagram je na obr. 4.6 je $P(G) = r(G) = 2$ a stred je celá vrcholová množina. Všimnime si podrobnejšie vzájomný vzťah priemeru a polomeru toho istého grafu.



Obr. 4.6

VETA 4.5. *Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf. Potom platí*

$$r(G) \leq P(G) \leq 2r(G).$$

4.3 Eulerovkosť, hamiltonovkosť a planárnosť

Pojmy a vlastnosti, ktoré si uvedieme v tomto paragrafe, sa využívajú pri riešení praktických úloh za pomoci teórie grafov.

Jednou zo základných (a najstarších) úloh týkajúcich sa grafov je nasledujúca otázka: *Dá sa nakresliť diagram daného grafu $G = (V, H)$ jedným uzavretým ťahom bez zdvihnutia ceruzky z papiera tak, aby sme po žiadnej hrane neprechádzali viackrát?*

Matematicky môžeme úlohu sformulovať takto: Dá sa v grafe nájsť uzavretý sled, v ktorom sa každá hrana vyskytuje práve raz? Taký sled nazývame **uzavretým eulerovským ťahom**. Graf je **eulerovský** práve vtedy, keď obsahuje aspoň jeden uzavretý eulerovský ťah. Hovoríme tiež, že graf sa dá **pokryť** uzavretým ťahom. Dá sa ukázať, že eulerovské grafy môžeme jednoznačne charakterizovať bez toho, aby sme hovorili o ťahoch. Platí nasledujúca veta.

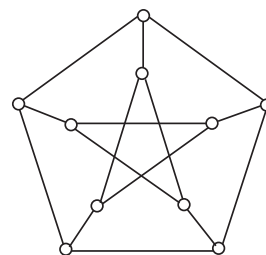
VETA 4.6. (**Charakteristika eulerovských grafov.**) *Graf je eulerovský práve vtedy, ak je súvislý a každý jeho vrchol má párny stupeň.*

Ak graf nie je eulerovský, často nás zaujíma minimálny počet hranovo disjunktných otvorených ťahov, ktorými sa dá pokryť. Pre súvislý graf môžeme nájsť minimálne pokrytie p otvorenými ťahmi práve vtedy, ak obsahuje $2p$ ($p \geq 1$) vrcholov nepárneho stupňa. Tieto otvorené ťahy začínajú a končia vždy vo vrchoch nepárnych stupňov. Ak je graf nesúvislý, uvažujeme každý komponent zvlášť. (Nakreslite si známy „domček“ s piatimi vrcholmi a ôsmimi hranami jedným ťahom.)

Jedna vec je vedieť, že graf je eulerovský, to sa dá ľahko zistiť, iné je uzavretý eulerovský ťah nájsť. Pri hľadaní uzavretého ťahu začneme v ľubovoľnom vrchole a po hrane s ním incidentnej prejdeme do nejakého susedného vrcholu. Použitú hranu z grafu odoberieme a postupujeme rovnakým spôsobom ďalej až sa nakoniec vrátíme do vrcholu, v ktorom sme začínali. Výber hrany je viazaný iba podmienkou, aby jej vypustením nevznikol nesúvislý graf (izolované vrcholy pripúšťame, ale štartovací vrchol sa stane izolovaným až v poslednom kroku).

Hamiltonovská kružnica v grafe G je kružnica obsahujúca všetky vrcholy grafu G . Graf nazývame **hamiltonovský**, ak obsahuje aspoň jednu hamiltonovskú kružnicu. Aby bol graf hamiltonovský, musí byť konečný, súvislý, musí obsahovať aspoň jeden vrchol a nesmie obsahovať mosty ani artikulácie. Avšak ani splnenie uvedených podmienok nezaručuje existenciu hamiltonovskej kružnice. Napríklad **Petersenov** graf na obr. 4.7 nie je hamiltonovský.

Pojem hamiltonovskej kružnice je na prvý pohľad podobný uzavretému eulerovskému ťahu: Hamiltonovská kružnica má prechádzať bez opakovania všetky vrcholy a uzavretý eulerovský ťah všetky hrany. Napriek tomu je matematická obtiažnosť oboch problémov veľmi rozdielna. Zatiaľ čo uzavreté eulerovské ťahy sú ľahko zvládnuteľné, problém existencie hamiltonovskej kružnice je mimoriadne náročný a doteraz nepoznáme žiadnu jednoduchú charakteristiku hamiltonovských grafov. Tejto problematike sa venuje veľké množstvo matematikov a dosiahli obrovské množstvo čiastočných výsledkov, nie však nutnú a postačujúcu podmienku existencie hamiltonovskej kružnice. My si uvedieme dve postačujúce podmienky.



Obr. 4.7

VETA 4.7. *Nech $G = (V, H)$ je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$. Ak stupeň každého vrcholu grafu je aspoň $\frac{n}{2}$, tak G je hamiltonovský graf.*

VETA 4.8. *Ak pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy u, v grafu $G = (V, H)$, $|V| = n$, $n \geq 3$, platí*

$$\delta(u) + \delta(v) \geq n,$$

tak graf G je hamiltonovský.

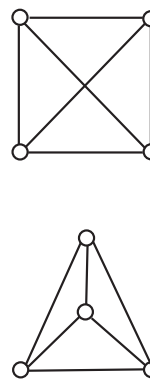
S hamiltonovskými grafmi sa možno stretnúť v rôznych súvislostiach aj mimo matematiky. Napríklad americký vedec J. Lederberg, nositeľ Nobelovej ceny za

medicínu, použil hamiltonovské grafy v chémii pri klasifikácii organických zlúčenín. My sa s niektorými aplikáciami stretneme neskôr.

V diagrame Petersenovho grafu na obr. 4.7 sa niektoré hrany pretínajú. Môžeme si postaviť otázku, či je to nutné. Skúste tento diagram prekresliť. Ak neurobíte chybu, tak sa vám to bez pretínania hrán nepodarí.

DEFINÍCIA 4.10. Graf $G = (V, H)$ je **planárny** (rovinný), ak jeho diagram v rovine môžeme zostrojiť tak, že dve rôzne hrany majú spoločné nanačvých krajné vrcholy. Ak G nie je planárny, tak ho nazývame **neplanárny**.

V prípade planárneho grafu ide teda o možnosť nakresliť jeho diagram požadovaným spôsobom. Planárny je napríklad graf K_4 , ktorého dva diagramy sú na obr. 4.8, hoci v jednom z nich sa hrany pretínajú. Diagram bez pretínania hrán rozdeľuje rovinu na disjunktné oblasti (ak obsahuje aspoň jednu kružnicu) a tie budeme nazývať **oblasťami planárneho grafu**. Neohraničenú oblasť nazývame vonkajšia a vhodným prekreslením diagramu sa dá dosiahnuť, že vonkajšou oblasťou bude hociktorá z nich. O oblastiach nemá zmysel hovoriť, ak máme diagram s priesečníkmi. Môžeme sa však pýtať, koľko oblastí má diagram planárneho grafu, ak ho znázorníme bez pretínania hrán.



Obr. 4.8

VETA 4.9. (Eulerova veta o planárnych grafoch.) Nech $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf. Nech r je počet oblastí grafu G . Potom platí

$$|H| - |V| + 2 = r.$$

Z tejto veľmi dôležitej vety môžeme odvodiť nasledujúce závery.

DÔSLEDKY.

1. Ak $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf, tak $|H| \leq 3|V| - 6$.
2. Ak $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf bez trojuholníkov, tak $|H| \leq 2|V| - 4$.
3. Každý planárny graf obsahuje aspoň jeden vrchol, ktorého stupeň je menší ako šesť.
4. Grafy K_5 a $K_{3,3}$ sú neplanárne.

Uvedené grafy K_5 a $K_{3,3}$ predstavujú najmenšie neplanárne grafy. K_5 má najmenší počet vrcholov a $K_{3,3}$ najmenší počet hrán zo všetkých neplanárnych grafov. Tieto dva grafy hrajú veľmi dôležitú úlohu pri charakterizácii planárnych grafov. Uvažujme graf $G = (V, H)$ s aspoň jednou hranou. Ak z neho vynecháme hranu $\{u, v\}$ a nahradíme ju dvoma novými hranami $\{u, z\}$ a $\{z, v\}$, povieme, že nový graf vznikol **rozpolením** hrany. Dva grafy nazveme **homeomorfné**, ak sú izo-

morfné, alebo vznikli postupným rozpoľovaním hrán (aspoň u jedného z nich) z toho istého grafu.

Problematiku planárnosti grafov s využitím výhradne kombinatorických vlastností, teda bez odvolávania sa na kreslenie diagramov, rieši nasledujúca elegantná veta.

VETA 4.10. (Kuratowského veta.) *Graf G je planárny práve vtedy, ak neobsahuje podgraf homeomorfný s grafom K_5 ani s grafom $K_{3,3}$.*

PRÍKLAD 4.3. V Petersenovom grafe na obr. 4.7 nájdite podgraf homeomorfný s grafom $K_{3,3}$. Tým ukážete, že nie je planárny. Môže obsahovať aj podgraf homeomorfný s K_5 ?

Problematika kreslenia diagramov grafov nie je jednoduchá, a to ani pre grafy planárne. Ak sú grafy neplanárne, ich diagramy sa dajú znázorniť len tak, že niektoré hrany sa pretínajú v nekoncových bodoch. To vedie k skúmaniu rôznych mier neplanárnosti grafov. Typickými príkladmi z praxe, kde sa tieto výsledky intenzívne využívajú sú tzv. VLSI obvody, čo sú veľmi husto integrované elektronické prvky pospájané mikrovodičmi. Rovinné siete sa pritom skladajú na seba a prepojenia, ktoré sa nedajú urobiť v rovine bez pretínania, musia sa realizovať medzi jednotlivými vrstvami. Ide pritom o minimalizáciu takých prepojení a o nahustenie čo najviac prvkov do jednej vrstvy.

4.4 Úlohy

- 4.1. Zistite, či existuje konečný graf, v ktorom žiadne dva rôzne vrcholy nemajú rovnaký stupeň.
- 4.2. Je daný graf, ktorý má aspoň dva vrcholy a menej hrán ako vrcholov. Môže mať každý vrchol grafu stupeň aspoň dva?
- 4.3. Nech \bar{G} je komplementárny graf ku grafu G a nech G má aspoň dva komponenty.
 - a) Aký je maximálny počet komponentov grafu \bar{G} ?
 - b) Aký je priemer grafu \bar{G} ?
- 4.4. Nech G_1 je súvislý faktor grafu G_2 . Musí byť graf G_2 súvislý?
- 4.5. Majme graf K_4 s označenými vrcholmi. Nájdite:
 - a) počet rôznych kružníc v grafe K_4 ,
 - b) počet rôznych faktorov grafu K_4 .
- 4.6. Zistite priemer, polomer a stred Petersenovho grafu.
- 4.6. Akým najmenším počtom ťahov sa dá nakresliť šachovnica?

Kapitola 5

Orientované grafy

5.1 Definícia digrafu

Čitateľ si už určite všimol dôležitý rozdiel medzi grafmi z predchádzajúcej kapitoly a grafmi, ktorými sme znázorňovali binárne relácie, zobrazenia alebo čiastočne usporiadané množiny. V spomínaných grafoch sa vyskytovali šípky, ktoré reprezentovali usporiadané dvojice prvkov. V tejto kapitole sa budeme zaoberať práve týmito orientovanými grafmi, ktoré budeme skrátene nazývať *digrafmi*. Je to skrátka z anglického názvu *directed graph*.

DEFINÍCIA 5.1. *Nech $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a nech $H \subset (V \times V) \setminus \{\{v_1, v_1\}, \{v_2, v_2\}, \dots, \{v_n, v_n\}\}$. Digraf \vec{G} je usporiadaná dvojica množín $\vec{G} = (V, H)$.*

Podobne ako pri neorientovaných grafoch, V je množina vrcholov a H je množina (orientovaných) hrán. Ak hrana $h = (u, v) \in H$, nazývame vrchol u **začiatočným** a vrchol v **koncovým** vrcholom orientovanej hrany h . Hrany $h_1 = (u, v)$ a $h_2 = (v, u)$ nazývame **opačne orientovanými** hranami. Pojmy incidencia a susednosť pre vrcholy aj hrany sa používajú v tom istom význame ako pri (neorientovaných) grafoch. Podobne v rovnakých významoch sa používajú aj pojmy ako podgraf (aj keď správne by sme mali hovoriť poddigraf) a faktor.

Definícia digrafu predpokladá orientáciu všetkých hrán. Je možné si však veľmi dobre predstaviť aj taký „graf“, v ktorom sú orientované iba niektoré hrany a ostatné sú neorientované (napríklad pri znázorňovaní dopravnej situácie v nejakom meste, kde sú jednosmerné aj obojsmerné ulice). My budeme v tomto texte uvažovať iba digrafy so všetkými orientovanými hranami.

Zrušením orientácie digrafu môžeme dostať graf alebo multigraf. Opačný prechod je jednoznačný – orientáciou hrán grafu vždy dostaneme digraf. Niekedy sa využíva tzv. **symetrická orientácia** grafu: Pre každú hranu $h = \{u, v\}$ grafu $G = (V, H)$ vytvoríme dve opačne orientované hrany $h' = (u, v)$ a $h'' = (v, u)$ v digrafe $\vec{G} = (V, H')$.

DEFINÍCIA 5.2. Dva digrafy $\vec{G}_1 = (V_1, H_1)$ a $\vec{G}_2 = (V_2, H_2)$ sa nazývajú **izomorfné**, ak existuje bijektívne zobrazenie $f : V_1 \rightarrow V_2$ také že pre všetky $u, v \in V$:

$$(u, v) \in H_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in H_2.$$

Zobrazenie f nazývame **izomorfizmom** digrafov \vec{G}_1 a \vec{G}_2 . Zapisujeme $\vec{G}_1 \cong \vec{G}_2$.

DEFINÍCIA 5.3. Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf. Označme $\delta^+(v)$, resp $\delta^-(v)$ počet hrán, ktorých vrchol v je začiatočným, resp. koncovým vrcholom. Číslo $\delta^+(v)$, resp. $\delta^-(v)$ nazývame **vonkajší**, resp. **vnútorný stupeň** vrcholu v .

Nech $G = (V, H)$ vznikne z $\vec{G} = (V, H)$ zrušením orientácie. Potom pre každý vrchol $v \in V$ platí

$$\delta^+(v) + \delta^-(v) = \delta(v).$$

Dá sa dokázať, že pre vrcholy a hrany digrafu $\vec{G} = (V, H)$ platí (pozri vetu 4.1)

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |H|.$$

V mnohých prípadoch sa ukazuje výhodné zaviesť špeciálne názvy pre vrcholy digrafu $\vec{G} = (V, H)$. Nech $v \in V$, potom ak:

$\delta^+(v) = \delta^-(v)$,	tak v je rovnovážny vrchol,
$\delta^+(v) > 0, \quad \delta^-(v) = 0$,	tak v je prameň ,
$\delta^+(v) = 0, \quad \delta^-(v) > 0$,	tak v je ústie ,
$\delta^+(v) > \delta^-(v) > 0$,	tak v je zosilňovač ,
$0 < \delta^+(v) < \delta^-(v)$,	tak v je zoslabovač .

5.2 Súvislosť a silná súvislosť

Možnosť prechodu od digrafu ku grafu prostredníctvom zrušenia orientácie hrán využijeme na definovanie nasledujúcich pojmov:

Sled v digrafe \vec{G} je postupnosť vrcholov a hrán v \vec{G} , ktorá po zrušení orientácie je sledom v G . Dĺžka sledu je počet jeho hrán.

Spojenie v \vec{G} je taký sled v \vec{G} , v ktorom je zachovaná orientácia hrán od začiatočného vrcholu ku koncovému.

Orientovaný ťah v \vec{G} je také spojenie v \vec{G} , ktoré po zrušení orientácie je ťahom v G (neopakujú sa hrany).

Dráha v \vec{G} je také spojenie v \vec{G} , ktoré po zrušení orientácie je cestou v G (neopakujú sa vrcholy). Dĺžka dráhy je rovná počtu jej hrán.

Cyklus v \vec{G} je uzavretá dráha. Počet jej vrcholov (hrán) je dĺžka cyklu.

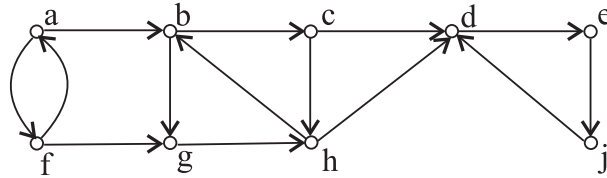
POZNÁMKA. V digrafe \vec{G} môžeme tiež hovoriť o pojmoch ťah, cesta, kružnica. Sú to také sledy v digrafe \vec{G} , z ktorých po zrušení orientácie dostaneme ťah, cestu, kružnicu v grafe G . Nezáleží teda v nich na orientácií hrán.

Pozrime sa teraz na pojem súvislosti digrafu \vec{G} . Budeme rozlišovať dva druhy, a to: súvislosť a silnú súvislosť. Definícia súvislosti je totožná s definíciou súvislosti v (neorientovanom) grafe. Digraf je teda **súvislý**, ak medzi jeho ľubovoľnou dvojicou vrcholov existuje sled. Môžeme to vyjadriť aj takto: Digraf \vec{G} je súvislý, ak je súvislý graf G , ktorý vznikol zrušením orientácie v \vec{G} .

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je súvislý digraf. Pod **vzdialenosťou** $\vec{d}(u, v)$ z vrcholu u do vrcholu v rozumieme dĺžku nminimálnej dráhy z u do v . Ak neexistuje dráha z u do v , tak $\vec{d}(u, v) = \infty$.

DEFINÍCIA 5.4. Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je **silne súvislý**, ak pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V$ existuje spojenie z u do v aj spojenie z v do u . **Silným komponentom** digrafu \vec{G} nazývame každý jeho maximálny silne súvislý poddigraf.

PRÍKLAD 5.1. Na obr. 5.1 je diagram digrafu, ktorý je súvislý, ale nie je silne súvislý. Neexistuje spojenie napríklad z vrcholu d do vrcholu b . Digraf obsahuje tri silné komponenty, a to: $\vec{G}_1 = (V_1, H_1)$, $\vec{G}_2 = (V_2, H_2)$ a $\vec{G}_3 = (V_3, H_3)$, pričom $V_1 = \{a, f\}$, $H_1 = \{(a, f), (f, a)\}$, $V_2 = \{b, c, g, h\}$, $H_2 = \{(b, c), (c, h), (h, b), (g, h), (b, g)\}$, $V_3 = \{d, e, j\}$ a $H_3 = \{(d, e), (e, j), (j, d)\}$. Ak by sme pridali k tomuto digrafu hranu so začiatočným vrcholom v množine V_3 a koncovým v množine V_1 , takt získaný digraf by bol silne súvislý.



Obr. 5.1

LEMA 5.1. Pre digraf $\vec{G} = (V, H)$ sú nasledujúce tri tvrdenia ekvivalentné:

- \vec{G} je silne súvislý.
- \vec{G} je súvislý a každá jeho hrana sa vyskytuje aspoň v jednom cykle.
- Pre ľubovoľný rozklad $\{V_1, V_2\}$ vrcholovej množiny V existujú hrany h_1, h_2 také, že h_1 má začiatočný vrchol vo V_1 a koncový vo V_2 a h_2 má začiatočný vrchol vo V_2 a koncový vo V_1 .

POZNÁMKA. výraz, že tvrdenia a), b) a c) sú ekvivalentné znamená: a) platí práve vtedy, ak platí b), b) platí práve vtedy, ak platí c) a a) platí práve vtedy, ak platí c). Ak by sme chceli urobiť dôkaz vety, stačí nám dokazovať tri implikácie, a to: $a) \Rightarrow b)$, $b) \Rightarrow c)$ a $c) \Rightarrow a)$.

Veta 5.2. Nech $\vec{G} = (V, H)$ je súvislý digraf, v ktorom pre každý vrchol $v \in V$ platí $\delta^+(v) = 1$. Potom \vec{G} obsahuje jediný cyklus.

Ak v Digrafe \vec{G} zmeníme orientáciu každej hrany na opačnú, získame **opačne orientovaný** digraf \vec{G}^- . Zrejme v \vec{G}^- sa oproti \vec{G} navzájom vymenia vonkajšie a vnútorné stupne všetkých vrcholov, všetky spojenia a cykly zmenia svoju orientáciu. Z toho vyplýva, že tvrdenie vety 5.2 bude platiť aj v prípade, že pre každý vrchol $v \in V$ predpokladáme $\delta^-(v) = 1$.

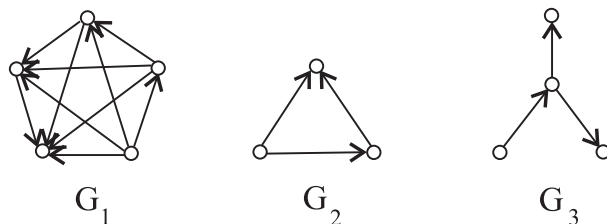
V predchádzajúcej kapitole sme sa zoznámili s eulerovskými a hamiltonovskými grafmi. Väčšina vlastností týchto grafov sa dá preformulovať aj pre digrafy. Digraf nazveme eulerovský, ak sa dá hranovo pokryť uzavretým orientovaným ťahom. Dá sa ukázať, že digraf je eulerovský práve vtedy, ak je súvislý a každý jeho vrchol je rovnovážny. Podobne môžeme hovoriť o hamiltonovských cykloch, sú to cykly, ktoré obsahujú všetky vrcholy digrafu. Digraf je hamiltonovský, ak obsahuje aspoň jeden hamiltonovský cyklus.

5.3 Acyklické digrafy

Z doteraz uvedených vlastností digrafov je vidieť, že cykly hrajú v digrafoch veľmi dôležitú úlohu. Ovplyvňujú silnú súvislosť, rozklad na silné komponenty a majú zásadný vplyv na možnosti vytvárania rôznych spojení s digrafe. Je napríklad zrejmé, že pri zisťovaní povahy všetkých možných výpočtov, ktoré môžu prebiehať podľa zadaného vývojového diagramu, bude situácia oveľa jednoduchšia, ak nepripustíme cykly. Teraz preberieme iba základné vlastností, ktoré budeme potrebovať pri aplikačnom využití digrafov.

DEFINÍCIA 5.5. Digraf $\vec{G} = (V, H)$, ktorý neobsahuje cyklus, nazývame **acyklický digraf**.

Na obr. 5.2 sú diagramy troch acyklických digrafov \vec{G}_1 , \vec{G}_2 a \vec{G}_3 .



Obr. 5.2

Ak $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický digraf, je zrejmé, že aj každý jeho poddigraf je acyklický. Otázkou existencie prameňa a ústia rieši nasledujúca veta.

VETA 5.3. Nech $\vec{G} = (V, H)$, kde $H \neq \emptyset$, je konečný acyklický digraf. Potom v \vec{G} existuje aspoň jeden vrchol $v \in V$, pre ktorý je $\delta^+(v) > 0$ a $\delta^-(v) = 0$.

Nasledujúca veta je nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby digraf bol acyklický. Využíva sa napríklad pri označovaní vrcholov tzv. sieťových grafov, ktorými sa riešia veľké projekty pozostávajúce z mnohých rôzne navzájom súvisiacich úloh.

VETA 5.4. *Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je acyklickým digrafom práve vtedy, ak môžeme jeho vrcholy označiť číslami $1, 2, \dots, |V|$ tak, že každá hrana (i, j) spĺňa podmienku $i < j$.*

Veta 5.3 nám vraví, že v každom konečnom acyklickom digrafe \vec{G} ktorý obsahuje aspoň jednu hranu, existuje aspoň jeden prameň. Vzhľadom na to, že opačne orientovaný digraf \overleftarrow{G} k acyklickému digrafu \vec{G} je tiež acyklický, môžeme tiež tvrdiť, že každý konečný digraf s aspoň jednou hranou obsahuje vrchol ktorý je ústím. Táto skutočnosť nám umožňuje zostaviť postup na zisťovanie, či daný digraf je acyklický. Stačí v danom digrafe nájsť nejaký prameň (alebo ústie) a vynechať hrany, ktoré sú s nim incidentné. Na vzniknutom digrafe tento postup opakujeme, až dospejeme ku grafu bez hrán (vrcholy zostávajú) alebo k digrafu, ktorý už nemá žiadny prameň ani ústie. V prvom prípade bol pôvodný digraf acyklický, v druhom obsahoval aspoň jeden cyklus. Z takto popísaného postupu je možné odvodiť aj spôsob orientácie hrán grafu $G = (V, H)$, ktorý zaručene povedie k acyklickému digrafu.

5.4 Úlohy

- 5.1. Koľko cyklov obsahuje digraf na obrázku 5.1?
- 5.2. Majme kružnicu dĺžky d , $d \geq 3$. Koľko je možností zvoliť orientácie všetkých hrán tak, aby vznikol acyklický digraf?
- 5.3. Uvažujme konečný digraf, v ktorom platí $\delta^+(v) \geq 1$ a $\delta^-(v) \geq 1$ pre všetky jeho vrcholy. Je možné tvrdiť, že každý vrchol digrafu je obsiahnutý v nejakom cykle?
- 5.4. Existuje digraf s uzavretým spojením obsahujúcim každú hranu práve raz, ktorý nie je silne súvislý?
- 5.5. Aký musí byť graf, aby sa jeho hrany dali orientovať tak, že vznikne silne súvislý digraf?
- 5.6. Nech pre každý vrchol v súvislého digrafu $\vec{G} = (V, H)$ je $\delta^+(v) = 1$. Aký je maximálny a aký je minimálny počet cyklov v \vec{G} ?

- 5.7. Nech \vec{G} je konečný, súvislý, acyklický digraf s jediným ústím q a jediným prameňom p . Zostrojme digraf \vec{G}' tak, že ku \vec{G} pridáme hranu (q, p) . Dokážte, že \vec{G}' je silne súvislý.
- 5.8. Ukážte, že ak $\vec{G} = (V, H)$ je silne súvislý digraf s aspoň dvoma vrcholmi, tak $|H| \geq |V|$.
- 5.9. Ukážte, že je možné na hranách trojrozmernej kocky zvoliť orientácie tak, že vznikne silne súvislý digraf, ktorý neobsahuje hamiltonovský cyklus.

Kapitola 6

Grafy a matice

6.1 Maticové reprezentácie grafov

Doteraz sme štruktúru grafov v uvažovaných príkladoch vyjadrovali geometrickým modelom – diagramom. Vhodne zvolený diagram poskytuje na prvý pohľad veľa cenných informácií o samotnom grafe, avšak nešikovne nakreslený diagram nás môže zvádzať k nesprávnym záverom, najmä ak ide o izomorfné grafy. Pri počítačovom spracovaní úloh riešených pomocou grafov je reprezentácia grafu diagramom veľmi nevýhodná. V tomto prípade je vhodné zvoliť diskrétny (presnejšie číslcový) popis grafu a na tento účel nám výhodne poslúžia matice.

DEFINÍCIA 6.1. *Nech $G = (V, H)$ je graf, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$. **Maticou incidencie** grafu G nazývame maticu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (n, m) , ak pre jej prvky platí*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak hrana } h_j \text{ je incidentná s vrcholom } v_i, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

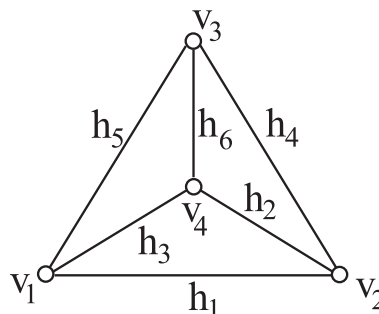
Počet riadkov matice \mathbf{A} je rovný počtu vrcholov grafu G a počet stĺpcov odpovedá počtu hrán grafu G . Každý stĺpec matice \mathbf{A} obsahuje práve dve jedničky, pretože každá hrana grafu G inciduje práve s dvoma vrcholmi. Riadok odpovedajúci i -tému vrcholu v_i obsahuje práve $\delta(v_i)$ jedničiek, čo odpovedá počtu hrán incidentných s vrcholom v_i . Tvar matice je určený poradím, v akom sme očíslovali vrcholy a hrany grafu, je teda závislý na označení prvkov vrcholovej a hranovej množiny daného grafu. Zmena očíslovania prvkov aspoň jednej z týchto množín má za následok permutáciu riadkov, resp. stĺpcov (prípadne aj riadkov aj stĺpcov) matice incidencie. Z toho vyplýva kritérium pre izomorfizmus dvoch grafov.

VETA 6.1. *Dva grafy sú izomorfné práve vtedy, ak ich matice incidencie sa stožňia po konečnom počte permutácií riadkov a stĺpcov jednej z nich.*

Toto kritérium sa v praxi osvedčuje iba s dodatočnými obmedzeniami, pretože pri veľkých grafoch by bolo potrebné preverovať všetkých $m!n!$ permutácií n riadkov a m stĺpcov.

Príklad 6.1. Matica incidencie \mathbf{A} grafu, ktorého diagram je na obr. 6.1 má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Obr. 6.1

V matici incidencie sme uvažovali vrcholy aj hrany grafu a ich vzájomnú incidenciu. Vo všeobecnosti to bude obdĺžniková matica. V matici, ktorú teraz budeme definovať, uvažujeme iba vrcholy a existenciu hrany medzi dvoma vrcholmi. Operácie uskutočňované s týmito maticami nám dokážu povedať o grafoch oveľa viac.

DEFINÍCIA 6.2. Nech $G = (V, H)$ je graf s vrcholovou množinou $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. **Matica susednosti** grafu G je štvorcová matica $\mathbf{B} = (b_{ij})$ rádu n , ak pre jej prvky platí

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } \{v_i, v_j\} \in H, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Napríklad pre graf, ktorého diagram je na obr. 6.1 máme

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pretože $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$, je matica \mathbf{B} symetrická. Na jej hlavnej diagonále sú nuly, pretože v G neexistujú slučky. Pri zisťovaní izomorfizmu dvoch grafov pomocou matíc susednosti musíme v týchto maticiach uvažovať rovnaké permutácie množiny ich riadkov aj stĺpcov, takže celkový počet možností je $n!$.

Maticy susednosti sa dajú výhodne využiť pri overovaní súvislosti grafov ako aj pri určovaní vzdialenosti v danom grafe. K tomu potrebujeme zaviesť špeciálne násobenie matíc, ktorých prvky sú iba nuly a jednotky. Nech \mathbf{B} je matica susednosti grafu $G = (V, H)$, $|V| = n$. Označme $\mathbf{B}^{(1)}$ maticu, ktorú dostaneme z matice \mathbf{B}

pridaním jednotiek na hlavnú diagonálu. Uvažujme maticu $\mathbf{B}^{(2)} = (b_{ij}^{(2)})$ takú, že $\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}$. Z násobenia matíc je zrejmé, že

$$b_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n b_{ik}^{(1)} \cdot b_{kj}^{(1)},$$

pričom ale v tomto súčine matíc budeme používať tzv. boolovské sčítavanie a násobenie ($1 \cdot 1 = 1$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$, $0 + 0 = 0$). Všeobecne môžeme uvažovať maticu

$$\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}.$$

VETA 6.2. *Majme maticu susednosti \mathbf{B} súvislého grafu $G = (V, H)$, $|V| = n$. Potom pre ľubovoľné k , $k = 1, 2, \dots, n$, je prvok $b_{ij}^{(k)}$ matice $\mathbf{B}^{(k)}$ rovný jednej práve vtedy, ak $d(v_i, v_j) \leq k$.*

DÔSLEDOK 6.1. *Graf $G = (V, H)$, $|V| = n$, je súvislý práve vtedy, keď prvky matice $\mathbf{B}^{(n-1)}$ sú iba jednotky.*

DÔSLEDOK 6.2. *Pre každé dva rôzne vrcholy grafu $G = (V, H)$ platí*

$$d(v_i, v_j) = \min\{k; b_{ij}^{(k)} = 1\}.$$

Nakoniec uvedieme vetu, ktorá dáva do vzťahu maticu incidencie a maticu súvislosti daného grafu.

VETA 6.3. *Nech \mathbf{A} je matica incidencie, \mathbf{A}^T je k nej transponovaná matica a \mathbf{B} je matica susednosti grafu $G = (V, H)$. Nech $\mathbf{D} = (d_{ij})$ je diagonálna matica s prvkami $d_{ii} = \delta(v_i)$. Potom*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

PRÍKLAD 6.2. *Nájdite všetky dvojice vrcholov, ktorých vzdialenosť je presne 3 a všetky dvojice vrcholov, ktorých vzdialenosť je viac ako 3 v grafe zadanom maticou susednosti*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Pridaním jednotiek na hlavnú diagonálu dostaneme maticu $\mathbf{B}^{(1)}$. Maticu $\mathbf{B}^{(2)}$ získame násobením $\mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}$ a maticu $\mathbf{B}^{(3)}$ násobením $\mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}$. Postupne

teda dostávame:

$$\mathbf{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vzhľadom na symetrickosť matíc podľa hlavnej diagonály si budeme všímať iba prvky nad diagonálou. V matici $\mathbf{B}^{(3)}$ je iba jedna nula v prvom riadku a treťom stĺpci, čo podľa dôsledku 6.2 znamená, že vzdialenosť vrcholov v_1 a v_3 je viac ako 3. V matici $\mathbf{B}^{(2)}$ sú rovné nule aj prvky $b_{1,5}^{(2)}$, $b_{1,6}^{(2)}$ a $b_{3,4}^{(2)}$, pričom v $\mathbf{B}^{(3)}$ sú rovné jednej. To podľa dôsledku 6.2 znamená, že $d(v_1, v_5) = d(v_1, v_6) = d(v_3, v_4) = 3$.

Aj pri digrafoch, podobne ako pri grafoch, patria matice k základným prostriedkom ich vyjadrenia, hlavne pri strojovom spracovaní.

DEFINÍCIA 6.3. *Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$. Maticou incidencie digrafu \vec{G} nazývame maticu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (n, m) , ak pre jej prvky platí*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } h_j = (v_i, v_k) \text{ pre nejaké } v_k \in V, \\ -1, & \text{ak } h_j = (v_k, v_i) \text{ pre nejaké } v_k \in V, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Uvedieme základné vlastnosti matice \mathbf{A} :

- v každom stĺpci sa čísla 1 a -1 vyskytujú práve raz, ostatné prvky sú nuly,
- počet jednotiek v i -tom riadku je rovný $\delta^+(v_i)$,
- počet čísel -1 v i -tom riadku je rovný $\delta^-(v_i)$.

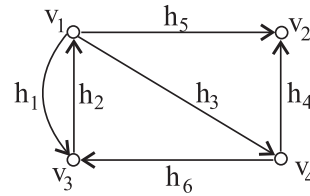
Z matice incidencie \mathbf{A} digrafu \vec{G} ľahko dostaneme maticu incidencie grafu G , ktorý vznikne zrušením orientácie, a to tak, že namiesto a_{ij} zoberieme $|a_{ij}|$.

DEFINÍCIA 6.4. *Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf s vrcholovou množinou $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Maticou susednosti digrafu \vec{G} je štvorcová matica $\mathbf{B} = (b_{ij})$ rádu n , ak pre jej prvky platí*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } (v_i, v_j) \in H, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

VETA 6.4. *Nech \mathbf{B} je matica susednosti digrafu $\vec{G} = (V, H)$. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ prvok $b_{ij}^{(n)}$ matice \mathbf{B}^n udáva počet spojení dĺžky n z vrcholu v_i do vrcholu v_j .*

Pre maticu incidencie \mathbf{A} a maticu susednosti \mathbf{B} digrafu, ktorého diagram je na obr. 6.2 máme



Obr. 6.2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.2 Úlohy

6.1. Bez kreslenia diagramu zistite, či matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sú maticami incidencie toho istého grafu.

6.2. Zistite, či graf G je súvislý, ak jeho matica susednosti je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.3. Zistite všetky dvojice vrcholov v_i, v_j , ktorých vzdialenosť je väčšia ako 3, ak graf je zadaný maticou susednosti

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.4. Zistite, či je graf G súvislý, ak je zadaný maticou susednosti

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.5. Napíšte maticu susednosti digrafu, ktorého diagram je na obr. 5.1.

6.6. Ako sa môžeme pomocou maticovej reprezentácie presvedčiť, či digraf je alebo nie je silne súvislý?

Kapitola 7

Stromy

7.1 Stromy a ich vlastnosti

DEFINÍCIA 7.1. **Strom** je neprázdny súvislý graf, ktorý neobsahuje kružnice. **Les** je graf, ktorého komponenty sú stromy.

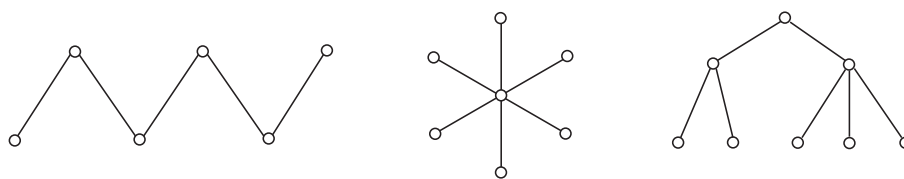
Z aplikačného hľadiska patria stromy k najpopulárnejším pojmom teórie grafov. So stromami sa stretávame pri vyjadrovaní štruktúrnych vlastností rôznych systémov. Poznáme napríklad *genealogické stromy*, ktoré zachytávajú rozvetvenie potomstva vo významných rodoch, stromom môžeme vyjadriť priebeh vyradovacieho (napríklad tenisového) turnaja, rozhodovacím stromom sa dajú veľmi prehľadne zachytiť všetky možné odpovede na nejakú skupinu otázok s dopredu vymedzenými voľbami odpovedí na jednotlivé otázky, pomocou stromov vyjadrujeme štruktúrne vzorce v chémii a podobne. V programovaní sú stromy považované za veľmi dôležitý druh dátových štruktúr a môžu byť využité napríklad pri preklade z programovacích jazykov (*syntaktické stromy*), pri operáciách zoradovania súborov dát, pri realizácii tabuliek údajov s potrebou veľmi rýchlej lokalizácie jednotlivých položiek (*vyhľadávacie stromy*).

Na označenie stromov, ako špeciálnych grafov, budeme používať označenie $T = (V, H)$. Písmeno T je z anglickej terminológie, a to zo slova *tree*.

Dá sa dokázať, že každý súvislý podgraf stromu je tiež strom. Takejto vlastnosti, ktorá sa prenáša na všetky podgrafy, hovoríme *dedičná vlastnosť*.

VETA 7.1. *Nech $T = (V, H)$ je strom a $|H| \geq 1$. Potom v T existujú aspoň dva rôzne vrcholy, ktoré majú stupeň rovný číslu 1.*

Na obr. 7.1 sú diagramy troch stromov. Prvý z nich má práve dva vrcholy stupňa 1 a všetky ostatné vrcholy majú stupeň 2. Taký strom sa nazýva **had**. Druhý zo stromov je **hviezda**. Hviezda je strom, ktorý má práve jeden vrchol stupňa aspoň 3 a všetky ostatné vrcholy majú stupeň 1. Tretí zo stromov na obr. 7.1 je typ rozhodovacieho stromu (prípadne genealogického stromu).



Obr. 7.1

Nasledujúce vety nám popisujú niektoré zo základných vlastností stromov.

VETA 7.2. *Nech $T = (V, H)$ je strom. Potom*

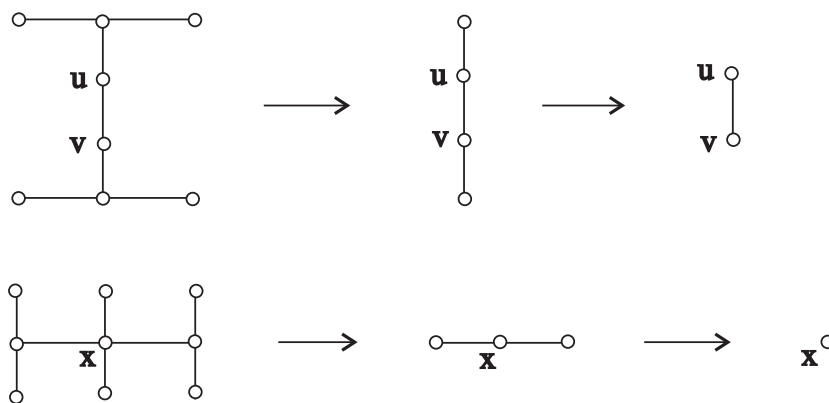
$$|H| = |V| - 1.$$

VETA 7.3. *Graf $G = (V, H)$ je stromom práve vtedy, ak medzi každou dvojicou jeho vrcholov existuje práve jedna cesta.*

V definícii 4.8 sme zaviedli pojem priemer $P(G)$, polomer $r(G)$ a stred grafu $G = (V, H)$. Stromy majú špeciálne vlastnosti vzhľadom na priemer, polomer a stred grafu.

VETA 7.4. *Nech $T = (V, H)$ je strom. Ak jeho priemer je číslo párne, tak stredom stromu je jediný vrchol a $P(T) = 2r(T)$. Ak jeho priemer je číslo nepárne, tak stredom sú dva susedné vrcholy a $P(T) = 2r(T) - 1$.*

Stručne si opíšeme, ako hľadať stred (priemer, polomer) v danom grafe. Ak máme daný strom, tak z neho vynecháme všetky vrcholy stupňa 1 (aj s hranami, ktoré s nimi incidujú). Dostaneme opäť strom a proces opakujeme. Nakoniec dostaneme jedinú hranu – stred pozostáva z dvoch vrcholov, alebo dostaneme jediný vrchol, ktorý je stredom. Ak stredom je jeden vrchol, polomer je rovný počtu iterácií (koľkokrát sme vykonali proces odoberania vrcholov stupňa 1). Ak stred pozostáva z dvoch vrcholov, polomer je o jednotku väčší ako počet iterácií. Na obr. 7.2 je znázornený uvedený postup na dvoch stromoch.

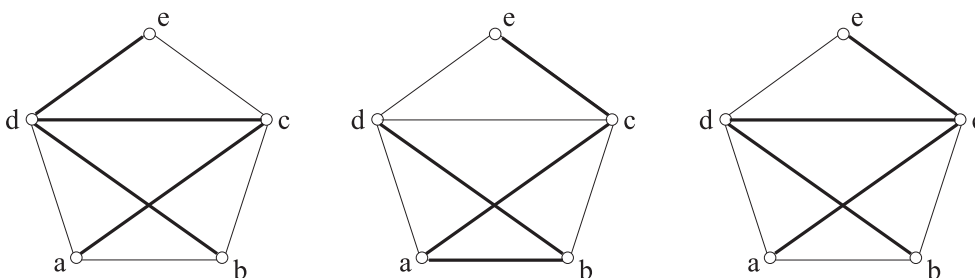


Obr. 7.2

7.2 Kostry a kružnice

DEFINÍCIA 7.2. **Kostry** grafu $G = (V, H)$ je taký jeho faktor, ktorý je stromom.

Keď si uvedomíme význam slov faktor a strom, tak môžeme kostru charakterizovať aj ako súvislý podgraf daného grafu, ktorý obsahuje všetky jeho vrcholy a neobsahuje kružnicu. Je zrejmé, že v grafe G existuje kostra práve vtedy, ak je graf G súvislý. Ak je graf G strom, potom v ňom existuje jediná kostra, ktorou je práve graf G . Na obr. 7.3 sú hrubými čiarami vyznačené tri rôzne kostry toho istého grafu. Je vidieť, že graf môže mať viac kostier. K určení počtu rôznych kostier grafu sa vrátíme neskôr.



Obr. 7.3

VETA 7.5. Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf a T je jeho podgraf v $|V| - 1$ hranami neobsahujúci kružnice. Potom T je kostra grafu G .

Ak sa zamyslíme nad tvrdením vety 7.5 a definíciou stromu, tak zistíme, že ľubovoľné tri z nasledujúcich štyroch vlastností implikujú štvrtú vlastnosť:

- (a) T je súvislý graf,
- (b) T neobsahuje kružnice,
- (c) T má $|V| = n$ vrcholov,
- (d) T má $n - 1$ hrán.

Napríklad: Nech T je súvislý graf neobsahujúci kružnice a má n vrcholov, potom T má $n - 1$ hrán.

Cayley v roku 1889 dokázal, že počet všetkých rôznych kostier (všimnite si, že 1. a 3. kostra na obr. 7.3 sú rôzne) kompletneho grafu K_n pre $n \geq 2$ je rovný číslu n^{n-2} . Teraz si uvedieme, ako je možné určiť počet rôznych kostier grafu pomocou vhodného determinantu.

Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$, je súvislý graf. Nech \mathbf{B} je matica susednosti a \mathbf{D} je diagonálna matica s prvkami $d_{ii} = \delta(v_i)$ grafu G . Označme $\mathbf{D}_i - \mathbf{B}_i$ maticu rádu $n - 1$, ktorú sme vytvorili z matice $\mathbf{D} - \mathbf{B}$ vynechaním i -tého riadku a i -tého stĺpca pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potom pre počet $p(T)$ všetkých rôznych kostier grafu G platí

$$p(T) = \det(\mathbf{D}_i - \mathbf{B}_i).$$

PRÍKLAD 7.1. Vypočítajte počet rôznych kostier grafu, ktorého diagram je na obr. 7.3.

Riešenie. Najprv napíšeme matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vzhľadom na výpočet determinantu pomocou rozvoja podľa riadku alebo stĺpca je výhodné vynechať i -tý riadok a i -tý stĺpec tak, aby v matici ostalo čo najviac núl (nie je to však nutné). Pre $i = 3$ v našom prípade dostávame

$$\mathbf{D}_i - \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a $\det(\mathbf{D}_i - \mathbf{B}_i) = 40$. Je vidieť, že aj v prípade malého grafu je počet kostier dosť veľký.

DEFINÍCIA 7.3. *Nech $T = (V, H)$ je strom. Ak každej hrane stromu T priradíme práve jednu z dvoch možných orientácií, tak dostaneme **orientovaný strom** \vec{T} .*

Je zrejmé, že k stromu $T = (V, H)$ môžeme zostrojiť práve $2^{|H|}$ orientovaných stromov \vec{T} (niektoré z nich budú navzájom izomorfné).

DEFINÍCIA 7.4. *Nech \vec{T}_v je orientovaný strom s aspoň dvoma vrcholmi, v ktorom z vrcholu v existuje dráha do všetkých ostatných vrcholov. Potom \vec{T}_v nazývame **koreňový strom** a vrchol v je **koreňom stromu**.*

POZNÁMKA. V terminológii digrafov koreň stromu je vlastne (jediným) prameňom digrafu, ktorý je koreňovým stromom. Vrcholom, ktoré v digrafe nazývame ústia, budeme v koreňových stromoch hovoriť **listy** (názornejšie to odpovedá predstave stromu).

V niektorých prípadoch je výhodné uvažovať ku koreňovému stromu \vec{T}_v opačne orientovaný strom \overleftarrow{T}_v (všetky hrany sú opačne orientované).

Nakoľko v koreňovom strome môže medzi dvoma rôznymi vrcholmi existovať najviac jedna dráha, orientácia každej hrany v koreňovom strome je jednoznačne určená výberom koreňa. Koreňový strom \vec{T}_v môžeme potom v rovine reprezentovať aj diagramom neorientovaného stromu T_v , pričom koreň stromu v umiestnime najvyššie.

DEFINÍCIA 7.5. *Nech \vec{G} je digraf, ktorý vznikol orientáciou grafu (multigrafu) G . Nech K je kostra grafu (multigrafu) G . Potom digraf \vec{K} , ktorý vznikol z K rovnakou orientáciou hrán, sa nazýva **orientovanou kostrou** digrafu \vec{G} . Kostra súvislého digrafu \vec{G} , ktorá je koreňovým stromom, sa nazýva **koreňová kostra** digrafu \vec{G} .*

Ak po zrušení orientácie všetkých hrán v digrafe $\vec{G} = (V, H)$ získame graf, tak počet rôznych orientovaných kostier digrafu \vec{G} je rovný počtu rôznych kostier v grafe G . Iná situácia je, ak v digrafe \vec{G} sú opačne orientované hrany a po zrušení orientácie získame multigraf.

Nech $\vec{G} = (V, H)$, $|V| = n$, je súvislý digraf. Nech \mathbf{A} je jeho matica incidencie. Potom pre počet $p(\vec{T})$ všetkých rôznych orientovaných kostier digrafu \vec{G} platí

$$p(\vec{T}) = \det((\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)_i)$$

pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, pričom $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)_i$ je matica utvorená z matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ vynechaním i -tého riadku a i -tého stĺpca.

PRÍKLAD 7.2. Vypočítajte počet všetkých rôznych kostier digrafu \vec{G} , ktorého diagram je na obr. 6.2.

Riešenie. K matici incidencie digrafu \vec{G} uverejnenej v kapitole 6 urobíme transponovanú maticu a vypočítame súčin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$. Potom pre $i = 1$ (alebo ľubovoľné iné) dostávame:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det((\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)_i) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 13.$$

Nakoniec sa pozrieme na spôsob určovania počtu $p(\vec{T}_{v_s})$ všetkých rôznych koreňových kostier digrafu $\vec{G} = (V, H)$ s koreňom vo vrchole v_s . Na tento účel vytvoríme maticu $\mathbf{K} = (k_{ij})$ rádu $|V|$ digrafu \vec{G} , kde

$$k_{ii} = \delta^-(v_i), \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, |V|,$$

$$k_{ij} = -b_{ij}, \quad \text{pre } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, |V|,$$

pričom b_{ij} sú prvky matice susednosti \mathbf{B} digrafu \vec{G} . Utvoríme maticu \mathbf{K}_s vynechaním s -tého riadku a s -tého stĺpca matice \mathbf{K} . Potom platí

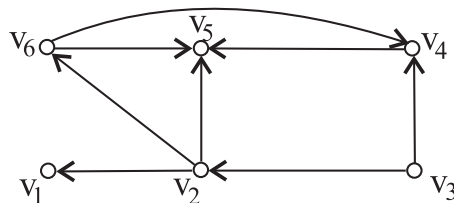
$$p(\vec{T}_{v_s}) = \det \mathbf{K}_s.$$

PRÍKLAD 7.3. Majme digraf \vec{G} , ktorého diagram je na obr. 7.4. Zistite počet $p(\vec{T}_{v_3})$ jeho koreňových kostier s koreňom vo vrchole v_3 .

Riešenie. Určíme matice \mathbf{K} a \mathbf{K}_3 takto:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom $p(\vec{T}_{v_3}) = \det \mathbf{K}_3 = 6$.



Obr. 7.4

7.3 Úlohy

- 7.1. Je možné, aby v súvislom (konečnom) grafe existovali dve rôzne kostry, ktoré nemajú spoločnú hranu?
- 7.2. Nájdite všetky neizomorfné stromy s nie viac ako 5 hranami.
- 7.3. Koľko hrán treba odstrániť z Petersenovho grafu, aby vznikla kostra?
- 7.4. Vypočítajte počet rôznych kostier grafu, ktorý vznikne zrušením orientácií hrán digrafu na obrázku 7.4.
- 7.5. V digrafe, ktorého diagram je na obrázku 5.1 vypočítajte:
 - a) počet rôznych orientovaných kostier,
 - b) počet rôznych koreňových kostier s koreňom vo vrchole b ,
 - c) počet rôznych koreňových kostier s koreňom vo vrchole a .

Kapitola 8

Aplikácie grafov a digrafov

8.1 Minimálne cesty a spojenia

V tejto kapitole uvedieme niektoré typické úlohy z praxe, pri riešení ktorých sa významne využíva teória grafov. Zároveň v niektorých prípadoch uvedieme aj známe algoritmy na ich riešenie alebo aspoň vhodné heuristicke postupy. Algoritmy budeme považovať za *rýchly*, ak je možné počet krokov, ktoré algoritmus pri výpočte vykoná, ohraničiť konštantným násobkom polynomiálnej funkcie. Ak je algoritmus rýchly, tak so zväčšovaním vstupu algoritmu je nárast času na jeho úspešné ukončenie „zvládnuteľný“ rýchlejším počítačom. V opačnom prípade hovoríme, že algoritmus nie je efektívny. Záujemcov o presnejšiu charakteristiku rýchlosti práce algoritmov odkazujeme na knihy: J. Plesník, *Grafové algoritmy*, resp. L. Kučera, *Kombinatorické algoritmy* zo zoznamu literatúry v závere.

Jednou zo základných úloh v teórii grafov je nájsť najkratšiu cestu medzi dvoma vrcholmi grafu. Taká požiadavka sa vyskytuje v mnohých praktických aplikáciách (napríklad pri hľadaní najkratšieho dopravného spojenia). V takých grafoch sa hrany označujú číslami, ktorých význam je rôzny a záleží od toho, aká úloha sa daným grafom rieši.

Majme graf $G = (V, H)$, $|V| = n$. Nech \mathbb{R}^+ je množina kladných reálnych čísel. Zobrazenie $f : H \rightarrow \mathbb{R}^+$ nazývame **hranovým ohodnotením** grafu G . Pre každú hranu $\{v_i, v_j\} \in H$ číslo $w_{ij} = f(\{v_i, v_j\}) \in \mathbb{R}^+$ nazývame **ohodnotením hrany** $\{v_i, v_j\}$.

Podobne definujeme hranové ohodnotenie aj pre digrafy, iba namiesto neorientovaných hrán $\{v_i, v_j\}$ uvažujeme orientované hrany (v_i, v_j) .

8.1.1 Dĺžka minimálnej cesty

Predstavme si, že súvislý hranovo ohodnotený graf predstavuje nejakú cestnú sieť, v ktorej vrcholy odpovedajú mestám a križovatkám a hodnoty hrán odpovedajú vzdialenostiam medzi bodmi reprezentovanými vrcholmi. V závislosti od

typu úlohy ohodnotenia hrán môžu predstavovať aj čas alebo náklady na prepravu z jedného miesta na druhé. V takom grafe chceme nájsť najvýhodnejšie „spojenia“.

Nech S je cesta z vrcholu v_i do vrcholu v_j v ohodnotenom grafe G . Súčet ohodnotení hrán cesty S nazveme **dĺžkou cesty** S . Pre dva vrcholy v_i a v_j potom minimálnu z dĺžok ciest medzi v_i a v_j nazveme **dĺžkou minimálnej cesty** a označíme symbolom $d_w(v_i, v_j)$.

Pri riešení úloh súvisiacich so vzdialenosťou sa najčastejšie stretávame s nasledujúcimi variantmi:

1. pre dané dva vrcholy u, v ohodnoteného grafu určiť vzdialenosť medzi u a v ,
2. pre daný vrchol u určiť vzdialenosti z u do každého vrcholu ohodnoteného grafu,
3. určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov ohodnoteného grafu.

Vzhľadom na to, že úloha číslo 1 je obsiahnutá v 2. a 3. úlohe, obmedzíme sa na algoritické riešenia 2. a 3. úlohy. Pre tento prípad (neorientovaný graf) uvedieme **Dijkstrov algoritmus**, ktorý rieši 2. úlohu. Riešenie 3. úlohy si ukážeme neskôr pre digraf.

Vstupom Dijkstrovho algoritmu je hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$ a začiatkový vrchol a , od ktorého sa určuje dĺžka minimálnej cesty (vzdialenosť) $d_w(a, v)$ k vrcholu v pre všetky $v \in V$. Pre každý vrchol $v \in V$ sa zavádza premenná $L(v)$. Je to číslo, ktoré udáva momentálny „odhad“ dĺžky minimálnej cesty z a do v . Presnejšie, v každom momente je $d_w(a, v) \leq L(v)$, čo znamená, že v priebehu práce algoritmu sa pre niektoré vrcholy môže $L(v)$ znižovať, pre iné sa hodnota $L(v)$ už stáva pevnou a vtedy je presne rovná $d_w(a, v)$. Algoritmus pracuje ešte s premennou A , čo je množina „aktívnych“ vrcholov, teda vrcholov s premennou hodnotou $L(v)$. Na začiatku je $A = V$.

V hlavnom kroku algoritmu vyberieme z množiny vrcholov s pevnými hodnotami L vrchol v , ktorý má hodnotu $L(v)$ minimálnu, t.j. do ktorého je z vrcholu a najkratšia vzdialenosť zo všetkých už známych vzdialeností. Potom zistujeme, či sa cez tento vrchol v môžu skrátiť doteraz známe nie pevné vzdialenosti do jeho susedov (vrcholov s ešte nie pevnou hodnotou $L(x)$) cez hrany, ktoré ich spájajú. Ak áno, príslušné vrcholy dostanú menšiu hodnotu $L(x)$.

Algoritmus určenia minimálnej cesty (Dijkstra)

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$, počiatkový vrchol a .

Výstup: $L(x) = d_w(a, x)$ pre každý vrchol $x \in V$.

1. Polož $L(a) := 0$; $L(x) := \infty$ pre každé $x \in V \setminus \{a\}$; $A := V$.
2. Ak $A = \emptyset$, STOP.
3. Polož $v := \{y \in A; L(y) \leq L(z), z \in A\}$ (ak je viac možností, zvoľ ľubovoľnú).
Polož $A := A \setminus \{v\}$.

4. Pre všetky $x \in A$ také, že $\{v, x\} \in H$ polož
 $L(x) := \min\{L(x), L(v) + f(\{v, x\})\}$.
 Skok na krok 2.

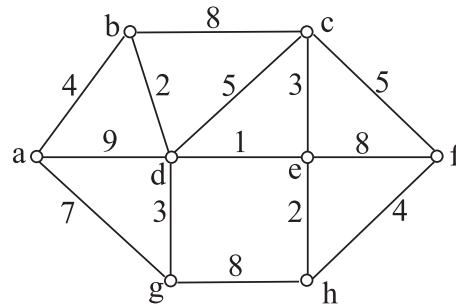
POZNÁMKA. Pri praktickom programovaní nahradíme symbol ∞ nejakou veľkou hodnotou, o ktorej máme zaručené, že bude väčšia ako dĺžka maximálnej cesty v G , napr. $M = 10^5 + \sum_{\{u,v\} \in H} f(\{u, v\})$.

Poznamenajme ešte, že algoritmus môžeme (len nahradením neorientovaných hrán $\{u, v\}$ orientovanými (u, v)) použiť aj pre digrafy.

Požiadavka, že ohodnotenia všetkých hrán sú kladné, je veľmi dôležitá. Pre úlohu hľadania dĺžky minimálnej cesty v grafe, kde niektoré hrany môžu mať aj záporné ohodnotenia (za ich pridanie do cesty dostaneme „prémium“), nie je známy žiadny efektívny algoritmus, a asi ani žiadny neexistuje.

PRÍKLAD 8.1. Zistite dĺžky minimálnych ciest z vrcholu a do všetkých vrcholov ohodnoteného grafu, ktorého diagram je na obr. 8.1.

Riešenie. Získané hodnoty $L(x)$ pri jednotlivých prechodoch cyklami (2–3–4) algoritmu sú zapísané v nasledujúcej tabuľke. Podčiarknuté hodnoty sú pri vrchoch, ktoré sme v 3. kroku zvolili za vrchol v . Sú to vlastne definitívne hodnoty $L(v) = d_w(a, v)$ pre všetky $v \in V$.



Obr. 8.1

POZNÁMKA. Najšť konkrétnu postupnosť vrcholov a hrán cesty s minimálnou dĺžkou z vrcholu a do zvoleného vrcholu je možné „spätným“ chodom, na ktorý je práve tabuľkový zápis priebehu výpočtu veľmi výhodný. Doporučujeme čitateľovi premyslieť si tento postup. Ide pritom vždy o nájdenie predchádzajúceho vrcholu minimálnej cesty, ak postupujeme od jej konca.

a	b	c	d	e	f	g	h
<u>0</u>	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	<u>4</u>	∞	9	∞	∞	7	∞
		12	<u>6</u>	∞	∞	7	∞
		11		7	∞	<u>7</u>	∞
		11		<u>7</u>	∞		15
		10			15		<u>9</u>
		<u>10</u>			13		
					<u>13</u>		

8.1.2 Dĺžka minimálneho spojenia

Uvažujme súvislý hranovo ohodnotený digraf $\vec{G} = (V, H)$, to znamená, že každej hrane (v_i, v_j) je priradené kladné reálne číslo $f((v_i, v_j)) = w_{ij}$. Nech \vec{S} je spojenie z vrcholu v_i do vrcholu v_j . Súčet ohodnotení hrán spojenia \vec{S} nazývame **dĺžkou**

spojenia \vec{S} . Pre dva vrcholy v_i a v_j potom minimálnu z dĺžok spojení z v_i do v_j nazveme **dĺžkou minimálneho spojenia** a označíme symbolom $\vec{d}_w(v_i, v_j)$. Ak nedôjde k nedorozumeniu, budeme skrátene hovoriť o vzdialenosti z v_i do v_j .

Na ohodnotenom digrafe si ukážeme riešenie 3. úlohy z predchádzajúcej strany, t.j. ako určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov ohodnoteného grafu. K tomu potrebujeme pojmy *cenová* a *dištančná* matica.

DEFINÍCIA 8.1. *Nech $\vec{G} = (V, H)$, $|V| = n$, je hranovo ohodnotený digraf. Štvorcovú maticu $\mathbf{C} = (c_{ij})$ rádu n nazývame **cenovou maticou**, ak pre jej prvky platí*

$$c_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{ak } (v_i, v_j) \in H, \\ \infty, & \text{ak } (v_i, v_j) \notin H, \\ 0, & \text{ak } i = j. \end{cases}$$

DEFINÍCIA 8.2. *Nech $\vec{G} = (V, H)$, $|V| = n$, je hranovo ohodnotený digraf. Štvorcovú maticu $\mathbf{D} = (d_{ij})$ rádu n nazývame **dištančnou maticou**, ak pre jej prvky platí*

$$d_{ij} = \begin{cases} \vec{d}_w(v_i, v_j), & \text{ak existuje spojenie z } v_i \text{ do } v_j, \\ \infty, & \text{ak neexistuje spojenie z } v_i \text{ do } v_j, \\ 0, & \text{ak } i = j. \end{cases}$$

Cenová matica sa zo zadaného ohodnoteného digrafu získa ľahko a slúži nám na výpočet dištančnej matice (matice vzdialeností), v ktorej sú prehľadne zapísané dĺžky minimálnych spojení medzi všetkými dvojicami vrcholov. Naším cieľom je teda vypočítať dištančnú maticu. Jedným z možných postupov na jej určenie je tzv. **Floydov algoritmus**, v ktorom štartujeme z cenovej matice a postupným „umocňovaním“ získame dištančnú maticu.

Algoritmus určenia minimálneho spojenia (Floyd)

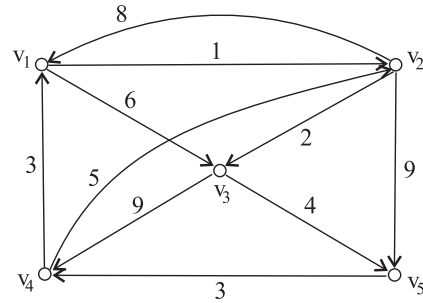
Vstup: Hranovo ohodnotený digraf $\vec{G} = (V, H)$ s vrcholmi v_1, v_2, \dots, v_n .

Výstup: Dištančná matica $\mathbf{D} = (d_{ij})$.

1. Polož $\mathbf{D}^{(0)} := \mathbf{C}$, kde \mathbf{C} je cenová matica digrafu \vec{G} , teda $d_{ij}^{(0)} = c_{ij}$ pre všetky $i, j = 1, 2, \dots, n$.
Polož $k := 1$.
2. Vytvor maticu $\mathbf{D}^{(k)} = d_{ij}^{(k)}$ tak, že
 $d_{ij}^{(k)} := \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$.
3. Ak $k = n$, STOP ($\mathbf{D}^{(k)} = \mathbf{D}$), inak polož $k := k + 1$.
Skok na krok 2.

PRÍKLAD 8.2. Zostrojte dištančnú maticu digrafu \overrightarrow{G} , ktorého diagram je na obr. 8.2.

Riešenie. Najprv napíšeme cenovú maticu \mathbf{C} a položíme ju rovnú matici $\mathbf{D}^{(0)}$. Pre $k = 1$ sú v matici $\mathbf{D}^{(0)}$ prvý riadok a prvý stĺpec „pracovné“, a pre prvok $d_{ij}^{(1)}$ zostrojovanej matice $\mathbf{D}^{(1)}$ platí, že je rovný menšiemu z dvojice čísel: prvok na tej istej pozícii v matici $\mathbf{D}^{(0)}$, resp. súčet prvku v prvom riadku a j -tom stĺpci a prvku v prvom stĺpci a i -tom riadku. Podobne konštruujeme $\mathbf{D}^{(2)}, \dots, \mathbf{D}^{(5)} = \mathbf{D}$.



Obr. 8.2

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 5 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{(0)}, \quad \mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & \infty & 10 \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 12 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 11 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 12 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 11 & 6 \\ 12 & 13 & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(5)} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 10 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 9 & 6 \\ 10 & 11 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

POZNÁMKA. Floydov algoritmus sa dá bez problémov použiť aj na hľadanie dĺžky minimálnych ciest v neorientovanom grafe. Ak ho nechceme veľmi modifikovať, stačí v grafe G nahradiť každú hranu dvojicou opačne orientovaných hrán s rovnakým ohodnotením.

8.2 Minimálna kostra grafu

Až doteraz boli pre nás rôzne kostry daného grafu v zásade rovnocenné, pretože všetky obsahovali rovnaký počet hrán. Iná situácia nastane v hranovo ohodnotenom grafe. V takom prípade má zmysel hľadať kostry grafu, ktoré majú extrémny (t.j. najmenší alebo najväčší) súčet ohodnotení hrán.

Majme súvislý hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$. Zo všetkých kostier grafu G hľadáme takú, ktorá má minimálny súčet ohodnotení všetkých jej hrán. Je zrejmé, že existuje aspoň jedna kostra $T = (V, H')$ s minimálnym súčtom ohodnotení hrán a nazveme ju **minimálnou kostrou** grafu $G = (V, H)$.

Problém určenia minimálnej kostry grafu má svoju motiváciu v praxi. Z našich matematikov sa ním ako prvý úspešne zaoberal O. Borůvka začiatkom 20. rokov minulého storočia v súvislosti s návrhom siete pre rozvod elektriny. Ďalšiu metódu riešenia navrhol v roku 1930 V. Jarník, ale základné myšlienky ich algoritmov sa všeobecne rozšírili až po zavedení počítačov. My si uvedieme dva jednoduché algoritmy a to *Primov* a *Kruskalov*. Primov je výhodnejší pri strojovom spracovaní problému, Kruskalov viac využijeme pri riešení malých úloh na cvičeniach, ak budeme riešiť úlohy, ktoré nejakým spôsobom potrebujú minimálnu kostru alebo jej modifikáciu.

I. Algoritmus určenia minimálnej kostry (Kruskal)

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$.

Výstup: Minimálna kostra $T = (V, H')$.

1. Zostroj diskretný faktor $T = (V, \emptyset)$.
2. Zoraď hrany grafu G do neklesajúcej postupnosti vzhľadom na ich ohodnotenia.
3. Do T pridaj z neklesajúcej postupnosti prvú hranu, ktorá v T nevytvorí kružnicu, a z postupnosti hrán ju odober.
4. Ak $|H'| = |V| - 1$, STOP ($T = (V, H')$ je minimálna kostra), inak skok na krok 3.

Z popísaného algoritmu vyplýva, že ak ohodnotenia všetkých hrán sú navzájom rôzne, tak existuje jediná minimálna kostra grafu G .

II. Algoritmus určenia minimálnej kostry (Prim)

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Výstup: Minimálna kostra $T = (V(T), H'(T))$.

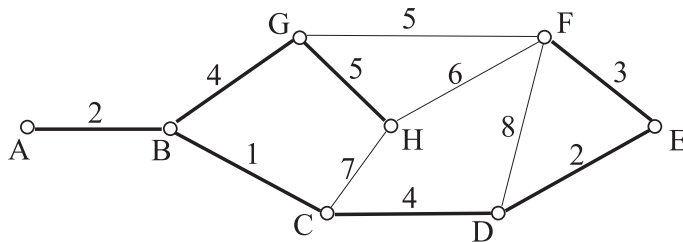
1. Polož $T := (V(T), H'(T))$, $V(T) := \{v_1\}$, $H'(T) := \emptyset$.
2. Ak $|V(T)| = n$, STOP (T je minimálna kostra).
3. Pre $v_i \in V(T)$ a $v_j \in V(G) \setminus V(T)$ zvoľ hranu $\{v_i, v_j\}$ s minimálnym ohodnotením.
 Polož $V(T) := V(T) \cup \{v_j\}$, $H'(T) := H'(T) \cup \{v_i, v_j\}$.
 (Ak je viac hrán $\{v_i, v_j\}$ s rovnakým minimálnym ohodnotením, z nich majú najprv prednosť hrany s najmenším i a potom s najmenším j).
 Skok na krok 2.

POZNÁMKA. V prípade existencie viacerých minimálnych kostier grafu pri postupe podľa Kruskalovho algoritmu môžeme získať ktorúkoľvek z nich. Primov algoritmus produkuje vždy jediná kosť, ktorá je určená očíslovaním vrcholov.

PRÍKLAD 8.3. Predpokladajme, že máme plán okresu, v ktorom existuje určitá sieť ciest prvej triedy. Je potrebné v zimnom období zabezpečiť dopravu tak, aby:

- ľubovoľné dve obce boli spojené zjazdovou cestou,
- náklady na údržbu ciest boli minimálne.

Majme graf, ktorého diagram je modelom tejto situácie. Hranám priradíme hodnoty nákladov na údržbu ciest (napr. v tisíckach korún). Riešením je kosť grafu (silnejšie vyznačená) na obr. 8.3, ktorej súčet ohodnotení hrán je 21.



Obr. 8.3

8.3 Problém okružnej cesty

Predstavme si, že v určitom meste má vyjsť z pošty poštový doručovateľ, obísť všetky ulice svojho obvodu a má sa vrátiť naspäť na poštu. Cestu si má naplánovať tak, aby bola najkratšia.

S touto situáciou úzko súvisí **problém okružnej cesty**, ktorý žiada nájsť v súvislom hranovo ohodnotenom grafe uzavretý sled, ktorý obsahuje každú hranu aspoň raz, a pritom súčet ohodnotení hrán toho sledu je minimálny. Požaduje teda také hranové pokrytie grafu, ktorého súčet ohodnotení hrán je minimálny. Uvažujme nasledujúce prípady.

A. Graf $G = (V, H)$ je hranovo ohodnotený, a pritom eulerovský. V tomto prípade sa graf dá pokryť jedným uzavretým ťahom, v ktorom sa každá hrana grafu vyskytuje práve raz. Súčet ohodnotení hrán toho ťahu je riešením našej úlohy.

B. Graf $G = (V, H)$ je súvislý a má práve dva vrcholy nepárneho stupňa, nech sú to vrcholy u a v . Potom existuje pokrytie grafu jedným otvoreným ťahom s koncovými vrcholmi u a v , ktorý už obsahuje všetky hrany grafu G . Cesta musí byť okružná, a preto z u do v (alebo naopak) musíme prejsť po niektorých hranách, ktoré sa už vyskytli v otvorenom ťahu. Pre túto cestu vyberieme zo všetkých možností takú, ktorá dáva minimálny súčet ohodnotení hrán. Je zrejmé, že ak

k súčtu ohodnotení hrán otvoreného ťahu (všetkých hrán grafu) pridáme súčet ohodnotení hrán minimálnej cesty z u do v , dostaneme okružnú cestu v grafe G s minimálnym súčtom ohodnotení hrán.

C. Prípád B môžeme zovšeobecniť. Nech súvislý graf $G = (V, H)$ obsahuje práve $2m$ ($m > 1$) vrcholov nepárneho stupňa. Potom sa dá pokryť práve m otvorenými ťahmi. Každý z otvorených ťahov v jednom vrchole nepárneho stupňa začína a v inom končí. Preto pri riešení problému vyhľadáme všetky vrcholy s nepárnymi stupňami a snažíme sa ich po dvoch pospájať cestami tak, aby súčet hodnotení hrán týchto m ciest bol minimálny. K tomuto číslu pripočítame súčet ohodnotení všetkých hrán grafu.

POZNÁMKA. Problémom vo väčšom grafe môže byť veľký počet vrcholov nepárnych stupňov. Nájsť minimálne cesty medzi všetkými vrcholmi nepárnych stupňov grafu G môžeme napríklad Dijkstrovým algoritmom, ale výhodnejšia je modifikácia Floydovho algoritmu pre neorientované grafy.

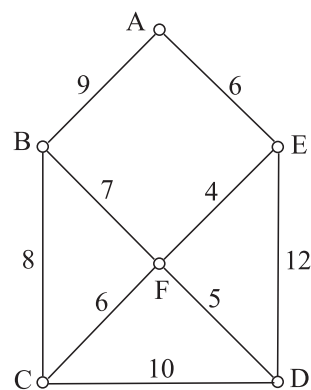
PRÍKLAD 8.4. Majme hranovo ohodnotený graf G , ktorého diagram je na obr. 8.4. Vrcholy B, C, D, E majú nepárne stupne. Potrebujeme teda nájsť dve cesty spájajúce do dvojíc tieto štyri vrcholy tak, že súčet ohodnotení ich hrán je minimálny zo všetkých možností. Máme tri možnosti:

$$ED + BC = 9 + 8 = 17,$$

$$EB + DC = 11 + 10 = 21,$$

$$EC + BD = 10 + 12 = 22.$$

Najvýhodnejší je súčet ciest $ED + BC = 17$. Ak k tomu číslu pripočítame súčet ohodnotení všetkých hrán grafu 67, dostaneme hodnotu minimálnej okružnej cesty 84.



Obr. 8.4

8.4 Problém obchodného cestujúceho

Majme hranovo ohodnotený súvislý graf, v ktorom vrcholy predstavujú nejaké mestá a hrany cestné spojenia medzi týmito mestami, pričom ohodnotenie hrany predstavuje dĺžku príslušného cestného spojenia. Obchodný cestujúci má vyjsť z jedného pevne zvoleného mesta, prejsť všetkými mestami práve raz a vrátiť sa do pôvodného mesta, pričom má cestu voliť tak, aby bola najkratšia.

Ak použijeme terminológiu teórie grafov, tak v hranovo ohodnotenom súvislom grafe $G = (V, H)$ máme nájsť *hamiltonovskú kružnicu*, ktorá má minimálny súčet ohodnotení hrán.

Je zrejmé, že v ľubovoľnom súvislom grafe nemusí hamiltonovská kružnica vôbec existovať. V tom prípade úloha nemá riešenie. Už vieme, že nepoznáme efektívne algoritmy ani na zistenie existencie hamiltonovskej kružnice v danom grafe,

súčet 46 a (3) má súčet 50). Riešením našej úlohy sú hamiltonovské kružnice (2) a (4).

POZNÁMKA. Táto metóda rozhodovacieho stromu už nie je použiteľná pri hranovo hustých grafoch s viac ako 20 vrcholmi ani ak nasadíme rýchle počítače. Boli vyvinuté niektoré *heuristické* metódy, t.j. metódy ktoré nie vždy sú úspešné, ale dosť často úspešné sú aj na grafoch až do 100 vrcholov. Napríklad metódu penalizácie vrcholov môže čitateľ nájsť vo viacerých knihách zo zoznamu literatúry v závere.

8.5 Metóda kritickej cesty

Uvažujme určitú sieť projektu nejakého výrobného procesu. **Sieťový graf** je grafová reprezentácia nejakého projektu pozostávajúceho z navzájom súvisiacich úloh, ktoré sa musia vykonať v určitom poradí. Je to teda hranovo ohodnotený súvislý acyklický digraf $\vec{G} = (V, H)$ s jediným prameňom a jediným ústím. Orientovaná hrana v digrafe \vec{G} sa používa na znázornenie činnosti, šípka na hrane znázorňuje smer pokračovania v projekte a ohodnotenie každej hrany je plánovaný čas trvania príslušnej činnosti. Vrchol v \vec{G} označuje stav, kedy sú ukončené činnosti, ktoré doňho vstupujú a môžu začať činnosti z neho vychádzajúce. Predpokladajme, že sa nevyskytujú časové straty. Chceme nájsť *optimálne časové trvanie* celého projektu.

Kritickou činnosťou nazývame takú činnosť, predĺženie trvania ktorej (za predpokladu, že v ostatných činnostiach je plánovaná doba trvania dodržaná) spôsobí predĺženie celého procesu. Dráha medzi prameňom a ústím v \vec{G} , ktorej každá hrana vyjadruje kritickú činnosť, sa nazýva **kritická cesta**.

Vrcholy sieťového grafu budeme označovať trojicou čísel: i , $T(i)$ a $T'(i)$ (pozri obr. 8.6).

Číslo i znamená poradové číslo pri očíslovaní vrcholov číslami od 1 do $|V|$ tak, že každá hrana smeruje z čísla menšieho do väčšieho.

Číslo $T(i)$ vyjadruje minimálnu dobu, za ktorú sa dá od začiatku procesu do príslušného stavu dostať – je to **minimálne časové ohodnotenie**.

Číslo $T'(i)$ udáva posledný možný čas, v ktorom musia začať všetky činnosti odpovedajúce hranám vychádzajúcim z vrcholu i , aby nedošlo k predĺženiu trvania celého procesu – je to **maximálne časové ohodnotenie**.

Stručne si popíšeme činnosť algoritmu na hľadanie minimálneho časového ohodnotenia vrcholov digrafu. Nech sú už očíslované vrcholy digrafu. Začiatok procesu, t.j. vrchol 1 má minimálne časové ohodnotenie 0 ($T(1) = 0$). Nech i je ľubovoľný vrchol skúmaného digrafu \vec{G} . Preberieme všetky vrcholy j , $j < i$, také, že existuje hrana (j, i) . Ak označíme $f(j, i)$ ohodnotenie hrany (j, i) , tak vrchol i ohodnotíme najväčším z čísel $T(j) + f(j, i)$, t.j. označením času, v ktorom budú ukončené všetky činnosti končiace vo vrchole i . Aby sme mohli vrchol i ohodnotiť, musia byť ohodnotené všetky vrcholy s menšími poradovými číslami.

Algoritmus minimálneho časového ohodnotenia

Vstup: Hranovo ohodnotený, súvislý, acyklický digraf $\vec{G} = (V, H)$ s jediným prameňom, jediným ústím a s očíslovanými vrcholmi od 1 do $n = |V|$ tak, že pre každú hranu (i, j) je $i < j$.

Výstup: Minimálne časové ohodnotenie $T(i)$ pre každý vrchol i .

1. Polož $T(1) := 0$.
2. Polož $i := 2$.
3. Polož $T(i) := \max\{T(j) + f(j, i)\}$ pre všetky vrcholy $j < i$, pre ktoré existuje hrana (j, i) .
4. Ak $i = n$, STOP, inak polož $i := i + 1$.
Skok na krok 3.

Algoritmus maximálneho časového ohodnotenia

Vstup: Hranovo ohodnotený, súvislý, acyklický digraf $\vec{G} = (V, H)$ s jediným prameňom, jediným ústím a s očíslovanými vrcholmi od 1 do $n = |V|$ tak, že pre každú hranu (i, j) je $i < j$. Hodnoty $T(i)$ pre každý vrchol.

Výstup: Maximálne časové ohodnotenie $T'(i)$ pre každý vrchol i .

1. Polož $T'(n) := T(n)$.
2. Polož $i := n - 1$.
3. Polož $T'(i) := \min\{T'(j) - f(i, j)\}$ pre všetky vrcholy $j > i$, pre ktoré existuje hrana (i, j) .
4. Ak $i = 1$, STOP, inak polož $i := i - 1$.
Skok na krok 3.

Každý vrchol, ktorého minimálne a maximálne časové ohodnotenia sú rovnaké ($T(i) = T'(i)$), leží na nejakej kritickej ceste, iné vrcholy na kritickej ceste neležia. K tomu, aby hrana (i, j) ležala na kritickej ceste, musí spĺňať podmienky:

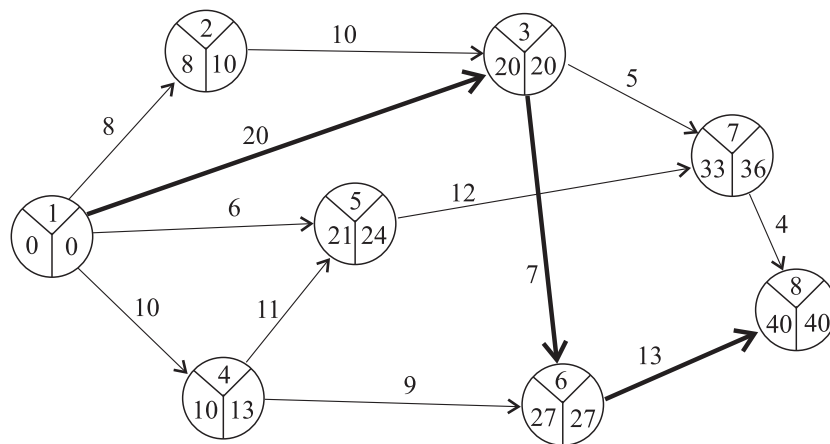
1. Vrcholy i, j ležia na kritickej ceste, teda $T(i) = T'(i)$ a $T(j) = T'(j)$.
2. Pre ohodnotenie $f(i, j)$ hrany (i, j) platí $f(i, j) = T(j) - T(i)$ ($f(i, j) = T'(j) - T'(i)$).

PRÍKLAD 8.6. Nájdite kritickú cestu výrobného procesu, ktorý je znázornený grafom získaným z grafu na obr. 8.6, ak v ňom vrcholy „stiahneme“ do malých krúžkov a neuvažujeme čísla vo vrcholoch.

Riešenie. Najskôr prekreslíme diagram tak, že väčšie krúžky odpovedajúce vrcholom rozdelíme na tri časti (pozri obr. 8.6). Do horných častí očísľujeme vrcholy tak,

aby každá hrana smerovala z vrcholu s menším číslom do vrcholu s väčším. Potom do ľavých častí zapisujeme hodnoty $T(i)$, t.j. minimálne časové ohodnotenia. Vo vrchole 1 je $T(1) = 0$. Vo vrchole 2 je to $T(1) + f(1, 2) = 0 + 8 = 8$, teda $T(2) = 8$. Vo vrchole 3 je: $T(2) + f(2, 3) = 8 + 10 = 18$, $T(1) + f(1, 3) = 0 + 20 = 20$, preto je $T(3) = 20$, atď.

Potom vyplníme hodnoty $T'(i)$, t.j. nájdeme maximálne časové ohodnotenia. Začneme vo vrchole 8, tu je $T'(8) = 40$. Prejdeme k vrcholu 7, kde $T'(8) - f(7, 8) = 40 - 4 = 36$, teda $T'(7) = 36$. Takto pokračujeme vždy k vrcholu s číslom o jednotku menším a napríklad pre vrchol 3 je: $T'(7) - f(3, 7) = 36 - 5 = 31$, $T'(6) - f(3, 6) = 27 - 7 = 20$, teda vo vrchole 3 je $T'(3) = 20$, atď. Hrany kritickej cesty sú na obr. 8.6 vyznačené silnejšie.



Obr. 8.6

8.6 Toky v sieťach

Začneme príkladom. Je daná sieť potrubia, pričom potrubie môže mať rôzne priemery a niektoré jeho časti môžu byť aj jednosmerné. Sieť potrubia je uzavretá okrem dvoch miest, začiatku a a konca z , kde tekutina do potrubia vteká, resp. z neho vyteká. Máme určiť, aké maximálne množstvo tekutiny môže sieťou za určitú dobu pretiecť z a do z . Je logické sa zaujímať o maximálny tok (množstvo kvapaliny za jednotku času). Potrubie a tekutinu sme uviedli iba pre názornosť, ale môže sa jednať o rôzne prenosové siete a prenášané médium môže byť tiež rôzne. Jedným z takých príkladov môžu byť aj siete na prenos informácií medzi jednotlivými počítačmi. Pravidlá, ktoré uvedieme v ďalšej časti, platia pre všetky takéto tzv. *transportné siete*. Teóriu uvedieme iba pre orientované grafy. Ak niektoré potrubia sú obojsmerné, stačí nahradiť neorientované hrany dvojicami opačne orientovaných hrán s rovnakými ohodnoteniami.

DEFINÍCIA 8.3. Transportná sieť (alebo skrátene **sieť**) je súvislý, orientovaný, hranovo ohodnotený graf $\vec{G} = (V, H)$ spĺňajúci nasledujúce podmienky:

1. v \vec{G} existuje jediný prameň a ,
2. v \vec{G} existuje jediné ústie z ,
3. každá hrana (i, j) je ohodnotená nezáporným číslom C_{ij} , ktoré nazývame **kapacita hrany** (i, j) .

POZNÁMKA. V praxi sa iba zriedkavo stáva, že transportná sieť má jediný prameň a jediné ústie. Napríklad vodovodné potrubie rozvádza vodu z viacerých zdrojov a ústia sú v každej domácnosti. Aby sme mohli takúto situáciu matematicky spracovať, pridáme hrany orientované z jedného fiktívneho prameňa do všetkých skutočných, a tiež hrany zo skutočných ústí do fiktívneho ústia. Kapacity nových hrán uvažujeme nekonečne veľké.

DEFINÍCIA 8.4. Nech \vec{G} je transportná sieť. **Tok** transportnou sieťou je zobrazenie $T : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow H$, ktoré každej hrane (i, j) priradí nezáporné číslo T_{ij} tak, že:

1. pre každú hrana (i, j) je $T_{ij} \leq C_{ij}$,
2. pre každý vrchol j rôznych od prameňa a a ústia platí **zákon zachovania toku** cez tento vrchol, teda

$$\sum_i T_{ij} = \sum_i T_{ji}.$$

LEMA 8.1. Nech T je tok v transportnej sieti \vec{G} . Potom tok z prameňa je rovný toku do ústia, t.j.

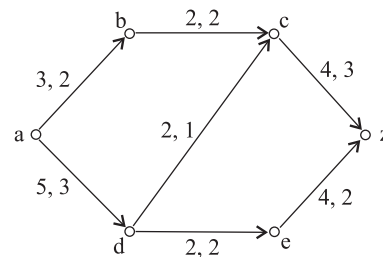
$$\sum_i T_{ai} = \sum_i T_{iz}.$$

DEFINÍCIA 8.5. Nech T je tok v transportnej sieti \vec{G} . Číslo

$$\sum_i T_{ai} = \sum_i T_{iz}$$

nazývame **veľkosťou toku** v sieti \vec{G} . Tok T je **maximálny**, ak pre každý iný tok T' platí, že jeho veľkosť nie je väčšia ako veľkosť toku T .

PRÍKLAD 8.7. Na obr. 8.7 je transportná sieť s vyznačenými kapacitami hrán C_{ij} (prvé číslo na každej hrane) a s tokmi cez hrany T_{ij} (druhé číslo). Veľkosť toku je $T_{ab} + T_{ad} = T_{cz} + T_{ez} = 5$. Je vidieť, že pre každý vrchol okrem a a z platí zákon zachovania toku, teda koľko doňho vtečie, toľko z neho vytečie. Ak by sme ale zmenili tok hranou (d, e) na hodnotu 1, už by neplatil zákon zachovania toku pre vrcholy d a e a ohodnotenia hrán číslami T_{ij} by sa nemohli nazývať tokom.



Obr. 8.7

V tejto jednoduchšej transportnej sieti ľahko zistíme, že ak na hranách (a, d) , (d, c) a (c, z) zväčšíme tok o jednotku, zostanú v platnosti podmienky kladené na tok a veľkosť toku bude $T_{ab} + T_{ad} = 6$, teda tiež väčšia o jednotku. Je to spôsobené zväčšením toku pozdĺž cesty $P : adc$. Znamená to, že pôvodný tok v sieti nebol maximálny a bolo možné ho zväčšiť. Nás bude zaujímať práve maximálny tok v sieti, ako získať jeho hodnotu a ako zistiť, že už ho nemožno zväčšiť.

Zistili sme, že ak sa nám podarí nájsť cestu z prameňa do ústia, pozdĺž ktorej je možné zväčšiť tok, tak sa zväčší tok celou sieťou. V našom prípade však všetky hrany cesty $P : adc$ boli orientované od prameňa k ústiu, teda **zhodne s cestou** P . V niektorých sieťach je možné zväčšovať tok aj pozdĺž ciest, ktoré obsahujú aj hrany **opačne orientované vzhľadom na cestu**. O možnosti zväčšenia toku celou sieťou nás informuje nasledujúca veta.

VETA 8.2. *Nech P je cesta v transportnej sieti \vec{G} spĺňajúca podmienky:*

1. *pre každú zhodne orientovanú hranu (i, j) cesty P je $T_{ij} < C_{ij}$,*
2. *pre každú opačne orientovanú hranu (i, j) cesty P je $0 < T_{ij}$.*

Nech X je množina obsahujúca čísla $C_{ij} - T_{ij}$ pre zhodne orientované hrany cesty P a čísla T_{ij} pre opačne orientované hrany cesty P .

Ak $\Delta = \min X$ a T^ je tok transportnou sieťou definovaný*

$$T_{ij}^* = \begin{cases} T_{ij}, & \text{ak } (i, j) \notin P, \\ T_{ij} + \Delta, & \text{ak } (i, j) \text{ je zhodne orientovaná s } P, \\ T_{ij} - \Delta, & \text{ak } (i, j) \text{ je opačne orientovaná vzhľadom na } P, \end{cases}$$

tak veľkosť toku T^ je o Δ väčšia ako veľkosť pôvodného toku T .*

Na základe tejto vety môžeme zostrojiť algoritmus na hľadanie maximálneho toku v transportnej sieti. Princíp jeho činnosti spočíva v tom, že v transportnej sieti so zadanými kapacitami hrán začneme nejakým tokom (môže to byť nulový tok každou hranou) a hľadáme cestu z prameňa do ústia, pozdĺž ktorej je možné tok zväčšiť. Ak ju nájdeme, tok zväčšíme, a opakujeme tento proces znovu. Ako pomôcku pri hľadaní cesty z a do z použijeme označovanie vrcholov usporiadanou dvojicou znakov, kde prvý znak znamená predchádzajúci vrchol práve označovaného vrcholu na hľadanej ceste P a druhý znak je rovný hodnote, o ktorú je možné zväčšiť tok na ceste P od prameňa po práve označovaný vrchol. Za preverený vrchol považujeme taký, z ktorého sme už označovali jeho neoznačených susedov. Algoritmus ukončí svoju činnosť až keď tok sieťou je maximálny. Prečo je to tak, si uvedieme neskôr.

Algoritmus maximálneho toku (Ford – Fulkerson)

Vstup: Transportná sieť $\vec{G} = (V, H)$, prameň a , ústie z , kapacity hrán $C_{i,j}$ pre každú hranu (i, j) a vrcholy očíslované $a = v_0, v_1, \dots, v_n = z$.

Výstup: Maximálny tok T .

1. Polož $T_{ij} := 0$ pre každú hranu (i, j) .

2. Označ vrchol a usporiadanou dvojicou (a, ∞) .
3. Ak je vrchol z označený, skok na krok 6.
4. Zvoľ označený, ale nepreverený vrchol v_i s najmenším indexom i . Ak taký neexistuje, STOP (tok je maximálny), inak polož $v := v_i$.
5. Nech (α, Δ) je označenie vrcholu v . Prever každú hranu (v, w) a (w, v) (v poradí $(v, v_0), (v_0, v), (v, v_1), (v_1, v), \dots$), kde w je neoznačený vrchol. Ak pre hranu (v, w) je $T_{vw} < C_{vw}$, označ vrchol w usporiadanou dvojicou

$$(v; \min\{\Delta, C_{vw} - T_{vw}\}),$$

inak hranu (v, w) neoznačuj. Ak pre hranu (w, v) je $T_{wv} > 0$, označ vrchol w usporiadanou dvojicou

$$(v; \min\{\Delta, T_{wv}\}),$$

inak hranu (w, v) neoznačuj.

Skok na krok 3.

6. Nech (γ, Δ) je označenie vrcholu z . Nech $w_0 = z$, $w_1 = \gamma$. Ak označenie vrcholu w_i je (γ', Δ') , polož $w_{i+1} := \gamma'$. Pokračuj až do $w_k = a$. Teraz

$$P : a = w_k w_{k-1} \dots w_1 w_0 = z$$

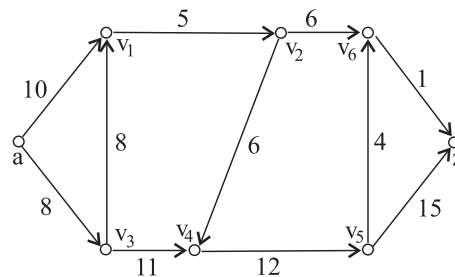
je hľadaná cesta z a do z .

Zmeň tok pozdĺž cesty P takto: Ak hrana h je zhodne orientovaná s P , zväčš jej tok o Δ , ak je opačne orientovaná, zníž jej tok o Δ . Zruš označenia všetkých vrcholov.

Skok na krok 2.

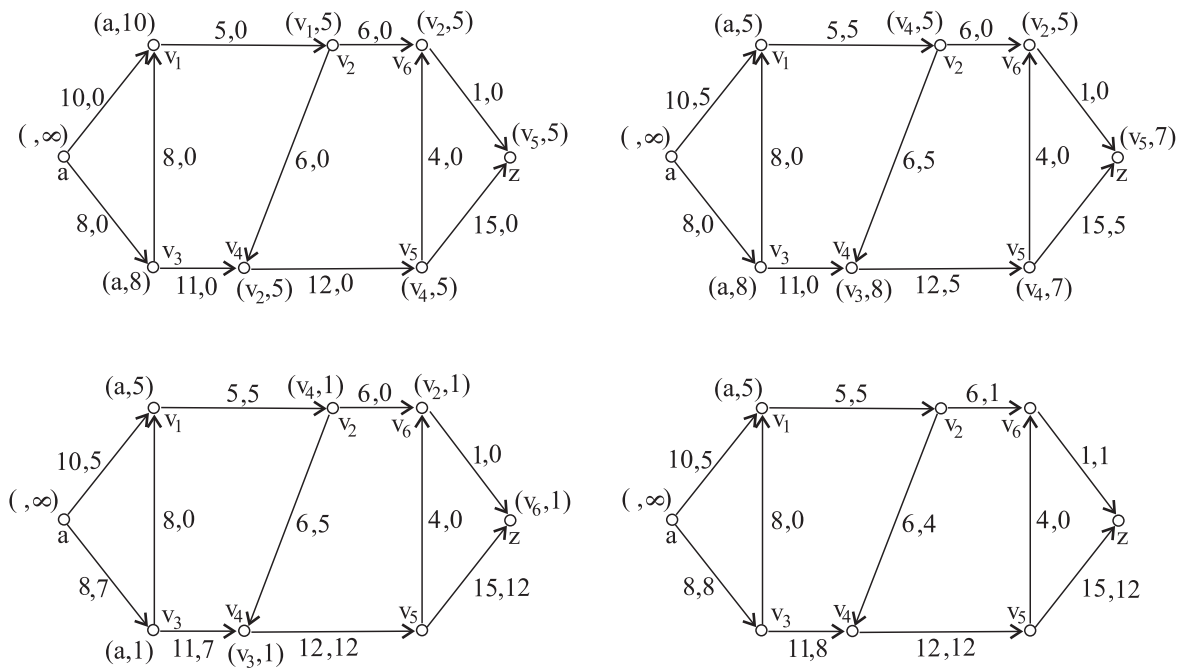
PRÍKLAD 8.8. Nájdite maximálny tok v transportnej sieti z obr. 8.8.

Riešenie. Každéj hrane priradíme tok $T_{ij} = 0$. Označíme vrchol a znakom (a, ∞) . Teraz označujeme jeho susedov, pričom zachovávame ich poradie. Vrchol v_1 označíme znakom $(a, 10)$ a vrchol v_3 znakom $(a, 8)$. Tým sa vrchol a stáva prevereným. Z označených a nepreverených vrcholov má minimálny index vrchol v_1 , takže teraz sa zaujímate o jeho neoznačených susedov. Je to jediný vrchol v_2 a dostane označenie $(v_2, 5)$. Ďalší preverovaný vrchol je v_2 .



Obr. 8.8

Jeho neoznačené susedné vrcholy v_4 a v_6 označíme rovnako $(v_2, 5)$. Teraz z označených a nepreverených vrcholov má najmenší index vrchol v_3 . Nemá neoznačených susedov a tým sa stáva prevereným. Nasleduje vrchol v_4 . Jeho jediný neoznačený sused v_5 dostane označenie $(v_4, 5)$. Teraz preverujeme v_5 a z neho označíme iba vrchol z znakom $(v_5, 5)$. Keďže vrchol z je už označený, pokračujeme krokom 6, kde získame cestu $P : av_1v_2v_4v_5z$, pozdĺž ktorej môžeme zväčšiť tok o hodnotu 5. Urobíme to a začneme celý proces hľadania novej cesty z prameňa do ústia odznova. Ďalšie pokračovania sa dajú sledovať na postupnosti diagramov na obr. 8.9.



Obr. 8.9

Na vysvetlenie, že v momente ukončenia práce algoritmu je už dosiahnutý tok maximálny, potrebujeme nasledujúce pojmy.

DEFINÍCIA 8.6. *Rez (P, \bar{P}) v transportnej sieti $\vec{G} = (V, H)$ je rozklad jej vrcholovej množiny na množinu P obsahujúcu prameň a jej komplement \bar{P} , ktorý obsahuje ústie.*

Kapacita rezu (P, \bar{P}) je číslo

$$C(P, \bar{P}) = \sum_{i \in P} \sum_{j \in \bar{P}} C_{ij}.$$

Rez v sieti je teda ľubovoľné rozdelenie vrcholovej množiny V na množiny P a \bar{P} , pričom $a \in P$, $z \in \bar{P}$, $P \cup \bar{P} = V$ a $P \cap \bar{P} = \emptyset$. Kapacita rezu je súčet kapacít všetkých hrán, ktoré začínajú v P a končia v \bar{P} . Hrany z \bar{P} do P nás pri kapacite rezu nezaujímajú.

VETA 8.3. *Nech T je tok v transportnej sieti $\vec{G} = (V, H)$ a nech (P, \bar{P}) je rez v \vec{G} . Potom kapacita rezu (P, \bar{P}) je väčšia alebo rovná ako veľkosť toku T , t.j.*

$$C(P, \bar{P}) = \sum_{i \in P} \sum_{j \in \bar{P}} C_{ij} \geq \sum_i T_{ai}.$$

VETA 8.4. *Nech T je tok v transportnej sieti $\vec{G} = (V, H)$ a nech (P, \bar{P}) je rez v \vec{G} . Ak veľkosť toku T je rovná kapacite rezu (P, \bar{P}) , tak tok T je maximálny a rez (P, \bar{P}) je minimálny. Navyše*

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in \bar{P}} C_{ij} = \sum_i T_{ai}$$

práve vtedy, ak

- a) $T_{ij} = C_{ij}$ pre všetky $i \in P$ a $j \in \bar{P}$
 a zároveň
 b) $T_{ij} = 0$ pre všetky $i \in \bar{P}$ a $j \in P$.

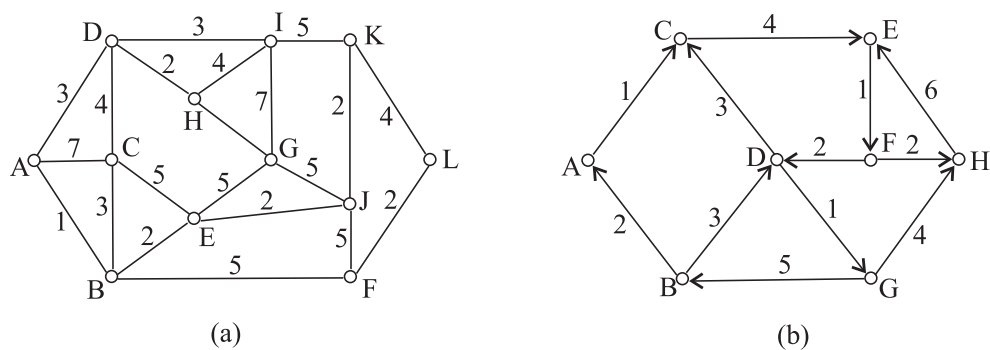
To znamená, že ak sa nám v transportnej sieti podarí nájsť taký rez (P, \bar{P}) , že pre každú hranu smerujúcu z P do \bar{P} je tok cez ňu rovný jej kapacite a tok každou hranou z \bar{P} do P je nulový, tak máme minimálny rez a jeho kapacita je zároveň rovná maximálnemu toku sieťou. Ak si všimneme, že algoritmus na hľadanie maximálneho toku končí práve vtedy, keď už nemôžeme označovať ďalšie vrcholy, t.j. keď hrany smerujúce z označených vrcholov do neoznačených sú už nasýtené a zároveň hrany z neoznačených vrcholov do označených majú nulové hodnoty toku, tak môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

VETA 8.5. *V momente skončenia činnosti algoritmus (Ford – Fulkerson) dáva na výstupe maximálny tok. Navyše, ak P (\bar{P}) je množina označených (neoznačených) vrcholov v okamihu ukončenia činnosti algoritmu, tak rez (P, \bar{P}) je minimálny.*

8.7 Úlohy

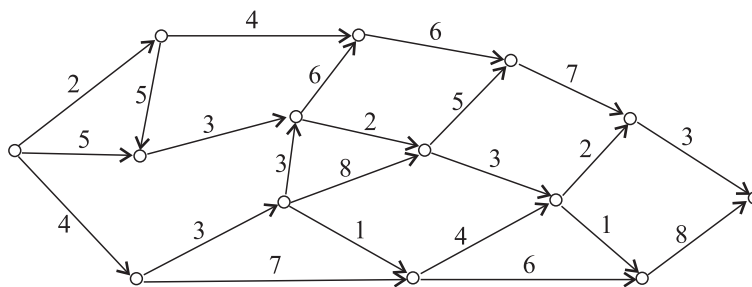
8.1. V grafe, ktorého diagram je na obr. 8.10(a):

- Nájdite minimálnu kostru.
- Nájdite maximálnu kostru.
- Vypočítajte dĺžky minimálnych ciest z vrcholu a do ostatných vrcholov.
- Riešte problém okružnej cesty.



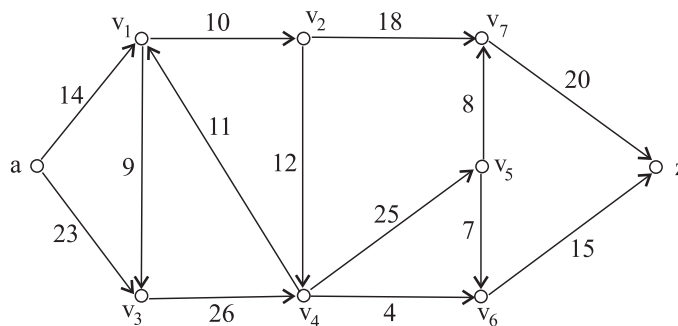
Obr. 8.10

- 8.2. Vypočítajte dĺžky minimálnych spojení medzi všetkými dvojicami vrcholov v digrafe na obr. 8.10(b).
- 8.3. V grafe získanom zrušením orientácií hrán digrafu na obr. 8.10(b) riešte problém obchodného cestujúceho.
- 8.4. Nájdite kritickú cestu v sieťovom grafe, ktorého diagram je na obr. 8.11.



Obr. 8.11

- 8.5. Vypočítajte maximálny tok transportnou sieťou, ktorá je na obr. 8.12.



Obr. 8.12

Literatúra

- [1] G. Birkhof, S. MacLane: *Prehľad modernej algebry*, ALFA, Bratislava 1979.
- [2] G. Birkhof, T. O. Bartee: *Aplikovaná algebra*, ALFA, Bratislava 1981.
- [3] J. Bosák: *Grafy a ich aplikácie*, ALFA, Bratislava 1980.
- [4] M. Bučko: *Grafy*, ALFA, Bratislava 1985.
- [5] M. Bučko, M. Klešč: *Diskrétna matematika*, Academic Press *elfa, s.r.o.*, Košice 1999.
- [6] J. Galanová, J. Bosák, J. Gatiaľ: *Algebry a grafy*, ES SVŠT, Bratislava 1987.
- [7] F. Harary: *Graph Theory*, Addison–Wesley, Reading, MA, 1969.
- [8] J. Johnsonbaugh: *Discrete Mathematics*, Macmillan Publishing Company, New York 1990.
- [9] T. Katriňák a kol.: *Algebra a teoretická aritmetika (1)*, ALFA, Bratislava 1985.
- [10] O. Kolář, O. Štěpánková, M. Chytil: *Logika, algebry a grafy*, SNTL, Praha 1989.
- [11] L. Kučera: *Kombinatorické algoritmy*, SNTL, Praha 1983.
- [12] A. Legěň: *Grupy, okruhy a zväzy*, ALFA, Bratislava 1980.
- [13] J. Matoušek, J. Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Nakladatelství Karolinum, Praha 2000.
- [14] J. Nečas: *Grafy a ich použití*, SNTL, Praha 1978.
- [15] J. Nešetřil: *Teorie grafů*, SNTL, Praha 1979.
- [16] J. Plesník: *Grafové algoritmy*, VEDA, Bratislava 1983.
- [17] F. P. Preparata, R. T. Yeh: *Úvod do diskrétnych matematických štruktúr*, ALFA, Bratislava 1982.

- [18] K. H. Rosen: *Discrete Mathematics and Its Applications*, AT&T Information Systems, New York 1988.
- [19] J. Sedláček: *Úvod do teorie grafů*, Akademie, Praha 1981.
- [20] T. Šalát a kol: *Algebra a teoretická aritmetika (2)*, ALFA, Bratislava 1986.