MATEMATIKA I

pre Hospodársku informatiku

Monika Molnárová

Košice 2021

MATEMATIKA I

pre Hospodársku informatiku

Monika Molnárová

Košice 2021

RECENZOVALI: doc. RNDr. Jozef Bucko, PhD.
doc. RNDr. Viktor Pirč, CSc.
RNDr. Anna Grinčová, PhD.

Vydavateľ: Technická univerzita v Košiciach

1. vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedá autor.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-553-3954-2

Obsah

Úvod

Táto učebnica je určená predovšetkým študentom prvého ročníka bakalárskeho štúdia odboru Hospodárska informatika na Fakulte elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach. Zohľadňujúc špecifiká daného študijného odboru je celá publikácia orientovaná aplikačne na ekonómiu. Kniha reprezentuje študijný materiál, ktorý pomôže študentom zvládnuť predmet Matematika I po teoretickej aj praktickej stránke. Publikácia obsahuje poznatky z oblasti matematickej analýzy, základov lineárnej algebry a relevantné okruhy stredoškolskej matematiky.

Obsah je rozdelený do ôsmych kapitol, ktoré sú členené do podkapitol. Prvých sedem kapitol svojim obsahom zodpovedá problematike preberanej v prvom semestri v predmete Matematika I na odbore Hospodárska informatika. Posledná kapitola zahŕňa časti stredoškolskej matematiky potrebné na zvládnutie vysokoškolskej matematiky. Každá kapitola začína podkapitolou, ktorá formuluje cieľ danej kapitoly, a pokračuje podkapitolou, v ktorej sú formulované otázky z problematiky danej kapitoly. Nasledujú časti s teoretickými poznatkami doplnené o postupy riešenia praktických úloh v riešených príkladoch. Na záver každej kapitoly je podkapitola obsahujúca neriešené úlohy s uvedenými výsledkami.

Autor vyslovuje vďaku recenzentom doc. RNDr. Jozefovi Buckovi, PhD., doc. RNDr. Viktorovi Pirčovi, CSc. a RNDr. Anne Grinčovej, PhD. za cenné pripomienky a odporúčania, ktoré viedli ku skvalitneniu učebnice po obsahovej i formálnej stránke. Zároveň autor ďakuje doc. RNDr. Jánovi Bušovi, CSc. za pomoc pri zvládnutí úskalí textového editora TEX.

Autor.

1 Funkcia a jej aplikácie v ekonómii

1.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmom funkcie jednej reálnej premennej, jej základnými vlastnosťami a niektorými funkciami ekonomickej analýzy.

1.2 Otázky

- Definujte funkciu jednej reálnej premennej.
- Definujte rastúcu (klesajúcu) funkciu a ilustrujte grafom.
- Definujte funkciu zhora (zdola) ohraničenú na množine S a ilustrujte grafom.
- Definujte maximum a minimum funkcie na množine S a ilustrujte grafom.
- Definujte bijektívnu funkciu na množine S a ilustrujte grafom.
- Definujte inverznú funkciu.
- Definujte zloženú funkciu.
- Definujte párnu (nepárnu) funkciu a ilustrujte grafom.
- Definujte periodickú funkciu a ilustrujte grafom.
- Nakreslite grafy elementárnych funkcií a popíšte ich vlastnosti.
- Definujte funkciu celkových nákladov a funkciu priemerných nákladov.
- Definujte funkciu celkových príjmov a funkciu priemerných príjmov.
- Definujte funkciu celkového zisku a funkciu priemerného zisku.
- Definujte bod zlomu a sformulujte podmienku, kedy je výroba zisková.
- Definujte funkciu dopytu a sformulujte zákon dopytu.
- Definujte funkciu ponuky a sformulujte zákon ponuky.
- Definujte rovnovážny stav trhu.

1.3 Pojem funkcie

Skôr ako zavedieme pojem funkcie jednej premennej, povedzme si, že sa budeme zaoberať len funkciami na množine reálnych čísel. Pripomeňme teda základné označenie. Množinu všetkých konečných reálnych čísel budeme označovať $\mathbb{R}$, rozšírenú množinu reálnych čísel $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Množinu všetkých prirodzených čísel označujeme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, množinu všetkých celých čísel označíme $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ a množinu všetkých racionálnych čísel $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{R};\ p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}\right\}$.

Definícia 1.1 *Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú dve neprázdne množiny a f je pravidlo, ktoré každému $x \in A$ priradí práve jeden prvok $f(x) \in B$. Predpis f nazývame* ***funkciou****, ktorá zobrazuje množinu A do množiny B.*
Zápis:

$$f : A \longrightarrow B$$

Množinu $D(f) = A$ nazývame **definičným oborom funkcie** f, číslo $f(x)$ **hodnotou funkcie** f **v bode** $x \in A$ a množinu $H(f) = \{f(x);\, x \in A\}$ **oborom hodnôt funkcie** f.

Grafom funkcie f nazývame množinu $G(f) = \{[x, f(x)] \in A \times B;\ x \in A\}$, kde $A \times B = \{(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}$ je kartézsky súčin množín A a B, pričom (a, b) je usporiadaná dvojica.

Pod definičným oborom funkcie rozumieme množinu všetkých reálnych čísel, pre ktoré predpis $y = f(x)$ "dáva zmysel", ak nie je v konkrétnom prípade uvedené inak. Pravidlá na určovanie definičného oboru uvedieme v časti Elementárne funkcie.

1.4 Základné vlastnosti funkcií

Definícia 1.2 *Funkciu f nazývame* ***zhora (zdola) ohraničenou*** *na množine $S \subset D(f)$, ak je zhora (zdola) ohraničená jej množina funkčných hodnôt $f(S) = \{f(x);\ x \in S\}$, t. j. existuje $K \in \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{R})$ také, že pre všetky $x \in S$ je*

$$f(x) \leqq K \quad (f(x) \geqq k).$$

Ak je funkcia f na množine S ohraničená zhora aj zdola, tak hovoríme, že je na množine S ***ohraničená****.*

Definícia 1.3 *Ak existuje najväčší prvok (najmenší prvok) množiny $f(S) = \{f(x);\ x \in S\}$, t. j. $M \in f(S)$ $(m \in f(S))$ také, že pre všetky $x \in S$ je*

$$f(x) \leqq M \quad (f(x) \geqq m),$$

tak ho nazývame ***najväčšou (najmenšou) hodnotou funkcie*** *f na množine $S \subset D(f)$.*

Zápis:

$$M = \max_{x \in S} f(x)$$
$$m = \min_{x \in S} f(x)$$

Definícia 1.4 *Funkciu f nazývame* ***rastúcou (klesajúcou)*** *na množine $S \subset D(f)$, ak pre každé dva body x_1, $x_2 \in S$, také že $x_1 < x_2$, platí*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

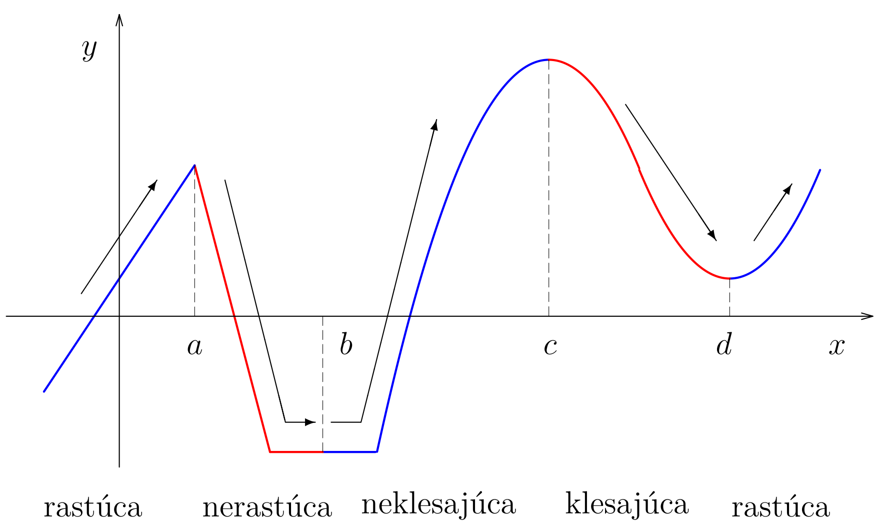
Rastúce a klesajúce funkcie nazývame ***rýdzo monotónne funkcie****.*

Definícia 1.5 *Funkciu f nazývame* ***neklesajúcou (nerastúcou)*** *na množine $S \subset D(f)$, ak pre každé dva body x_1, $x_2 \in S$, také že $x_1 < x_2$, platí*

$$f(x_1) \leqq f(x_2) \quad (f(x_1) \geqq f(x_2)).$$

Nerastúce a neklesajúce funkcie nazývame ***monotónne funkcie****.*

Je zrejmé, že rastúce a klesajúce funkcie sú monotónne.



Obr. 1: Monotónnosť funkcie

Definícia 1.6 *Funkciu f nazývame* ***párnou (nepárnou)****, ak pre každý bod $x \in D(f)$ je $-x \in D(f)$ a platí*

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Grafy párnych funkcií sú symetrické vzhľadom na os y. Grafy nepárnych funkcií sú symetrické vzhľadom na začiatok súradného systému.

Definícia 1.7 *Funkciu f nazývame* ***periodickou****, ak existuje také reálne číslo $p > 0$, že pre každý bod $x \in D(f)$ je $x+p \in D(f)$ a $x-p \in D(f)$ a platí*

$$f(x) = f(x+p).$$

Najmenšie číslo p s uvedenou vlastnosťou nazývame ***periódou funkcie*** *f.*

1.5 Zložená funkcia

Väčšina funkcií, ktorými sa budeme zaoberať, nie sú elementárne (viď podkapitola 1.7) ale zložené funkcie.

Definícia 1.8 *Nech $g : A \longrightarrow B$, $f : B \longrightarrow C$. Funkciu $f \circ g : A \longrightarrow C$ nazývame* ***zloženou funkciou****. Funkciu $u = g(x)$ nazývame* ***vnútornou (vedľajšou)*** *a funkciu $y = f(u)$* ***vonkajšou (hlavnou) zložkou*** *zloženej funkcie.*
Zápis:

$$y = f\left(g(x)\right).$$

1.6 Inverzná funkcia

Definícia 1.9 *Nech $f : A \longrightarrow B$. Hovoríme, že funkcia je*

- ***injektívna****, ak pre každé dva body x_1, $x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$,*
- ***surjektívna****, ak pre každý bod $y \in B$ existuje také $x \in A$, že $y = f(x)$, t. j. $H(f) = B$,*
- ***bijektívna****, ak je injektívna a surjektívna.*

Definícia 1.10 *Nech $f : A \longrightarrow B$ je bijektívna funkcia.* ***Inverznou funkciou*** *k funkcii f nazývame funkciu $f^{-1} : B \longrightarrow A$ práve vtedy, ak každému bodu $y \in B$ priradí také $x \in A$, že $y = f(x)$.*
Zápis:

$$f^{-1}(y) = x.$$

Veta 1.1 *Nech $f : A \longrightarrow B$ je bijektívna funkcia. Nech $f^{-1} : B \longrightarrow A$ je k nej inverzná funkcia. Potom platí*

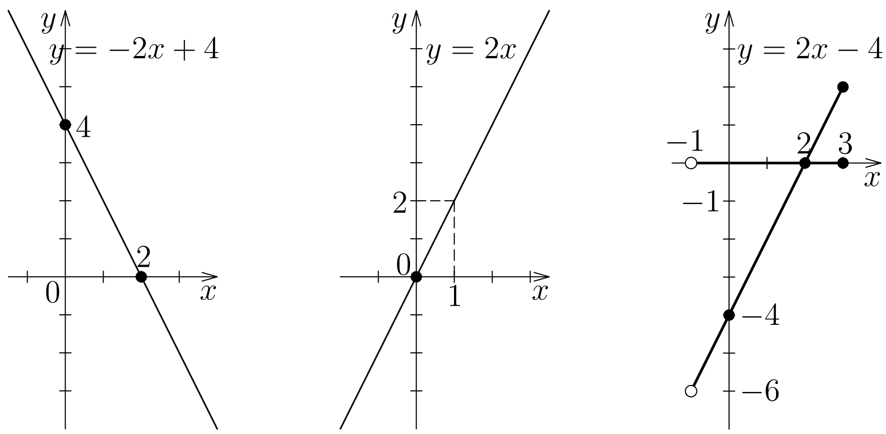
- $\forall x \in A$: $f^{-1}(f(x)) = x$,
- $\forall y \in B$: $f(f^{-1}(y)) = y$.

1.7 Elementárne funkcie

V tejto podkapitole uvádzame základné vlastnosti, príp. grafy elementárnych funkcií.

Konštantná funkcia: $f(x) = c$ pre $c \in \mathbb{R}$.
$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = c$. Grafom je priamka rovnobežná s osou x.

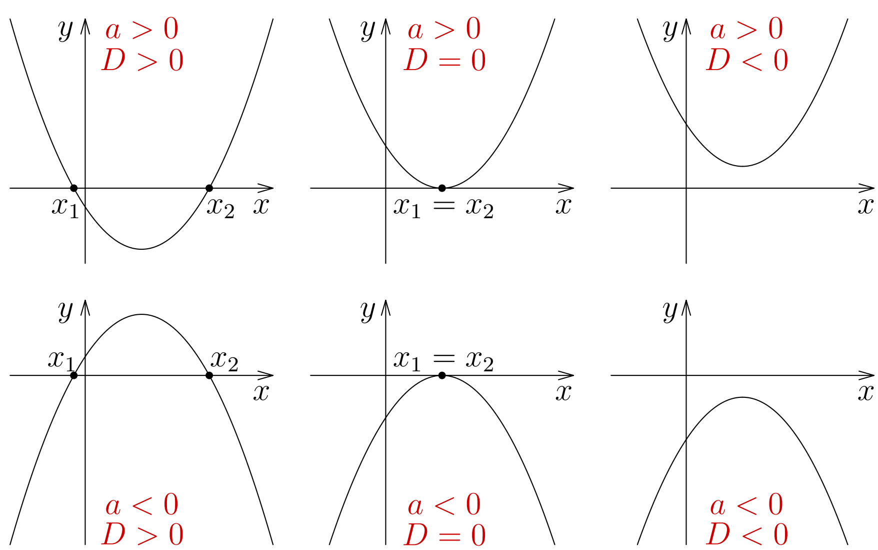
Lineárna funkcia: $f(x) = ax + b$ pre $a,\ b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.
$D(f) = \mathbb{R}$. Grafom je priamka.



Obr. 2: Graf lineárnej funkcie

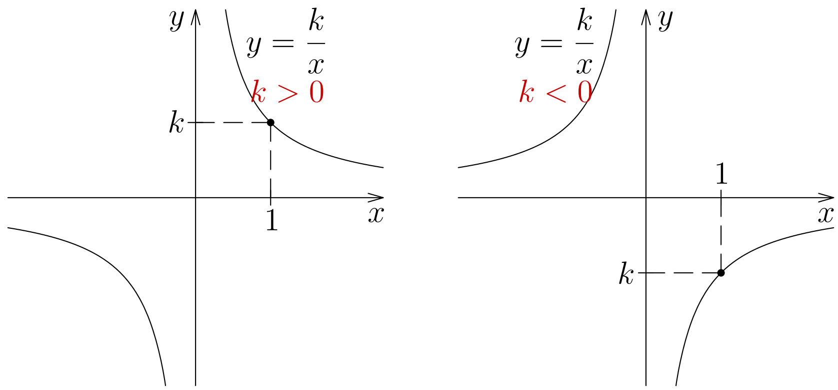
Kvadratická funkcia: $f(x) = ax^2 + bx + c$ pre $a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.
$D(f) = \mathbb{R}$. Grafom je parabola. Rozlišujeme prípady:

- ak $a > 0$, tak je parabola „obrátená nahor“,
- ak $a < 0$, tak je parabola „obrátená nadol“.



Obr. 3: Vzájomné polohy paraboly a osi x

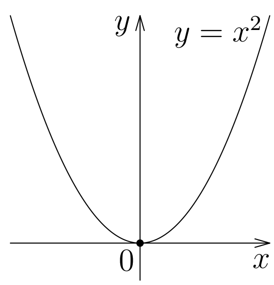
Lineárne lomená funkcia: $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ pre a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.
$D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Grafom je hyperbola.



Obr. 4: Graf nepriamej úmernosti

Mocninová funkcia: $f(x) = x^n$ pre $n \in \mathbb{N}$.
$D(f) = \mathbb{R}$. Pre n

- párne je $H(f) =< 0, \infty)$,
- nepárne je $H(f) = \mathbb{R}$.

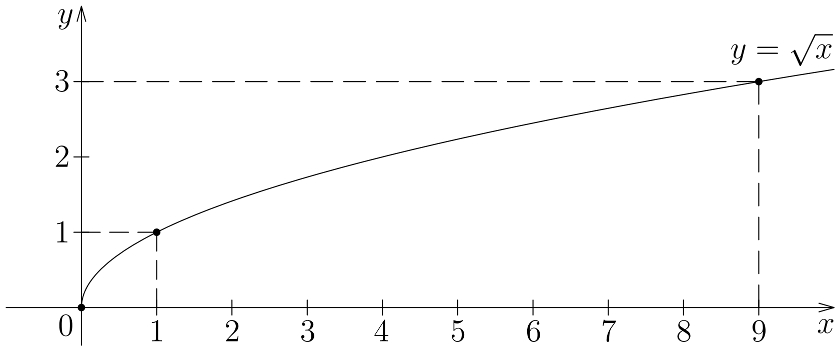


Obr. 5: Graf mocninovej funkcie pre $n = 2$

Funkcia n-tá odmocnina: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ pre $n \in \mathbb{N}$.
Pre n

- párne je $D(f) = H(f) =< 0, \infty)$,
- nepárne je $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$.

Algebrický polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$: pre $a_0 \neq 0$
$f(x) = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$.
$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sú koeficienty polynómu. $D(f) = \mathbb{R}$.

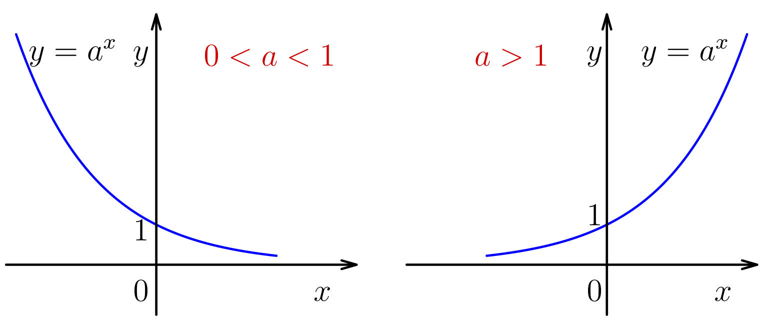


Obr. 6: Graf odmocninovej funkcie pre $n = 2$

Racionálna funkcia: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy.
$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ Q(x) \neq 0\}$.

Exponenciálna funkcia: $f(x) = a^x$ pre $a > 0$, $a \neq 1$.
$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \infty)$.
Rozlišujeme prípady:

- ak $a > 1$, tak je funkcia rastúca,
- ak $0 < a < 1$, tak je funkcia klesajúca.

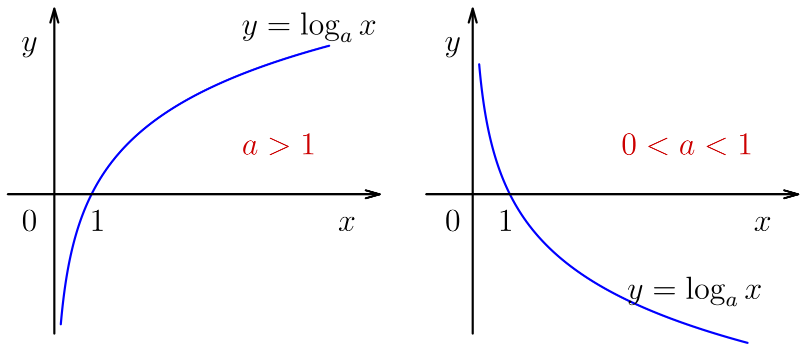


Obr. 7: Graf exponenciálnej funkcie

Logaritmická funkcia: $f(x) = \log_a x$ pre $a > 0$, $a \neq 1$.
$D(f) = (0, \infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$.
Rozlišujeme prípady:

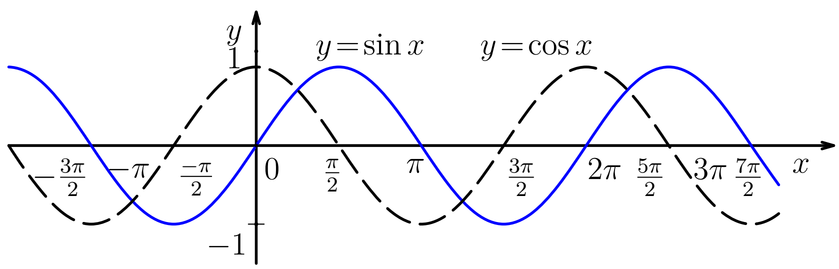
- ak $a > 1$, tak je funkcia rastúca,
- ak $0 < a < 1$, tak je funkcia klesajúca.

Funkcia sínus: $f(x) = \sin x$.
$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) =< -1, 1 >$. Funkcia je periodická s periódou $p = 2\pi$, nepárna.



Obr. 8: Graf logaritmickej funkcie

Funkcia kosínus: $f(x) = \cos x$.
$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) =< -1, 1 >$. Funkcia je periodická s periódou $p = 2\pi$, párna.



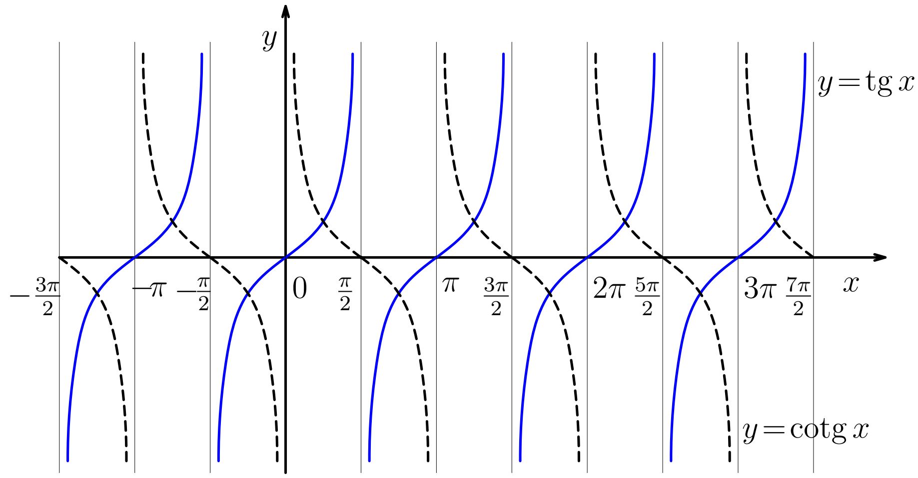
Obr. 9: Grafy funkcií $y = \sin x$ a $y = \cos x$

Funkcia tangens: $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$. Funkcia je periodická s periódou $p = \pi$, nepárna.

Funkcia kotangens: $f(x) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ \sin x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$. Funkcia je periodická s periódou $p = \pi$, nepárna.

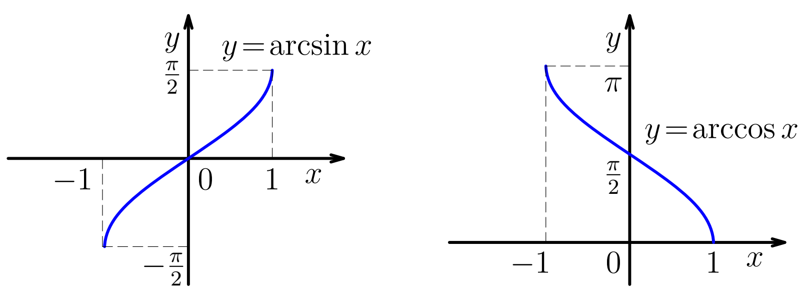
Funkcia: $f(x) = \arcsin x$
je inverznou funkciou k funkcii sínus zúženej na interval $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$, kde je $y = \sin x$ bijektívna a teda existuje k nej inverzná funkcia.
$D(f) =< -1, 1 >$, $H(f) =< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$. Funkcia je nepárna.

Funkcia: $f(x) = \arccos x$
je inverznou funkciou k funkcii kosínus zúženej na interval $\langle < 0, \pi > \rangle$,



Obr. 10: Grafy funkcií $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$

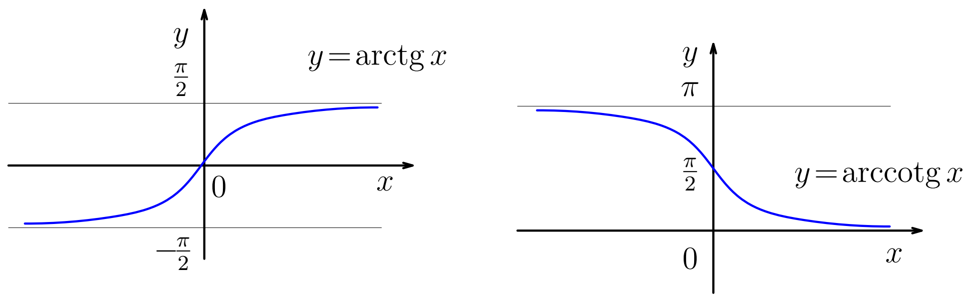
kde je $y = \cos x$ bijektívna a teda existuje k nej inverzná funkcia.
$D(f) =< -1, 1 >$, $H(f) =< 0, \pi >$.



Obr. 11: Grafy funkcií $y = \arcsin x$ a $y = \arccos x$

Funkcia: $f(x) = \operatorname{arctg} x$
je inverznou funkciou k funkcii tangens zúženej na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, kde je $y = \operatorname{tg} x$ bijektívna a teda existuje k nej inverzná funkcia.
$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funkcia je nepárna.

Funkcia: $f(x) = \operatorname{arccotg} x$
je inverznou funkciou k funkcii kotangens zúženej na interval $(0, \pi)$, kde je $y = \operatorname{cotg} x$ bijektívna a teda existuje k nej inverzná funkcia.
$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \pi)$.



Obr. 12: Funkcie $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$

1.8 Funkcie ekonomickej analýzy

Funkcie, ktoré predstavíme v tejto časti, sú nepostrádateľné pri popise a analýze ekonomických procesov. Opakovane sa nimi budeme zaoberať v nasledujúcich kapitolách.

Definícia 1.11 ***Funkcia celkových nákladov (total cost function)*** *určuje celkové náklady TC na množstvo vyrobených jednotiek x, $TC = C(x)$. Pozostáva z* ***fixných nákladov*** *K, ktoré nezávisia na počte vyrobených jednotiek a* ***variabilných nákladov*** *$V(x)$, ktoré vyjadrujú bezprostredné výrobné náklady na výrobu x výrobkov.*
Zápis:

$$C(x) = K + V(x).$$

Definícia 1.12 ***Funkcia priemerných nákladov (average cost function)*** *určuje priemerné náklady na jednotku produkcie AC, ak sa vyrobí x výrobkov.*
Zápis:

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Definícia 1.13 ***Funkcia celkových príjmov (total revenue function)*** *určuje celkové príjmy TR z množstva predaných výrobkov x, $TR = R(x)$.*

Definícia 1.14 ***Funkcia priemerných príjmov (average revenue function)*** *určuje priemerný príjem AR pripadajúci na jednotku produkcie, ak sa predá x výrobkov.*
Zápis:

$$AR(x) = \frac{R(x)}{x}.$$

Definícia 1.15 *Hodnotu x, ktorá udáva množstvo výrobkov, kedy sú celkové náklady rovné celkovým príjmom, $C(x) = R(x)$, nazývame* ***bod zlomu (break-even point)****.*

Ak sú príjmy vyššie ako náklady, tak je výroba zisková. Platí teda:

- ak $\mathbf{C}(\mathbf{x}) < \mathbf{R}(\mathbf{x})$, tak je **výroba zisková**,
- ak $\mathbf{C}(\mathbf{x}) > \mathbf{R}(\mathbf{x})$, tak je **výroba stratová**.

Definícia 1.16 ***Funkcia celkového zisku (total profit function)*** *určuje celkový zisk TP z výroby a predaja x výrobkov, $TP = P(x) = R(x) - C(x)$.*

Definícia 1.17 ***Funkcia priemerného zisku (average profit function)*** *určuje priemerný zisk AP pripadajúci na výrobu a predaj jednotky produkcie, ak sa vyrobí a predá x výrobkov.*
Zápis:

$$AP(x) = \frac{P(x)}{x}.$$

Príklad 1.8.1 *Počas leta stavala skupina študentov kajaky v prenajatých priestoroch. Nájom predstavoval 240 eur a materiál na stavbu jedného kajaku 10 eur. Kajak sa dá predať za 70 eur.*

a) *Koľko kajakov musia predať, aby boli ziskoví?*

b) *Koľko kajakov musia predať, aby bol zisk 180 eur?*

Riešenie.

a) Zostrojíme funkcie celkových nákladov a celkových príjmov.

$$\begin{aligned} C(x) &= 240 + 10x \\ R(x) &= 70x. \end{aligned}$$

Vypočítame, kedy sú príjmy vyššie ako náklady.

$$\begin{aligned} 70x &> 240 + 10x \\ x &> 4. \end{aligned}$$

Musia predať viac ako štyri kajaky.

b) Zostrojíme funkciu celkového zisku.

$$P(x) = R(x) - C(x) = 60x - 240.$$

Vypočítame, kedy je zisk rovný hodnote 180 eur.

$$\begin{aligned} 60x - 240 &= 180 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Ak predajú sedem kajakov, dosiahnu zisk 180 eur. ♡

Definícia 1.18 ***Funkcia dopytu*** *(****demand function****) vyjadruje vzťah medzi množstvom q jednotiek produkcie, o ktorú vyjadrujú spotrebitelia záujem na trhu, a cenou p za jednotku produkcie.*
Zápis:

$$q = D(p).$$

Veta 1.2 (zákon dopytu) *Ak cena výrobku stúpa, množstvo zakúpených výrobkov klesá.*

Funkcia dopytu je preto klesajúca, z čoho vyplýva, že k nej existuje inverzná funkcia $p = d(q)$.

Definícia 1.19 ***Funkcia ponuky*** *(****supply function****) vyjadruje vzťah medzi množstvom q jednotiek produkcie, ktorú je ochotný producent vyrobiť a dodať na trh, a cenou p za jednotku produkcie.*
Zápis:

$$q = S(p).$$

Veta 1.3 (zákon ponuky) *Ak cena výrobku stúpa, množstvo vyrobených a ponúkaných výrobkov stúpa.*

Funkcia ponuky je preto rastúca, z čoho vyplýva, že k nej existuje inverzná funkcia $p = s(q)$.

Definícia 1.20 ***Rovnovážny stav*** *(****market equilibrium****) je taký stav trhu, keď sa ponuka rovná dopytu. Cena zodpovedajúca rovnovážnemu stavu je* ***rovnovážna cena*** *p_E a množstvo zodpovedajúce rovnovážnemu stavu je* ***rovnovážne množstvo*** *q_E. Bod, v ktorom nastáva rovnovážny stav je* ***rovnovážnym bodom*** *(****equilibrium point****).*
Zápis:

$$D(p) = S(p), \quad \text{resp.} \quad d(q) = s(q).$$

Príklad 1.8.2 *Tovar má funkciu dopytu $D(p) = \dfrac{5\ 600}{p}$ a funkciu ponuky $S(p) = p - 10$ tisíc kusov, ak je cena tovaru v eurách. Určme rovnovážnu cenu.*

Riešenie. Vyriešime rovnicu $D(p) = S(p)$.

$$\begin{aligned} \frac{5\ 600}{p} &= p - 10 \\ p^2 - 10p - 5\ 600 &= 0 \\ (p-80)(p+70) &= 0. \end{aligned}$$

Keďže cena je veličina, ktorá nemôže nadobúdať záporné hodnoty, rovnovážny stav nastane pri cene 80 eur. ♡

1.9 Úlohy

1.1 Určte definičný obor funkcií

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 24}$,

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$,

c) $f(x) = \ln(6 + x - x^2)$,

d) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \sqrt{6 - 2x} - 3 \log \dfrac{x + 4}{x - 2}$.

1.2 Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q) = q^2 + 28q + 750$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 50 kusov výrobkov.

b) Vypočítajte náklady na výrobu 50. výrobku v poradí.

c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 10, resp. 50 výrobkov.

1.3 Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q) = q^2 + 28q + 400$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 10 kusov výrobkov.

b) Vypočítajte náklady na výrobu 10. výrobku v poradí.

c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 10, resp. 20 výrobkov.

1.4 Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q) = q^3 - 30q + 1458$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 9 kusov výrobkov.

b) Vypočítajte náklady na výrobu 9. výrobku v poradí.

c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 9, 15 výrobkov.

1.5 Výskumom bolo zistené, že krajčírka, ktorá začne pracovať o 7,00 hodine, bude mať o x hodín ušitých $f(x) = 32x - 2x^2$ blúzok.

a) Koľko blúzok bude mať ušitých o 10,00 hodine?

b) Koľko blúzok ušije medzi 10,00 a 11,00 hodinou?

c) Koľko blúzok ušije medzi 11,00 a 12,00 hodinou?

1.6 Podľa štúdie produktivity práce v podniku, priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 8.00 hod., bude mať poskladaných $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ výrobkov o x hodín neskôr.

a) Koľko výrobkov bude mať pracovník poskladaných o 11.00 hod.?

b) Koľko výrobkov bude mať pracovník poskladaných medzi 11.00 a 12.00 hod.?

c) Koľko výrobkov bude mať pracovník poskladaných medzi 10.00 a 11.00 hod.?

1.7 Podľa štúdie produktivity práce v podniku, priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 8.00 hod., bude mať poskladaných $f(x) = x^3 - 5x^2 + 20x$ výrobkov o x hodín neskôr.

a) Koľko výrobkov bude mať pracovník poskladaných o 12.00 hod.?

b) Koľko výrobkov bude mať pracovník poskladaných medzi 12.00 a 13.00 hod.?

c) Koľko výrobkov bude mať pracovník poskladaných medzi 10.00 a 10.30 hod.?

1.8 Celkové náklady v eurách na produkciu q kusov tovaru vyrobených počas jednej smeny sú dané funkciou $C(q) = 0{,}2q^2 + 100q + 3\ 200$. Počas prvých t hodín pracovnej smeny sa vyrobí $q(t) = 15t$ kusov tovaru.

a) Vyjadrite celkové náklady ako funkciu času.

b) Aké sú celkové náklady na produkciu počas prvých 5 hodín?

c) Po koľkých hodinách sú celkové náklady 10 000 eur?

1.9 Celkové náklady v eurách na produkciu q kusov tovaru vyrobených počas jednej smeny sú dané funkciou $C(q) = 0{,}1q^2 + 50q + 7\ 000$. Počas prvých t hodín pracovnej smeny sa vyrobí $q(t) = 10t$ kusov tovaru.

a) Vyjadrite celkové náklady ako funkciu času.

b) Aké sú celkové náklady na produkciu počas prvých 3 hodín?

c) Po koľkých hodinách sú celkové náklady 10 000 eur?

1.10 Tovar má funkciu dopytu $q = D(p)$ a funkciu ponuky $q = S(p)$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

a) $D(p) = 100 - p^2$, $S(p) = 2p + 20$,

b) $D(p) = 26 - p$, $S(p) = p^2 + 6p + 8$,

c) $D(p) = 33 - p$, $S(p) = p^2 + 5p + 6$,

d) $D(p) = 19 - p$, $S(p) = p^2 + 7p + 10$,

e) $D(p) = 66 - 2p$, $S(p) = p^2 + 2p + 6$,

f) $D(p) = 72 - 2p$, $S(p) = p^2 + p + 2$,

g) $D(p) = 82 - 2p$, $S(p) = p^2 + 2$,

h) $D(p) = 120 - p^2$, $S(p) = 4p + 60$,

i) $D(p) = 130 - p^2$, $S(p) = 5p + 80$,

j) $D(p) = 140 - p^2$, $S(p) = 6p + 100$.

1.11 Tovar má funkciu dopytu $p = \dfrac{21}{q-7}$ a funkciu ponuky $p = q-3$, ak q je množstvo tovaru v kusoch. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

1.12 Celkové týždenné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x)$ a funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

a) $C(x) = 0{,}1x^2 + x + 300$, $R(x) = 38x - 400$,

b) $C(x) = \frac{9\,000}{x}$, $R(x) = 10x$,

c) $C(x) = \frac{2\,000}{x}$, $R(x) = 20x$,

d) $C(x) = \frac{8\,000}{x}$, $R(x) = 20x$,

e) $C(x) = \frac{5\,000}{x}$, $R(x) = 12{,}5x$,

f) $C(x) = \frac{8\,000}{x}$, $R(x) = 5x$,

g) $C(x) = \frac{16\,200}{x}$, $R(x) = 18x$,

h) $C(x) = \frac{5\,400}{x}$, $R(x) = 37{,}5x$,

i) $C(x) = \frac{4\,225}{x}$, $R(x) = 25x$,

j) $C(x) = \frac{3\,136}{x}$, $R(x) = 16x$.

1.13 Celkové mesačné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 2x+72$. Predajná cena bola stanovená na $7{,}8-0{,}1x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových mesačných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

1.14 Celkové denné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 14x + 300$. Predajná cena bola stanovená na $54 - x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových mesačných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

1.15 Celkové denné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 16x + 480$. Predajná cena bola stanovená na $68 - x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových mesačných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

1.16 Celkové denné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 12x + 250$. Predajná cena bola stanovená na $67 - x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových mesačných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

1.17 Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q) = 2q^2 + 800$. Jednotková cena pri predaji q kusov výrobku je určená cenou dopytu $p = 120 - 2q$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových mesačných výnosov $R(q)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

1.18 Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q) = q^2 + 1\,500$. Jednotková cena pri predaji q kusov výrobku je určená cenou dopytu $p = 210 - 5q$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových mesačných výnosov $R(q)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

1.19 Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q) = 2q^2 + 900$. Jednotková cena pri predaji q kusov výrobku je určená cenou dopytu $p = 180 - 3q$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových mesačných výnosov $R(q)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

1.20 Znázornite uzavreté oblasti ohraničené zadanými krivkami:

a) $y = 2x$, $y = x$, $x = 5$,

b) $y = 3 - x$, $y = x$, $y = 0$,

c) $y = 5 - 2x$, $y = 2 + x$, $x = 0$,

d) $x = y^2$, $y = x - 2$,

e) $y = 6x - x^2$, $y = 0$,

f) $y = x^2 - 2x$, $y = 0$,

g) $y = -x^2 + 2$, $y = -3x + 4$,
h) $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + 5x + 14$,
i) $y = x^2 - x$, $y = 3x - x^2$,
j) $x \cdot y = 4$, $x + y = 5$,
k) $y = x^3$, $y = 4x$
l) $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$, $x = 1$,
m) $y = 2\,\mathrm{e}^x + 3$, $y = \mathrm{e}^{2x}$, $x = 0$,
n) $y = 1$, $y = \mathrm{e}^{2x}$, $x = 4$,
o) $y = \mathrm{e}$, $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $x = 0$,
p) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

Výsledky:

1.1

a) $D(f) = (-\infty, -4 > \cup < 6, \infty)$,

b) $D(f) = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$,

c) $D(f) = (-2, 3)$,

d) $D(f) = (-\infty, -4) \cup (2, 3 >$.

1.2

a) 4 650, b) 127, c) 113, resp. 93.

1.3

a) 780, b) 47, c) 78, resp. 68.

1.4

a) 1 917, b) 187, c) 213, resp. 292,2.

1.5

a) 78 blúzok, b) 18 blúzok, c) 14 blúzok.

1.6

a) 72 výrobkov, b) 20 výrobkov, c) 26 výrobkov.

1.7

a) 64 výrobkov, b) 36 výrobkov, c) 6,375 výrobkov.

1.8

a) $C(t) = 45t^2 + 1\ 500t + 3\ 200$,

b) 11 825,

c) 4,043.

1.9

a) $C(t) = 10t^2 + 500t + 7\ 000$,

b) 8 590,

c) 5,41.

1.10

a) $p_E = 8$,

b) $p_E = 2$,

c) $p_E = 3$,

d) $p_E = 1$,

e) $p_E = 6$,

f) $p_E = 7$,

g) $p_E = 8$,

h) $p_E = 6$,

i) $p_E = 5$,

j) $p_E = 4$.

1.11 $p_E = 7$

1.12

a) $x_1 = 20;\ x_2 = 350;\ (20, 350)$,

b) $x = 30; (30, \infty)$,

c) $x = 10; (10, \infty)$,

d) $x = 20; (20, \infty)$,

e) $x = 20; (20, \infty)$,

f) $x = 40; (40, \infty)$,

g) $x = 30; (30, \infty)$,

h) $x = 12; (12, \infty)$,

i) $x = 13; (13, \infty)$,

j) $x = 14; (14, \infty)$.

1.13 $x_1 = 18;\ x_2 = 40;\ x \in (18, 40)$

1.14 $x_1 = 10;\ x_2 = 30;\ x \in (10, 30)$

1.15 $x_1 = 12;\ x_2 = 40;\ x \in (12, 40)$

1.16 $x_1 = 5;\ x_2 = 50;\ x \in (5, 50)$

1.17 $q_1 = 10;\ q_2 = 20;\ q \in (10, 20)$

1.18 $q_1 = 10;\ q_2 = 25;\ q \in (10, 25)$

1.19 $q_1 = 6;\ q_2 = 30;\ q \in (6, 30)$

2 Základy lineárnej algebry

2.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmom algebrická rovnica, koreň algebrickej rovnice, rýdzoracionálna funkcia a jej rozklad na elementárne zlomky na množine reálnych čísel. Oboznámiť s pojmami matica, operácie s maticami, hodnosť matice, determinant matice, inverzná matica a algoritmami ich výpočtov. Oboznámiť s technikami riešenia sústav lineárnych algebrických rovníc.

2.2 Otázky

- Definujte algebrickú rovnicu a koreň algebrickej rovnice.
- Definujte rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov na $\mathbb{R}$.
- Uveďte postup nájdenia racionálnych koreňov algebrickej rovnice s celočíselnými koeficientami.
- Uveďte postup výpočtu hodnoty polynómu v bode pomocou Hornerovej schémy.
- Definujte rýdzoracionálnu funkciu.
- Definujte elementárny zlomok na množine $\mathbb{R}$ a uveďte postup rozkladu racionálnej funkcie na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$.
- Popíšte metódy výpočtu koeficientov pri rozklade racionálnej funkcie na elementárne zlomky na množine $\mathbb{R}$.
- Definujte pojem matice, štvorcovej matice, lichobežníkovej matice a stupňovitej matice.
- Definujte súčet, násobenie skalárom, súčin matíc a mocninu matice.
- Uveďte spôsoby výpočtu determinantu matice.
- Vymenujte ekvivalentné riadkové úpravy a popíšte ich vplyv na hodnotu determinantu.
- Definujte inverznú maticu a uveďte spôsoby jej výpočtu.
- Definujte sústavu lineárnych algebrických rovníc a sformulujte Frobeniovu vetu o jej riešiteľnosti.
- Popíšte Gaussovu eliminačnú metódu.
- Popíšte výpočet riešenia sústavy lineárnych algebrických rovníc pomocou Cramerovho pravidla.

2.3 Algebrické rovnice

Definícia 2.1 *Nech $n \in \mathbb{N}$. **Algebrickou rovnicou** s reálnymi koeficientami nazývame rovnicu*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{1}$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ pre $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Definícia 2.2 *Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je **koreňom (riešením) rovnice** (1), ak $P(\alpha) = 0$.*

Veta 2.1 *Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je koreňom rovnice (1), ak polynóm $x-\alpha$ delí polynóm $P(x)$ bezo zvyšku.*

Polynóm $x - \alpha$ nazývame koreňovým činiteľom polynómu $P(x)$ prislúchajúcim koreňu α.

Definícia 2.3 *Nech $p, s, n \in \mathbb{N}$. Nech $k_1, \ldots, k_p, l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{N}$ také, že $k_1 + k_2 + \ldots + k_p + 2(l_1 + l_2 + \ldots + l_s) = n$. Hovoríme, že polynóm $P(x)$ je **v tvare súčinu koreňových činiteľov** (v tvare kanonického rozkladu) na množine $\mathbb{R}$, ak $P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_p)^{k_p}(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}$, kde $x^2 + p_i x + q_i$, pre $i = 1, 2, \ldots, s$, sú kvadratické trojčleny s reálnymi koeficientami, ktoré nemajú reálne korene.*

Príklad 2.3.1 *Nájdime kanonický rozklad polynómu $P(x) = x^7 - x^6 - x^4 + x^3$ na množine $\mathbb{R}$.*

Riešenie. Pomocou úprav dostávame:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^7 - x^6 - x^4 + x^3 = x^3(x^4 - x^3 - x + 1) = \\ &= x^3\left[x^3(x-1) - (x-1)\right] = x^3(x-1)(x^3-1) \\ &= x^3(x-1)^2(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Keďže hľadáme len reálne korene rovnice $P(x) = 0$, vo výpočte nepokračujeme. ♡

Pri hľadaní koreňov algebrickej rovnice s celočíselnými koeficientami sa nezaobídeme bez nasledujúcej vety.

Veta 2.2 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_i \in \mathbb{Z}$, pre $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, a nech $a_n \neq 0$. Ak $\alpha = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pre p, q nesúdeliteľné, je koreňom rovnice*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{2}$$

tak je koeficient a_n deliteľný číslom q a koeficient a_0 deliteľný číslom p.

Nasledujúci princíp známy ako **Hornerova schéma** sa používa na výpočet hodnoty polynómu v bode. Polynóm $P(x)$ môžeme totiž prepísať nasledovným spôsobom

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\ &= ((\ldots((a_n)_1 x + a_{n-1})_2 x + \ldots + a_1)_n x + a_0)_{n+1}, \end{aligned}$$

kde index za zátvorkou znamená poradové číslo zátvorky. Výpočet hodnoty $P(\alpha)$ pomocou Hornerovej schémy sa dá zapísať do jednoduchej tabuľky:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & b_{n-1}\cdot\alpha & b_{n-2}\cdot\alpha & \ldots & b_1\cdot\alpha & b_0\cdot\alpha \\ \hline & a_n & b_{n-1}\alpha + a_{n-1} & b_{n-2}\alpha + a_{n-2} & \ldots & b_1\alpha + a_1 & b_0\alpha + a_0 \\ & = b_{n-1} & = b_{n-2} & = b_{n-3} & \ldots & = b_0 & = P(\alpha) \end{array}$$

Koeficienty b_i, pre $i = 0, 1, \ldots, n-1$, reprezentujú polynóm stupňa $n-1$, ktorý rovnako ako polynóm $x - \alpha$ delí pôvodný polynóm. Teda

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Príklad 2.3.2 *Pre polynóm $P(x) = 2x^5 + x^4 - x^2 - 8x - 6$ nájdime kanonický rozklad na množine $\mathbb{R}$.*

Riešenie. Ak položíme $P(x) = 0$, jedná sa o algebrickú rovnicu s celočíselnými koeficientami. Na určenie množiny možných racionálnych koreňov použijeme vzťahy medzi koeficientami a riešením rovnice (viď veta 2.2).

$$a_n = 2 \quad \wedge \quad q|a_n \quad \Rightarrow \quad q \in \{\pm 1, \pm 2\}.$$

$$a_0 = -6 \quad \wedge \quad p|a_0 \quad \Rightarrow \quad p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}.$$

Do úvahy teda prichádzajú korene

$$\alpha = \frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\} =: M.$$

Sčítaním koeficientov zistíme, že číslo 1 nie je koreňom polynómu $P(x)$. Pomocou Hornerovej schémy budeme postupne overovať ďalšie čísla z horeuvedenej množiny M. Zistime, či je koreňom $\alpha = -1$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & 1 & 0 & -1 & -8 & -6 \\ -1 & & -2 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -2 & -6 & |0 \end{array}$$

Hodnota polynómu $P(x)$ v bode $\alpha = -1$ je $P(-1) = 0$, číslo $\alpha = -1$ je teda koreňom daného polynómu. Navyše platí

$$P(x) = (x - (-1)) \cdot (2x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 6).$$

Keďže stupeň koreňa $\alpha = -1$ môže byť viac ako jedna, pokračujeme vo výpočte overovaním, či je koreňom polynómu $Q(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 6$. Tento postup opakujeme dovtedy, kým hodnota polynómu nebude rôzna od nuly. Môžeme pritom pokračovať v Hornerovej schéme bez prerušenia.

	2	-1	1	-2	-6
-1		-2	3	-4	6
	2	-3	4	-6	|0
-1		-2	5	-9	
	2	-5	9	|-15	

Zistili sme, že stupeň koreňa $\alpha = -1$ je 2 a teda

$$P(x) = (x+1)^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 6).$$

Zoberieme nasledujúce číslo z množiny M a pokračujeme vo výpočte. Napokon dostávame

$$P(x) = 2\,(x+1)^2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x^2 + 2\right).$$

♡

2.4 Racionálne funkcie a ich rozklad na parciálne zlomky

Definícia 2.4 *Nech $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy na $\mathbb{R}$, nech $Q(x)$ nie je nulový polynóm. Nech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sú všetky navzájom rôzne reálne korene polynómu $Q(x)$. Každú funkciu tvaru*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} : \quad \mathbb{R} - \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*nazývame **reálnou racionálnou funkciou**.*
Ak je stupeň polynómu $P(x)$ menší než stupeň polynómu $Q(x)$, tak $R(x)$ je rýdzoracionálna funkcia.

Veta 2.3 *Každá racionálna funkcia sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie.*

Príklad 2.4.1 *Napíšme racionálnu funkciu $R(x)$ v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie*

$$R(x) = \frac{2x^5 + 3x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 1}{2x^4 - x^3 + 2x - 1}.$$

Riešenie. Po vydelení čitateľa menovateľom dostávame

$$R(x) = \frac{2x^5 + 3x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 1}{2x^4 - x^3 + 2x - 1} = x + 2 + \frac{x^3 + 5x^2 - 2x + 3}{2x^4 - x^3 + 2x - 1}.$$

♡

Definícia 2.5 *Každú rýdzoracionálnu funkciu $R(x) : \mathbb{R} - \{\alpha\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tvaru*

$$R(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^k}, \qquad \textit{kde } A,\ \alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N},$$

alebo $R(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$R(x) = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \qquad \textit{kde } M,\ N,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$$

a polynóm x^2+px+q nemá reálne korene, nazývame ***reálnym elementárnym (parciálnym) zlomkom****.*

Veta 2.4 *Každá reálna rýdzoracionálna funkcia sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare súčtu reálnych elementárnych zlomkov.*

Príklad 2.4.2 *Bez počítania koeficientov napíšme racionálnu funkciu*

$$R(x) = \frac{x^3+5x^2-2x+3}{2x^4-x^3+2x-1}$$

v tvare súčtu elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie. Po nájdení reálnych koreňov menovateľa vieme funkciu na množine $\mathbb{R}$ prepísať do tvaru:

$$R(x) = \frac{x^3+5x^2-2x+3}{2(x-\frac{1}{2})(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Každému z reálnych koreňov prislúcha jeden parciálny zlomok. V prípade kvadratického trojčlena (reprezentuje dvojicu komplexne združených koreňov) to bude jeden zlomok s lineárnym dvojčlenom v čitateli:

$$R(x) = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

♡

Metódy výpočtu koeficientov elementárnych zlomkov:

(i) porovnávacia metóda,

(ii) dosadzovacia metóda.

Nasledujúce príklady ilustrujú podstatu a spôsob použitia týchto metód.

Príklad 2.4.3 *Rozložme racionálnu funkciu*

$$R(x) = \frac{x^3+5x^2-2x+3}{2(x-\frac{1}{2})(x+1)(x^2-x+1)}$$

na súčet elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie. Príklad 2.4.2 riešil rozklad tejto funkcie bez počítania koeficientov:

$$\frac{x^3+5x^2-2x+3}{2(x-\frac{1}{2})(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Na výpočet neznámych koeficientov použijeme **porovnávaciu metódu**. Prenásobme teraz túto rovnicu menovateľom ľavej strany. Dostávame:
$x^3+5x^2-2x+3 =$
$= 2A(x+1)(x^2-x+1)+2B(x-\frac{1}{2})(x^2-x+1)+2(Mx+N)(x+1)(x-\frac{1}{2})$.
Následne roznásobme pravú stranu a usporiadajme ju podľa mocnín premennej x. Dostávame rovnosť dvoch polynómov stupňa tri:
$x^3+5x^2-2x+3 =$
$= x^3(2A+2B+2M)+x^2(-3B+M+2N)+x(3B-M+N)+x^0(2A-B-N)$.
Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách x na oboch stranách rovnice získame systém štyroch lineárnych algebrických rovníc o štyroch premennných:

$$\begin{array}{rrcrrrr}
x^3: & 1 & = & 2A & +2B & +2M & \\
x^2: & 5 & = & & -3B & +M & +2N \\
x^1: & -2 & = & & 3B & -M & +N \\
x^0: & 3 & = & 2A & -B & & -N,
\end{array}$$

ktorý vyriešime napr. Gaussovou eliminačnou metódou (viď podkapitola 2.6) s výsledkom $A=\frac{3}{2}$, $B=-1$, $M=0$ a $N=1$. Rozklad funkcie môžeme napokon zapísať v tvare:

$$R(x) = \frac{3}{2(x-\frac{1}{2})} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}.$$

♡

Príklad 2.4.4 *Rozložme racionálnu funkciu*

$$R(x) = \frac{5x^2-5x+14}{(x-2)(x^2+4)}$$

na súčet elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie. Rozklad tejto funkcie na parciálne zlomky pomocou neurčitých koeficientov má tvar:

$$\frac{5x^2-5x+14}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Tentokrát použijeme na výpočet neznámych koeficientov **dosadzovaciu metódu**. Prenásobme poslednú rovnicu najskôr menovateľom ľavej strany t. j. spoločným menovateľom pravej strany. Dostávame rovnosť:

$5x^2-5x+14 = A(x^2+4)+(Mx+N)(x-2)$.

Vidíme, že po dosadení $x = 2$ do tejto rovnice sa druhý sčítanec vynuluje. Môžeme teda bezprostredne vyčísliť hodnotu koeficientu A:

$$x = 2 \implies \begin{aligned} 24 &= 8A \\ A &= 3. \end{aligned}$$

Analogicky by sme pokračovali v prípade, keby menovateľ mal okrem $x = 2$ ďalší reálny koreň. Keďže menovateľ už nemá reálne korene, dosadíme postupne ľubovoľné dve reálne čísla (okrem už použitej hodnoty $x = 2$). Dostaneme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych M a N, ktorú vyriešime. Špeciálne ak dosadíme $x = 0$ vypadne koeficient M, takže bezprostredne môžeme určiť hodnotu N bez zostavovania sústavy rovníc. Každopádne predtým vyčíslené koeficienty dosadíme tiež.

$$x = 0 \implies \begin{aligned} 14 &= 12 + N(-2) \\ 2N &= -2 \\ N &= -1. \end{aligned}$$

Dosaďme napokon napr. $x = 1$ a vypočítajme hodnotu M:

$$x = 1 \implies \begin{aligned} 14 &= 15 + (M - 1)(-1) \\ 14 &= 16 - M \\ M &= 2. \end{aligned}$$

Výsledný rozklad má tvar:

$$R(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{2x-1}{x^2+4}.$$

♡

Algoritmus pre rozklad racionálnej funkcie na súčet parciálnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$

1. Zistíme, či je funkcia rýdzoracionálna. Ak nie je, prepíšeme ju pomocou delenia na súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie. Vo výpočte pokračujeme s rýdzoracionálnou funkciou.

2. Položíme menovateľ rovný nule a vyriešime vzniknutú algebrickú rovnicu na množine $\mathbb{R}$.

3. Vyjadríme rozklad rýdzoracionálnej funkcie na súčet parciálnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$ pomocou neurčitých koeficientov.

4. Pomocou niektorej z metód vypočítame koeficienty.

2.5 Aritmetické vektory a matice

Pri praktických výpočtoch je niekedy výhodné matematický model riešenej úlohy, ktorý sme vytvorili, nahradiť zápisom pomocou matíc. V nasledujúcej časti predstavíme pojem matice, špeciálne typy matíc a operácie s nimi.

Definícia 2.6 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Usporiadanú n-ticu čísel $a_1, a_2, ..., a_n$ nazývame n-rozmerným* ***aritmetickým vektorom****. Čísla $a_1, a_2, ..., a_n$ nazývame zložkami alebo súradnicami aritmetického vektora.*
Zápis:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Definícia 2.7 *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Nech $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ sú n-rozmerné vektory.* ***Lineárnou kombináciou vektorov*** *$\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ nazývame vektor $\bar{x} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \bar{a}_m$. Konštanty α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ nazývame kombinačnými koeficientami.*

Definícia 2.8 *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Vektory $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ (n-rozmerné) sú* ***lineárne závislé****, ak existujú čísla α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, aspoň jedno rôzne od nuly, také, že platí $\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \bar{a}_m = \bar{0}$ $(= (0, 0, \dots, 0))$. Ak vektory nie sú lineárne závislé, hovoríme, že sú* ***lineárne nezávislé****.*

Definícia 2.9 ***Maticou*** *typu $m \times n$ nazývame množinu prvkov zapísaných do tabuľky s m riadkami a n stĺpcami, pre $m, n \in \mathbb{N}$:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Zápis: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

V nasledujúcich riadkoch definujeme špeciálne typy matíc.

1. **Riadková matica** (riadkový vektor): $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.
2. **Stĺpcová matica** (stĺpcový vektor): $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
3. **Transponovaná matica** k matici $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ je matica $\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{B} = (b_{ij})$ typu $n \times m$, kde $b_{ij} = a_{ji}$, pre $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

   Príklad:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. **Štvorcová matica** $(m = n)$: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})\ i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Nasledujú špeciálne typy štvorcových matíc:

5. **Diagonálna matica**: $\boldsymbol{D} = (d_{ij})$, kde pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad i \neq j, \\ \text{ľubovoľné} & \text{pre} \quad i = j. \end{cases}$$

Zápis: $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$.

Príklad:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(3, 2, 1).$$

6. **Jednotková matica**: $\boldsymbol{E} = (e_{ij})$, kde pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{pre} \quad i = j. \end{cases}$$

Príklad:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. **Nulová matica**: $\boldsymbol{O} = (o_{ij})$, kde $o_{ij} = 0$, pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Príklad:

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. **Horná (dolná) trojuholníková matica**: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = 0$, pre $i > j$ $(i < j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

Príklad:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{horná}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{dolná}.$$

V prípade, ak sa nejedná o štvorcové matice, ale prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule, dostávame nasledujúce typy matíc.

9. **Lichobežníková matica**: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = 0$, pre $i > j$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Príklad:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. **Stupňovitá (Gaussova) matica**: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ je lichobežníková matica, v ktorej každý nasledujúci riadok obsahuje aspoň o jednu nulu zľava viac ako predchádzajúci riadok.
    Príklad:
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definícia 2.10 ***Súčtom matíc*** $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *typu* $m \times n$ *nazývame maticu* $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$, *pre ktorú* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, *pre* $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.
Zápis: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Definícia 2.11 *Nech* $k \in \mathbb{R}$ *je konštanta,* ***k-násobkom matice A*** *typu* $m \times n$ *nazývame maticu* $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$, *pre ktorú* $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$, *pre* $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.
Zápis: $\boldsymbol{C} = k \cdot \boldsymbol{A}$.

Pre horedefinované operácie s maticami platia nasledujúce vzťahy.

Veta 2.5 *Nech* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *sú matice rovnakého typu a* k, l *sú konštanty. Platia rovnosti:*

(i) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$,

(ii) $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$,

(iii) $k \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k \cdot \boldsymbol{A} + k \cdot \boldsymbol{B}$.

Definícia 2.12 *Nech* $m, n, r \in \mathbb{N}$. *Nech* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *je matica typu* $m \times r$ *a* $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ *je matica typu* $r \times n$. ***Súčinom matíc A, B*** *nazývame maticu* $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$, *kde pre* $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ir} \cdot b_{rj} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Zápis: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Pre súčin matíc platia pravidlá formulované v nasledujúcej vete. Na rozdiel od súčtu matíc pre súčin neplatí komutatívny zákon.

Veta 2.6 *Nech* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *sú matice typov, ktoré dovolia doleuvedené operácie a* $k \in \mathbb{R}$ *je konštanta. Platia rovnosti:*

(i) $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$,

(ii) $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$,

(iii) $k \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (k \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \cdot k) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot (k \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot k$.

Definícia 2.13 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ je štvorcová matica rádu n. Maticu $\boldsymbol{A}^r$*

$$\boldsymbol{A}^r = \begin{cases} \boldsymbol{E} & r = 0, \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{r-1} & r = 1, 2, \dots \end{cases}$$

*nazývame **r-tou mocninou matice A**.*

Príklad 2.5.1 *Pre matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

vypočítajme

a) $2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, b) $3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{C}$, c) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, d) $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$,

e) $\boldsymbol{A}^2$, f) $\boldsymbol{B}^2$, g) $\boldsymbol{A}^\top$, h) $\boldsymbol{B}^\top$.

Riešenie.

a) $$2\boldsymbol{A} = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$-\boldsymbol{B} = -\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Keďže sčítavať môžme len matice rovnakého rozmeru, $2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ neexistuje.

b) Na rozdiel od predchádzajúceho príkladu sú v tomto prípade obe matice rovnakého rozmeru, čiže všetky operácie môžeme uskutočniť.

$$3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{C} = 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

c) Podmienkou existencie súčinu dvoch matíc je, aby počet stĺpcov prvej matice bol rovný počtu riadkov druhej matice. Keďže pre $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ je

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$$

dostávame

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}5+0{\cdot}1-1{\cdot}0, & 2{\cdot}2+0{\cdot}0-1{\cdot}2, & 2{\cdot}1+0{\cdot}(-1)-1{\cdot}3 \\ 3{\cdot}5+2{\cdot}1+0{\cdot}0, & 3{\cdot}2+2{\cdot}0+0{\cdot}2, & 3{\cdot}1+2{\cdot}(-1)+0{\cdot}3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 17 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Počet stĺpcov matice $\boldsymbol{B}$ sa nerovná počtu riadkov matice $\boldsymbol{A}$, teda $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ neexistuje. Všimnime si, že v našom prípade $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

e) Jednoduchým dôsledkom podmienky existencie súčinu dvoch matíc je, že $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$ sa dá vypočítať len v prípade štvorcovej matice, teda $\boldsymbol{A}^2$ neexistuje.

f) $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 27 & 12 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$

g) Transponovaná matica k danej matici vzniká zámenou riadkov a stĺpcov. Z prvého riadku sa tak stáva prvý stĺpec a naopak, atď.

$$\boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

h) $\boldsymbol{B}^\top = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

♡

Definícia 2.14 *Nech $m, n \in \mathbb{N}$.* ***Hodnosťou matice $\boldsymbol{A}$*** *typu $m \times n$ nazývame maximálny počet lineárne nezávislých aritmetických vektorov tvoriacich riadky resp. stĺpce matice $\boldsymbol{A}$.*
Zápis*:* $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$*.*

Poznámka 2.1 *Z horeuvedenej definície vyplýva, že* $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) \leqq \min\{m, n\}$*.*

Definícia 2.15 (ERÚ) ***Ekvivalentnou riadkovou úpravou matice*** *nazývame každú z nasledujúcich úprav:*

(i) zmena poradia riadkov,

(ii) vynásobenie riadku nenulovou konštantou,

(iii) pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov k niektorému riadku.

Definícia 2.16 *Dve* ***matice*** *budeme nazývať* ***ekvivalentné****, ak sa jedna z matíc dá upraviť na druhú pomocou ekvivalentných riadkových úprav.*
Zápis*:* $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$*.*

Nasledujúca veta je nápomocná pri určovaní hodnosti matice.

Veta 2.7 *Pre ľubovoľnú maticu A platia nasledujúce tvrdenia.*

(i) *Nech matica $\boldsymbol{A}$ je ekvivalentná s maticou $\boldsymbol{B}$, tak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{B})$.*

(ii) *Každú maticu možno pomocou ekvivalentných úprav upraviť na ekvivalentnú stupňovitú (Gaussovu) maticu.*

(iii) *Nech $m \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je stupňovitá matica s m nenulovými riadkami, tak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = m$.*

Dôsledkom predchádzajúcej vety je jednoduchý **algoritmus na určenie hodnosti matice**.

1. K danej matici $\boldsymbol{A}$ nájdeme ekvivalentnú stupňovitú maticu $\boldsymbol{B}$.
2. $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$ je rovná počtu nenulových riadkov matice $\boldsymbol{B}$.

Príklad 2.5.2 *Určme hodnosť matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav dostaneme stupňovitú maticu

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ktorá je ekvivalentná s maticou A. Počet nenulových riadkov udáva hodnosť matice, teda $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 2$. ♡

Definícia 2.17 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu n. Nech $\boldsymbol{M}_{ij}$ je štvorcová matica rádu $n-1$, ktorá vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ vynechaním i-tého riadku a j-tého stĺpca v prípade, ak $n \geqq 2$.* ***Determinantom matice A*** *nazývame číslo $\det \boldsymbol{A}$, pre ktoré platí:*

(i) $\det \boldsymbol{A} = a_{11}$, *pre* $n = 1$,

(ii) $\det \boldsymbol{A} = a_{11} \det \boldsymbol{M}_{11} - a_{12} \det \boldsymbol{M}_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det \boldsymbol{M}_{1n}$, *pre* $n \geqq 2$.

Zápis*:* $\det \boldsymbol{A}$, *resp.* $|\boldsymbol{A}|$.

Jednoduchým spôsobom výpočtu determinantu matice rádu nanajvýš tri je takzvané **krížové pravidlo** nazývané tiež **Sarusovo pravidlo**:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - \\ -(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}). \end{array}$$

Príklad 2.5.3 *Vypočítajme determinanty matíc*

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Riešenie.

a) Matica je stupňa 2, môžeme použiť krížové (Sarusovo) pravidlo

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5.$$

b) Matica je stupňa 3, môžeme opäť použiť krížové pravidlo.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - (4 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 1) =$$
$$= 4 + 18 - (4 + 15) = 22 - 19 = 3.$$

♡

Pre matice rádu vyššieho ako tri krížové pravidlo neplatí. Pri výpočte determinantov takýchto matíc používame **rozvoj podľa i-tého riadku**, resp. **rozvoj podľa j-tého stĺpca**.

Veta 2.8 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu $n \geqq 2$. Platí*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det \boldsymbol{M}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det \boldsymbol{M}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Poznámka 2.2 *Číslo A_{ij} vystupujúce v predchádzajúcej vete nazývame algebrickým doplnkom matice $\boldsymbol{A}$ prislúchajúcim prvku a_{ij}.*

V nasledujúcich vetách je formulovaný **vplyv ekvivalentných úprav na hodnotu determinantu**.

Veta 2.9 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu $n \geqq 2$. Nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ výmenou dvoch riadkov (stĺpcov), tak*

$$\det \boldsymbol{B} = -\det \boldsymbol{A}.$$

Veta 2.10 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu n. Nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikla vynásobením i-tého riadku (j-tého stĺpca) matice $\boldsymbol{A}$ konštantou c, tak*

$$\det \boldsymbol{B} = c \cdot \det \boldsymbol{A}.$$

Veta 2.11 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu $n \geqq 2$. Nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikla pripočítaním lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k nejakému riadku (stĺpcu) matice $\boldsymbol{A}$, tak*

$$\det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{A}.$$

Algoritmus na výpočet determinantu matice rádu vyššieho ako tri

1. Použitím ERÚ s prihliadnutím na horeuvedené vety (viď veta 2.9, veta 2.10 a veta 2.11) vytvoríme riadok (stĺpec), v ktorom sa nachádza jeden nenulový člen.
2. Urobíme rozvoj podľa riadku (stĺpca) vytvoreného v bode 1.
3. Postup opakujeme, kým nemáme výsledok alebo neznížime rád na hodnotu nanajvýš tri a použijeme krížové pravidlo.

Príklad 2.5.4 *Vypočítajme determinant matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -4R_2 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -[-4 - 6 + 9 - (6 - 9 - 4)] = -6.$$

♡

Definícia 2.18 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu n a $\boldsymbol{E}$ jednotková matica rovnakého rádu. Maticu $\boldsymbol{A}^{-1}$ nazveme* ***inverznou maticou*** *k matici $\boldsymbol{A}$ práve vtedy, ak $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.*

Veta 2.12 *Ak k matici $\boldsymbol{A}$ existuje inverzná matica, tak je jediná.*

Definícia 2.19 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu n. Maticu $\boldsymbol{A}$ nazveme* ***regulárnou (singulárnou)*** *maticou práve vtedy, ak $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ ($\det \boldsymbol{A} = 0$).*

Definícia 2.20 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu n. Maticu $\boldsymbol{B}$ nazveme* ***adjungovanou maticou*** *k matici $\boldsymbol{A}$ práve vtedy, ak $b_{ij} = A_{ji}$ (algebrický doplnok prvku a_{ji}), pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*
Zápis*:*

$$\operatorname{adj} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\top}.$$

Nasledujúca veta popisuje jednu z možností ako **nájsť inverznú maticu** k regulárnej matici a síce **pomocou adjungovanej matice**.

Veta 2.13 *Nech $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica. Potom k nej existuje inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$ a platí*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \cdot (\operatorname{adj} \boldsymbol{A}).$$

Ďalšou možnosťou ako **nájsť inverznú maticu** k regulárnej matici je **pomocou ekvivalentných riadkových úprav** a to nasledujúcim spôsobom.

1. Zostrojíme blokovú maticu $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{E})$.

2. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav prevedieme na tvar s hornou trojuholníkovou maticou na ľavej strane. Ak boli riadky matice lineárne závislé (aspoň jeden riadok matice $\boldsymbol{A}$ sa vynuloval), je matica singulárna a inverzná matica k nej neexistuje.

3. Ak je matica regulárna, upravíme pomocou ekvivalentných riadkových úprav na diagonálnu maticu na ľavej strane.

4. Predelením diagonálnymi členmi upravíme na blokovú maticu $(\boldsymbol{E} \,|\, \boldsymbol{A}^{-1})$.

2.6 Sústavy lineárnych algebrických rovníc

Definícia 2.21 *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Sústavu rovníc*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

*nazývame **sústavou lineárnych algebrických rovníc**. Čísla a_{ij} nazývame koeficientami sústavy, $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazývame neznámymi a $b_1, b_2, \dots, b_m$ absolútnymi členmi (pravými stranami) sústavy.*

Definícia 2.22 *Maticu utvorenú z koeficientov*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*nazývame **maticou sústavy**. Maticu utvorenú z matice sústavy $\boldsymbol{A}$ a vektora pravej strany $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)^\top$*

$$\boldsymbol{A}^\star = (\boldsymbol{A} \mid \bar{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

*nazývame **rozšírenou maticou sústavy**.*
Zápis sústavy (1) v maticovom tvare*:*

$$\boldsymbol{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}.$$

Definícia 2.23 ***Riešením sústavy** lineárnych algebrických rovníc (1) nazývame taký vektor $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^\top$, ktorý vyhovuje rovnici $\boldsymbol{A} \cdot \bar{\alpha} = \bar{b}$.*

Z hľadiska riešiteľnosti sústavy môžu nastať prípady:

- sústava má práve jedno riešenie,
- sústava má nekonečne veľa riešení,
- sústava nemá riešenie.

Ktorý z horeuvedených prípadov nastal, vieme určiť na základe Frobeniovej vety.

Veta 2.14 (Frobeniova veta) *Nech $\boldsymbol{A}$ je matica sústavy a $\boldsymbol{A}^{\star}$ je rozšírená matica sústavy (1). Sústava (1) má riešenie vtedy a len vtedy, ak* $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{A}^{\star})$. *Ďalej platí:*

(i) Sústava (1) má práve jedno riešenie vtedy a len vtedy, ak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{A}^{\star}) = n$.

(ii) Sústava (1) má nekonečne veľa riešení vtedy a len vtedy, ak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{A}^{\star}) < n$.

V prípade ak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) \neq \mathrm{h}(\boldsymbol{A}^{\star})$, sústava (1) nemá riešenie. V prípade, ak má sústava nekonečne veľa riešení, je počet tzv. voľných premenných $n - \mathrm{h}(\boldsymbol{A})$.

V nasledujúcich odsekoch sa budeme venovať jednotlivým metódam riešenia sústav lineárnych algebrických rovníc.

Gaussova eliminačná metóda

Táto metóda spočíva v postupnom eliminovaní neznámych v nasledujúcich rovniciach. Zjednodušene by sme princíp výpočtu mohli zhrnúť do nasledujúcich bodov.

1. Nahradíme sústavu lineárnych algebrických rovníc rozšírenou maticou sústavy.
2. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme maticu na stupňovitý tvar.
3. Na základe Frobeniovej vety rozhodneme o riešiteľnosti sústavy.
4. Ak existuje riešenie sústavy, vyjadríme ho v tvare vektora.

Príklad 2.6.1 *Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešme sústavu lineárnych algebrických rovníc nad* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 13x_5 & = & 9 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array}.$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -3R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \\ -R_2 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftrightarrows \\ \leftrightarrows \end{array} \approx \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Keďže hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{A}^\star) = 3$, sústava má riešenie. Zároveň počet neznámych je väčší ako hodnosť matice $n = 5 > \mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 3$, z toho vyplýva, že sústava má nekonečne veľa riešení. Počet voľných premenných určíme na základe vzťahu $n - \mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 5 - 3 = 2$. Upravená sústava po prepise do tvaru rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 3 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0. \end{array}$$

Pri voľbe $x_5 = t$ a $x_1 = s$ dostávame riešenie $\overline{x} = (s,\, 1-t+2s,\, 3-4t,\, 0,\, t)^\top$ pre $s,\, t \in \mathbb{R}$.

♡

Cramerovo pravidlo

Pre $n \in \mathbb{N}$ majme sústavu n algebrických rovníc o n neznámych

$$\begin{array}{rcrcccrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{2}$$

Veta 2.15 *Sústava (2) má práve jedno riešenie vtedy a len vtedy, ak je matica sústavy regulárna.*

Nech je matica sústavy (2) regulárna. Z toho vyplýva, že determinant matice sústavy je rôzny od nuly. Na nájdenie riešenia takejto sústavy použijeme **Cramerovo pravidlo**.

Veta 2.16 (Cramerovo pravidlo) *Nech $D \neq 0$ je determinant matice sústavy (2). Nech D_i je determinant matice, ktorá vznikla z matice sústavy nahradením i-tého stĺpca vektorom pravej strany. Riešením sústavy (2) je vektor $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top$, kde*

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad \textit{pre} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Príklad 2.6.2 *Pomocou Cramerovho pravidla riešme sústavu lineárnych algebrických rovníc nad $\mathbb{R}$*

$$\begin{array}{rcrcrcl} 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 9 \end{array}.$$

Riešenie. Matica sústavy je štvorcová, vypočítajme teda determinant matice sústavy D

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -35.$$

Keďže determinant matice sústavy je rôzny od nuly, je táto matica regulárna. Môžeme teda použiť Cramerovo pravidlo. Nahradením prvého stĺpca stĺpcom pravej strany dostaneme determinant D_1. Analogicky vypočítame D_2 a D_3

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -35, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -70,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -175.$$

Sústava má práve jedno riešenie $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, kde

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-35}{-35} = 1,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-70}{-35} = 2,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-175}{-35} = 5.$$

♡

2.7 Úlohy

2.1 Rozložte dané polynómy na súčin koreňových činiteľov nad množinou $\mathbb{R}$:

a) $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$,

b) $4x^3 - 2x^2 + 2x - 1$,

c) $3x^5 + 17x^4 - 6x^3 - 96x^2 + 32x$,

d) $2x^5 + 9x^4 + 6x^3 - 81$,

e) $5x^5 + 32x^4 + 72x^3 + 64x^2 + 16x$,

f) $2x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 20x^2$.

2.2 Dané racionálne funkcie rozložte na súčet reálnych elementárnych zlomkov:

a) $\dfrac{2x^4-3x^3-10x^2+17x-12}{x^3-2x^2-5x+6}$,

b) $\dfrac{x^2+3x+1}{x^3+5x^2+8x+4}$,

c) $\dfrac{x^2+4x-2}{x^3-x^2}$,

d) $\dfrac{x^3+x^2-4x+5}{x^3-3x+2}$,

e) $\dfrac{6x+9}{x^3+x}$,

f) $\dfrac{x^2+x+13}{x^3-x^2+4x-4}$,

g) $\dfrac{4}{x^4-1}$,

h) $\dfrac{10x^2-16}{x^4-5x^2+4}$.

2.3 Dané racionálne funkcie rozložte na súčet reálnych elementárnych zlomkov:

a) $\dfrac{2x^2+6}{x^3-3x^2-x+3}$,

b) $\dfrac{x^2-4x-7}{x^3-2x^2-x+2}$,

c) $\dfrac{6x^2-3x+5}{x^3-3x^2+x-3}$,

d) $\dfrac{-2x^2+3x-7}{x^3-x^2+4x-4}$,

e) $\dfrac{4x}{x^3+x+2}$,

f) $\dfrac{3x^2-7x+8}{x^3-4x^2+4x}$,

g) $\dfrac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}$,

h) $\dfrac{x^2+8x-4}{x^3-4x}$,

i) $\dfrac{3x^2+12x-27}{x^3-9x}$,

j) $\dfrac{x^3+4x^2-4x+16}{x^4-16}$.

2.4 Dané racionálne funkcie rozložte na súčet reálnych elementárnych zlomkov:

a) $\dfrac{6\,x^4-12\,x^3-11\,x^2+17\,x+4}{x^3-2\,x^2-x+2}$,

b) $\dfrac{6\,x^2-22\,x+18}{x^3-6\,x^2+11\,x-6}$,

c) $\dfrac{3\,x^5-15\,x^4+21\,x^3+4\,x^2-28\,x+12}{x^4-5\,x^3+8\,x^2-4\,x}$,

d) $\dfrac{-2\,x^3-6}{x^4+2\,x^3+4\,x^2+6\,x+3}$,

e) $\dfrac{x^3+6x^2-6x+7}{x^3-x^2+x-6}$,

f) $\dfrac{5x^2 - 5x + 9}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}$.

2.5 Vypočítajte pre dané matice

a) $3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B}$, b) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, c) $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$,

d) $\boldsymbol{A}^2$, e) $\boldsymbol{B}^2$, f) $\boldsymbol{A}^\top$,

ak

1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

4) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.6 Určte hodnosť matice

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

d) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 18 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & -6 \\ 6 & 8 & 1 & 5 & -8 \\ 3 & 5 & 3 & 7 & -8 \end{pmatrix}$,

f) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 9 & 25 & 15 \\ 15 & 34 & 25 & 64 & 40 \\ 20 & 46 & 34 & 89 & 70 \\ 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \end{pmatrix}$.

2.7 Vypočítajte determinanty matíc

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$,

b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$,

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -2 & 10 \\ -5 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

2.8 Vypočítajte inverznú maticu k danej matici

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, e) $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, f) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.9 Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte sústavu lineárnych algebrických rovníc

a) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 40 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 37 \end{array},$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \end{array},$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \end{array},$$

d) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 9x_1 & - & x_2 & + & 15x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \end{array},$$

e) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 8x_1 & + & 12x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & - & 7x_4 & = & 3 \end{array},$$

f) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 12 \end{array}.$$

2.10 Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte sústavu lineárnych algebrických rovníc

a) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & -8 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & -8 \end{array},$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & & = & -2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & -7 \end{array},$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 5x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & -2 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \end{array},$$

d) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 6x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & = & -7 \\ 9x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 2 \end{array},$$

e) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 7x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \end{array},$$

f) $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 15 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \end{array}$,

g) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array}$,

h) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 3 \end{array}$.

2.11 Pomocou Cramerovho pravidla riešte sústavy lineárnych algebrických rovníc

a) $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \end{array}$,

b) $\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & = & -6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 18 \end{array}$,

c) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}$,

d) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}$,

e) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 40 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 37 \end{array}$,

f) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \end{array}$.

2.12 V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu a náklady na materiál pri výrobe dvoch modelov DVD prehrávačov.

náklady	A	B
pracovná sila	12 €	16 €
materiál	21 €	30 €

Vypočítajte koľko prehrávačov modelu A a koľko prehrávačov modelu B je potrebné vyrobiť za deň, keď na pracovnú silu máme denne k dispozícii 920 €, na materiál 1 680 € a chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

2.13 V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu a náklady na materiál pri výrobe dvoch modelov mrazničiek.

model	pracovná sila	materiál
A	40 €	60 €
B	50 €	80 €

Vypočítajte koľko mrazničiek modelu A a koľko mrazničiek modelu B je potrebné vyrobiť za deň, keď na pracovnú silu máme denne k dispozícii 1 500 €, na materiál 2 340 € a chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

2.14 V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu, náklady na materiál a náklady na reklamu pri výrobe troch modelov kamier.

náklady	A	B	C
pracovná sila	24 €	32 €	40 €
materiál	32 €	40 €	50 €
reklama	4 €	8 €	14 €

Vypočítajte koľko kusov kamier modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď na pracovnú silu máme týždenne k dispozícii 1 328 €, na materiál 1 690 € a na reklamu 354 €, pričom chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

2.15 V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu, náklady na materiál a náklady na reklamu pri výrobe troch modelov mobilov.

náklady	A	B	C
pracovná sila	12 €	16 €	20 €
materiál	16 €	20 €	24 €
reklama	2 €	4 €	6 €

Vypočítajte koľko kusov mobilov modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď na pracovnú silu máme týždenne k dispozícii 664 €, na materiál 832 € a na reklamu 164 €, pričom chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

2.16 V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu, náklady na materiál a náklady na reklamu pri výrobe troch modelov hodiniek.

model	pracovná sila	materiál	reklama
A	10 €	15 €	5 €
B	8 €	6 €	2 €
C	12 €	16 €	8 €

a) Vypočítajte koľko kusov hodiniek modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď na pracovnú silu máme týždenne k dispozícii 620 €, na materiál 750 € a na reklamu 330 €, pričom chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

b) Ako by sa zmenila výroba, ak peniaze na reklamu využijeme na iný účel?

2.17 V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu pohoviek troch modelov A, B a C na jednotlivých výrobných oddeleniach.

model	stolárske oddelenie	čalúnické oddelenie	expedícia
A	0,9 hod.	0,8 hod.	0,1 hod.
B	1,1 hod.	1,0 hod.	0,1 hod.
C	1,0 hod.	1,2 hod.	0,1 hod.

a) Vypočítajte koľko kusov pohoviek modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď pre stolárske oddelenie máme týždenne k dispozícii 75,5 hodín, pre čalúnické oddelenie 74 hodín a pre expedíciu 7,5 hodín, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.

b) Ako by sa zmenila výroba, ak výrobu modelu A vynecháme?

c) Predpokladáme, že zo všetkých modelov sa spracuje rovnaký počet pohoviek na stolárskom oddelení, rovnaký počet na čalúnickom oddelení a rovnaký počet na expedícii. Vypočítajte tieto počty pre jednotlivé oddelenia, keď pre model A máme týždenne k dispozícii 15,8 hodín, pre model B 19,4 hodín a pre model C 20 hodín, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.

d) Ako by sa zmenila výroba v prípade c), ak výrobu modelu A vynecháme?

2.18 V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu kresiel troch modelov A, B a C na jednotlivých výrobných oddeleniach.

oddelenie	A	B	C
stolárske oddelenie	3,0 hod.	2,0 hod.	2,4 hod.
čalúnické oddelenie	3,0 hod.	2,4 hod.	3,6 hod.
expedícia	0,4 hod.	0,4 hod.	0,6 hod.

a) Vypočítajte koľko kusov kresiel modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď pre stolárske oddelenie máme týždenne k dispozícii 290 hodín, pre čalúnické oddelenie 366 hodín a pre expedíciu 58 hodín, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.

b) Ako by sa zmenila výroba, ak výrobu modelu A vynecháme?

2.19 V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu troch modelov A, B a C určitého výrobku na jednotlivých výrobných linkách.

linka	model A	model B	model C
1.	8 min.	6 min.	5 min.
2.	5 min.	4 min.	4 min.
3.	2 min.	2 min.	1 min.

a) Vypočítajme, koľko kusov výrobkov modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za deň, keď pre 1. linku máme denne k dispozícii 900 minút, pre 2. linku 610 minút a pre 3. linku 240 minút, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.

b) Ako by sa zmenila výroba, ak odstavíme 3. linku?

c) Ako by sa zmenila výroba, ak odstavíme 2. linku?

2.20 V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu troch modelov A, B a C určitého výrobku na jednotlivých výrobných linkách.

model	1. linka	2. linka	3. linka
A	6 min.	12 min.	4 min.
B	4 min.	10 min.	3 min.
C	2 min.	6 min.	2 min.

a) Vypočítajme, koľko kusov výrobkov modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď pre 1. linku máme týždenne k dispozícii 2 020 minút, pre 2. linku 4 800 minút a pre 3. linku 1 540 minút, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.

b) Ako by sa zmenila výroba, ak odstavíme 3. linku?

Výsledky:

2.1

a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)$,

b) $(2x-1)(2x^2+1)$,

c) $3(x-\frac{1}{3})(x+4)^2(x-2)x$,

d) $2(x-\frac{3}{2})(x+3)^2(x^2+3)$,

e) $5(x+\frac{2}{5})(x+2)^3x$,

f) $2(x-\frac{5}{2})(x+2)^2x^2$.

2.2

a) $2x+1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x-3}$,

b) $\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$,

c) $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}$,

d) $1+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+2}$.

e) $\dfrac{-9x+6}{x^2+1}+\dfrac{9}{x}$,

f) $-\dfrac{2x+1}{x^2+4}+\dfrac{3}{x-1}$,

g) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}$,

h) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x+2}$.

2.3

a) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-3}$,

b) $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$,

c) $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{5}{x-3}$,

d) $\dfrac{3}{x^2+4}-\dfrac{2}{x-1}$,

e) $\dfrac{x+2}{x^2-x+2}-\dfrac{1}{x+1}$,

f) $\dfrac{3}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x}$,

g) $\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x}$,

h) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x+2}$,

i) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{2}{x+3}$,

j) $\dfrac{x}{x^2+4}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$.

2.4

a) $6\,x-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$,

b) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$,

c) $3\,x+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{(x-2)^2}-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{3}{x}$,

e) $1+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4x-2}{x^2+x+3}$,

f) $\dfrac{2x+1}{x^2+4}+\dfrac{3}{x-3}$.

d) $\dfrac{3}{x^2+3} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$,

2.5

1) a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, b) neexistuje, c) neexistuje, d) neexistuje, e) neexistuje, f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) a) neexistuje, b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) neexistuje, d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, e) neexistuje, f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) a) neexistuje, b) neexistuje, c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, d) neexistuje, e) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2, 1 \end{pmatrix}$.

4) a) neexistuje, b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 8 \\ -4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, c) neexistuje, d) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, e) neexistuje, f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.6

a) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 2$,

b) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 3$,

c) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 3$,

d) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 3$,

e) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 4$,

f) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 4$.

2.7

a) $|\boldsymbol{A}| = -35$,

b) $|\boldsymbol{B}| = -35$,

c) $|\boldsymbol{C}| = -570$,

d) $|\boldsymbol{D}| = 12$,

e) $|\boldsymbol{F}| = -48$,

f) $|\boldsymbol{G}| = 223$.

2.8

a) $\boldsymbol{A}^{-1}$ neexistuje,

b) $\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $\boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

d) $\boldsymbol{D}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & -10 & -18 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{1}{63}\begin{pmatrix} 14 & -7 & 7 \\ 8 & 14 & -5 \\ -5 & 7 & 11 \end{pmatrix}$,

f) $\boldsymbol{G}^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -11 & -1 & 9 \\ -17 & -6 & 5 \\ 26 & -11 & 1 \end{pmatrix}$.

2.9

a) $\overline{x} = (1, 2, 2, 0)^\top$,

b) $\overline{x} = (-2, 0, 1, -1)^\top$,

c) sústava nemá riešenie,

d) sústava nemá riešenie,

e) $\overline{x} = (\frac{5}{8} - 3t - s, 2t, 8s, -\frac{1}{4}+10s)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$,

f) $\overline{x} = (6-26t+17s, -1+7t-5s, t, s)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$.

2.10

a) $\overline{x} = (2, -2, 1, -1)^\top$,

b) $\overline{x} = (3, 0, -5, 11)^\top$,

c) $\overline{x} = (\frac{2}{7} - t - \frac{5}{14}s, t, s, 8\frac{8}{7} - t - \frac{13}{14}s)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$,

d) $\overline{x} = (s, t, 13, 19 - 3s - 3t, -34)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$,

e) $\overline{x} = (t, t, t + 1, 1)^\top \; t \in \mathbb{R}$,

f) $\overline{x} = (3, 0, -2, 0, 1)^\top$,

g) $\overline{x} = (1, 1, -1, 0)^\top$,

h) $\overline{x} = (2 - t, 3 - 3t, t, 3 - 2t)^\top \; t \in \mathbb{R}$.

2.11

a) $x_1 = \frac{-3}{-1}, \; x_2 = \frac{-1}{-1} \Rightarrow \overline{x} = (3, 1)^\top$,

b) $x_1 = \frac{48}{24}, \; x_2 = \frac{72}{24} \Rightarrow \overline{x} = (2, 3)^\top$,

c) $x_1 = \frac{-36}{-12}, \; x_2 = \frac{12}{-12}, \; x_3 = \frac{-24}{-12} \Rightarrow \overline{x} = (3, -1, 2)^\top$,

d) $x_1 = \frac{56}{28}, \; x_2 = \frac{28}{28}, \; x_3 = \frac{-28}{28} \Rightarrow \overline{x} = (2, 1, -1)^\top$,

e) $x_1 = \frac{-3}{-3}, \; x_2 = \frac{-6}{-3}, \; x_3 = \frac{-6}{-3}, \; x_4 = \frac{0}{-3} \Rightarrow \overline{x} = (1, 2, 2, 0)^\top$,

f) $x_1 = \frac{-28}{14}, \; x_2 = \frac{0}{14}, \; x_3 = \frac{14}{14}, \; x_4 = \frac{-14}{14} \Rightarrow \overline{x} = (-2, 0, 1, -1)^\top$.

2.12 A=30 kusov, B=35 kusov

2.13 A=15 kusov, B=18 kusov

2.14 A=15 kusov, B=14 kusov, C=13 kusov

2.15 $(2+t, 40-2t, t)^\top,\ t \in < 0, 20 > \cap \mathbb{N}$

2.16

a) A=10 kusov, B=20 kusov, C=30 kusov,

b) $(-46+28t, t, 90-3t)^\top,\ t \in < 17, 30 > \cap \mathbb{N}$.

2.17

a) A=25 kusov, B=30 kusov, C=20 kusov,

b) $(-6+2t, t, 260-32t)^\top,\ t \in < 3, 8 > \cap \mathbb{N}$,

c) 10 ks stolárske oddelenie, 8 ks čalúnické oddelenie, 4 ks expedícia

d) neexistuje riešenie.

2.18

a) A=30 kusov, B=40 kusov, C=50 kusov,

b) $(-30+\frac{6}{5}t, 190-3t, t)^\top,\ t \in < 25, \frac{190}{3} > \cap \mathbb{N}$.

2.19

a) A=50 kusov, B=50 kusov, C=40 kusov,

b) $(-30+2t, 190-\frac{7}{2}t, t)^\top,\ t \in < 15, 54 > \cap \mathbb{N}$,

c) $(150-2t, t, 2t-60)^\top,\ t \in < 30, 75 > \cap \mathbb{N}$.

2.20

a) A=150 kusov, B=180 kusov, C=200 kusov,

b) $(210-\frac{1}{3}t, t, 380-t)^\top,\ t \in < 0, 380 > \cap \mathbb{N}$.

3 Limita a spojitosť funkcie

3.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmom limita funkcie, so základnými vlastnosťami limity a technikami ich výpočtu. Oboznámiť s pojmom spojitosť funkcie a vlastnosťami spojitých funkcií na uzavretom intervale. Oboznámiť s pojmom asymptota grafu funkcie bez smernice a so smernicou.

3.2 Otázky

- Definujte pojem limity.
- Uveďte vlastnosti limity v prípade konečných (vlastných) limít.
- Uveďte vlastnosti limity v prípade nekonečných (nevlastných) limít.
- Definujte limitu sprava, resp. limitu zľava funkcie v bode.
- Definujte pojem spojitosť funkcie v bode.
- Klasifikujte body nespojitosti funkcie.
- Sformulujte tvrdenia o vlastnostiach funkcií spojitých na uzavretom intervale.
- Definujte asymptotu bez smernice funkcie.
- Definujte asymptoty so smernicou funkcie.
- Uveďte vzťahy na výpočet asymptot so smernicou funkcie.
- Definujte limitu postupnosti.

3.3 Limita funkcie

Definícia 3.1 *Nech $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$.*
*Interval $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\, a + \varepsilon)$, nazývame **$\varepsilon$-ovým okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$.*
*Interval $O_\varepsilon^+(a) = (a,\, a+\varepsilon)$, nazývame **pravým ε-ovým okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$.*
*Interval $O_\varepsilon^-(a) = (a - \varepsilon,\, a)$, nazývame **ľavým ε-ovým okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$.*
*Množinu $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\, a + \varepsilon) - \{0\}$, nazývame **prstencovým ε-ovým okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$.*
*Interval $O_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon},\, \infty\right)$, nazývame **$\varepsilon$-ovým okolím bodu** ∞.*

Definícia 3.2 *Nech $A \subset \mathbb{R}$ a nech $a \in \mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Bod a nazývame **hromadným bodom množiny** A, keď každé prstencové okolie $\overset{\circ}{O}(a)$ obsahuje aspoň jeden bod $x \in A$. Bod $x \in A$, ktorý nie je hromadným bodom množiny A, nazývame **izolovaným bodom množiny** A.*

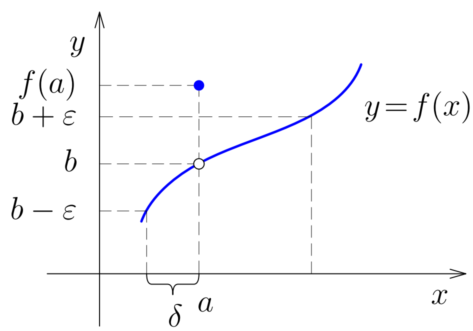
Definícia 3.3 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}^\star$ a nech a je hromadným bodom množiny A. Hovoríme, že* ***funkcia*** *f* ***má v bode*** *a* ***limitu*** *b práve vtedy, ak pre každé $O_\epsilon(b)$ existuje také prstencové okolie $O^\circ_\delta(a)$, že $f(O^\circ_\delta(a) \cap A) \subset O_\epsilon(b)$ (viď Obr. 13).*

Symbolický zápis:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow (\forall O_\epsilon(b))\ (\exists O^\circ_\delta(a)) : f(O^\circ_\delta(a) \cap A) \subset O_\epsilon(b).$$

Zápis pomocou absolútnej hodnoty:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta) :\ |f(x)-b| < \epsilon.$$



Obr. 13: Limita funkcie

Limita funkcie, ak existuje, je jednoznačná.

Veta 3.1 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a nech a je hromadným bodom množiny A. Ak $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ a $\lim_{x\to a} f(x) = b_2$, tak $b_1 = b_2$.*

Definícia 3.4 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a nech a je hromadným bodom množín $C =< a, \infty) \cap A$, $D = (-\infty, a > \cap A$ a množiny A. Hovoríme, že* ***funkcia*** *f* ***má v bode*** *a* ***limitu sprava*** *b práve vtedy, ak pre každé $O_\epsilon(b)$ existuje také okolie $O^+_\delta(a)$, že $f(O^+_\delta(a) \cap A) \subset O_\epsilon(b)$. Hovoríme, že* ***funkcia*** *f* ***má v bode*** *a* ***limitu zľava*** *b práve vtedy, ak pre každé $O_\epsilon(b)$ existuje také okolie $O^-_\delta(a)$, že $f(O^-_\delta(a) \cap A) \subset O_\epsilon(b)$.*

Zápis:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a^+} f(x) &= b, \\ \lim_{x\to a^-} f(x) &= b. \end{aligned}$$

Veta 3.2 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a nech a je hromadným bodom množín C, D. Potom $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ práve vtedy, keď*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Vlastnosti limít pre základné operácie s funkciami v prípade vlastných limít uvádza nasledujúca veta.

Veta 3.3 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech a je hromadným bodom množiny A a nech $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$. Potom*

- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |b|$,
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$,
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c$,
- *ak pre každé $x \in O(a) \cap A$ je $g(x) \neq 0$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c \neq 0$, tak $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.*

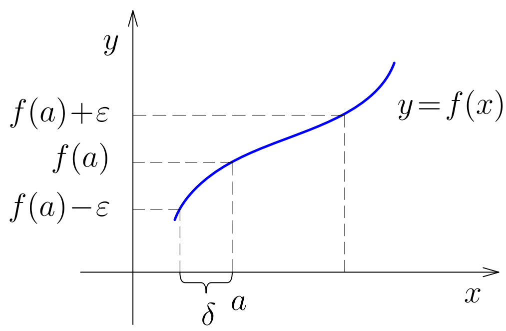
Niektoré vlastnosti nevlastných limít formulujú nasledujúce vety.

Veta 3.4 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech a je hromadným bodom množiny A a nech $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \{\pm\infty\}$. Potom*

- $\lim\limits_{x \to a} [-f(x)] = -b$,
- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$,
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Veta 3.5 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech a je hromadným bodom množiny A a nech pre každé $x \in A$ je $f(x) > 0$ a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, tak $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.*

Poznámka 3.1 *Dá sa ukázať, že $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, čo je užitočné pre výpočet limít z goniometrických funkcií.*



Obr. 14: Spojitosť funkcie

3.4 Spojitosť funkcie

Definícia 3.5 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech f je definovaná v okolí bodu $a \in A$. Hovoríme, že* ***funkcia*** f ***je spojitá v bode*** a, *ak* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ *(viď Obr. 14).*

Zápis:

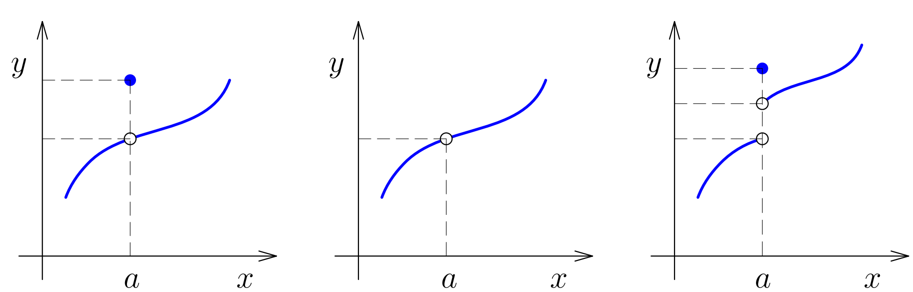
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A, |x-a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Definícia 3.6 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech f je definovaná v pravom (ľavom) okolí bodu $a \in A$. Hovoríme, že* ***funkcia*** f ***je spojitá v bode*** a ***sprava (zľava)***, *ak* $\lim\limits_{x\to a^{+(-)}} f(x) = f(a)$.

Definícia 3.7 *Hromadné body definičného oboru funkcie f, v ktorých funkcia f nie je spojitá, nazývame* ***body nespojitosti funkcie*** f.

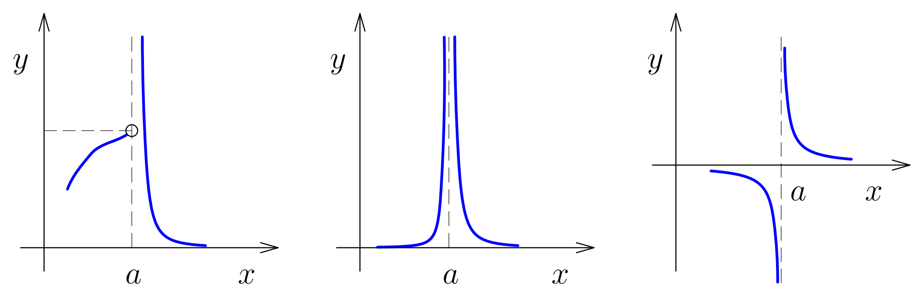
Klasifikácia bodov nespojitosti a funkcie f:

- Ak existujú vlastné jednostranné limity $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, tak a je **bodom nespojitosti prvého druhu** (viď Obr. 15).



Obr. 15: Nespojitosť prvého druhu

- Ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná tak a je **bodom nespojitosti druhého druhu** (viď Obr. 16).



Obr. 16: Nespojitosť druhého druhu

Príklad 3.4.1 *Nájdite a klasifikujte body nespojitosti funkcie*

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4}.$$

Riešenie. Keďže menovateľ nesmie byť rovný nule, bodmi nespojitosti tejto funkcie sú $x = \pm 2$. Kvôli ich klasifikácii vypočítame postupne limity, resp. jednostranné limity v týchto bodoch.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x(x-3)}{x+2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to -2^+} \frac{x(x-3)}{x+2} = \infty \\ \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to -2^-} \frac{x(x-3)}{x+2} = -\infty\end{aligned}$$

Bod $x = 2$ je bodom nespojitosti prvého druhu. V prípade bodu $x = -2$ neexistuje limita funkcie, keďže sa jednostranné limity nerovnajú. Navyše sú nevlastné a jedná sa teda o bod nespojitosti druhého druhu.

♡

Definícia 3.8 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Hovoríme, že **funkcia f je spojitá na otvorenom intervale** (a, b), ak je spojitá v každom bode tohto intervalu. Hovoríme, že **funkcia f je spojitá na uzavretom intervale** $< a, b >$, ak je spojitá v každom bode intervalu (a, b) a naviac je spojitá v bode a sprava a spojitá v bode b zľava.*

3.5 Vlastnosti spojitých funkcií na uzavretom intervale

Vlastnosti, ktoré vyplývajú zo spojitosti funkcie na uzavretom intervale, majú široké uplatnenie a stretneme sa s nimi v ďalších kapitolách.

Veta 3.6 *Nech $f : < a, b > \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f nadobúda na $< a, b >$ minimum aj maximum.*

Z vety 3.6 vyplýva, že spojitá funkcia f je na intervale $< a, b >$ aj ohraničená.

Pri hľadaní hladinových kriviek, ktoré si neskôr predstavíme, budeme potrebovať nasledujúcu vetu.

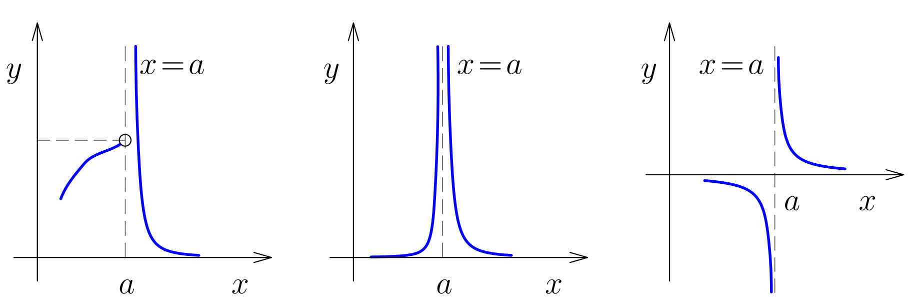
Veta 3.7 *Nech $f : < a, b > \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Nech c je ľubovoľné číslo z intervalu $< \min\limits_{x \in <a,b>} f(x), \max\limits_{x \in <a,b>} f(x) >$. Potom existuje aspoň jedno číslo $x_0 \in < a, b >$ také, že $f(x_0) = c$.*

Veta 3.8 *Nech $f : < a, b > \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Nech $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje aspoň jedno číslo $x_0 \in (a, b)$ také, že $f(x_0) = 0$.*

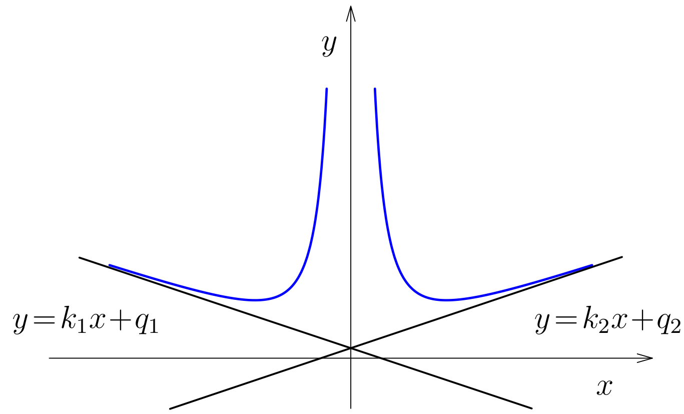
3.6 Asymptoty grafu funkcie

Jednou z možností využitia limít je aj určenie tzv. asymptot grafu funkcie, pomocou ktorých vieme určiť správanie sa funkcie v okolí bodov nespojitosti a pre "veľmi veľké"($x \to \infty$), resp. "veľmi malé"($x \to -\infty$) hodnoty.

Definícia 3.9 *Nech funkcia f je definovaná na istom okolí $O^{\circ}(a)$ bodu a. Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota bez smernice** grafu funkcie, ak funkcia f má v bode a aspoň jednu nevlastnú jednostrannú limitu (viď Obr. 17).*



Obr. 17: Asymptota bez smernice



Obr. 18: Asymptoty so smernicou

Definícia 3.10 *Nech funkcia f je definovaná na intervale $(-\infty, a)$, resp. (a, ∞). Ak existuje taká priamka $y = kx + q$, že $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx - q) = 0$, resp. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-q) = 0$, tak ju nazývame* ***asymptotou so smernicou*** *grafu funkcie f v nevlastnom bode $-\infty$, resp. $+\infty$ (viď Obr. 18).*

Veta 3.9 *Priamka $y = k_1x + q_1$ je asymptota grafu funkcie f pre bod $+\infty$ práve vtedy, keď*

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad a \quad q_1 = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - k_1 \cdot x) \in \mathbb{R}.$$

Priamka $y = k_2x + q_2$ je asymptota grafu funkcie f pre bod $-\infty$ práve vtedy, keď

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad a \quad q_2 = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - k_2 \cdot x) \in \mathbb{R}.$$

3.7 Postupnosti

Definícia 3.11 *Funkciu $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazývame* ***postupnosťou reálnych čísel****. Číslo $a_n = f(n)$ nazývame* ***n-tý člen postupnosti****.*
Zápis*:*

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \quad alebo \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Uvádzame príklady postupností, s ktorými sa budeme stretávať pri ekonomických aplikáciách.

- **Geometrická postupnosť:** $a_n = a_{n-1} \cdot q$

  Ďalej platí:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1}, \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

- **Aritmetická postupnosť:** $a_n = a_{n-1} + d$

  Ďalej platí:
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d, \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

Definícia 3.12 *Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **neklesajúcou** (**nerastúcou**), ak $a_n \leqq a_{n+1}$ ($a_n \geqq a_{n+1}$) pre každé $n \in \mathbb{N}$. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **rastúcou** (**klesajúcou**), ak $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) pre každé $n \in \mathbb{N}$.*

Definičným oborom postupností je množina prirodzených čísel, ktorá má jediný hromadný bod $a = \infty$. Preto definujeme limitu postupnosti len v tomto bode.

Definícia 3.13 *$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ práve vtedy, keď ku každému $O_\epsilon(b)$ existuje také n_0, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, platí $a_n \in O_\epsilon(b)$.*

Zápis:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \Longleftrightarrow (\forall O_\epsilon(b))\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N},\, n > n_0) : a_n \in O_\epsilon(b).$$

Definícia 3.14 *Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je postupnosť reálnych čísel. Hovoríme, že postupnosť je **konvergentná**, ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \in \mathbb{R}$. V prípade, ak limita neexistuje alebo je rovná ∞, resp. $-\infty$, hovoríme, že postupnosť je **divergentná**.*

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je postupnosť reálnych čísel, kde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Limita tejto postupnosti existuje, označíme ju e (**Eulerovo číslo**):
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \doteq 2{,}718218\ldots.$$

Príklad 3.7.1 *Vypočítajme limitu*
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{5n}.$$

Riešenie.
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{5n} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{3\cdot 5} = \left[\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{15} = \mathrm{e}^{15}$$

♡

Ľahko sa aplikovaním postupu z predchádzajúceho príkladu dokáže, že pre ľubovoľné $k \in \mathbb{R}$ platí vzťah:
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^k.$$

Poznámka 3.2 *Analogický vzťah platí pre limitu funkcie:*
$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \mathrm{e}^k.$$

3.8 Úlohy

3.1 Vypočítajte limity

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x-12}$,

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x-3}\right)^{2x-5}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+2x-8}{3x^2+4x-12}$,

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+2x-8}{4x-12}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-8}{3x^2+4x-12}$,

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 3x}$.

3.2 Nájdite a klasifikujte body nespojitosti funkcie $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^3-4x}$.

3.3 Nájdite asymptoty grafu danej funkcie a načrtnite ich

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{9-x^2}$,

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{9-x}$,

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$.

Výsledky:

3.1

a) $\dfrac{3}{4}$,

b) $\dfrac{1}{4}$,

c) e^{-4},

d) e^{14},

e) 2,

f) ∞,

g) 0,

h) $\dfrac{4}{3}$.

3.2 $x = 2$ je bod nespojitosti 1. druhu; $x = 0$ a $x = -2$ sú body nespojitosti 2. druhu.

3.3

a) ABS: $x = \pm 3$; ASS: $y = -1$.

b) ABS: $x = 0$; ASS: $y = x$.

c) ABS: $x = 9$; ASS: $y = -x - 9$.

d) ABS: $x = 1$; ASS: neexistuje.

4 Derivácia funkcie

4.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmom derivácia funkcie, so základnými vlastnosťami derivácií a výpočtom derivácií. Oboznámiť s použitím derivácie pri hľadaní smernice dotyčnice ku grafu funkcie a výpočte limít pomocou L´Hospitalovho pravidla. Oboznámiť s pojmom diferenciál funkcie a jeho využitím pri približných výpočtoch.

4.2 Otázky

- Definujte pojem derivácie funkcie v bode a ilustrujte ho pomocou geometrického významu derivácie.
- Uveďte pravidlá pre derivovanie súčinu skalára a funkcie, súčtu, súčinu a podielu dvoch funkcií a deriváciu zloženej funkcie.
- Uveďte vzťahy pre deriváciu elementárnych funkcií.
- Definujte diferenciál funkcie v bode.
- Uveďte vzťahy na odhad hodnoty funkcie a odhad prírastku hodnoty funkcie pomocou diferenciálu.
- Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie s použitím derivácie.
- Sformulujte L´Hospitalovo pravidlo.

4.3 Pojem derivácie funkcie

V nasledujúcich riadkoch zavedieme pojem derivácie funkcie. Z hľadiska aplikácií v rôznych oblastiach nielen matematiky sa derivácia radí medzi najdôležitejšie spomedzi matematických pojmov.

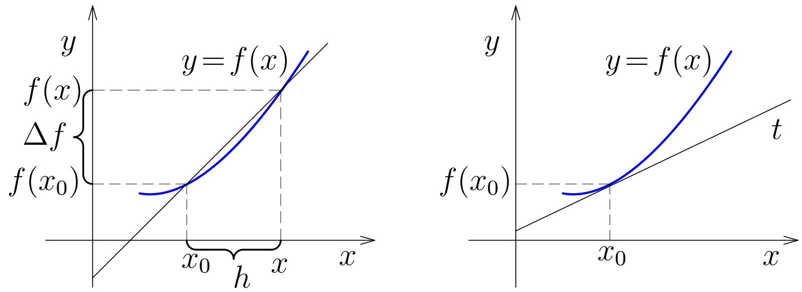
Definícia 4.1 *Hovoríme, že **funkcia** f **má v bode** $x_0 \in D(f)$ **deriváciu**, ak je definovaná v okolí bodu x_0 a existuje limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right).$$

*Túto limitu nazývame **deriváciou funkcie** f **v bode** x_0.*

Zápis:

$$f'(x_0), \quad [f(x)]'_{x=x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}.$$



Obr. 19: Geometrický význam derivácie funkcie

Ak existuje derivácia funkcie $f'(x_0)$, tak existuje dotyčnica ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $P = [x_0, f(x_0)]$ (viď Obr. 19):

- **rovnica dotyčnice:** $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Ak navyše $f'(x_0) \neq 0$, tak existuje normála ku grafu funkcie funkcie $y = f(x)$ v bode $P = [x_0, f(x_0)]$:

- **rovnica normály:** $y - f(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.

Podobne ako jednostranné limity v bode definujeme aj jednostranné derivácie funkcie v bode.

Definícia 4.2 *Hovoríme, že **funkcia** f **má v bode** $x_0 \in D(f)$ **deriváciu zľava (sprava)**, ak je definovaná v ľavom (pravom) okolí bodu x_0 a existuje limita*

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \left(\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right).$$

*Túto limitu nazývame **deriváciou zľava (sprava) funkcie** f **v bode** x_0.*

Zápis:

$$f'_-(x_0) \qquad (f'_+(x_0)).$$

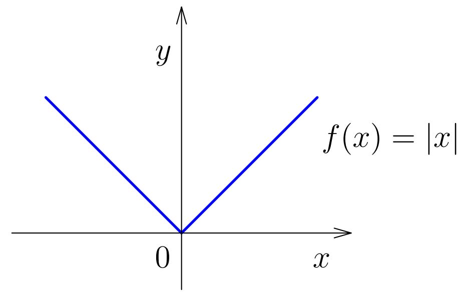
Vzťah derivácie funkcie a jednostranných derivácií v danom bode je analogický ako v prípade limity.

Veta 4.1 *Funkcia f má v bode x_0 (vnútorný bod $D(f)$) deriváciu $f'(x_0)$ práve vtedy, keď má v bode x_0 deriváciu zľava $f'_-(x_0)$, deriváciu sprava $f'_+(x_0)$ a platí*

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

Veta 4.2 *Ak má funkcia f v bode x_0 deriváciu, tak je v bode x_0 spojitá.*

Dôkazom toho, že neplatí opačné tvrdenie je funkcia $f(x) = |x|$. Pomocou definície sa ľahko ukáže, že hoci je funkcia v bode $x_0 = 0$ spojitá (viď Obr. 20), nemá tam deriváciu (jednostranné derivácie sa nerovnajú).



Obr. 20: Spojitá funkcia s neexistujúcou deriváciou

4.4 Výpočet derivácie funkcie

Pravidlá derivovania základných operácií s funkciami uvádza nasledujúca veta.

Veta 4.3 *Nech funkcie f a g majú v bode x_0 derivácie $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$. Nech $c \in \mathbb{R}$. Potom existujú derivácie funkcií $c \cdot f$, $f+g$, $f \cdot g$, a ak $g(x_0) \neq 0$, tak aj $\frac{f}{g}$ v bode x_0, pre ktoré platí:*

- $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$,
- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Bez formuly na výpočet derivácie zloženej funkcie by sme prakticky nevedeli derivovať väčšinu funkcií.

Veta 4.4 *Nech funkcia $f(g(x))$ je definovaná na okolí bodu x_0. Nech funkcia g má v bode x_0 deriváciu $g'(x_0)$ a nech funkcia f má v bode $g(x_0)$ deriváciu $f'(g(x_0))$. Potom má funkcia $f(g(x))$ deriváciu v bode x_0*

$$[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Za predpokladu, že derivujeme funkciu na definičnom obore, platia nasledujúce vzťahy pre derivácie elementárnych funkcií.

Derivácia elementárnych funkcií:

- $c' = 0$ $\qquad c \in \mathbb{R}$,
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $\qquad n \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $\qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$,
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ $\qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$,
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Príklad 4.4.1 *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x) = \sin(1-x^2)$.

Riešenie.
$f'(x) = \cos(1-x^2) \cdot (1-x^2)' = -2x\cos(1-x^2)$.

♡

Pre deriváciu funkcie, v ktorej sa premenná nachádza v základe aj v exponente, použijeme prepis pomocou logaritmickej funkcie. Tomuto princípu hovoríme **logaritmická derivácia**:

$$[f^g]'(x_0) \quad = \quad \left[\mathrm{e}^{\ln f^g}\right]'(x_0) = \left[\mathrm{e}^{g \cdot \ln f}\right]'(x_0).$$

Príklad 4.4.2 *Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie* $f(x) = x \ln x$

a) *v bode* $P = [\mathrm{e}^2, ?]$,

b) *ak je dotyčnica rovnobežná s priamkou* $y - 2x + 1 = 0$.

Riešenie.

a) Druhú súradnicu bodu dotyku určíme ako hodnotu funkcie v bode x_0, t. j. $f(\mathrm{e}^2) = 2\,\mathrm{e}^2$. Smernicu dotyčnice vypočítame ako deriváciu funkcie $f(x) = x \ln x$ v bode $x = \mathrm{e}^2$:
$$f'(x) = \ln x + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x_0) = f'(\mathrm{e}^2) = 3.$$
Dotyčnica: $y - 2\,\mathrm{e}^2 = 3(x - \mathrm{e}^2)$.

Normála: $y - 2\,\mathrm{e}^2 = -\frac{1}{3}(x - \mathrm{e}^2)$.

b) Priamku $y - 2x + 1 = 0$ upravíme do smernicového tvaru $y = 2x - 1$. Určíme smernicu $k = 2$ tejto priamky, ktorá je zároveň smernicou hľadanej dotyčnice, keďže tieto priamky sú rovnobežné. Pomocou smernice vypočítame bod dotyku dotyčnice:
$$\begin{array}{rcl} f'(x_0) & = & 2 \\ \ln x_0 + 1 & = & 2 \\ x_0 & = & \mathrm{e} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_0) = \mathrm{e}\,. \end{array}$$
Dotyčnica: $y - \mathrm{e} = 2(x - \mathrm{e})$.

Normála: $y - \mathrm{e} = -\frac{1}{2}(x - \mathrm{e})$.

♡

Poznámka 4.1 *Derivácia funkcie* $f(x)$ *predstavuje okamžitú rýchlosť zmeny hodnoty tejto funkcie.*

Príklad 4.4.3 *Výška nákladu miestnych novín o* t *rokov odteraz bude* $C(t) = 50t^2 + 100t + 10\ 000$ *kusov.*

a) *Akým tempom bude rásť náklad novín po t rokoch odteraz?*

b) *Odhadnime tempo rastu nákladu novín počas šiesteho roka.*

Riešenie.

a) Jedná sa o rýchlosť zmeny funkcie (o koľko kusov sa zmení náklad za jeden rok), t. j. vypočítame prvú deriváciu funkcie:
$$C'(t) = 100t + 100.$$

b) Tentokrát sa jedná o rýchlosť zmeny nákladu po uplynutí piatich rokov:
$$C'(5) = 100 \cdot 5 + 100 = 600.$$
Náklad novín vzrastie počas šiesteho roka o 600 kusov.

♡

4.5 Derivácie vyšších rádov

Opakované derivovanie funkcie tzv. vyššie derivácie budeme potrebovať napríklad pri vyšetrovaní priebehu funkcie alebo optimalizačných úlohách.

Definícia 4.3 *Nech existuje derivácia funkcie $f(x)$ v bode $x_0 \in D(f)$. Nech existuje derivácia funkcie $f'(x)$ v bode $x_0 \in D(f)$. Potom túto deriváciu nazývame **deriváciou druhého rádu** alebo **druhou deriváciou funkcie** $f(x)$ **v bode** x_0.*
Zápis*:*

$$f''(x_0) \qquad \textit{alebo} \qquad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

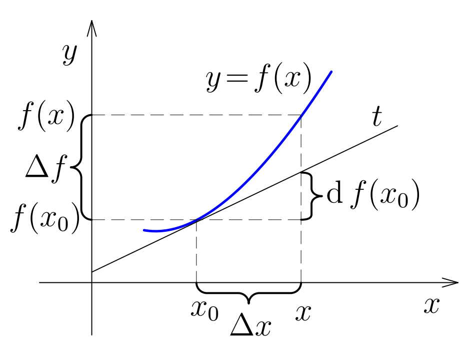
Analogickým spôsobom môžeme definovať aj deriváciu n-tého rádu funkcie pre ľubovoľné $n \geqq 2$ ako deriváciu $(n-1)$-vej derivácie funkcie.

4.6 Diferenciál funkcie

Pri približných výpočtoch a odhadoch hodnôt funkcií ekonomickej analýzy sa niekedy nezaobídeme bez pojmu diferenciál funkcie.

Definícia 4.4 *Nech je funkcia f definovaná v okolí bodu x_0. Nech má funkcia f v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)$. Potom hovoríme, že je v bode x_0 **diferencovateľná**. Výraz $f'(x_0) \cdot \Delta x$ nazývame **diferenciálom funkcie** f **v bode** x_0 **pre prírastok** $\Delta x = x - x_0$.*
Zápis*:*

$$\mathrm{d}\, f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$



Obr. 21: Diferenciál funkcie

Pre x v blízkom okolí bodu x_0 platí:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
f'(x_0) &\doteq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x} \\
f'(x_0)\cdot \Delta x &\doteq f(x)-f(x_0) \\
\Longrightarrow \qquad \mathrm{d}\, f(x_0) &\doteq \Delta f(x_0).
\end{aligned}$$

To znamená, že rozdiel funkčných hodnôt sa približne rovná diferenciálu v bode x_0 pre prírastok Δx (viď Obr. 21). Tento vzťah môžeme použiť na odhad zmeny hodnoty funkcie pomocou diferenciálu hlavne pri aplikačných úlohách. Navyše môžeme túto súvislosť použiť na odvodenie vzťahu pre odhad hodnoty funkcie v bode x:

$$\begin{aligned}
f(x)-f(x_0) &\doteq \mathrm{d}\, f(x_0) \\
\Longrightarrow \qquad f(x) &\doteq f(x_0)+f'(x_0)\cdot \Delta x \\
f(x) &\doteq f(x_0)+\mathrm{d}\, f(x_0).
\end{aligned}$$

Príklad 4.6.1 *Výška nákladu miestnych novín bude o* t *rokov odteraz* $C(t) = 50t^2 + 100t + 10\,000$ *kusov. Odhadnime pomocou diferenciálu, o koľko vzrastie náklad novín počas*

a) *nasledujúcich* 6 *mesiacov,*

b) *prvých* 3 *mesiacov* 6. *roka.*

Riešenie.

a) Jedná sa o odhad zmeny hodnoty funkcie, ak nárast premennej z hodnoty 0 predstavuje 0,5 roka. Počítame teda diferenciál funkcie v bode $t_0 = 0$ pre $\Delta t = 0{,}5$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\, C &= C'(t)\cdot \Delta t = (100t+100)\cdot \Delta t \\
\Longrightarrow \quad \mathrm{d}\, C(t_0) &= (100\cdot 0+100)\cdot 0{,}5 = 50.
\end{aligned}$$

Náklad novín vzrastie počas nasledujúcich šiestich mesiacov o 50 kusov.

b) Tentokrát sa jedná o šiesty a nie nasledujúci rok. Odhadujeme preto zmenu hodnoty funkcie pre nárast premennej z hodnoty 5 a to o 0,25 roka. Počítame teda diferenciál funkcie v bode $t_0 = 5$ pre $\Delta t = 0{,}25$:

$$\mathrm{d}\, C(t_0) = (100\cdot 5+100)\cdot 0{,}25 = 150.$$

Náklad novín vzrastie počas prvých troch mesiacov šiesteho roka o 150 kusov. ♡

4.7 L´Hospitalovo pravidlo

Ďalšou oblasťou, kde nám derivácia môže mnohokrát uľahčiť postup, je výpočet limít.

Veta 4.5 *Nech funkcie f a g majú derivácie v prstencovom okolí bodu $a \in \mathbb{R}^\star$. Nech*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *alebo* $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$,
2. *existuje* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tak existuje aj $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Príklad 4.7.1 *Vypočítajme limitu*

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

♡

4.8 Úlohy

4.1 Vypočítajte prvú deriváciu nasledujúcich funkcií

a) $f(x) = 3x^2 + 2^x - \frac{2}{x}$,

b) $f(x) = x \cdot \ln x$,

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

d) $f(x) = \sqrt{1 + 2\mathrm{tg}\, x}$,

e) $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$,

f) $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$,

g) $f(x) = x^{3x}$,

h) $f(x) = (\sin x)^x$.

4.2 Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$ v bode dotyku $P = [x_0, f(x_0)]$

a) $f(x) = x^3 + 9x + 2$; $P = [0, ?]$,

b) $f(x) = 2x \cdot \ln x$; $P = [1, ?]$,

c) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$; $P = [0, ?]$,

d) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2} + 1$; $P = [0, ?]$.

4.3 Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítajte limity

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x-12}$,

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+x-8}{3x^2+4x-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$,

d) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

4.4 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 384\sqrt[3]{L}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 512 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu, ako sa zmení denná produkcia, ak:

a) zvýšime počet odpracovaných hodín na 530,

b) zvýšime počet odpracovaných hodín na 550,

c) znížime počet odpracovaných hodín na 500,

d) znížime počet odpracovaných hodín na 480.

4.5 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 441\sqrt[3]{L}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 343 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu, ako sa zmení denná produkcia, ak:

a) zvýšime počet odpracovaných hodín na 350,

b) zvýšime počet odpracovaných hodín na 363,

c) znížime počet odpracovaných hodín na 322,

d) znížime počet odpracovaných hodín na 315.

4.6 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 540\sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu, ako sa zmení denná produkcia, ak:

a) zvýšime kapitál o 15 000 eur,

b) znížime kapitál o 5 000 eur.

4.7 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 384\sqrt[3]{L}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 512 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu:

a) Na akú hodnotu sa musí zmeniť počet hodín, aby sa denná produkcia zvýšila o 80 jednotiek?

b) Na akú hodnotu sa musí zmeniť počet hodín, aby sa denná produkcia znížila o 80 jednotiek?

4.8 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 540\sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu, ako sa musí zmeniť kapitálová investícia, aby sa denná produkcia zvýšila o 70 tisíc jednotiek.

4.9 Podľa štúdie produktivity práce v podniku, priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 8.00 hod., bude mať poskladaných $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$ výrobkov o x hodín neskôr. Približne koľko výrobkov vyrobí pracovník:

a) medzi 8.00 a 8.15 hod.,

b) medzi 9.00 a 9.15 hod.,

c) medzi 10.00 a 10.10 hod.,

d) počas 3. hodiny?

4.10 Výskumom bolo zistené, že krajčírka, ktorá začne pracovať o 7.00 hodine, bude mať ušitých $f(x)$ sukní po x hodinách práce. Približne koľko sukní bude mať ušitých v danom časovom úseku:

a) $f(x) = 15x - x^2$, medzi 13.00 a 13.20 hod.,

b) $f(x) = 18x - x^2$, medzi 13.00 a 13.40 hod.,

c) $f(x) = 22x - x^2$, medzi 10.00 a 10.15 hod.,

d) $f(x) = 22x - x^2$, medzi 10.00 a 10.30 hod.?

4.11 Podľa štúdie produktivity práce v podniku, priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 8.00 hod., bude mať poskladaných $f(x)$ výrobkov o x hodín neskôr. Približne koľko výrobkov vyrobí pracovník v danom časovom úseku:

a) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 16x$, medzi 12.00 a 12.30 hod.,

b) $f(x) = -x^3 + 8x^2 + 15x$, medzi 9.00 a 9.45 hod.,

c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 20x$, medzi 10.00 a 10.10 hod.,

d) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 25x$, medzi 13.00 a 13.10 hod.?

Výsledky:

4.1

a) $f'(x) = 6x + 2^x \ln 2 + \dfrac{2}{x^2}$,

b) $f'(x) = \ln x + 1$,

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{1 + 2\mathrm{tg}\, x}}$,

e) $f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2x \cos x^2$,

f) $f'(x) = -2x\, \mathrm{e}^{1-x^2}$,

g) $f'(x) = x^{3x} (3 \ln x + 3)$,

h) $f'(x) = (\sin x)^x (\ln \sin x + x\mathrm{cotg}\, x)$.

4.2

a) $t:\ 9x - y + 2 = 0$; $n:\ x + 9y - 18 = 0$,

b) $t:\ 2x - y - 2 = 0$; $n:\ x + 2y - 1 = 0$,

c) $t:\ 2x - y + 1 = 0$; $n:\ x + 2y - 2 = 0$,

d) $t:\ x - 2y + 3 = 0$; $n:\ 4x + 2y - 3 = 0$.

4.3

a) $\dfrac{3}{4}$,

b) $\dfrac{2}{3}$,

c) $\dfrac{1}{6}$,

d) 0.

4.4

a) 36,

b) 76,

c) -24,

d) -64.

4.5

a) 21,
b) 60,
c) -63,
d) -84.

4.6

a) 150,
b) -50.

4.7

a) 552,
b) 497.

4.8 736 tisíc eur

4.9

a) 1,5,
b) 4,75,
c) 6,33,
d) 38.

4.10

a) 1,
b) 4,
c) 4,
d) 8.

4.11

a) 8,
b) 21,
c) 2,
d) 10.

5 Aplikácie derivácie v ekonómii

5.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmami marginálna veličina, relatívna zmena hodnoty funkcie a percentuálna miera zmeny hodnoty funkcie. Oboznámiť s pojmom elasticita funkcie a jej vlastnosťami. Oboznámiť s pojmom elasticita funkcie ponuky a dopytu a s vplyvom elasticity dopytu na celkové príjmy.

5.2 Otázky

- Definujte pojem marginálna veličina, marginálne náklady a marginálne príjmy.
- Definujte pojem relatívna zmena hodnoty funkcie a percentuálna miera zmeny hodnoty funkcie.
- Definujte pojem elasticita funkcie.
- Sformulujte tvrdenie o vplyve znamienka elasticity na zmenu hodnoty funkcie.
- Popíšte vplyv elasticity funkcie na rast, resp. klesanie priemernej veličiny.
- Definujte pojem elasticita funkcie dopytu a funkcie ponuky.
- Klasifikujte funkciu dopytu na základe elasticity.
- Popíšte vplyv elasticity dopytu na celkové príjmy.

5.3 Marginálna analýza

V nasledujúcich riadkoch sa budeme zaoberať marginálnou analýzou, t. j. aproximačnou metódou, ktorá využíva deriváciu funkcie na určenie zmeny hodnoty funkcie $f(x)$ vyvolanej zmenou hodnoty premennej z x na $x+1$. V takom prípade je totiž $\Delta x = 1$ a keďže $f'(x) \doteq \dfrac{f(x+1)-f(x)}{\Delta x}$, dostávame $f'(x) \doteq f(x+1) - f(x)$.

Definícia 5.1 *Nech funkcia $TV = f(x)$ je ľubovoľná ekonomická totálna veličina.* ***Marginálna veličina*** *je prírastok celkovej veličiny TV, ktorý pripadá na prírastok premennej x o jednu jednotku.*

Zápis:

$$MTV(x) = f'(x).$$

Uvádzame definície marginálnych veličín pre najviac frekventované funkcie ekonomickej analýzy.

Definícia 5.2 *Ak $TV = C(x)$ je funkcia celkových nákladov, tak $C'(x)$ je funkcia* ***marginálnych nákladov****, t. j. odhad nákladov na $(x+1)$-vý výrobok.*

Zápis:

$$MC(x) = C'(x).$$

Definícia 5.3 *Ak $TV = R(x)$ je funkcia celkových príjmov, tak $R'(x)$ je funkcia* ***marginálnych príjmov****, t. j. odhad príjmov z $(x+1)$-vého výrobku.*

Zápis:

$$MR(x) = R'(x).$$

Príklad 5.3.1 *Celkové mesačné náklady na výrobu x kusov tovaru sa dajú vyjadriť funkciou $C(x) = x^2 + 15x + 5\ 000$ eur.*

a) *Použime marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 14. výrobku.*

b) *Vypočítajme náklady na výrobu 14. výrobku priamo z funkcie nákladov.*

Riešenie.

a) Vypočítame deriváciu funkcie celkových nákladov pre "pôvodnú" hodnotu, t. j. $x = 13$:

$$\begin{aligned} C'(x) &= 2x + 15 \\ \Longrightarrow \quad C'(13) &= 41. \end{aligned}$$

Náklady na výrobu 14. výrobku odhadujeme na 41 eur.

b) Skutočné náklady vypočítame ako rozdiel funkčných hodnôt:

$$C(14) - C(13) = 42.$$

Skutočné náklady na výrobu 14. výrobku sú 42 eur.

♡

5.4 Percentuálna miera zmeny hodnoty funkcie

Ak hľadáme odpoveď na otázky typu, aká je percentuálna miera rastu alebo poklesu určitej veličiny, napr. hrubého domáceho produktu, potrebujeme najskôr definovať pojem relatívnej hodnoty funkcie.

Definícia 5.4 *Nech funkcia $f(x)$ má v bode x deriváciu $f'(x)$.* ***Relatívnou zmenou hodnoty funkcie*** *$f(x)$ nazývame výraz $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.*

Definícia 5.5 *Nech funkcia $f(x)$ má v bode x deriváciu $f'(x)$.* ***Percentuálnou mierou zmeny hodnoty funkcie*** *$f(x)$ nazývame výraz $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100\ \%$.*

Ak predpokladáme, že sa premenná x zmení na hodnotu $x+1$, tak platí

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100\ \% \doteq \frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)} \cdot 100\ \%,$$

t. j. percentuálna miera zmeny hodnoty funkcie udáva, o koľko percent sa zmení hodnota funkcie, ak sa hodnota premennej x zvýši o jednotku.

5.5 Elasticita funkcie

V tejto kapitole sa budeme zaoberať odpoveďou na otázku, o koľko percent sa zmení hodnota funkcie $f(x)$, ak zmeníme hodnotu premennej o jedno percento. Ukážeme, že tento údaj má široké uplatnenie pre funkcie ekonomickej analýzy.

Predpokladajme, že $f(x) > 0$ pre $x > 0$. Nech existuje derivácia $f'(x)$ v bode $x_0 \in (0, \infty)$. Vieme, že pre dostatočne malú hodnotu $h \in \mathbb{R}$ platí

$$\Longrightarrow \quad f'(x_0) \quad \doteq \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Nech h predstavuje jedno percento z hodnoty x_0, t. j. $h = \dfrac{x_0}{100}$. Použitím predchádzajúceho vzťahu dostávame

$$\begin{aligned} f'(x_0) \quad &\doteq \quad \frac{f(x_0+\frac{x_0}{100})-f(x_0)}{\frac{x_0}{100}} \\ \Longrightarrow \quad \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 \quad &\doteq \quad \frac{f(x_0+\frac{x_0}{100})-f(x_0)}{f(x_0)} \cdot 100. \end{aligned}$$

Pravá strana predstavuje percentuálnu mieru zmeny hodnoty funkcie, ak sa premenná zmení o jedno percento. Z hore ukázaného teda vyplýva, že ju pre účely odhadov môžeme nahradiť približnou hodnotou $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0$.

Definícia 5.6 *Nech $f(x) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$ a nech existuje derivácia $f'(x)$ pre $x \in (0, \infty)$. Nech $x_0 \in (0, \infty)$. Číslo $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0$, ktoré vyjadruje, o koľko percent sa zmení hodnota funkcie $f(x_0)$ pri zvýšení hodnoty premennej x_0 o 1 %, nazývame* ***elasticitou funkcie*** *$f(x)$* ***v bode*** *x_0.*

Zápis:

$$\eta(f(x_0)) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0.$$

Keďže je premenná ako aj funkčná hodnota kladná, tak znamienko elasticity je vždy rovnaké ako znamienko derivácie funkcie. Ak použijeme navyše súvislosť (budeme sa jej obšírnejšie venovať v nasledujúcej kapitole), že ak je prvá derivácia funkcie kladná (záporná), tak je funkcia rastúca (klesajúca), tak dostaneme nasledujúce tvrdenie.

Veta 5.1 *Nech $f(x) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$ a nech existuje $f'(x)$ pre $x \in (0, \infty)$. Potom platí*

1. *Ak $\eta(f(x)) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$, tak zvýšenie (zníženie) hodnoty premennej x o 1 percento znamená zvýšenie (zníženie) hodnoty funkcie $f(x)$ o $\eta(f(x_0))$ percent.*

2. *Ak $\eta(f(x)) < 0$ pre $x \in (0, \infty)$, tak zvýšenie (zníženie) hodnoty premennej x o 1 percento znamená zníženie (zvýšenie) hodnoty funkcie $f(x)$ o $|\eta(f(x_0))|$ percent.*

Príklad 5.5.1 *Denná produkcia podniku je $Q(K) = 1\ 200 \cdot \sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. O koľko percent vzrastie produkcia, ak sa kapitálová investícia zvýši o 1 percento?*

Riešenie. Vypočítame elasticitu produkčnej funkcie:

$$\eta(Q(K)) = \frac{Q'(K)}{Q(K)} \cdot K = \frac{1\ 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot K^{-\frac{1}{2}}}{1\ 200 \cdot K^{\frac{1}{2}}} \cdot K = \frac{1}{2}.$$

Produkcia vzrastie o $\frac{1}{2}$ %.

♡

Elasticita funkcie je v podstate pomer marginálnej a priemernej veličiny danej funkcie:

$$\eta(f(x_0)) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 = \frac{f'(x_0)}{\frac{f(x_0)}{x_0}} = \frac{Mf(x_0)}{Af(x_0)}.$$

Z tejto súvislosti vyplýva zaujímavý dôsledok pre rast, resp. klesanie uvažovanej priemernej veličiny v závislosti na hodnote elasticity. Uvažujme napríklad príjmovú funkciu $R(x)$:

1. Ak $\eta(R(x_0)) > 1 \implies MR(x_0) > AR(x_0)$,
   t. j. každé zvýšenie predaja z hodnoty x_0 o jednu jednotku vyvolá nárast príjmov väčší ako sú priemerné príjmy pri predaji x_0 jednotiek. S rastúcim predajom **priemerné príjmy rastú**.

2. Ak $\eta(R(x_0)) = 1 \implies MR(x_0) = AR(x_0)$,
   t. j. každé zvýšenie predaja z hodnoty x_0 o jednu jednotku vyvolá nárast príjmov rovný priemerným príjmom pri predaji x_0 jednotiek. S rastúcim predajom **sa priemerné príjmy nemenia**.

3. Ak $\eta(R(x_0)) < 1 \quad \Longrightarrow \quad MR(x_0) < AR(x_0)$,
   t. j. každé zvýšenie predaja z hodnoty x_0 o jednu jednotku vyvolá nárast príjmov menší ako sú priemerné príjmy pri predaji x_0 jednotiek. S rastúcim predajom **priemerné príjmy klesajú**.

5.6 Elasticita funkcie dopytu a funkcie ponuky

Vzhľadom na to, že je funkcia dopytu klesajúca, nadobúda elasticita tejto funkcie zápornú hodnotu. Aby sme sa vyhli absolútnej hodnote pri určovaní percentuálnej zmeny funkcie, je zvykom definovať elasticitu funkcie dopytu s opačným znamienkom.

Definícia 5.7 *Nech $q = D(p)$ je funkciou dopytu, kde $p > 0$ je cena výrobku na trhu a $q > 0$ je dopyt po tomto výrobku. Nech existuje $D'(p)$ pre $p \in (0, \infty)$. Číslo $-\dfrac{D'(p_0)}{D(p_0)} \cdot p_0$, ktoré vyjadruje o koľko percent sa zníži dopyt $D(p)$ po výrobku pri zvýšení ceny p_0 o 1 %, nazývame* ***elasticitou funkcie dopytu v bode*** *p_0.*

Zápis:

$$E_D = \eta(D(p_0)) = -\frac{D'(p_0)}{D(p_0)} \cdot p_0.$$

Elasticita funkcie dopytu nám môže pomôcť pri určovaní vhodnej ceny výrobku na trhu, ak chceme dopyt po sledovanom výrobku regulovať.

Klasifikácia funkcie dopytu na základe elasticity:

1. Ak $E_D = 1$, tak funkcia dopytu má **jednotkovú elasticitu**,
   t. j. jednopercentné zvýšenie (zníženie) ceny vyvolá jednopercentné zníženie (zvýšenie) dopytu.

2. Ak $E_D > 1$, tak funkcia dopytu je **elastická**,
   t. j. jednopercentné zvýšenie (zníženie) ceny vyvolá viac ako jednopercentné zníženie (zvýšenie) dopytu.

3. Ak $E_D < 1$, tak funkcia dopytu je **neelastická**,
   t. j. jednopercentné zvýšenie (zníženie) ceny vyvolá menej ako jednopercentné zníženie (zvýšenie) dopytu.

Príklad 5.6.1 *Predpokladajme, že pri cene p určitej komodity je dopyt po nej vyjadrený vzťahom $q = 240 - 2p$, pre $0 < p < 120$.*

a) *Vyjadrime elasticitu dopytu ako funkciu premennej p.*

b) *Vypočítajme elasticitu dopytu pre $p = 100$. Interpretujme výsledok.*

c) *Vypočítajme elasticitu dopytu pre $p = 50$. Interpretujme výsledok.*

d) *Pri akej cene je elasticita dopytu rovná 1? Aký je ekonomický význam tejto ceny?*

Riešenie.

a) Elasticita funkcie dopytu:

$$E_D = -\frac{D'(p_0)}{D(p_0)} \cdot p_0 = -\frac{-2}{240 - 2p} \cdot p = \frac{p}{120 - p}.$$

b) Elasticita pre cenu $p = 100$:

$$E_D(100) = \frac{100}{120 - 100} = 5.$$

Funkcia dopytu je elastická, čo znamená, že 1% nárast ceny vyvolá 5% pokles dopytu.

c) Elasticita pre cenu $p = 50$:

$$E_D(50) = \frac{50}{120 - 50} \doteq 0{,}71.$$

Funkcia dopytu je neelastická, čo znamená, že 1% nárast ceny vyvolá 0,71% pokles dopytu.

d) Vyriešime rovnicu $E_D = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{p}{120 - p} &= 1 \\ p &= 120 - p \\ p &= 60. \end{aligned}$$

Funkcia dopytu má jednotkovú elasticitu pri cene $p = 60$, čo znamená, že 1% nárast ceny vyvolá 1% pokles dopytu. ♡

Elasticita funkcie dopytu má vplyv na funkciu celkových príjmov. Platí totiž:

$$\begin{aligned} R(p) &= p \cdot q = p \cdot D(p) \\ \Longrightarrow \quad R'(p) &= D(p) + p \cdot D'(p) = D(p) \left[1 + p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)} \right] \\ &= D(p) \left[1 - E_D \right]. \end{aligned}$$

Vplyv elasticity dopytu na celkové príjmy:

1. Ak $E_D = 1 \quad \Longrightarrow \quad R'(p) = 0$,
   t. j. celkové príjmy sa so zmenou ceny nemenia - **neutrálny dopyt**.

2. Ak $E_D < 1 \quad \Longrightarrow \quad R'(p) > 0$,
   t. j. celkové príjmy rastú s rastúcou cenou - **neelastický dopyt**.

3. Ak $E_D > 1 \quad \Longrightarrow \quad R'(p) < 0$,
   t. j. celkové príjmy klesajú s rastúcou cenou - **elastický dopyt**.

Na rozdiel od funkcie dopytu je funkcia ponuky rastúca, elasticita funkcie ponuky vyjadruje, o koľko percent sa zvýši ponuka pri zvýšení ceny o 1 percento.

Definícia 5.8 *Nech $q = S(p)$ je funkciou ponuky, kde $p > 0$ je cena výrobku na trhu a $q > 0$ je ponuka tohto výrobku. Nech existuje $S'(p)$ pre $p \in (0, \infty)$. Číslo $\dfrac{S'(p_0)}{S(p_0)} \cdot p_0$, ktoré vyjadruje o koľko percent sa zvýši ponuka $S(p)$ výrobku pri zvýšení ceny p_0 o 1 %, nazývame **elasticitou funkcie ponuky v bode** p_0.*

Zápis:

$$E_S = \eta(S(p_0)) = \frac{S'(p_0)}{S(p_0)} \cdot p_0.$$

5.7 Úlohy

5.1 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 384\sqrt[3]{L}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 512 hodín. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 pracovná hodina navyše.

5.2 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 441\sqrt[3]{L}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 343 hodín. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 pracovná hodina navyše.

5.3 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 540\sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 tisíc eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 000 eur navyše.

5.4 Podľa štúdie produktivity práce v podniku, priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 7.00 hod., bude mať poskladaných $f(x) = x^3 + 6x^2 + 8x$ výrobkov o x hodín neskôr. Približne koľko výrobkov vyrobí pracovník počas 4. hodiny?

5.5 Predpokladáme, že celkové náklady na výrobu q výrobkov sú $C(q)$. Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu daného výrobku.

a) $C(q) = 3q^2 + 6q + 50$, náklady na 15. výrobok,

b) $C(q) = q^2 + 30q + 750$, náklady na 11. výrobok,

c) $C(q) = q^2 + 34q + 950$, náklady na 13. výrobok,

d) $C(q) = q^2 + 38q + 950$, náklady na 15. výrobok,

e) $C(q) = 2q^2 + 16q + 50$, náklady na 9. výrobok,

f) $C(q) = 3q^2 + 16q + 50$, náklady na 8. výrobok,

g) $C(q) = 4q^2 + 16q + 50$, náklady na 7. výrobok,

h) $C(q) = 5q^3 - 30q + 320$, náklady na 4. výrobok,

i) $C(q) = 4q^3 - 30q + 320$, náklady na 5. výrobok,

j) $C(q) = 3q^3 - 30q + 320$, náklady na 6. výrobok.

5.6 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 441\sqrt[3]{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. O koľko percent vzrastie produkcia, ak sa kapitálová investícia zvýši o 1 percento?

5.7 $D(p) = 1\,225 - p^2$ pre $0 < p < 35$ eur je rovnica dopytu určitého tovaru.

a) Vyjadrite elasticitu dopytu ako funkciu ceny tovaru p.

b) Vypočítajte elasticitu dopytu pri cene $p = 15$ eur.

c) Pri akej cene je elasticita dopytu rovná 1?

5.8 $D(p) = 1\,500 - 0{,}2p^2$ pre $0 < p < 50\sqrt{3}$ eur je rovnica dopytu určitého tovaru.

a) Vyjadrite elasticitu dopytu ako funkciu ceny tovaru p.

b) Vypočítajte elasticitu dopytu pri cene $p = 60$ eur.

c) Pri akej cene je elasticita dopytu rovná 1?

5.9 Rovnica dopytu určitého tovaru je $D(p) = 1\,080 - 0{,}1p^2$ pre $0 < p < 60\sqrt{3}$ eur.

a) Určte, kde je dopyt elastický, neelastický a kde má jednotkovú elasticitu vzhľadom na cenu.

b) Využite výsledok a) na to, aby ste určili intervaly rastu a klesania funkcie celkových príjmov $R(p)$ a cenu, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

c) Vyjadrite explicitne funkciu celkových príjmov a použite prvú deriváciu na určenie intervalov rastu a klesania a určenie ceny, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

5.10 Rovnica dopytu určitého tovaru je $D(p) = 1\,500 - 0{,}2p^2$ pre $0 < p < 50\sqrt{3}$ eur.

a) Určte, kde je dopyt elastický, neelastický a kde má jednotkovú elasticitu vzhľadom na cenu.

b) Využite výsledok a) na to, aby ste určili intervaly rastu a klesania funkcie celkových príjmov $R(p)$ a cenu, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

c) Vyjadrite explicitne funkciu celkových príjmov a použite prvú deriváciu na určenie intervalov rastu a klesania a určenie ceny, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

5.11 Predajca športových potrieb predáva cyklistické rukavice po 6 eur za pár. Dopyt po tomto type rukavíc vzhľadom na predajnú cenu odhadol funkciou $D(p) = 1\,000 - 2p^3$ kusov pre $0 < p < \sqrt[3]{500}$ eur. Čo odporúčate majiteľovi predajne, zvýšiť alebo znížiť cenu?

5.12 Predajca športových potrieb predáva cyklistické okuliare po 8 eur za kus. Dopyt po tomto type okuliarov vzhľadom na predajnú cenu odhadol funkciou $D(p) = 4\,000 - p^3$ kusov pre $0 < p < 10\sqrt[3]{4}$ eur. Čo odporúčate majiteľovi predajne, zvýšiť alebo znížiť cenu?

Výsledky:

5.1 Nárast produkcie o 2 jednotky.

5.2 Nárast produkcie o 3 jednotky.

5.3 Nárast produkcie o 10 jednotiek.

5.4 Vyrobí 104 výrobkov.

5.5

a) 90 eur,
b) 50 eur,
c) 58 eur,
d) 66 eur,
e) 48 eur,
f) 58 eur,
g) 64 eur,
h) 105 eur,
i) 162 eur,
j) 195 eur.

5.6 o 0,33 %

5.7

a) $E_D(p) = \dfrac{2p^2}{1\ 225 - p^2}$,

b) $E_D(15) = 0{,}45$,

c) $p = 20{,}21$ eur.

5.8

a) $E_D(p) = \dfrac{0{,}4p^2}{1\ 500 - 0{,}2p^2}$,

b) $E_D(60) = 1{,}846$,

c) $p = 50$ eur.

5.9

a) $(0, 60)$ neelastický; $(60, 60\sqrt{3})$ elastický; 60 jednotková elasticita,

b) $(0, 60)$ rastúce; $(60, 60\sqrt{3})$ klesajúce; 60 maximálne,

c) $(0, 60)$ rastúce; $(60, 60\sqrt{3})$ klesajúce; 60 maximálne.

5.10

a) $(0, 50)$ neelastický; $(50, 50\sqrt{3})$ elastický; 50 jednotková elasticita,

b) $(0, 50)$ rastúce; $(50, 50\sqrt{3})$ klesajúce; 50 maximálne,

c) $(0, 50)$ rastúce; $(50, 50\sqrt{3})$ klesajúce; 50 maximálne.

5.11 $E_D(6) = 2{,}28$, znížiť cenu

5.12 $E_D(8) = 0{,}44$, zvýšiť cenu

6 Priebeh funkcie

6.1 Cieľ

Oboznámiť s využitím derivácie pri vyšetrovaní vlastností funkcií.

6.2 Otázky

- Sformulujte postačujúcu podmienku monotónnosti funkcie.
- Definujte lokálne extrémy funkcie.
- Sformulujte nutnú podmienku existencie lokálneho extrému.
- Definujte stacionárny bod a kritické body funkcie.
- Sformulujte postačujúcu podmienku existencie lokálneho extrému.
- Uveďte postup na určenie lokálnych extrémov funkcie pomocou monotónnosti funkcie.
- Uveďte postup na určenie globálnych extrémov funkcie.
- Definujte konvexnosť a konkávnosť funkcie.
- Definujte inflexný bod funkcie.
- Sformulujte postačujúcu podmienku konvexnosti a konkávnosti funkcie.
- Definujte exponenciálny rast.
- Definujte exponenciálne klesanie.
- Definujte krivku učenia sa.
- Definujte logistickú krivku.

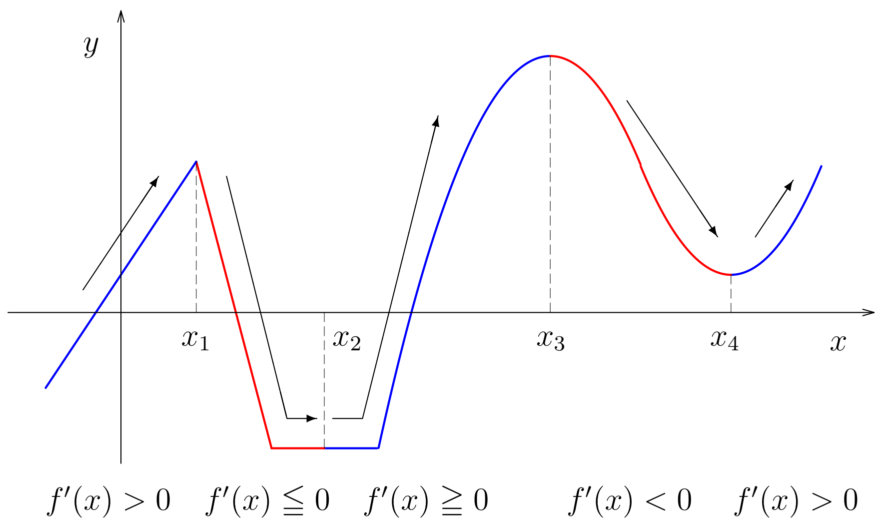
6.3 Monotónnosť funkcie a lokálne extrémy

Monotónnosť funkcie, ktorú sme definovali v úvodnej kapitole, sa dá skúmať pomocou derivácie (viď Obr. 22), ak táto existuje.

Veta 6.1 (Postačujúca podmienka monotónnosti)
Nech funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $I \subset < a, b >$ a má deriváciu rovnakého znamienka na intervale (a, b). Potom

- *ak $f'(x) > 0$, tak f je rastúca na I,*

- *ak $f'(x) < 0$, tak f je klesajúca na I,*
- *ak $f'(x) \geqq 0$, tak f je neklesajúca na I,*
- *ak $f'(x) \leqq 0$, tak f je nerastúca na I.*



Obr. 22: Monotónnosť funkcie pomocou derivácie

Príklad 6.3.1 *Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = x^4 - 4x^3$ rýdzomonotónna.*

Riešenie. Funkcia je definovaná na množine všetkých reálnych čísel. Vypočítame jej deriváciu a určíme jej znamienka:

$$\begin{aligned} f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2 \cdot (x-3) \quad &> \quad 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 3 \\ &< \quad 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3 \ \wedge \ x \neq 0 \end{aligned}$$

Funkcia je rastúca na intervale $(3, \infty)$, klesajúca na množine $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$.
♡

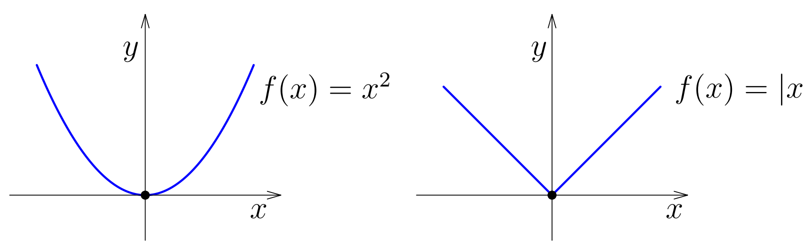
Definícia 6.1 *Hovoríme, že* ***funkcia*** *$f(x)$* ***má v bode*** *$x_0 \in (a, b)$* ***lokálny extrém****, ak existuje také prstencové okolie $O^{\circ}(x_0)$, že pre všetky $x \in O^{\circ}(a)$ platí jeden z prípadov:*

- $f(x) \leqq f(x_0)$ *lokálne maximum v bode x_0,*
- $f(x) \geqq f(x_0)$ *lokálne minimum v bode x_0,*
- $f(x) < f(x_0)$ *ostré lokálne maximum v bode x_0,*
- $f(x) > f(x_0)$ *ostré lokálne minimum v bode x_0.*

Veta 6.2 (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému)
Nech existuje derivácia $f'(x_0)$. Ak má funkcia $f(x)$ v bode x_0 lokálny extrém, tak $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 6.1 *Obrátené tvrdenie neplatí. Ak $f'(x_0) = 0$, to neznamená, že má funkcia v bode x_0 lokálny extrém. Na druhej strane z tohto tvrdenia vyplýva, že funkcia môže mať lokálny extrém aj v bode, kde nemá deriváciu.*

Definícia 6.2 *Bod x_0, v ktorom má funkcia deriváciu, a platí $f'(x_0) = 0$, nazývame* ***stacionárnym bodom funkcie*** *$f(x)$. Stacionárne body a body, v ktorých funkcia nemá deriváciu, budeme nazývať* ***kritickými bodmi funkcie*** *$f(x)$ (viď Obr. 23).*



Obr. 23: Kritické body funkcie

Na určenie extrému funkcie v stacionárnom bode môžeme použiť vyššie derivácie funkcie. Najčastejšie postačuje už druhá derivácia.

Veta 6.3 (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému)
Nech funkcia $f(x)$ má v bode $x_0 \in (a, b)$ deriváciu $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, pre $n \geqq 2$. Nech $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Potom platí

1. *Ak je n párne a*
   - *$f^{(n)}(x_0) > 0$, tak má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne minimum,*
   - *$f^{(n)}(x_0) < 0$, tak má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne maximum.*
2. *Ak je n nepárne, tak funkcia f nemá v bode x_0 lokálny extrém (v x_0 je inflexia).*

Príklad 6.3.2 *Nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x) = x^4 - 4x^3$.*

Riešenie. Funkcia je definovaná na množine všetkých reálnych čísel. Vypočítame jej prvú deriváciu a určíme stacionárne body:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2 \cdot (x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \ \vee \ x = 0.$$

Vypočítame druhú deriváciu funkcie a určíme jej hodnotu v stacionárnych bodoch:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x \cdot (x-2) \quad \Rightarrow \quad f''(3) = 36 > 0.$$

Funkcia nadobúda v bode $x = 3$ lokálne minimum. V prípade bodu $x = 0$ je $f''(0) = 0$. Vypočítame teda tretiu deriváciu, kde je hodnota rôzna od nuly:

$$f'''(x) = 24x - 24 \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -24.$$

Keďže sa jedná o tretiu deriváciu, funkcia nemá v bode $x = 0$ extrém. ♡

V kritickom bode často využívame zmenu monotónnosti funkcie na určenie extrému. Čo v prípade, že má funkcia v okolí bodu x_0 deriváciu, znamená zmenu znamienka derivácie v tomto bode.

Určenie extrému pomocou monotónnosti funkcie

Vzhľadom na znamienko prvej derivácie pred bodom x_0 a za bodom x_0 môžu nastať tieto prípady:

1. ak má derivácia rovnaké znamienko, tak funkcia nemá v bode x_0 lokálny extrém,

2. ak derivácia mení znamienko z kladného na záporné, tak funkcia má v bode x_0 lokálne maximum,

3. ak derivácia mení znamienko zo záporného na kladné, tak funkcia má v bode x_0 lokálne minimum.

V aplikačných úlohách potrebujeme často určiť najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie na nejakom intervale. Hľadáme tzv. absolútne (globálne) maximum, resp. minimum funkcie.

Určenie globálnych extrémov funkcie na uzavretom intervale

Ak má funkcia $f(x)$ na intervale $< a, b >$ lokálne extrémy len v bodoch $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in < a, b >$, tak pre globálne extrémy funkcie na intervale $< a, b >$ platí:

1. **globálne minimum**

$$\min_{x \in <a,b>} f(x) = \min\{f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(a),\ f(b)\},$$

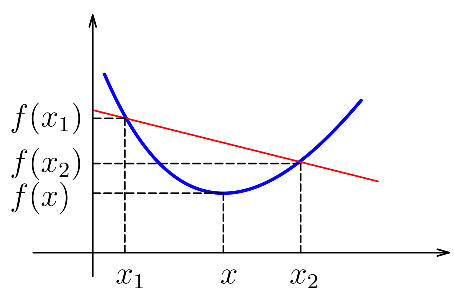
2. **globálne maximum**

$$\max_{x \in <a,b>} f(x) = \max\{f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(a),\ f(b)\}.$$

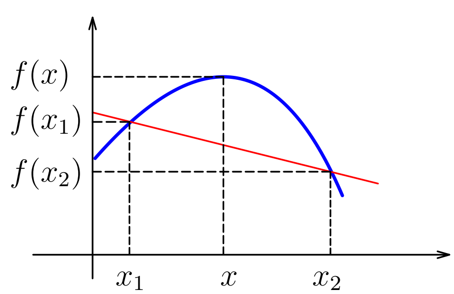
6.4 Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Definícia 6.3 *Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na intervale (a, b). Hovoríme, že* ***funkcia*** *$f(x)$* ***je konvexná (konkávna)*** *na (a, b), ak pre každú trojicu bodov $x_1,\ x,\ x_2 \in (a, b)$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod (nad) priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$ alebo leží na tejto priamke.*

Definícia 6.4 *Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na intervale (a, b). Hovoríme, že* ***funkcia*** *$f(x)$* ***je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna)*** *na (a, b), ak pre každú trojicu bodov $x_1,\ x,\ x_2 \in (a, b)$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod (nad) priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$ (viď Obr. 24 a Obr. 25).*



Obr. 24: Rýdzo konvexná funkcia



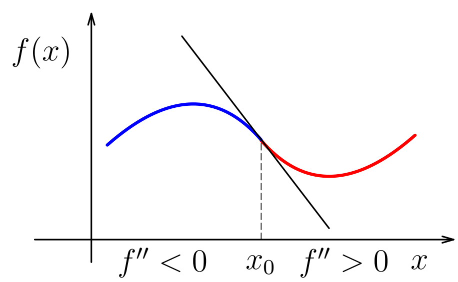
Obr. 25: Rýdzo konkávna funkcia

Veta 6.4 (Postačujúca podmienka konvexnosti/konkávnosti)
Nech je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale $I \subset < a, b >$ a má druhú deriváciu rovnakého znamienka na intervale (a, b). Potom platí

- *ak $f''(x) > 0$, tak $f(x)$ je rýdzo konvexná na I,*
- *ak $f''(x) < 0$, tak $f(x)$ je rýdzo konkávna na I,*

- *ak $f''(x) \geqq 0$, tak $f(x)$ je konvexná na I,*
- *ak $f''(x) \leqq 0$, tak $f(x)$ je konkávna na I.*

Definícia 6.5 *Hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode $x_0 \in I \subset< a, b >$ **inflexiu**, ak je funkcia v nejakom ľavom okolí bodu x_0 rýdzo konkávna (rýdzo konvexná) a v nejakom pravom okolí bodu x_0 rýdzo konvexná (rýdzo konkávna). Bod $[x_0, f(x_0)]$ nazývame **inflexným bodom funkcie** $f(x)$ (viď Obr. 26).*



Obr. 26: Inflexný bod

Veta 6.5 (Nutná podmienka existencie inflexného bodu)
Nech existuje druhá derivácia $f''(x_0)$ funkcie $f(x)$ v x_0. Ak má funkcia $f(x)$ v x_0 inflexiu, tak $f''(x_0) = 0$.

Obrátené tvrdenie neplatí. Ak $f''(x_0) = 0$, to neznamená, že v x_0 má funkcia inflexiu.

Príklad 6.4.1 *Vyšetrime konvexnosť/konkávnosť a nájdime inflexné body funkcie $f(x) = x^4 - 4x^3$.*

Riešenie. Vypočítame druhú deriváciu funkcie a jej nulové body:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x \cdot (x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \ \vee x = 0.$$

Metódou nulových bodov určíme znamienko druhej derivácie na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lcclcl} f''(x) & > & 0 & \text{konvexná} & \Leftrightarrow & x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty). \\ f''(x) & < & 0 & \text{konkávna} & \Leftrightarrow & x \in (0, 2). \end{array}$$

Inflexnými bodmi funkcie sú body $[0, 0]$ a $[2, -16]$.

♡

6.5 Priebeh funkcie

S využitím znalostí z predchádzajúcich kapitol a hlavne použitím derivácií vieme vyšetriť vlastnosti danej funkcie a nakresliť jej graf.

Algoritmus na určenie priebehu funkcie:

1. Nájdeme $D(f)$ (príp. $H(f)$).
2. Určíme priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami.
3. Vyšetríme párnosť - nepárnosť funkcie.
4. Overíme periodičnosť funkcie.
5. Stanovíme body nespojitosti funkcie.
6. Nájdeme asymptoty grafu funkcie.
7. Vypočítame stacionárne body a intervaly, na ktorých je funkcia rýdzomonotónna.
8. Rozhodneme o lokálnych (príp. globálnych) extrémoch funkcie.
9. Určíme intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, resp. konkávna.
10. Stanovíme inflexné body funkcie.
11. Nakreslíme graf funkcie.

Príklad 6.5.1 *Vyšetrime priebeh a nakreslime graf funkcie* $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Riešenie. Počas výpočtov budeme postupne získavať významné body grafu funkcie, ktoré nám výrazne pomôžu pri jeho kreslení.

1. $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočítame priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami. Graf pretína os y, ak $x = 0$, dostávame teda prvý bod $P_1 = [0, 0]$. Graf pretína os x, ak $y = 0$ a to je práve vtedy, ak $f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3 \cdot (x - 4) = 0$, teda $x = 0$ alebo $x = 4$. Dostávame ďalší významný bod $P_2 = [4, 0]$.
3. Funkcia je definovaná na celom $\mathbb{R}$ môžeme teda pre každé x nájsť $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3$. Keďže sa tento výraz nerovná ani $f(x)$ ani $-f(x)$, funkcia nie je ani párna ani nepárna.
4. Jedná sa o polynomickú funkciu, ktorá je neperiodická.
5. Funkcia je definovaná na celom $\mathbb{R}$, nemá body nespojitosti.
6. Keďže funkcia nemá body nespojitosti, nemá jej graf asymptoty bez smernice. Asymptoty so smernicou určíme pomocou vzťahov, ktoré sme uviedli pri limitách. Nech priamka $y = k_1 x + q_1$ je asymptota grafu funkcie f pre bod $+\infty$, tak

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 4x^3}{x} = \infty.$$

Nejedná sa o konečnú hodnotu, funkcia nemá asymptotu so smernicou pre bod $+\infty$. Rovnako je to aj pre bod $-\infty$.

7.-8. Príklad 6.3.1 riešil monotónnosť tejto funkcie a príklad 6.3.2 jej stacionárne body a lokálne extrémy. Zhrnieme si tieto výsledky do tabuľky:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-	$\searrow$	l. min.	$\nearrow$

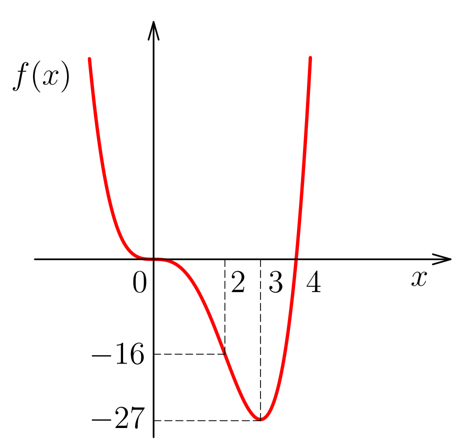
Funkcia nadobúda v bode $x = 3$ lokálne minimum $f(3) = -27$, teda $P_3 = [3, -27]$.

9.-10. Príklad 6.4.1 riešil konvexnosť, resp. konkávnosť tejto funkcie. Zhrnieme si to opäť do tabuľky:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	bod inf.	$\cap$	bod inf.	$\cup$

Funkcia nadobúda v bode $x = 2$ funkčnú hodnotu $f(2) = -16$, teda $P_4 = [2, -16]$.

11. Nakoniec nakreslíme graf tejto funkcie (viď Obr. 27).



Obr. 27: Priebeh funkcie $y = x^4 - 4x^3$

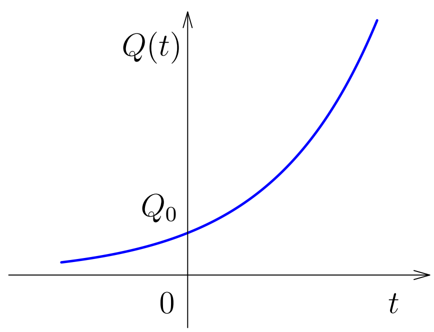
♡

6.6 Exponenciálne modely

Postup, ktorý sme si ukázali pri vyšetrovaní priebehu funkcie, môžeme použiť na funkcie, ktoré súborne označujeme pojmom exponenciálne modely. Niektoré z nich, vrátane možností ich použitia, si teraz predstavíme.

1. Exponenciálny rast

Definícia 6.6 *Nech* $Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{kt}$, *kde* k, $Q_0 \in (0, \infty)$. *Potom hovoríme, že* ***funkcia*** $Q(t)$ ***rastie exponenciálne*** *(viď Obr. 28).*



Obr. 28: Exponenciálny rast

Vlastnosti tejto funkcie zhrnieme do bodov:

1. $D(Q) = \mathbb{R}$ a $H(Q) = (0, \infty)$,
2. $Q(0) = Q_0$,
3. $Q'(t) = k \cdot Q_0 \cdot \mathrm{e}^{kt} = k \cdot Q(t)$,
   t. j. miera rastu funkcie je priamo úmerná pôvodnej funkcii s konštantou úmernosti k,
4. $Q'(t) > 0$, teda $Q(t)$ je rastúca na $D(f)$,
5. $k = \dfrac{Q'(0)}{Q_0}$.

Niektoré z možností použitia funkcie exponenciálneho rastu:

- rast populácie (počtu ochorení, počtu baktérií) bez vonkajších vplyvov,
- spojité úrokovanie.

Príklad 6.6.1 *Biológovia zistili, že za ideálnych podmienok, počet baktérií rastie v kultúre exponenciálne. Predpokladajme, že na počiatku bolo 2 000 baktérii v určitej kultúre a že po 20 minútach ich bolo 6 000. Koľko baktérií bude po 1 hodine?*

Riešenie. Funkcia, ktorá bude vyjadrovať počet baktérií po t minútach, bude mať tvar $Q(t) = Q_0 \cdot e^{kt}$. Postupne použijeme údaje o rastúcom počte baktérií s rastúcim časom.

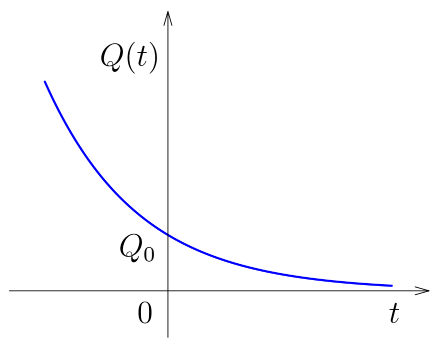
$$\begin{aligned}
& Q_0 &=& \; Q(0) = 2\ 000 \\
\Longrightarrow \; & Q(20) &=& \; 2\ 000 \cdot e^{k\cdot 20} = 6\ 000 \\
\Longleftrightarrow \; & e^{k\cdot 20} &=& \; 3 \\
\Longrightarrow \; & Q(60) &=& \; 2\ 000 \cdot e^{k\cdot 60} = 2\ 000 \cdot (e^{k\cdot 20})^3 = 2\ 000 \cdot 3^3 = 54\ 000.
\end{aligned}$$

Počet baktérií po uplynutí jednej hodiny bude 54 000.

♡

2. Exponenciálne klesanie

Definícia 6.7 *Nech $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-kt}$, kde k, $Q_0 \in (0, \infty)$. Potom hovoríme, že **funkcia** $Q(t)$ **klesá exponenciálne** (viď Obr. 29).*



Obr. 29: Exponenciálne klesanie

Vlastnosti tejto funkcie zhrnieme do bodov:

1. $D(Q) = \mathbb{R}$ a $H(Q) = (0, \infty)$,
2. $Q(0) = Q_0$,
3. $Q'(t) = -k \cdot Q_0 \cdot e^{-kt} = -k \cdot Q(t)$,
   t. j. miera klesania funkcie je priamo úmerná pôvodnej funkcii s konštantou úmernosti k,
4. $Q'(t) < 0$, teda $Q(t)$ je klesajúca na $D(f)$,
5. $k = -\dfrac{Q'(0)}{Q_0}$,
6. $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = 0$.

Niektoré z možností použitia funkcie exponenciálneho klesania:

- rozpad rádioaktívnych látok,
- predaj tovaru, ak sa preruší reklama.

Príklad 6.6.2 *Polčas rozpadu rádioaktívnej substancie je čas potrebný na rozpad polovice pôvodnej hmotnosti. Množstvo rádioaktívnej substancie, ktorá zostane po t rokoch, je dané funkciou* $Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}003t}$. *Nájdime polčas rozpadu substancie.*

Riešenie. Množstvo rádioaktívnej substancie vyjadrenej funkciou $Q(t)$ sa rovná polovici pôvodného množstva.

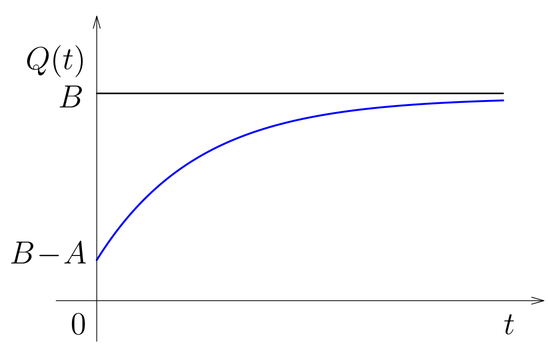
$$\begin{aligned} Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}003t} &= \tfrac{Q(0)}{2} \\ \mathrm{e}^{-0{,}003t} &= \tfrac{1}{2} \\ \iff \qquad t &= \tfrac{1\,000}{3} \ln 2 \doteq 231{,}05. \end{aligned}$$

Polčas rozpadu je 231,05 rokov.

♡

3. Krivka učenia sa

Definícia 6.8 *Nech* $Q(t) = B - A \cdot \mathrm{e}^{-kt}$, *kde* A, B, $k \in (0, \infty)$, $B > A$. *Graf funkcie* $Q(t)$ *(viď Obr. 30) nazývame* ***krivka učenia sa***.



Obr. 30: Krivka učenia sa

Vlastnosti tejto funkcie zhrnieme do bodov:

1. $D(Q) = \mathbb{R}$,
2. $Q(0) = B - A$,
3. $Q'(t) = k \cdot A \cdot \mathrm{e}^{-kt} > 0$, teda $Q(t)$ je rastúca na $D(f)$,
4. $Q''(t) = -k^2 \cdot A \cdot \mathrm{e}^{-kt} < 0$, teda $Q(t)$ je konkávna na $D(f)$,
5. $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = B$, teda funkcia je zhora ohraničená konštantou B.

Funkciu, ktorej grafom je krivka učenia sa, používame pri skúmaní výkonnosti pri rôznych činnostiach (učenie sa, práca, ...). Konštanta B môže predstavovať kapacitu mozgu alebo maximálny výkon.

Príklad 6.6.3 *Podľa štúdie efektívnosti práce vo výrobnej firme platí pre priemerného nového pracovníka nasledujúci odhad výkonnosti:*

počet mesiacov praxe	*0*	*6*
hodinová výkonnosť	*300*	*410*

Výkonnosť v závislosti podľa počtu mesiacov praxe sa riadi funkciou $Q(t) = 500 - A \cdot \mathrm{e}^{-kt}$. *Nájdime neznáme koeficienty funkcie* $Q(t)$.

Riešenie. Dosadíme ako zvyčajne najskôr hodnotu 0, aby sme eliminovali konštantu k a mohli vypočítať konštantu A.

$$\begin{aligned} & Q(0) = 500 - A\,\mathrm{e}^0 &= \; & 300 \\ \Longrightarrow \quad & A &= \; & 200. \end{aligned}$$

Funkcia má po dosadení konštanty A tvar $Q(t) = 500 - 200\,\mathrm{e}^{-kt}$. Použijeme údaje o výkonnosti po šiestich mesiacoch praxe:

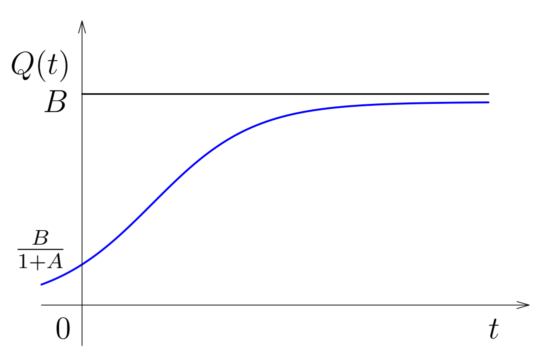
$$\begin{aligned} & Q(6) = 500 - 200\,\mathrm{e}^{-k6} &= \; & 410 \\ \Longrightarrow \quad & k &= \; & -\tfrac{1}{6} \cdot \ln \tfrac{9}{20} \doteq 0{,}13308. \end{aligned}$$

Hľadaná funkcia má tvar $Q(t) = 500 - 200\,\mathrm{e}^{-0{,}13308t}$.

♡

4. Logistická krivka

Definícia 6.9 *Nech* $Q(t) = \dfrac{B}{1 + A \cdot \mathrm{e}^{-Bkt}}$, *kde* A, B, $k \in (0, \infty)$. *Graf funkcie* $Q(t)$ *(viď Obr. 31) nazývame* ***logistická krivka*** *(sigmoidálna krivka).*



Obr. 31: Logistická krivka

Vlastnosti tejto funkcie zhrnieme do bodov:

1. $D(Q) = \mathbb{R}$,
2. $Q(0) = \frac{B}{1+A}$,
3. $Q'(t) = \dfrac{B^2 \cdot k \cdot A \cdot \mathrm{e}^{-Bkt}}{(1 + A \cdot \mathrm{e}^{-Bkt})^2} > 0$, teda $Q(t)$ je rastúca na $D(f)$,
4. $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = B$, teda funkcia je zhora ohraničená konštantou B,
5. $\lim\limits_{t\to-\infty} Q(t) = 0$, teda funkcia je zdola ohraničená konštantou 0.

Niektoré z možností použitia funkcie, ktorej grafom je logistická krivka:

- rast populácie pod vonkajšími vplyvmi,
- šírenie sa epidémie.

Príklad 6.6.4 *Odhaduje sa, že o t rokov odteraz bude počet obyvateľov krajiny $P(t) = \dfrac{20}{2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}06t}}$ miliónov.*

a) *Aký je súčasný počet obyvateľov?*

b) *Ak by trend pokračoval podľa uvedenej funkcie, k akej hranici by sa priblížil celkový počet obyvateľov?*

c) *Koľko obyvateľov bude mať krajina o 15 rokov?*

Riešenie.

a) Aby sme vypočítali súčasný stav počtu obyvateľov, dosadíme $t = 0$:
$$P(0) = \frac{20}{2+3} = 4.$$
Súčasný počet obyvateľov je 4 milióny.

b) Hľadáme počet obyvateľov v ďalekej budúcnosti:
$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{20}{2 + 3\,\mathrm{e}^{-0{,}06t}} = \frac{20}{2} = 10.$$
Počet obyvateľov krajiny sa priblíži k hranici 10 miliónov.

c) Dosadíme hodnotu $t = 15$, aby sme určili počet obyvateľov po 15 rokoch:
$$P(15) = \frac{20}{2 + 3\,\mathrm{e}^{-0{,}06\cdot 15}} \doteq 6{,}2117.$$
Predpokladaný počet obyvateľov krajiny po 15 rokoch bude 6,2117 miliónov.

♡

6.7 Úlohy

6.1 Nájdite intervaly rastu, resp. klesania a lokálne extrémy funkcie $f(x)$

a) $f(x) = \dfrac{3-x^2}{x+2}$,

b) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x+\frac{3}{2}}$,

c) $f(x) = \dfrac{8-x^2}{x+3}$,

d) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x+\frac{5}{2}}$,

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$,

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$,

g) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$,

h) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$,

i) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x}$,

j) $f(x) = \dfrac{x^2+16}{x}$.

6.2 Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia $f(x)$ rýdzomonotónna a určte jej lokálne extrémy.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$,

b) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$,

c) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$,

d) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 100$.

6.3 Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia $f(x)$ rýdzomonotónna a určte jej lokálne extrémy.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$,

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

6.4 Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia $f(x)$ rýdzomonotónna a určte jej lokálne extrémy.

a) $f(x) = \ln(4-x^2)$,

b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$,

c) $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$.

d) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

6.5 Nájdite intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a inflexné body funkcie $f(x)$

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 24x + 12$,

b) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 48x^2 + 60x - 24$,

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 10x - 10$,

d) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 12x - 24$,

e) $f(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 12x + 24$,

f) $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 4x + 2$,

g) $f(x) = -x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 12x - 12$,

h) $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 72x^2 - 5x - 3$,

i) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^3 + 36x^2 - \frac{3}{2}x + 1$,

j) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 15x^2 - 6x - 5$,

k) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$,

l) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$.

6.6 Vyšetrite konvexnosť/konkávnosť a nájdite inflexné body funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$,

b) $f(x) = \dfrac{10x}{(2+x)^2}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$,

d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

6.7 Vyšetrite konvexnosť/konkávnosť a nájdite inflexné body funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = \ln(4-x^2)$,

b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$,

c) $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$,

d) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

6.8 Vyšetrite priebeh a nakreslite graf funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$,

b) $f(x) = \dfrac{-x^3+x^2+4}{x^2}$,

c) $f(x) = x\ln x$,

d) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

6.9 V roku 2 000 bol počet obyvateľov krajiny 60 miliónov. V roku 2 005 dosiahol počet 90 miliónov. Koľko obyvateľov bude v roku 2 015, ak bude počet obyvateľov rásť exponenciálne?

6.10 Polčas rozpadu prvku Rádium je 1 690 rokov. Ako dlho potrvá, kým z 50 gramovej vzorky ostane 5 gramov?

6.11 Poštový úradník po t mesiacoch praxe vytriedi $Q(t) = 700 - 400\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ listov za hodinu

a) Koľko listov vytriedi nový zamestnanec za hodinu?

b) Koľko listov vytriedi zamestnanec po 6 mesačných skúsenostiach za hodinu?

c) Koľko listov bude zamestnanec schopný vytriediť za hodinu v neohraničenej budúcnosti?

6.12 Podľa zdravotných záznamov t týždňov po vypuknutí ochorenia infekčnej žltačky bol počet ochorení $f(t) = \dfrac{80}{1 + 9 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}4t}}$

a) Koľko ochorení infekčnej žltačky bolo zaznamenaných na začiatku?

b) Ak by trend pokračoval podľa uvedenej funkcie, k akej hranici by sa priblížil celkový počet ochorení?

c) Koľko ochorení infekčnej žltačky bolo zaznamenaných na konci 3., 5., resp. 7. týždňa?

Výsledky:

6.1

a) klesá na $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$
rastie na $(-3, -2) \cup (-2, -1)$
lokálne minimum 6 v $x = -3$
lokálne maximum 2 v $x = -1$,

b) klesá na $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$
rastie na $(-2, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, -1)$
lokálne minimum 4 v $x = -2$
lokálne maximum 2 v $x = -1$,

c) klesá na $(-\infty, -4) \cup (-2, \infty)$
rastie na $(-4, -3) \cup (-3, -2)$
lokálne minimum 8 v $x = -4$
lokálne maximum 4 v $x = -2$,

d) klesá na $(-\infty, -4) \cup (-1, \infty)$
rastie na $(-4, -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}, -1)$
lokálne minimum 8 v $x = -4$
lokálne maximum 2 v $x = -1$,

e) rastie na $(-\infty, 0) \cup (6, \infty)$
klesá na $(0, 3) \cup (3, 6)$
lokálne minimum 12 v $x = 6$
lokálne maximum 0 v $x = 0$,

f) rastie na $(-\infty, 0) \cup (8, \infty)$
klesá na $(0, 4) \cup (4, 8)$
lokálne minimum 16 v $x = 8$
lokálne maximum 0 v $x = 0$,

g) rastie na $(-\infty, -4) \cup (0, \infty)$
klesá na $(-4, -2) \cup (-2, 0)$
lokálne minimum -8 v $x = -4$
lokálne maximum 0 v $x = 0$,

h) rastie na $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
klesá na $(-2, 0) \cup (0, 2)$
lokálne minimum 4 v $x = 2$
lokálne maximum -4 v $x = -2$,

i) rastie na $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$
klesá na $(-3,0)\cup(0,3)$
lokálne minimum 6 v $x=3$
lokálne maximum -6 v $x=-3$,

j) rastie na $(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$
klesá na $(-4,0)\cup(0,4)$
lokálne minimum 8 v $x=4$
lokálne maximum -8 v $x=-4$.

6.2

a) rastie na $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$
klesá na $(-2,0)$
lokálne minimum -2 v $x=0$
lokálne maximum 2 v $x=-2$,

b) rastie na $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$
klesá na $(2,3)$
lokálne minimum 37 v $x=3$
lokálne maximum 38 v $x=2$,

c) rastie na $(0,1)\cup(1,\infty)$
klesá na $(-\infty,0)$
lokálne minimum 2 v $x=0$,

d) rastie na $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$
klesá na $(0,4)$
lokálne minimum -156 v $x=4$
lokálne maximum 100 v $x=0$.

6.3

a) rastie na $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$
klesá na $(0,2)\cup(2,4)$
lokálne minimum 8 v $x=4$
lokálne maximum 0 v $x=0$,

b) rastie na $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
klesá na $(-1,0)\cup(0,1)$
lokálne minimum 2 v $x=1$
lokálne maximum -2 v $x=-1$,

c) rastie na $(0,2)\cup(2,\infty)$
klesá na $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$
lokálne minimum 0 v $x=0$,

d) rastie na $(-1,1)$
klesá na $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
lokálne minimum $-\frac{1}{2}$ v $x=-1$
lokálne maximum $\frac{1}{2}$ v $x=1$.

6.4

a) rastie na $(-2,0)$
klesá na $(0,2)$
lokálne maximum $\ln 4$ v $x=0$,

b) rastie na (e,∞)
klesá na $(0,1)\cup(1,\mathrm{e})$
lokálne minimum e v $x=\mathrm{e}$, rastie na (e,∞)
klesá na $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$
lokálne minimum 0 v $x=0$,

c) rastie na $(-1,\infty)$
klesá na $(-\infty,-1)$
lokálne minimum $-\mathrm{e}^{-1}$ v $x=-1$,

d) rastie na $(-\infty,1)$
klesá na $(1,\infty)$
lokálne maximum e^{-1} v $x=1$.

6.5

a) konvexná na $(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$
konkávna na $(-2,3)$
inflexné body v $x=-2$ a $x=3$,

b) konvexná na $(-\infty,-4)\cup(2,\infty)$
konkávna na $(-4,2)$
inflexné body v $x=-4$ a $x=2$,

c) konvexná na $(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$
konkávna na $(-2,4)$
inflexné body v $x=-2$ a $x=4$,

d) konvexná na $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$
konkávna na $(-1,3)$
inflexné body v $x=-1$ a $x=3$,

e) konvexná na $(-\infty,-4)\cup(1,\infty)$
konkávna na $(-4,1)$
inflexné body v $x=-4$ a $x=1$,

f) konkávna na $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$
konvexná na $(-1,2)$
inflexné body v $x=-1$ a $x=2$,

g) konkávna na $(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$
konvexná na $(-5,1)$
inflexné body v $x=-5$ a $x=1$,

h) konkávna na $(-\infty,-3)\cup(4,\infty)$
konvexná na $(-3,4)$
inflexné body v $x=-3$ a $x=4$,

i) konkávna na $(-\infty,-3)\cup(4,\infty)$
konvexná na $(-3,4)$
inflexné body v $x=-3$ a $x=4$,

j) konkávna na $(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$
konvexná na $(-5,1)$
inflexné body v $x=-5$ a $x=1$,

k) konkávna na $(-\infty,-1)$
konvexná na $(-1,\infty)$
inflexný bod v $x=-1$,

l) konkávna na $(\frac{1}{3},1)$
konvexná na $(-\infty,\frac{1}{3})\cup(1,\infty)$
inflexné body v $x=\frac{1}{3}$ a $x=1$.

6.6

a) konvexná na $(2,\infty)$
konkávna na $(-\infty,2)$
inflexný bod neexistuje,

b) konvexná na $(4,\infty)$
konkávna na $(-\infty,-2)\cup(-2,4)$
inflexný bod v $x=4$,

c) konvexná na $(-2,2)$
konkávna na $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$
inflexný bod neexistuje,

d) konvexná na $(0,\infty)$
konkávna na $-\infty,0)$
inflexný bod neexistuje.

6.7

a) konkávna na $(-2,2)$
inflexný bod neexistuje,

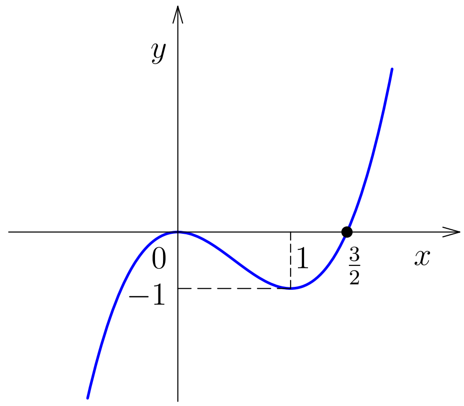
b) konvexná na $(1,\infty)$
konkávna na $(0,1)$
inflexný bod neexistuje,

c) konvexná na $(-2,\infty)$
konkávna na $(-\infty,-2)$
inflexný bod v $x=-2$,

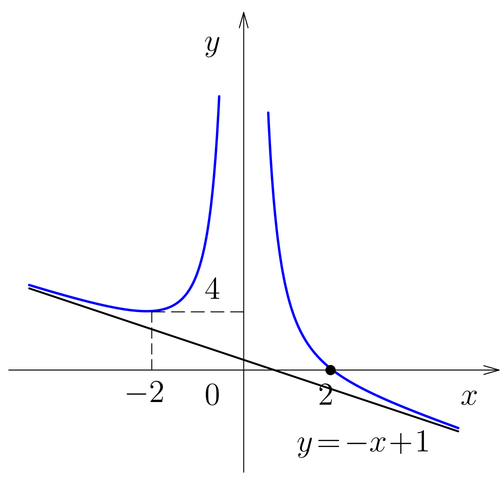
d) konvexná na $(2,\infty)$
konkávna na $(-\infty,2)$
inflexný bod v $x=2$.

6.8

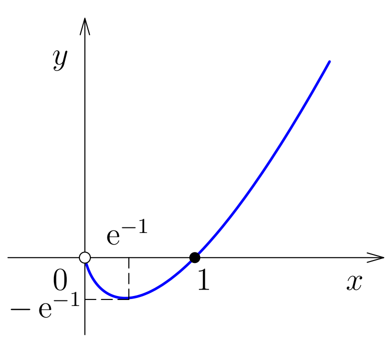
a)



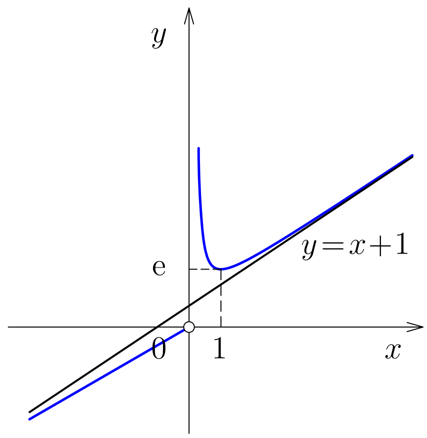
b)



c)



d)



6.9 202,5 miliónov

6.10 5 616,06 rokov

6.11

a) 300, b) 680, c) 700.

6.12

a) 8, b) 80, c) 22, 36, resp. 52.

7 Optimalizácia funkcií ekonomickej analýzy

7.1 Cieľ

Oboznámiť s využitím derivácie pri hľadaní extrémov funkcií ekonomickej analýzy.

7.2 Otázky

- Sformulujte vetu o stacionárnom bode funkcie priemerných nákladov.
- Sformulujte vetu o monotónnosti funkcie priemerných nákladov.
- Sformulujte vetu o monotónnosti priemernej veličiny.
- Sformulujte vetu o maximalizácii celkového zisku.

7.3 Minimalizácia nákladov

Pri optimalizácií výroby máme záujem, aby sme minimalizovali náklady. Ukážeme, že nie je možné, aby sme dosiahli stav, kedy sú minimálne priemerné náklady ako aj celkové náklady.

Veta 7.1 (Stacionárne body funkcie priemerných nákladov)
Nech $TC(x)$ je funkcia celkových nákladov a $AC(x) = \dfrac{TC(x)}{x}$ funkcia priemerných nákladov na výrobu x kusov tovaru. Bod x_0 je stacionárnym bodom funkcie priemerných nákladov práve vtedy, ak sa v bode x_0 priemerné náklady rovnajú marginálnym nákladom.

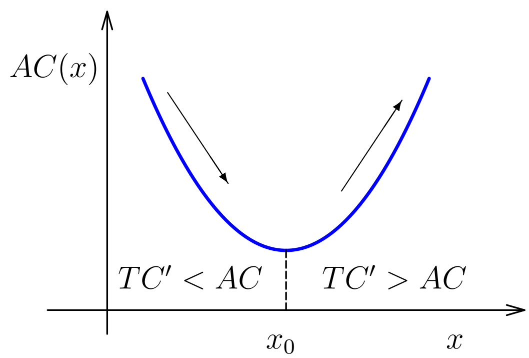
Platí totiž

$$
\begin{aligned}
AC'(x) = \frac{TC'(x)\cdot x - TC(x)}{x^2} = 0 &\iff TC'(x_0)\cdot x_0 - TC(x_0) = 0 \\
&\iff TC'(x_0) = \frac{TC(x_0)}{x_0} \\
&\iff MC(x_0) = AC(x_0).
\end{aligned}
$$

V praxi po spustení výroby nastáva väčšinou stav, kedy sú priemerné náklady pomerne vysoké a postupne klesajú na určitú hodnotu. Následne začnú opäť rásť (viď Obr. 32). Pre funkciu priemerných nákladov platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 7.2 (Monotónnosť funkcie priemerných nákladov)
Nech funkcia $TC(x)$ je spojitá na intervale (a, b). Nech funkcia $AC(x) = \dfrac{TC(x)}{x}$ je definovaná na (a, b). Nech $x_0 \in (a, b)$. Nech funkcia $TC(x)$ má deriváciu na intervale (a, b) a nemení znamienko derivácie na intervale (a, x_0) a nemení znamienko derivácie na intervale (x_0, b). Potom

- *ak $TC'(x) < AC(x)$ pre $x < x_0$, tak $AC(x)$ je klesajúca na (a, x_0),*
- *ak $TC'(x) > AC(x)$ pre $x > x_0$, tak $AC(x)$ je rastúca na (x_0, b),*
- *ak $TC'(x_0) = AC(x_0)$, pričom $TC'(x) < AC(x)$ pre $x < x_0$ a pre $x > x_0$ $TC'(x) > AC(x)$, tak $AC(x)$ má v bode x_0 lokálne minimum.*



Obr. 32: Minimalizácia priemerných nákladov

Príklad 7.3.1 *Predpokladáme, že náklady na výrobu q kusov tovaru sú $C(q) = 3q^2 + q + 48$.*

a) *Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus minimálne?*

b) *Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?*

c) *Nakreslite grafy funkcií priemerných nákladov a marginálnych nákladov v jednom systéme súradníc.*

Riešenie.

a) Zostrojíme funkciu priemerných nákladov a vypočítame jej deriváciu:

$$\begin{aligned}
AC(q) &= \frac{3q^2 + q + 48}{q} \\
\Longrightarrow \quad AC'(q) &= \frac{(6q+1)q - (3q^2 + q + 48)}{q^2} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad (6q+1)q &= 3q^2 + q + 48 \\
\Longleftrightarrow \quad q &= \pm 4.
\end{aligned}$$

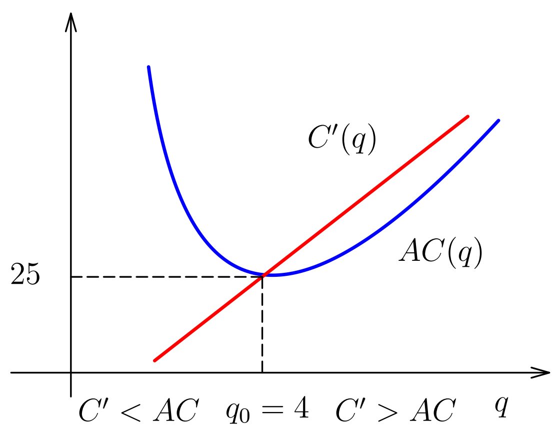
Keďže definičným oborom funkcie priemerných nákladov je množina kladných reálnych čísel, vypočítame hodnotu druhej derivácie v bode $q = 4$. $AC''(q) = \dfrac{96}{q^3}$ a teda $AC''(4) = \dfrac{96}{4^3} > 0$. Priemerné náklady sú minimálne pri výrobe štyroch kusov tovaru.

b) Ak dáme do rovnosti priemerné a marginálne náklady, dostaneme pochopiteľne rovnakú rovnicu ako pri predošlom výpočte:

$$\begin{aligned} MC(q) &= AC(q) \\ \iff \quad 6q+1 &= \frac{3q^2+q+48}{q} \\ \iff \quad q &= \pm 4. \end{aligned}$$

Priemerné náklady sú rovné marginálnym nákladom pri výrobe štyroch kusov tovaru.

c) Načrtneme grafy oboch funkcií do jedného súradného systému (viď Obr. 33).



Obr. 33: Minimalizácia priemerných nákladov - príklad

♡

Poznámka 7.1 *Z predchádzajúcich úvah vyplynulo, že pre stacionárny bod funkcie priemerných nákladov platí:*

$$AC'(x_0) = 0 \iff TC'(x_0) = \frac{TC(x_0)}{x_0}.$$

Ak teda $TC'(x_0) = 0$ (stacionárny bod funkcie celkových nákladov) a súčasne $AC'(x_0) = 0$ (stacionárny bod funkcie priemerných nákladov), tak $TC(x_0) = 0$. Čo znamená, že neexistuje úroveň produkcie $x_0 > 0$, pri ktorej sú minimálne celkové náklady aj priemerné náklady.

Veta 7.2 sa dá jednoducho zovšeobecniť pre ľubovoľnú totálnu veličinu $Tf(x)$.

Veta 7.3 (Monotónnosť priemernej veličiny) *Nech totálna veličina $Tf(x)$ je spojitá na intervale (a, b). Nech priemerná veličina $Af(x) = \dfrac{Tf(x)}{x}$ je definovaná na (a, b). Nech $x_0 \in (a, b)$. Nech funkcia $Tf(x)$ má deriváciu na intervale (a, b) a nemení znamienko derivácie na intervale (a, x_0) a nemení znamienko derivácie na intervale (x_0, b). Potom*

- *ak $Tf'(x) < Af(x)$ pre $x < x_0$ ($x > x_0$), tak $Af(x)$ je klesajúca na (a, x_0) ((x_0, b)),*
- *ak $Tf'(x) > Af(x)$ pre $x > x_0$ ($x < x_0$), tak $Af(x)$ je rastúca na (x_0, b) ((a, x_0)),*
- *ak $Tf'(x_0) = Af(x_0)$, pričom $Tf'(x) < Af(x)$ pre $x < x_0$ ($x > x_0$) a $Tf'(x) > Af(x)$ pre $x > x_0$ ($x < x_0$), tak $Af(x)$ má v bode x_0 lokálne minimum (maximum).*

7.4 Maximalizácia príjmu a zisku

Veta 7.3 nám umožňuje podobnými úvahami ako v predchádzajúcej časti popísať vzťah medzi marginálnymi príjmami a priemernými príjmami. Rozdiel je v tom, že funkcia priemerných príjmov sa zvyčajne správa opačne, t. j. priemerné príjmy po spustení výroby najskôr rastú a potom začnú klesať. V takom prípade v uvažovanom stacionárnom bode, kedy sú marginálne príjmy rovné priemerným príjmom, funkcia priemerných príjmov nadobúda lokálne maximum.

Príklad 7.4.1 *Predpokladáme, že totálny príjem z predaja q kusov tovaru je $R(q) = -2q^2 + 68q - 128$.*

a) *Pri akej výške predaja je priemerný príjem na jeden kus tovaru rovnaký ako marginálny príjem?*

b) *Dokážme, že priemerný príjem rastie, ak úroveň predaja je nižšia ako úroveň z časti a) a klesá, ak úroveň predaja je vyššia ako úroveň z časti a).*

c) *Nakreslime grafy funkcií priemerných príjmov a marginálnych príjmov v jednom systéme súradníc.*

Riešenie.

a) Zostrojíme funkciu priemerných príjmov a položíme do rovnosti s marginálnymi príjmami:

$$\begin{aligned} AR(q) &= \frac{-2q^2+68q-128}{q} \\ AR(q) &= R'(q) \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{-2q^2+68q-128}{q} &= -4q+68 \\ \Longleftrightarrow \quad q &= \pm 8. \end{aligned}$$

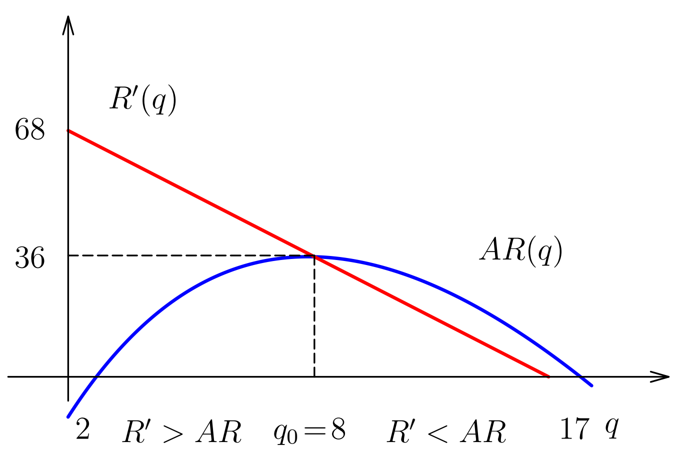
Keďže definičným oborom funkcie priemerných príjmov je množina kladných reálnych čísel, priemerné príjmy sa rovnajú marginálnym pri predaji ôsmych kusov tovaru.

b) Pomocou znamienka prvej derivácie funkcie priemerných príjmov určíme jej monotónnosť:

$$AR'(q) = \frac{(-4q+68)q-(-2q^2+68q-128)}{q^2} = 2\frac{64-q^2}{q^2}.$$

Funkcia priemerných príjmov rastie na intervale (0.8) a klesá na intervale $(8, \infty)$.

c) Načrtneme grafy oboch funkcií do jedného súradného systému (viď Obr. 34).



Obr. 34: Maximalizácia priemerných príjmov - príklad

♡

Poznámka 7.2 *Podobne ako pri funkcii nákladov aj pri funkcii príjmov platí, že neexistuje úroveň predaja, pri ktorom funkcia celkových príjmov aj funkcia priemerných príjmov zároveň nadobúdajú maximum.*

Funkciu celkových príjmov vytvoríme pomocou funkcie dopytu jedným z nasledujúcich spôsobov:

- Ak je funkcia dopytu daná $q = D(p)$, tak funkcia celkových príjmov je
$$TR(p) = p \cdot D(p).$$
- Ak je funkcia dopytu daná $p = d(q)$, tak funkcia celkových príjmov je
$$TR(q) = q \cdot d(q).$$

Lokálne extrémy funkcie celkových príjmov nájdeme potom pomocou derivácie podľa danej premennej.

Funkciu celkového zisku vytvoríme pomocou funkcie celkových príjmov a celkových nákladov. Zderivujeme, aby sme našli stacionárne body:

$$\begin{aligned} TP(q) &= TR(q) - TC(q) \\ TP'(q) &= TR'(q) - TC'(q) = 0 \\ \iff TR'(q) &= TC'(q) \\ \iff MR(q) &= MC(q). \end{aligned}$$

Platí teda nasledujúca veta.

Veta 7.4 (Maximalizácia celkového zisku) *Nech $TP(q)$ ($TP(p)$) je funkcia celkového zisku. Ak je celkový zisk maximálny, tak sa marginálne príjmy $MR(q)$ ($MR(p)$) rovnajú marginálnym nákladom $MC(q)$ ($MC(p)$).*

Príklad 7.4.2 *Spoločnosť má fixné mesačné náklady na výrobu q kusov výrobku 28 000 \$ a variabilné mesačné náklady $0{,}4q + 222$ \$ na jeden vyrobený kus. Predajná cena jedného výrobku je $p = 1\ 250 - 0{,}6q$. Určme*

a) *kedy je výroba zisková,*

b) *ponuku, ktorá maximalizuje mesačné príjmy,*

c) *úroveň produkcie, pri ktorej firma dosahuje maximálny zisk.*

Riešenie.

a) Zostrojíme funkciu celkových príjmov a funkciu celkových nákladov a vyriešime nerovnosť:

$$\begin{aligned} R(q) &> C(q) \\ 1\ 250q - 0{,}6q^2 &> 28\ 000 + 0{,}4q^2 + 222q \\ \iff q^2 - 1\ 028q + 28\ 000 &< 0 \\ \iff (q-28)(q-1\ 000) &< 0. \end{aligned}$$

Výroba je zisková pre $q \in (28, 1\ 000)$.

b) Pomocou prvej derivácie funkcie celkových príjmov určíme jej stacionárne body:

$$\begin{aligned} & R'(q) &=& \; 1\,250q - 1{,}2q = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & q &=& \; 1\,041{,}6667. \end{aligned}$$

Pomocou druhej derivácie určíme extrém. $R''(q) = -1{,}2 < 0$, funkcia celkových príjmov nadobúda lokálne maximum v bode $q = 1\,041{,}6667$. Uvedomme si, že výroba nie je v tomto prípade zisková.

c) Pomocou funkcie celkového príjmu a celkových nákladov vytvoríme funkciu celkového zisku. Zderivujeme a určíme stacionárne body:

$$\begin{aligned} & P(q) &=& \; R(q) - C(q) = \\ & &=& \; 1\,250q - 0{,}6q^2 - (28\,000 + 0{,}4q^2 + 222q) = \\ & &=& \; -q^2 + 1\,280q - 28\,000 \\ \Longrightarrow \quad & P'(q) &=& \; -2q + 1\,028 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & q &=& \; 514. \end{aligned}$$

Pomocou druhej derivácie určíme extrém. $P''(q) = -2 < 0$, funkcia celkového zisku nadobúda lokálne maximum v bode $q = 514$. ♡

7.5 Úlohy

7.1 Pestovateľ ovocia odhaduje, že ak má zasadených 40 jabloní, priemerná úroda z jedného stromu je 360 jabĺk. Každá dodatočne zasadená jabloň znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 4 jablká. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

7.2 Pestovateľ ovocia odhaduje, že ak má zasadených 60 jabloní, priemerná úroda z jedného stromu je 540 jabĺk. Každá dodatočne zasadená jabloň znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 6 jabĺk. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

7.3 Pestovateľ ovocia odhaduje, že ak má zasadených 70 jabloní, priemerná úroda z jedného stromu je 630 jabĺk. Každá dodatočne zasadená jabloň znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 7 jabĺk. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

7.4 Pestovateľ ovocia odhaduje, že ak má zasadených 70 hrušiek, priemerná úroda z jedného stromu je 560 hrušiek. Každá dodatočne zasadená hruška znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 7 hrušiek. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

7.5 Pestovateľ ovocia odhaduje, že ak má zasadených 30 hrušiek, priemerná úroda z jedného stromu je 640 hrušiek. Každá dodatočne zasadená hruška znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 8 hrušiek. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

7.6 Predajca áut nakupuje určitú značku áut po 3 800 eur a predáva ich po 6 400 eur. Pri tejto cene ich mesačne predá 10. Predajca áut zníži cenu a očakáva, že každé zníženie o 100 eur prinesie zvýšenie mesačného predaja o 1 auto. Pri akej cene za auto bude mesačný zisk maximálny?

7.7 Výrobca predáva lampy po 10 eur a pri tejto cene predá 1 000 kusov mesačne. Výrobca chce zvýšiť cenu a očakáva zvýšenie zisku, pričom každé zvýšenie ceny o 1 euro prinesie o 50 kusov menej predaných lámp za mesiac. Výrobné náklady sú 8 eur. Pri akej cene sa dosiahne maximálny zisk?

7.8 Výrobca predáva lopty po 12 eur a pri tejto cene predá 4 500 kusov mesačne. Výrobca chce zvýšiť cenu a očakáva zvýšenie zisku, pričom každé zvýšenie ceny o 1 euro prinesie o 150 kusov menej predaných lôpt za mesiac. Výrobné náklady sú 8 eur. Pri akej cene sa dosiahne maximálny zisk?

7.9 Výrobca predáva košíky po 16 eur a pri tejto cene predá 4 200 kusov mesačne. Výrobca chce zvýšiť cenu a očakáva zvýšenie zisku, pričom každé zvýšenie ceny o 1 euro prinesie o 300 kusov menej predaných košíkov za mesiac. Výrobné náklady sú 12 eur. Pri akej cene sa dosiahne maximálny zisk?

7.10 Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 7\,500 - 60x$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x) = 100x - x^2 + 2\,700$. Nakreslite grafy oboch funkcií v jednom súradnicovom systéme a zistite, kedy je výroba zisková. Určte úroveň produkcie, pri ktorej firma dosahuje maximálny zisk.

7.11 Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = x^2 + 10x + 7000$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x) = 380x$. Nakreslite grafy oboch funkcií v jednom súradnicovom systéme a zistite, kedy je výroba zisková. Určte úroveň produkcie, pri ktorej firma dosahuje maximálny zisk.

7.12 Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q) = 2q^2 + 10$. Jednotková cena pri predaji q kusov výrobku je určená cenou dopytu $p = 84 - 5q$ eur za kus. Vypočítajte úroveň produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti.

7.13 Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q) = 3q^2 + 24$. Jednotková cena pri predaji q kusov výrobku je určená cenou dopytu $p = 98 - 4q$ eur za kus. Vypočítajte úroveň produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti.

7.14 Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q) = 4q^2 + 36$. Jednotková cena pri predaji q kusov výrobku je určená cenou dopytu $p = 112 - 3q$ eur za kus. Vypočítajte úroveň produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti.

7.15 Celkové denné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 14x + 300$. Predajná cena bola stanovená na $88 - x$ eur za kus. Vypočítajte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny zisk.

7.16 Celkové denné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 16x + 240$. Predajná cena bola stanovená na $80 - 2x$ eur za kus. Vypočítajte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny zisk.

7.17 Celkové denné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 12x + 180$. Predajná cena bola stanovená na $88 - 2x$ eur za kus. Vypočítajte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny zisk.

7.18 Náklady na výrobu tovaru sú 8 eur a odhaduje sa, že ak sa tovar bude predávať za x eur, kúpia zákazníci približne $72 - 2x$ kusov tovaru za deň. Ako stanoviť cenu tovaru, aby sa dosiahol maximálny denný zisk?

7.19 Náklady na výrobu tovaru sú 9 eur a odhaduje sa, že ak sa tovar bude predávať za x eur, kúpia zákazníci približne $82 - 2x$ kusov tovaru za deň. Ako stanoviť cenu tovaru, aby sa dosiahol maximálny denný zisk?

7.20 Náklady na výrobu tovaru sú 10 eur a odhaduje sa, že ak sa tovar bude predávať za x eur, kúpia zákazníci približne $96 - 2x$ kusov tovaru za deň. Ako stanoviť cenu tovaru, aby sa dosiahol maximálny denný zisk?

7.21 Celkové mesačné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = x + 90$. Predajná cena bola stanovená na $2 - 0{,}001x$ eur za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.

b) Určte ponuku, ktorá maximalizuje mesačné výnosy.

c) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny zisk.

7.22 Celkové mesačné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 150\ 000 + 350 + x^2$. Predajná cena bola stanovená na $3\ 850 - 9x$ eur za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.

b) Určte ponuku, ktorá maximalizuje mesačné výnosy.

c) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny zisk.

7.23 Predpokladáme, že náklady na výrobu q kusov tovaru sú $C(q) = q^2 + 13q + 625$.

a) Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus minimálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?

c) Nakreslite grafy funkcií priemerných nákladov a marginálnych nákladov v jednom systéme súradníc.

7.24 Predpokladáme, že náklady na výrobu q kusov tovaru sú $C(q) = 0{,}1q^2 - 1{,}6q + 193{,}6$.

a) Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus minimálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?

c) Nakreslite grafy funkcií priemerných nákladov a marginálnych nákladov v jednom systéme súradníc.

7.25 Celkové týždenné príjmy v eurách z predaja q kusov žehličiek sú $R(q) = -q^2 + 34q - 81$.

a) Pri akej výške predaja sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus tovaru maximálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus rovné marginálnym príjmom?

c) Nakreslite grafy funkcií priemerných príjmov a marginálnych príjmov v jednom systéme súradníc.

7.26 Celkové týždenné príjmy v eurách z predaja q kusov žehličiek sú $R(q) = -4q^2 + 136q - 400$.

a) Pri akej výške predaja sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus tovaru maximálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus rovné marginálnym príjmom?

c) Nakreslite grafy funkcií priemerných príjmov a marginálnych príjmov v jednom systéme súradníc.

7.27 Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q) = 10q$. Cena, za ktorú je možné predať q kusov výrobku je určená cenou dopytu $p = 50 - 4q$.

a) Vypočítajme objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti.

b) Vypočítajme objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti, ak je každý predaný výrobok zdaňovaný extra daňou t dolárov.

c) Predpokladajme, že si spoločnosť zvolí objem produkcie, ktorá maximalizuje jej zisk. Ako by mal výberca dane stanoviť výšku dane, aby dosiahol maximálny daňový výnos?

7.28 Výskumom bolo zistené, že krajčírka, ktorá začne pracuje od 7.00 do 14.00 hod., bude mať ušitých $f(x) = -x^3 + 15x^2 + 10x$ sukní po x hodinách práce.

a) Kedy počas smeny je krajčírka najvýkonnejšia?

b) Kedy počas smeny pracuje krajčírka najpomalšie?

Výsledky:

7.1 25 stromov

7.2 15 stromov

7.3 10 stromov

7.4 5 stromov

7.5 25 stromov

7.6 5 600 eur

7.7 19 eur

7.8 25 eur

7.9 21 eur

7.10 $x \in (40, 120)$, $x = 80$

7.11 $x \in (20, 350)$, $x = 185$

7.12 $q = 6$

7.13 $q = 7$

7.14 $q = 8$

7.15 $x = 37$

7.16 $x = 16$

7.17 $x = 19$

7.18 $x = 22$

7.19 $x = 25$

7.20 $x = 29$

7.21

a) $x \in (100, 900)$, b) $x = 1\ 000$, c) $x = 500$.

7.22

a) $x \in (50, 300)$, b) $x = 213{,}89$, c) $x = 175$.

7.23

a) $q = 25$, b) $q = 25$.

7.24

a) $q = 44$, b) $q = 44$.

7.25

a) $q = 9$, b) $q = 9$.

7.26

a) $q = 10$, b) $q = 10$.

7.27

a) $q = 5$, b) $q = 5 - \frac{t}{8}$, c) $t = 20$.

7.28

a) o 12.00, b) o 7.00.

8 Apendix

8.1 Cieľ

Zrekapitulovať relevantné časti stredoškolskej matematiky nevyhnutné pre štúdium na študijnom programe Hospodárska informatika.

8.2 Úprava výrazov

Definícia 8.1 *Nech A, B sú množiny.*

- $A \cup B$ *označuje ich* **zjednotenie** *(množina všetkých prvkov, ktoré sa nachádzajú aspoň v jednej z množín),*
- $A \cap B$ *označuje ich* **prienik** *(množina všetkých prvkov, ktoré sa nachádzajú súčasne v oboch množinách)*
- $A - B$ *označuje ich* **rozdiel** *(všetky prvky množiny A, ktoré nie sú v množine B),*
- *Ak $A \subset B$, tak množinu $B - A$ nazývame* **doplnok množiny** *A v množine B,*
- $A \subset B$ *znamená, že množina A je* **podmnožinou množiny** *B (všetky prvky množiny A sú súčasne aj v množine B),*
- $A = B$ *označuje ich* **rovnosť** *($A \subset B$ a súčasne $B \subset A$).*

Pre **číselné množiny** budeme používať tieto označenia:

$\mathbb{N}$ – **obor prirodzených čísel** (množina všetkých prirodzených čísel). $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Slúžia na vyjadrenie počtu[1];

$\mathbb{Z}$ – **obor celých čísel** (množina všetkých celých čísel) $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$;

$\mathbb{Q}$ – **obor racionálnych čísel** (množina všetkých racionálnych čísel) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$;

$\mathbb{R}$ – **obor reálnych čísel** (množina všetkých reálnych čísel);

$\mathbb{C}$ – **obor komplexných čísel** (množina všetkých komplexných čísel).

[1] Niektorí autori zahŕňajú do množiny prirodzených čísel aj číslo 0.

Číselné obory sú vo vzájomnom vzťahu, ktorý môžeme zapísať takto:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Každé reálne číslo, ktoré nie je racionálne, nazývame **iracionálnym číslom**.

Uvedieme niektoré z pravidiel, ktoré platia pre operácie sčítania a násobenia na množine reálnych čísel. Nech a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla. Potom

- platí **komutatívnosť sčítania a násobenia**:

$$a + b = b + a\,; \qquad a \cdot b = b \cdot a\,;$$

- platí **asociatívnosť sčítania a násobenia**:

$$a + (b + c) = (a + b) + c\,; \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,;$$

- platí **distributívnosť násobenia vzhľadom k sčítaniu**:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,;$$

- existuje práve jedno číslo $x \in \mathbb{R}$ $(x = 0)$ také, že $a + x = a$;
- existuje práve jedno číslo $x \in \mathbb{R}$ $(x = 1)$, $x \neq 0$, také, že $a \cdot x = a$;

Odčítanie a delenie reálnych čísel a, b definujeme takto:

$$a - b = a + (-b), \qquad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad \text{pre} \quad b \neq 0$$

Každé reálne číslo je na číselnej osi zobrazené práve jedným bodom. Každý bod číselnej osi je obrazom práve jedného reálneho čísla.

Veta 8.1 *Nech a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Potom platí:*

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *práve vtedy, keď* $ad = bc$;
2. $\frac{ab}{db} = \frac{a}{d}$;
3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$;
4. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;
5. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ *pre* $c \neq 0$.

Usporiadanie reálnych čísel má tieto vlastnosti:

- **trichotómia usporiadania**, t. j. pre každé dve reálne čísla a, b platí práve jeden z nasledujúcich troch vzťahov

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b\,;$$

- **tranzitívnosť usporiadania**, t. j. ak $a < b$, $b < c$, tak $a < c$;
- ak $a < b$, tak $a + c < b + c$ pre každé $c \in \mathbb{R}$;
- ak $0 < a$, $0 < b$, tak $0 < ab$.

Veta 8.2 *Nech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Potom*

1. *ak $a < b$ a súčasne $c < d$, tak $a + c < b + d$;*
2. *ak $a < b$ a súčasne $c > 0$, tak $ac < bc$;*
3. *ak $a < b$ a súčasne $c < 0$, tak $ac > bc$;*
4. *ak $0 < a < b$, tak $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$;*
5. *ak $0 < a < b$ a súčasne $0 < c < d$, tak $ac < bd$.*

Pri riešení rôznych typov úloh na množine reálnych čísel vedúcich k riešeniu nerovníc budeme používať zápisy pomocou intervalov.

Definícia 8.2 Ohraničené intervaly s krajnými bodmi a, *b, $a < b$ sú tieto množiny:*

$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\quad a \leqq x \leqq b\}$ – **uzavretý interval**;
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\quad a < x < b\}$ – **otvorený interval**;
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\quad a \leqq x < b\}$ – **zľava uzavretý sprava otvorený**;
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\quad a < x \leqq b\}$ – **zľava otvorený sprava uzavretý**.

Definícia 8.3 Neohraničené intervaly s krajným bodom $a \in \mathbb{R}$ *sú tieto množiny:*

$$(-\infty, a\rangle = \{x \in \mathbb{R};\quad x \leqq a\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\quad x < a\}\,;$$
$$\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\quad x \geqq a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\quad x > a\}.$$

Obor reálnych čísel $\mathbb{R}$ zapisujeme tiež ako interval $(-\infty, +\infty)$. Pri symbole $+\infty$ často znak $+$ vynechávame.

Definícia 8.4 Absolútna hodnota čísla a $\in \mathbb{R}$ *je číslo* $|\mathbf{a}|$ *definované takto:*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pre } a \geqq 0; \\ -a & \text{pre } a < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Pre absolútnu hodnotu platia základné vlastnosti formulované v nasledujúcej vete.

Veta 8.3 *Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

1. $|a| \geqq 0$, *pričom* $|a| = 0$ *práve vtedy, keď* $a = 0$;
2. $|-a| = |a|$;
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ *pre* $b \neq 0$;
5. $|a| - |b| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b|$.

Definícia 8.5 *Nech $a \in \mathbb{R}$. Nech $n \in \mathbb{N}$. **n-tou mocninou čísla** a nazývame výraz*

$$a^n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Navyše ak $a \neq 0$, tak $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Definícia 8.6 *Nech $a \in \mathbb{R}$. Nech $n \in \mathbb{N}$. **n-tou odmocninou čísla** a nazývame výraz*

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} \sqrt[n]{a} & a \geqq 0 \\ -\sqrt[n]{|a|} & a < 0 \end{cases}$$

Pre $a \in \mathbb{R}$ kladné a $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ platí

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{4}$$

Veta 8.4 *Nech a, $b \in \mathbb{R}$ také, že sú definované doleuvedené výrazy. Nech r, $s \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;
2. $(a^r)^s = a^{rs}$;
3. $a^r \cdot b^r = (ab)^r$;
4. $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$;
5. $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$.

Algebrický výraz je zápis, skladajúci sa z čísel, písmen, ktoré označujú premenné, a znakov operácií. Operácie násobenia, delenia, umocnenia, odmocnenia majú prednosť pred operáciami sčítania a odčítania. Ak však výrazy obsahujú aj zátvorky, tie určujú poradie naznačených operácií.

Výrazy sa často upravujú (zjednodušujú). Používame pri tom definície a pravidlá, ktoré sme si v predchádzajúcom texte sformulovali. Musíme ale rešpektovať obmedzenia, ktoré sme pri jednotlivých pravidlách uviedli. Určujeme pri tom množinu $\mathcal{D}$ všetkých tých hodnôt premenných, pre ktoré má výraz zmysel. Množinu $\mathcal{D}$ nazývame **definičným oborom výrazu**.

Pri požiadavke, aby zjednodušený výraz bol v tvare súčinu, budeme často potrebovať nasledujúce vzťahy. Pre ľubovoľné reálne čísla a a b platí:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \tag{5}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \tag{6}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \tag{7}$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \tag{8}$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3. \tag{9}$$

Niektoré z týchto vzťahov sa dajú zovšeobecniť aj pre vyššie mocniny.

Príklad 8.2.1 *Rozložme na súčin*

a) $(5n+2)^2 - (2n+5)^2$,

b) $x^4 - y^4$,

c) $a^3 - 3a^2 - a + 3$,

d) $a^3 + a + 2$.

Riešenie.

a) $$(5n+2)^2 - (2n+5)^2 \stackrel{\alpha}{=} [(5n+2)+(2n+5)] \cdot [(5n+2)-(2n+5)] = \\ = (7n+7)(3n-3) = 21(n+1)(n-1),$$

kde v rovnosti $\stackrel{\alpha}{=}$ sme vo vzorci (5) položili $a = 5n+2$, resp. $b = 2n+5$.

b) $$x^4 - y^4 = \left(x^2\right)^2 - \left(y^2\right)^2 \stackrel{\alpha}{=} (x^2-y^2)(x^2+y^2) \stackrel{\beta}{=} \\ \stackrel{\beta}{=} (x-y)(x+y)(x^2+y^2),$$

kde v rovnosti $\stackrel{\alpha}{=}$ sme vo vzorci (5) nahradili a výrazom x^2 a b výrazom y^2 a v rovnosti $\stackrel{\beta}{=}$ sme použili samotný vzorec (5).

c)
$$a^3 - 3a^2 - a + 3 \overset{\alpha}{=} a^2(a-3) - (a-3) \overset{\beta}{=} (a^2-1)(a-3) \overset{\gamma}{=}$$
$$\overset{\gamma}{=} (a-1)(a+1)(a-3),$$

kde v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme vyňali pred zátvorku a^2, resp. -1, v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme vyňali pred zátvorku $a-3$ a v rovnosti $\overset{\gamma}{=}$ sme použili vzťah (5).

d)
$$a^3 + a + 2 \overset{\alpha}{=} a^3 + 1 + a + 1 \overset{\beta}{=} (a+1)(a^2-a+1) + (a+1) \overset{\gamma}{=}$$
$$\overset{\gamma}{=} (a+1)(a^2-a+1+1) = (a+1)(a^2-a+2),$$

kde v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme rozdelili absolútny člen, v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme použili vzťah (7) a v rovnosti $\overset{\gamma}{=}$ sme vyňali pred zátvorku $a+1$. ♡

Príklad 8.2.2 *Doplňme daný kvadratický výraz na štvorec:*

a) $x^2 + 5$,

b) $x^2 - 12x + 5$,

c) $2x^2 - 12x + 5$,

d) $2 - 3x^2 - 6x$.

Riešenie. Hlavná myšlienka dopĺňania na štvorec spočíva vo vhodnom použití jedného zo vzorcov (8):

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

a) Výraz $x^2 + 5$ neobsahuje lineárny člen x a už je v požadovanom tvare.

b)
$$(x^2 - 12x) + 5 \overset{\alpha}{=} ((x)^2 - 2\cdot 6\cdot x) + 5 = [(x-6)^2 - 6^2] + 5$$
$$= (x-6)^2 - 31,$$

kde v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme vo vzorci (8) položili $a = x$, resp. $b = 6$, keďže $2ab = 2\cdot 6\cdot x$.

c)
$$(2x^2 - 12x) + 5 \overset{\alpha}{=} 2(x^2 - 6x) + 5 = 2[(x)^2 - 2\cdot 3\cdot x] + 5 =$$
$$= 2[(x-3)^2 - 3^2] + 5 = 2(x-3)^2 - 2\cdot 9 + 5 =$$
$$= 2(x-3)^2 - 13,$$

kde v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme vyňali pred zátvorku 2. Na štvorec upravíme ako v predchádzajúcom príklade. Napokon odstránime hranatú zátvorku a sčítame konštanty.

d) $$(-3x^2-6x)+2 \overset{\alpha}{=} -3(x^2+2x)+2 = -3[(x)^2+2\cdot 1\cdot x]+2 = \\ = -3[(x+1)^2-1^2]+2 = -3(x+1)^2-(-3)\cdot 1+2 = \\ = -3(x+1)^2+5,$$

kde v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme vyňali pred zátvorku -3. Ďalší postup je analogický ako v predchádzajúcom príklade. ♡

Príklad 8.2.3 *Zjednodušme v* $\mathbb{R}$ *daný výraz* V *a určme, kedy má zmysel:*

a) $$V(x) = \left(\frac{x^{-3}y^{-2}}{z^2w^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{x^{-2}y^{-4}}{z^3w^{-3}}\right)^{-3},$$

b) $$V(x) = \frac{10(x+2)^2-10x(x+2)2}{(x+2)^4},$$

c) $$V(x) = \left(\frac{x+5}{x^2-81}+\frac{x+7}{x^2-18x+81}\right) : \left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2 - \frac{1+x}{9+x}.$$

Riešenie.

a) $$V(x) \overset{\alpha}{=} \left(\frac{x^{-3}y^{-2}}{z^2w^{-4}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^{-2}y^{-4}}{z^3w^{-3}}\right)^{3} \overset{\beta}{=} \frac{x^6y^4}{z^{-4}w^8}\cdot\frac{x^{-6}y^{-12}}{z^9w^{-9}} = \\ \overset{\gamma}{=} \frac{y^{-8}}{z^5w^{-1}} = \frac{w}{y^8z^5}$$

pre $x,\ y,\ z,\ w \in \mathbb{R}-\{0\}$, kde
– v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ sme delenie zlomkom nahradili násobením prevrátenou hodnotou a zároveň zlomok opäť prevrátili, keď sme zápornú mocninu zmenili na kladnú;
– v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme použili vetu 8.4 na umocnenie;
– a v rovnosti $\overset{\gamma}{=}$ sme zjednodušili opäť pomocou vety 8.4.

b) $$V(x) \overset{\alpha}{=} \frac{10(x+2)[(x+2)-2x]}{(x+2)^4} \overset{\beta}{=} \frac{10(2-x)}{(x+2)^3}$$

pre $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$, kde sme v rovnosti $\overset{\alpha}{=}$ vyňali pred zátvorku v čitateli $10(x+2)$ a v rovnosti $\overset{\beta}{=}$ sme vykrátili $(x+2)$.

c) $$V(x) \overset{\alpha}{=} \left(\frac{x+5}{(x-9)(x+9)}+\frac{x+7}{(x-9)^2}\right)\cdot\frac{(x-9)^2}{(x+3)^2}-\frac{x+1}{x+9} = \\ \overset{\beta}{=} \frac{(x+5)(x-9)+(x+7)(x+9)}{(x-9)^2(x+9)}\cdot\frac{(x-9)^2}{(x+3)^2}-\frac{x+1}{x+9} =$$

$$\stackrel{\gamma}{=} \frac{2x^2+12x+18}{(x+9)} \cdot \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{x+1}{x+9} =$$

$$\stackrel{\delta}{=} \frac{2(x+3)^2}{(x+9)(x+3)^2} - \frac{x+1}{x+9} = \frac{2}{x+9} - \frac{x+1}{x+9} = \frac{1-x}{x+9}$$

pre $x \in \mathbb{R} - \{-3; -9; 9\}$, kde
– v rovnosti $\stackrel{\alpha}{=}$ sme urobili tieto úpravy: $x^2 - 81 = (x-9)(x+9)$ podľa (5), na základe (8) je $x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2$ a delenie zlomkom $\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2$ sme nahradili násobením zlomkom $\frac{(x-9)^2}{(x+3)^2}$ (prevrátenou hodnotou);
– v rovnosti $\stackrel{\beta}{=}$ sme dali prvé dva zlomky na ich najmenší spoločný menovateľ $(x-9)^2(x+9)$;
– v rovnosti $\stackrel{\gamma}{=}$ sme upravili čitateľa prvého zlomku a vykrátili výrazy $(x-9)^2$;
– v rovnosti $\stackrel{\delta}{=}$ sme podľa (8) upravili čitateľa na štvorec a v ďalšom kroku sme ho vykrátili. ♡

8.3 Lineárne, kvadratické a špeciálne typy polynomických rovníc vyššieho rádu

Rovnica je zápis rovnosti dvoch výrazov (tzv. **ľavá**, resp. **pravá strana rovnice**), v ktorom treba určiť hodnotu premennej z daného číselného oboru tak, aby sme po dosadení tejto hodnoty premennej do rovnice dostali pravdivý výrok. Ak napr. x je označenie premennej a výraz $L(x)$, resp. $P(x)$, je ľavou, resp. pravou stranou, tak pod rovnicou rozumieme zápis

$$L(x) = P(x). \tag{10}$$

Číselný obor, v ktorom hľadáme túto hodnotu premennej, nazývame **obor riešenia rovnice** $\mathcal{O}$ (**obor premennej** $\mathcal{O}$)[2]. Premennú v rovnici nazývame **neznáma**, hodnotu premennej (číslo), pre ktorú sa obidva výrazy rovnajú, nazývame **koreň rovnice v množine** $\mathcal{O}$. Namiesto termínu koreň rovnice často používame termín **riešenie rovnice**. Pod riešením rovnice rozumieme aj postup, ktorým hľadáme koreň rovnice. Množinu všetkých koreňov rovnice (v danom obore premennej $\mathcal{O}$) označujeme písmenom $\mathcal{K}$. Teda ak $\mathcal{D}$ je množina, na ktorej sú definované oba výrazy $L(x)$ a $P(x)$, tak koreňom rovnice (10) je každé číslo $a \in \mathcal{O} \cap \mathcal{D}$, pre ktoré platí rovnosť

$$L(a) = P(a).$$

Pri hľadaní koreňov (t. j. pri riešení rovnice) rovnicu upravujeme tzv. **dôsledkovými (implikačnými) úpravami** na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$. Najbežnejšie dôsledkové úpravy rovníc sú:

[2]Nás bude zaujímať hlavne prípad $\mathcal{O}=\mathbb{R}$.

1. Vzájomná výmena strán rovnice.

2. Nahradenie ľubovoľnej strany rovnice výrazom, ktorý sa jej rovná na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$.

3. Pripočítanie výrazu, ktorý je definovaný na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$, k obidvom stranám rovnice.

4. Vynásobenie obidvoch strán rovnice výrazom, ktorý

   a) je definovaný na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$,

   b) nadobúda nenulové hodnoty na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$.

5. Umocnenie obidvoch strán rovnice

   a) na druhú, tretiu, štvrtú, atď.

   b) na druhú, štvrtú, šiestu atď., ak obe strany rovnice nadobúdajú na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$ nezáporné hodnoty.

6. Odmocnenie obidvoch strán rovnice

   a) druhou, štvrtou, šiestou odmocninou atď., ak obe strany nadobúdajú na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$ nezáporné hodnoty

   b) treťou, piatou, siedmou odmocninou atď.

Vyššie uvedené úpravy (okrem úprav 4a, 5a) patria medzi tzv. **ekvivalentné úpravy rovnice**.

Poznámka 8.1 *Samotný postup pri hľadaní koreňov danej rovnice môžeme rozložiť na tieto tri časti:*

- *Od danej rovnice sa usilujeme prejsť rôznymi dôsledkovými úpravami k rovnici, ktorej riešenie je zrejmé.*

- *Nech $\mathcal{A}$ je množina všetkých koreňov rovnice, ktorú sme dostali z pôvodnej rovnice pomocou dôsledkových úprav a $\mathcal{K}$ je množina všetkých koreňov pôvodnej rovnice. Potom $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$, kde množinu $\mathcal{A}$ poznáme.*

- *Urobíme tzv. „skúšku správnosti“, ktorej cieľom je zistiť, ktoré z prvkov množiny $\mathcal{A}$ sú z množiny $\mathcal{K}$, t. j. ktoré z nich sú riešeniami (koreňmi) pôvodnej rovnice. Skúšku urobíme tak, že postupne dosadíme každý prvok x z množiny $\mathcal{A}$ do obidvoch strán* **pôvodnej** *rovnice. Ak zistíme, že $L(x) = P(x)$, kde $L(x)$, resp. $P(x)$, je hodnota ľavej, resp. pravej strany rovnice v čísle x, tak x je koreňom pôvodnej rovnice (t. j. $x \in \mathcal{K}$). V opačnom prípade $x \notin \mathcal{K}$.*

Pripomíname, že ak pri riešení rovnice použijeme len ekvivalentné úpravy, tak $\mathcal{K} = \mathcal{A}$ a skúška nie je potrebná[3]. Pri zápisoch výsledkov cvičení je uvádzaná množina $\mathcal{K}$, napr. $\mathcal{K} = \{\pm 4\}$ (tu nie je dôležité označenie neznámej) alebo sú uvedené všetky možné hodnoty riešenia úlohy, napr. $x = \pm 4$.

Definícia 8.7 *Rovnicu* $\boldsymbol{ax + b = 0}$ **,** *kde* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$*,* x *je neznáma z daného číselného oboru, nazývame* **lineárnou rovnicou** *s reálnymi koeficientmi a, b, alebo krátko – lineárna rovnica.*

Táto rovnica má v $\mathbb{R}$ jediný koreň

$$\boldsymbol{x = -\frac{b}{a},} \quad \text{t. j.} \quad \boldsymbol{\mathcal{K} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}.}$$

Definícia 8.8 *Rovnicu* $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ **,** *kde* $a, b, c \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$*,* x *je neznáma z daného číselného oboru, nazývame* **kvadratickou rovnicou** *s reálnymi koeficientmi a, b, c, alebo krátko – kvadratická rovnica.*

Výraz ax^2 nazývame **kvadratickým členom**, bx **lineárnym členom** a c **absolútnym členom** kvadratickej rovnice. Výraz $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$ nazývame **diskriminantom** danej kvadratickej rovnice. Ak neznáma x má byť z množiny $\mathbb{R}$, tak nastáva jedna z možností:

- ak $\boldsymbol{D > 0}$, tak $\boldsymbol{\mathcal{K} = \left\{\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right\}}$,
  t. j. rovnica má dva rôzne korene;
- ak $\boldsymbol{D = 0}$, tak $\boldsymbol{\mathcal{K} = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}}$,
  t. j. rovnica má jeden koreň;
- ak $\boldsymbol{D < 0}$, tak $\boldsymbol{\mathcal{K} = \emptyset}$,
  t. j. rovnica nemá reálny koreň.

Ak označíme korene kvadratickej rovnice symbolmi x_1, x_2, tak

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.} \tag{11}$$

Poznamenávame, že ak $D = b^2 - 4ac = 0$, tak kvadratická rovnica má v $\mathbb{R}$ jediný tzv. **dvojnásobný koreň** (vtedy v (11) je $x_1 = x_2$). Ak $D < 0$, tak kvadratická rovnica nemá reálny koreň, ale má dva korene v množine komplexných čísel, ktoré sú určené vzorcom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}\,, \tag{12}$$

kde i je imaginárna jednotka, pre ktorú platí $i^2 = -1$.

[3]Ale môže byť užitočná, lebo sme mohli urobiť nejakú chybu v úpravách.

Príklad 8.3.1 *Vyriešme v $\mathbb{R}$ rovnice:*

a) $\dfrac{7x-1}{3}+\dfrac{5+3x}{2}=5x-6,$

b) $\dfrac{2y-1}{2y+1}=\dfrac{2y+1}{2y-1}-\dfrac{8}{4y^2-1},$

c) $\dfrac{2s-5}{s-1}=\dfrac{5s-3}{3s+5},$

d) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-8}=3,$

e) $\dfrac{x+3}{x^2-1}=\dfrac{2}{x^2-1}.$

Riešenie.

a) Definičný obor danej rovnice je množina $\mathcal{D}=\mathbb{R}$. Úpravami danej rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} 2(7x-1)+3(5+3x) &= 6(5x-6); \\ 14x-2+15+9x &= 30x-36; \\ 49 &= 7x; \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Použili sme len ekvivalentné úpravy, ale napriek tomu urobíme skúšku správnosti:

$$\begin{aligned} \text{Ľ}(7) &= \frac{7\cdot 7-1}{3}+\frac{5+3\cdot 7}{2}=16+13=29; \\ P(7) &= 5\cdot 7-6=29; \\ \text{Ľ}(7) &= P(7). \end{aligned}$$

Preto $\mathcal{K}=\{7\}$.

b) Definičný obor danej rovnice je množina $\mathcal{D}=\mathbb{R}-\{\pm 0{,}5\}$. Obidve strany rovnice vynásobíme výrazom $(2y+1)(2y-1)$ a dostaneme

$$\begin{aligned} (2y-1)^2 &= (2y+1)^2-8; \\ 4y^2-4y+1 &= 4y^2+4y+1-8; \\ 8y &= 8; \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Keďže $1\in\mathcal{D}$, tak $\mathcal{K}=\{1\}$. Tento záver sme mohli dostať aj na základe poznámky 8.1. V tom prípade by sme nemuseli určovať množinu $\mathcal{D}$, ale stačilo by overiť, či pre danú rovnicu platí rovnosť $\text{Ľ}(1)=P(1)$.

c) Rovnicu vynásobíme výrazom $(s-1)(3s+5)$, pričom nebudeme skúmať, či ide o ekvivalentnú úpravu. Potom

$$\begin{aligned} 6s^2-5s-25 &= 5s^2-8s+3; \\ s^2+3s-28 &= 0, \end{aligned}$$

čo je kvadratická rovnica s koeficientmi $a = 1$, $b = 3$ a $c = -28$, ktorej diskriminant je $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 121$. Teda podľa (11)

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 11}{2} = \begin{cases} 4; \\ -7. \end{cases}$$

Skúškou správnosti sa ľahko presvedčíme, že $\mathcal{K} = \{4; -7\}$.

d) Použijeme poznámku 8.1 (t. j. nebudeme skúmať, či použité úpravy sú ekvivalentné a ani $\mathcal{D}$ – definičný obor rovnice nás nebude „trápiť“). Ak umocníme obidve strany rovnice na druhú, tak dostaneme

$$\begin{aligned} x(x-8) &= 9; \\ x^2 - 8x - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Opäť sme získali kvadratickú rovnicu, ktorej diskriminant je

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 100$$

a na základe (11) je

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \begin{cases} 4 + 5 = 9, \\ 4 - 5 = -1. \end{cases} \tag{13}$$

Teraz je skúška správnosti nevyhnutná! Overte, že

$$-1 \notin \mathcal{K} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{K} = \{9\}.$$

Keby sme príklad riešili cez definičný obor rovnice, tak by sme mohli postupovať takto: výraz $\sqrt{x}$ je definovaný pre $x \geqq 0$ a výraz $\sqrt{x-8}$ pre $x \geqq 8$. Teda definičným oborom danej rovnice je množina $\mathcal{D} = \langle 8; \infty)$. Teraz by sme sa tými istými úpravami ako predtým dopracovali k „možným“ koreňom rovnice z (13). Keďže $-1 \notin \mathcal{D}$ a $9 \in \mathcal{D}$, tak $\mathcal{K} = \{9\}$.

e) Definičný obor danej rovnice je množina $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$. Obe strany rovnice vynásobíme výrazom $x^2 - 1$. Dostaneme $x + 3 = 2$, t. j. $x = -1$. Číslo -1 nie je koreňom danej rovnice, lebo $-1 \notin \mathcal{D}$, a preto $\mathcal{K} = \emptyset$. ♡

Pri riešení rovnice používame také úpravy, ktoré nám zabezpečia to, aby každý koreň rovnice bol súčasne aj koreňom upravenej rovnice (tá môže mať aj viac koreňov). Je potrebné dávať pozor na také úpravy, pri ktorých by sa korene „strácali“. Napríklad rovnica

$$(x+1)^2 = (x+1)(3-x)$$

má korene $\mathcal{K} = \{1; -1\}$; ak túto rovnicu upravíme tak, že obidve strany delíme výrazom $x + 1$, tak dostaneme rovnicu

$$x + 1 = 3 - x,$$

pre ktorú $\mathcal{K} = \{1\}$. Pri delení sme vykonali úpravu, ktorou sme koreň $x = -1$ „stratili“[4].

Príklad 8.3.2 *Vyriešme v množine komplexných čísel rovnicu*

$$x^2 + 6x + 18 = 0.$$

Riešenie. Máme kvadratickú rovnicu so záporným diskriminantom

$$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = -36,$$

preto podľa (12)

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm i\sqrt{36}}{2} = -3 \pm 3i,$$

a teda $\mathcal{K} = \{-3 + 3i; -3 - 3i\}$. ♡

Medzi koreňmi kvadratickej rovnice a jej koeficientmi existuje určitý súvis. Napríklad pre kvadratickú rovnicu $x^2 + px + q = 0$ platí: x_1, x_2 sú korene rovnice práve vtedy, keď platia tzv. **Vietove vzťahy**

$$x_1 + x_2 = -p \qquad \text{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = q. \tag{14}$$

Vyplýva to z rozkladu trojčlenu $x^2 + px + q$ na súčin (nazývaný **súčin koreňových činiteľov**)

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Príklad 8.3.3 *Vyriešme v množine reálnych čísel rovnice*

a) $x^2 - 5x + 6 = 0,$ b) $x^2 + 5x + 6 = 0,$ c) $x^2 - x - 6 = 0.$

Riešenie.

a) Pre korene rovnice x_1 a x_2 musí podľa vzťahu (14) platiť

$$x_1 + x_2 = 5 \qquad \text{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = 6.$$

Teda $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$. Navyše $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

[4]Pretože pre $x = -1$ sme delili nulou, t. j. použili sme neekvivalentnú úpravu.

b) Pre korene rovnice x_1 a x_2 musí podľa vzťahu (14) platiť

$$x_1 + x_2 = -5 \qquad \text{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = 6.$$

V tomto prípade je $x_1 = -2$ a $x_2 = -3$. Navyše $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$.

c) Pre korene rovnice x_1 a x_2 musí podľa vzťahu (14) platiť

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad \text{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = -6.$$

Na rozdiel od predchádzajúcich prípadov, keď súčin $x_1 \cdot x_2$ bol kladný, z čoho vyplývalo, že oba korene sú rovnakého znamienka, budú teraz korene opačného znamienka: $x_1 = -2$ a $x_2 = 3$. Teda $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$. ♡

8.4 Nerovnice

Úlohy, v ktorých treba určiť v danej číselnej množine všetky prvky spĺňajúce dané nerovnosti medzi dvoma výrazmi, nazývame **nerovnice**. Nerovnicou s premennou $x \in \mathbb{R}$ je napríklad zápis $3(x-1) > 2x+5$. Výraz $3(x-1)$ tvorí ľavú stranu a výraz $2x+5$ pravú stranu tejto nerovnice.

Pri nerovniciach sú dôležité tieto pojmy:

- **obor nerovnice** (označenie $\mathcal{O}$): je to číselná množina, v ktorej hľadáme prvky spĺňajúce danú nerovnosť[5];
- **definičný obor nerovnice** (označenie $\mathcal{D}$): je to číselná podmnožina množiny $\mathcal{O}$, v ktorej majú všetky výrazy v nerovnici zmysel;
- **množina riešení** alebo **koreňov nerovnice** (označenie $\mathcal{K}$): je to množina všetkých tých prvkov množiny $\mathcal{D}$, ktoré spĺňajú požadovanú nerovnosť.

Zrejme platí $\mathcal{K} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{O}$.

Pri riešení nerovníc obyčajne používame tieto ekvivalentné úpravy nerovníc:

1. Nahradenie ľubovoľnej strany nerovnice výrazom, ktorý sa jej na $\mathcal{D}$ rovná.
2. Pripočítanie výrazu, ktorý je definovaný na $\mathcal{D}$, k obidvom stranám nerovnice.
3. Vynásobenie obidvoch strán nerovnice výrazom, ktorý na $\mathcal{D}$ nadobúda
   - kladné hodnoty,

[5] My sústredíme pozornosť na prípad, keď $\mathcal{O}$ je množina reálnych čísel $\mathbb{R}$.

- záporné hodnoty a súčasne „obrátime“ znak nerovnosti.

4. Ak obidve strany nerovnice nadobúdajú na $\mathcal{D}$ nezáporné hodnoty, tak
   - umocnenie obidvoch strán nerovnice na druhú, štvrtú atď.,
   - párne odmocnenie obidvoch strán nerovnice.
5. Nepárne umocnenie a odmocnenie oboch strán nerovnice.

Vhodná metóda na riešenie nerovníc v obore reálnych čísel je tzv. **metóda nulových bodov** nazývaná tiež **intervalová metóda**. Jednotlivé kroky algoritmu, podľa ktorého postupujeme, sú vysvetlené pri riešení nasledujúceho príkladu.

Príklad 8.4.1 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnicu*

$$\frac{5-x}{x-1}+\frac{1+4x}{2(x+2)}<1.$$

Riešenie. Vysvetlíme si jednotlivé kroky intervalovej metódy.

1. **„Vyrobíme“ si na jednej strane nerovnice nulu**, t. j. prenesieme pomocou ekvivalentnej úpravy (2.) výrazy jednej strany nerovnice na druhú starnu. V našom prípade stačí k obidvom stranám nerovnice pripočítať číslo (-1). Dostaneme nerovnicu s nulou na pravej strane

$$\frac{5-x}{x-1}+\frac{1+4x}{2(x+2)}-1<0.$$

2. **Upravíme nenulovú stranu nerovnice na jeden zlomok** $\frac{V_1(x)}{V_2(x)}$ tak, že jednotlivé sčítance dáme na spoločný menovateľ. V našom prípade dostaneme ekvivalentnú nerovnicu

$$\frac{x+23}{2(x-1)(x+2)}<0$$

čo je nerovnica typu

$$V(x)=\frac{V_1(x)}{V_2(x)}<0, \tag{15}$$

kde $V_1(x)=x+23$ a $V_2(x)=2(x-1)(x+2)$.

3. **Určíme nulové body výrazov** $V_1(x)$ **a** $V_2(x)$, t. j. **vyriešime rovnice** $V_1(x)=0$, resp. $V_2(x)=0$. Nech $\mathcal{K}_1$, resp. $\mathcal{K}_2$ sú ich riešeniami. V našom príklade riešime rovnice:

$$x+23=0, \qquad\qquad 2(x-1)(x+2)=0,$$

a teda $\mathcal{K}_1=\{-23\}$ a $\mathcal{K}_2=\{1;-2\}$. Je vhodné upraviť pri tom výrazy na súčin koreňových činiteľov (viď podkapitola rovnice).

4. **Na číselnej osi znázorníme nulové body**
– $\mathcal{K}_2$ menovateľa $V_2(x)$ prázdnymi krúžkami[6]
– $\mathcal{K}_1$ čitateľa $V_1(x)$

   - prázdnymi krúžkami v prípade ostrej nerovnice typu $<$ alebo $>$;
   - plnými krúžkami v prípade nerovnice typu $\leqq$ alebo $\geqq$.

   V našom prípade ide o ostrú nerovnicu, a preto znázorníme na číselnej osi všetky body $\mathcal{K}_1 = \{-23\}$ a $\mathcal{K}_2 = \{1; -2\}$ prázdnymi krúžkami (pozri obr. 35):

Obr. 35: Ilustrácia intervalovej metódy

5. **Vyčíslime hodnotu** $V(x) = \dfrac{V_1(x)}{V_2(x)}$ **v ľubovoľnom vybranom vnútornom bode konkrétneho intervalu** (na ktoré nám rozdelili číselnú os body v predchádzajúcom kroku) **a tak určíme znamienko výrazu** $V(x)$ **na danom intervale, ktoré vyznačíme znakom** $\oplus$**, resp.** $\ominus$.

   V našom príklade sme dostali otvorené intervaly $(-\infty; -23)$, $(-23; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; +\infty)$. Z prvého intervalu $(-\infty; -23)$ vyberieme napr. číslo -24 a vyčíslime v ňom hodnotu výrazu[7] $V(x) = (x + 23)/[2(x - 1)(x + 2)]$. Vyšlo nám záporné číslo, a preto sme na obr. 35 označili interval $(-\infty; -23)$ znakom $\ominus$. Obdobným spôsobom postupujeme aj pre ostatné intervaly. Z druhého intervalu vyberieme číslo -3 a zistíme, že $V(-3) > 0$, a preto je na obr. 35 interval $(-23; -2)$ označený znakom $\oplus$. Z tretieho intervalu vyberieme číslo 0 a zistíme, že $V(0) < 0$, a preto sme priradili intervalu $(-23; -2)$ znak $\ominus$. Zo štvrtého intervalu vyberieme číslo 2 a zistíme, že $V(2) > 0$, a teda pre interval $(-23; -2)$ máme $\oplus$.

6. **Z číselnej osi získame samotné riešenie nerovnice.** Ak daná nerovnica má po kroku 2 tvar

   - $V(x) > 0$, resp. $V(x) \geqq 0$[8], tak jej riešením je zjednotenie všetkých intervalov, ktoré sme v kroku 5 označili znakom $\oplus$;

[6] „Prázdny krúžok“ znamená, že zodpovedajúce číslo nepatrí do riešenia danej nerovnice; „plný krúžok“ znamená, že zodpovedajúce číslo patrí do riešenia danej nerovnice.

[7] Nezaujíma nás presná hodnota $V(-24)$; dôležité je to, či táto hodnota je kladná alebo záporná.

[8] V takom prípade patria do množiny riešení aj tie krajné body, ktoré sme v kroku (4.) znázornili plnými krúžkami.

- $V(x) < 0$, resp. $V(x) \leqq 0$[8], tak jej riešením je zjednotenie všetkých intervalov, ktoré sme označili znakom $\ominus$.

V našom príklade na základe (15) chceme zistiť, kedy je splnená nerovnica $V(x) < 0$. Preto riešením danej nerovnice je zjednotenie intervalov, ktoré sú označené znakom $\ominus$. Teda

$$\mathcal{K} = (-\infty; -23) \cup (-2; 1). \qquad \heartsuit$$

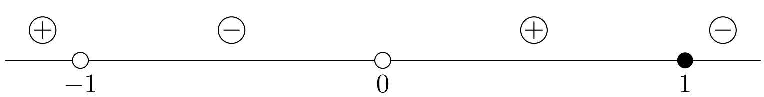
Príklad 8.4.2 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnicu*

$$\frac{2}{x} - \frac{1-x}{1+x} \geqq \frac{1+x}{x}\,.$$

Riešenie. Prvé dva kroky metódy nulových bodov (pozri predchádzajúci príklad) sú jednoduché: po prenesení výrazu $\frac{1+x}{x}$ na ľavú stranu nerovnice a následnej úprave ľavej strany na spoločný menovateľ dostaneme ekvivalentnú nerovnicu

$$\frac{1-x}{x(1+x)} \geqq 0, \qquad \text{čo je nerovnica typu} \qquad V(x) = \frac{V_1(x)}{V_2(x)} \geqq 0, \tag{16}$$

kde $V_1(x) = 1 - x$ a $V_2(x) = x(1+x)$.
V treťom kroku určíme korene čitateľa, resp. menovateľa, t. j. vyriešime rovnicu $1 - x = 0$, resp. a $x(1+x) = 0$. Je zrejmé, že ich korene sú $\mathcal{K}_1 = \{1\}$, resp. $\mathcal{K}_2 = \{0; -1\}$.
Vo štvrtom kroku znázorníme na číselnej osi korene menovateľa (čísla 0 a -1) prázdnym krúžkom a koreň čitateľa (číslo 1) plným krúžkom (lebo daná nerovnica je „neostrá“, t. j. je typu $\geqq$):



Obr. 36: Ilustrácia intervalovej metódy

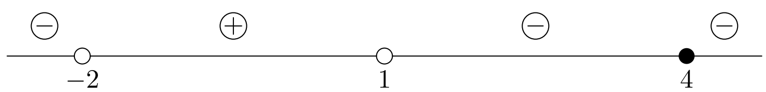
V piatom kroku vyčíslením hodnoty výrazu $V(x) = (1-x)/[x(1+x)]$ vo vhodne vybratých bodoch jednotlivých intervalov (napríklad -2; $-1/2$; $1/2$; 2) získame označenie týchto intervalov znakom $\oplus$ alebo $\ominus$.
Na záver si uvedomíme, že riešením nerovnice (16) je množina tých hodnôt x, pre ktoré je výraz $V(x)$ nezáporný. Tomu zodpovedá zjednotenie všetkých intervalov, ktoré sme na obr. 36 označili znakom $\oplus$. Teda riešením danej nerovnice je množina

$$\mathcal{K} = (-\infty; -1) \cup (0; 1\rangle. \qquad \heartsuit$$

Príklad 8.4.3 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnicu*

$$0 \geqq \frac{(x-4)^2(x+2)}{(x+2)^2(1-x)^3}.$$

Riešenie. Nerovnica má na jednej strane nulu a na jej druhej strane je zlomok $V(x) = \dfrac{V_1(x)}{V_2(x)}$, v ktorom $V_1(x) = (x-4)^2(x+2)$ a $V_2(x) = (x+2)^2 \cdot (1-x)^3$ sú už v tvare súčinu koreňových činiteľov. Korene polynómov V_1, resp. V_2 sú $\mathcal{K}_1 = \{-2; 4\}$, resp. $\mathcal{K}_2 = \{-2; 1\}$. Pri ich znázornení na číselnej osi označíme body -2 a 1 prázdnym krúžkom a bod 4 plným krúžkom (ide o neostrú nerovnicu).



Postupným dosadením zistíme znamienka na jednotlivých intervaloch a následne určíme riešenie danej nerovnice $\mathcal{K} = (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$. ♡

Výhody metódy nulových bodov môžeme použiť aj pri riešení rôznych algebrických nerovníc, napr. kvadratických nerovníc.

Príklad 8.4.4 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnice:*

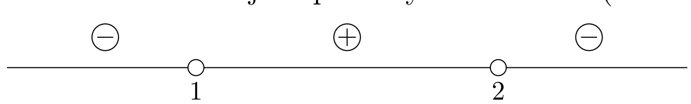
a) $3x - x^2 - 2 < 0$, b) $x^2 - 4x + 4 \leqq 0$, c) $x^4 - 3x^2 - 4 \leqq 0$.

Riešenie. Vo všetkých troch prípadoch použijeme metódu nulových bodov, pričom $V_2(x) = 1$ a preto je $\mathcal{K}_2 = \emptyset$.

a) Určíme množinu $\mathcal{K}_1$, t. j. vypočítame korene zodpovedajúcej kvadratickej rovnice $-x^2 + 3x - 2 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \begin{cases} 1, \\ 2 \end{cases}$$

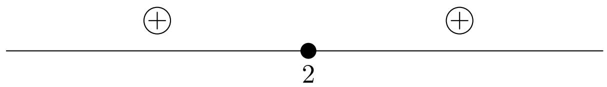
a znázorníme ich na číselnej osi prázdnymi krúžkami (nerovnica je ostrá)



Vyčíslením hodnoty výrazu $P(x) = -x^2+3x-2 = (x-1)(x-2)$ v bodoch 0, $3/2$ a 3 dostaneme znamienka na jednotlivých intervaloch. Riešením danej nerovnice je zjednotenie intervalov, ktoré sme označili symbolom $\ominus$, t. j. množina

$$\mathcal{K} = (-\infty; 1) \cup (2; \infty).$$

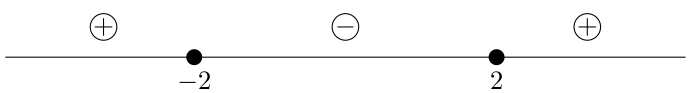
b) Zodpovedajúca kvadratická rovnica $x^2 - 4x + 4 = 0$ má jediný reálny koreň, a to číslo 2. Vyznačíme ho na číselnej osi plným krúžkom (nerovnica je neostrá). Číselnú os rozdelí na dva intervaly.



Obr. 37: Intervalová metóda

Výraz $P(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ je v tvare úplného štvorca a preto nadobúda vo zvolených bodoch 0 a 3 kladné hodnoty (obr. 37). Riešením danej nerovnice je zjednotenie intervalov, ktoré sme označili symbolom $\ominus$. Žiaden interval nie je takto označený. Ale bod 2 je s plným krúžkom, a preto riešením danej kvadratickej nerovnice je množina $\mathcal{K} = \{2\}$.

c) Zodpovedajúcu rovnicu $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ nazývame **bikvadratickou rovnicou** a pomocou substitúcie $x^2 = t$ určíme jej reálne korene. Dostaneme $\mathcal{K} = \{\pm 2\}$. Čísla ± 2 vyznačíme na číselnej osi plnými krúžkami a zistíme znamienka polynómu $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4 = (x-2)(x+2)(x^2+1)$ na získaných intervaloch.



Napr. $P(-3) = 50 > 0$, $P(0) = -4 < 0$ a $P(3) = 50 > 0$, čo vyznačíme na obrázku. Riešením danej nerovnice je množina $\mathcal{K} = \langle -2; 2 \rangle$. ♡

Poznámka 8.2 *Všimnime si, že po rozklade $P(x)$ na súčin koreňových činiteľov nad $\mathbb{R}$ vznikol výraz (x^2+1), ktorý sa už nedá rozložiť nad $\mathbb{R}$ (je v tvare súčtu úplných štvorcov) a nadobúda len kladné hodnoty, t. j. nemení znamienko.*

8.5 Sústavy lineárnych rovníc

8.5.1 Sčítacia a dosadzovacia metóda

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať sústavami lineárnych algebrických rovníc, ktoré budú mať niektorý z nasledujúcich tvarov

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2, \end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

V prvom prípade sa jedná o **sústavu dvoch lineárnych algebrických rovníc o dvoch neznámych**, v druhom prípade o **sústavu troch lineárnych algebrických rovníc o troch neznámych**. Čísla a_{ij} nazývame koeficientami sústavy, x_1, x_2, x_3 nazývame neznámymi a b_1, b_2, b_3 absolútnymi členmi (pravými stranami) sústavy.

Definícia 8.9 ***Riešením sústavy*** *lineárnych algebrických rovníc nazývame také hodnoty* x_1, x_2, x_3, *ktoré vyhovujú všetkýn rovniciam sústavy.*

Z hľadiska riešiteľnosti sústavy môžu nastať prípady:

- sústava má práve jedno riešenie,
- sústava má nekonečne veľa riešení,
- sústava nemá riešenie.

Postup, ktorým dostaneme riešenie sústavy lineárnych rovníc, spočíva obyčajne vo vylúčení jednej neznámej v niektorej z rovníc sústavy. Na to slúžia napríklad tieto metódy:

a) **sčítacia metóda** – rovnice sústavy násobíme vhodne zvolenými číslami tak, aby sa po sčítaní rovníc jedna neznáma vylúčila;

b) **dosadzovacia metóda** – vyjadríme jednu neznámu z jednej rovnice sústavy a dosadíme do ostatných rovníc sústavy, čím sa táto neznáma z týchto rovníc vylúči.

Príklad 8.5.1 *Riešme v* $\mathbb{R}^2$, *resp. v* $\mathbb{R}^3$, *sústavy rovníc:*

a) $\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 8y & = & 15 \\ 2x & - & 7y & = & 0 \end{array}$, b) $\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 8x_2 & = & 18 \end{array}$,

c) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \end{array}$, d) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & + & z & = & -10 \\ x & + & y & + & 3z & = & -10 \end{array}$.

Riešenie.

a) Riešime sčítacou metódou

$$\begin{array}{rcll}
3x-8y &=& 15 & /\cdot 2 \quad \text{prvú rovnicu násobíme číslom 2}\\
2x-7y &=& 0 & /\cdot(-3) \quad \text{druhú rovnicu násobíme číslom } -3\\
\hline
6x-16y &=& 30 & \\
-6x+21y &=& 0 & \quad \text{obidve rovnice sčítame}\\
\hline
5y &=& 30 & \\
y &=& 6. &
\end{array}$$

Ak dosadíme napr. do druhej rovnice $2x-7y=0$ za y získanú hodnotu 6, tak dostaneme $2x-7\cdot 6=0$, t. j. $x=21$. Sústava má práve jedno riešenie. Riešením sústavy je usporiadaná dvojica $[x,y]=[21,6]$.

b) Riešime opäť sčítacou metódou

$$\begin{array}{rcll}
3x_1-4x_2 &=& 6 & /\cdot(-2) \quad \text{prvú rovnicu násobíme číslom -2}\\
6x_1-8x_2 &=& 18 & \\
\hline
-6x_1+8x_2 &=& \text{-12} & \\
6x_1-8x_2 &=& 18 & \quad \text{obidve rovnice sčítame}\\
\hline
0 &=& 6. &
\end{array}$$

Dostali sme rovnicu, ktorá pre žiadne hodnoty x_1 a x_2 nemôže platiť. Sústava preto nemá riešenie.

c) Riešime dosadzovacou metódou. Napr. z druhej rovnice vyjadríme $x_3 = 5-x_1+2x_2$. Po dosadení za x_3 do prvej a tretej rovnice dostaneme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych

$$\begin{array}{rcll}
3x_1+x_2-4(5-x_1+2x_2) &=& 1 & \\
2x_1-x_2-3(5-x_1+2x_2) &=& 4 & \\
\hline
7x_1-7x_2 &=& 21 & /\cdot\frac{1}{7}\\
5x_1-7x_2 &=& 19 & \\
\hline
x_1-x_2 &=& 3 & \\
5x_1-7x_2 &=& 19 &
\end{array}$$

Pokračujeme dosadzovacou metódou a vyjadríme z prvej rovnice napr. x_2 a dosadíme do druhej rovnice

$$\begin{array}{rcl}
x_2 &=& x_1-3\\
5x_1-7(x_1-3) &=& 19\\
\hline
x_1 &=& 1\\
x_2 &=& x_1-3=-2\\
x_3 &=& 5-x_1+2x_2=0
\end{array}$$

Sústava má práve jedno riešenie $[x_1,x_2,x_3]=[1,-2,0]$.

d) Riešime dosadzovacou metódou. Napr. z prvej rovnice je $x = z - 2y$. Po dosadení za x do druhej a tretej rovnice dostaneme

$$\begin{array}{rcll}
3(z-2y)+5y+z & = & -10 & \\
(z-2y)+y+3z & = & -10 & \\
\hline
-y+4z & = & -10 & /\cdot(-1) \quad \star \\
-y+4z & = & -10 & \\
\hline
0 & = & 0. &
\end{array}$$

Sústava má nekonečne veľa riešení, ktoré vyjadríme pomocou tzv. voľnej premennej. Zvolíme za voľnú premennú napr. $z = t$, kde t je ľubovoľné reálne číslo. Podobne ako v predchádzajúcom príklade budeme postupne dosadzovať. Z rovnice označenej symbolom $\star$ dostaneme vzťah $y = 4t+10$. Napokon z prvej rovnice danej sústavy je $x = z - 2y = t - 2(4t + 10) = -7t - 20$. Všetky riešenia danej sústavy môžeme zapísať v tvare

$$[x, y, z] = [-7t-20,\ 4t+10,\ t], \tag{17}$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné reálne číslo. Sústava má teda nekonečne veľa riešení. ♡

8.6 Exponenciálne a logaritmické rovnice

8.6.1 Exponenciálne rovnice

Algoritmus riešenia exponenciálnych rovníc:

Pri riešení **exponenciálnych rovníc** (t. j. rovníc, v ktorých sa vyskytujú mocniny s neznámou v exponente) zvyčajne upravíme rovnicu pomocou vety 8.4 podľa typu na niektorý z nasledujúcich tvarov

- rovnosti dvoch výrazov s rovnakým základom (pozri príklady 8.6.1 a 8.6.2) a potom použijeme túto vlastnosť exponenciálnych výrazov: pre ľubovoľné reálne čísla x_1 a x_2 platí:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2; \tag{18}$$

- v ktorom môžeme použiť substitúciu – pozri príklad 8.6.3;
- v ktorom môžeme obe strany rovnice „logaritmovať" – k tomu potrebujeme poznatky o logaritmoch (pozri príklad 8.6.7)

Príklad 8.6.1 *Vyriešme v $\mathbb{R}$ rovnice*

a) $2^x = 16$, b) $2^x = 1$, c) $2^x = -16$.

Riešenie.

a) Pravú stranu rovnice vieme prepísať do tvaru $16 = 2^4$ a dostaneme ekvivalentnú rovnicu $2^x = 2^4$. Podľa (18) je $x = 4$.

b) Podobne ako v predchádzajúcom prípade prepíšeme pravú stranu do tvaru $1 = 2^0$, dostaneme ekvivalentnú rovnicu $2^x = 2^0$. Podľa (18) je $x = 0$.

c) V tomto prípade si stačí uvedomiť, že obor hodnôt exponenciálnych funkcií je množina kladných čísel a rovnica teda nemôže byť splnená pre žiadne reálne číslo. Množina riešení je prázdna $\mathcal{K} = \emptyset$. ♡

Príklad 8.6.2 *Vyriešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu*

$$9^{v+2} + 5 \cdot 9^{v+1} = 14.$$

Riešenie. Keďže $9^{v+2} = 9^v \cdot 9^2$ a $9^{v+1} = 9^v \cdot 9^1$, môžeme ľavú stranu danej rovnice postupne zjednodušiť

$$9^{v+2} + 5 \cdot 9^{v+1} = 9^v \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^v \cdot 9^1 = 9^v(9^2 + 5 \cdot 9^1) = 126 \cdot 9^v$$

a dostaneme ekvivalentnú rovnicu

$$126 \cdot 9^v = 14.$$

Po predelení číslom 126 dostaneme rovnicu $9^v = \frac{1}{9}$. Prepíšeme pravú stranu do tvaru $\frac{1}{9} = 9^{-1}$ a podľa (18) dostávame, že riešením danej rovnice je číslo $v = -1$. ♡

Príklad 8.6.3 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu*

$$3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x = 5.$$

Riešenie. Ak označíme $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t$ (teda zavedieme substitúciu), tak získame rovnicu

$$3t + \frac{2}{t} = 5$$

a odtiaľ po vynásobení premennou t a prenesení všetkých členov na ľavú stranu dostaneme kvadratickú rovnicu $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Jej riešením je $t = 1$ a $t = 2/3$. Na základe použitej substitúcie a podľa príkladu 8.6.1 je

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

a

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\,.$$

Takto $\mathcal{K} = \{0; 1/2\}$. ♡

8.6.2 Logaritmické rovnice

Definícia 8.10 *Ak $a > 0$, $a \neq 1$ a x je ľubovoľné kladné reálne číslo, tak existuje jediné reálne číslo ℓ, také že $a^\ell = x$. Toto jediné reálne číslo nazývame* **logaritmom čísla x pri základe** *a, označujeme ho zápisom $\log_a x$.*

Je potrebné dobre si zapamätať podstatu tejto definície:

$$\log_a x = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad a^\ell = x. \tag{19}$$

Teda číslo a vystupuje v základe logaritmu $\log_a x$ a aj v základe exponenciálneho výrazu a^ℓ.

Príklad 8.6.4 *Určme hodnoty:*

a) $\log_3 81$, b) $\log_{10} 0{,}001$, c) $\log_{\frac{1}{2}} 8$.

Riešenie.

a) Na základe (19) je

$$\log_3 81 = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad 3^\ell = 81.$$

Ale $81 = 3^4$, a tak poslednú rovnicu môžeme zapísať v tvare $3^\ell = 3^4$. Odtiaľ $\ell = 4$ a teda $\log_3 81 = 4$. Výsledok sme mohli nájsť aj na základe otázky: „3 na koľkú je 81“? Odpoveď je: na štvrtú. Preto $\log_3 81 = 4$.

b) Keďže $0{,}001 = 10^{-3}$, tak $\log_{10} 0{,}001 = -3$.

c) Mohli by sme položiť otázku: $\frac{1}{2}$ na koľkú je 8? Ak by sme nevedeli odpoveď, tak by sme použili opäť (19) a dostali by sme

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^\ell = 8.$$

Ale

$$8 = 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3},$$

a teda $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$. ♡

Základné vlastnosti logaritmu:

V1: Pre každé $a > 0$, $a \neq 1$, a pre všetky kladné reálne čísla r, s platí

$$\log_a (r \cdot s) = \log_a r + \log_a s; \tag{20}$$

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s; \tag{21}$$

$$\log_a r^t = t \cdot \log_a r. \tag{22}$$

V2: Nech a, b sú ľubovoľné čísla množiny $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ a r číslo z množiny $\mathbb{R}^+$. Potom

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}\,. \tag{23}$$

V3: Pre každé $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ a pre všetky $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a x_1 \neq \log_a x_2,$$

čiže $$\log_a x_1 = \log_a x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Poznámka 8.3 *Prechodu od rovnosti $x_1 = x_2$ k rovnosti $\log_a x_1 = \log_a x_2$ (viď V3) hovoríme „logaritmovanie rovnosti $x_1 = x_2$“. Tu je potrebné požadovať, aby x_1 a x_2 nadobúdali len kladné hodnoty. Ak teda logaritmujeme nejakú rovnicu, tak je nevyhnutná skúška správnosti pre vypočítané hodnoty (ináč by sme museli nájsť množinu, na ktorej sú obe strany rovnice kladné).*

Poznámka 8.4 *V zápise „$\log_{10} x$“ zvyčajne vynechávame základ „10“ a píšeme len $\log x$, občas sa môžete stretnúť aj s označením $\lg x$. Namiesto $\log_e x$ (tzv. prirodzený logaritmus – logaritmus naturalis, ktorého základom je Eulerovo číslo $\mathrm{e} \doteq 2{,}71828$) zvykneme písať $\ln x$. A aby to nebolo úplne jednoduché, informatici zvyknú písať $\log x$ namiesto $\log_2 x$ a vo viacerých programovacích jazykoch (napr. C, Matlab, Maxima, …) sa označenie $\log x$ používa pre prirodzený logaritmus!*

Algoritmus riešenia logaritmických rovníc:

Pri riešení **logaritmických rovníc** (t. j. rovníc, v ktorých vystupuje logaritmus výrazu s neznámou) zvyčajne pomocou vlastností V1 a V2 upravíme rovnicu na tvar

- rovnosti dvoch logaritmov s rovnakým základom (pozri príklad 8.6.6) a potom na odstránenie logaritmov (tzv. „odlogaritmovanie“) použijeme vlastnosť V3 (t. j. „exponovanie“):

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2, \tag{24}$$

- v ktorom môžeme obe strany rovnice „logaritmovať“ (pozri príklad 8.6.7).

Príklad 8.6.5 *Riešme nasledujúce rovnice*

a) $\log_2 8 = x$, b) $\log_2 x = 3$, c) $\log_x 8 = 3$.

Riešenie. Na základe (22) a (19) je

a) $\log_2 8 = x \iff \log_2 2^3 = x \iff 3\log_2 2 = x \iff x = 3.$

b) $\log_2 x = 3 \iff 2^3 = x \iff x = 8.$

c) $\log_x 8 = 3 \iff x^3 = 8 \iff x = 2.$ ♡

Príklad 8.6.6 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu*

$$\log(x-2) + \log(8x+4) = 3.$$

Riešenie. Pretože $3 = \log 10^3$, tak úpravou ľavej strany rovnice podľa vlastnosti V1 vzťahu (20) dostávame

$$\log[(x-2)(8x+4)] = \log 1000.$$

„Odlogaritmovaním“ tejto rovnice dostaneme $(x-2)(8x+4) = 1000$, čo je kvadratická rovnica. Jej riešením je $x_1 = 12$ a $x_2 = -21/2$.
Keďže sme použili neekvivalentnú úpravu rovnice, musíme urobiť skúšku správnosti. Pre $x = 12$ je hodnota ľavej strany rovnice

$$L(12) = \log(12-2) + \log(8 \cdot 12 + 4) = \log 10 + \log 100 = 1 + 2 = 3,$$

a teda $12 \in \mathcal{K}$.
Naopak $x = -21/2$ nie je riešením danej rovnice, lebo v tomto bode $\log(x-2)$ neexistuje (dostávame logaritmus záporného čísla). Záver: $\mathcal{K} = \{12\}$. ♡

Vo finančnej matematike sa môžeme často stretnúť s exponenciálnymi rovnicami typu ako v nasledujúcom príklade. Pri výpočte musíme použiť logaritmovanie.

Príklad 8.6.7 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu*

$$1\ 000(1 + \frac{0{,}08}{4})^{4n} = 1\ 200.$$

Riešenie. Je to exponenciálna rovnica. Upravíme jej ľavú stranu

$$1\ 000(1 + \frac{0{,}08}{4})^{4n} = 1\ 000 \cdot 1{,}02^{4n}$$

a po predelení 1 000 dostaneme rovnicu

$$1{,}02^{4n} = 1{,}2.$$

Poslednú rovnicu už môžeme „logaritmovať“. Zvolíme za základ logaritmu Eulerovo číslo e – potom logaritmus podľa dohody označujeme ln. Podľa vlastnosti V1 vzťahu (22) dostaneme

$$\ln 1{,}02^{4n} = \ln 1{,}2 \iff 4n \cdot \ln 1{,}02 = \ln 1{,}2$$

odkiaľ

$$n = \frac{\ln 1{,}2}{4 \cdot \ln 1{,}02} \doteq 2{,}3017.$$

Skúšku správnosti nemusíme urobiť, lebo sme použili ekvivalentné úpravy. ♡

8.7 Goniometrické rovnice

Budeme sa zaoberať len takými tzv. **goniometrickými rovnicami**, v ktorých neznáma vystupuje výlučne v argumente funkcií sínus, kosínus, tangens a kotangens.[9]

Základné vlastnosti goniometrických funkcií:

- Pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{25}$$

- Pre každé x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ platí
$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \sin x_2 \cos x_1; \tag{26}$$
$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2. \tag{27}$$

- Pre každé reálne číslo x platí
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \tag{28}$$
$$\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \qquad \left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}. \tag{29}$$

Algoritmus riešenia goniometrických rovníc:

- Pomocou vzťahov (25) až (29) upravíme rovnicu tak, že (pozri riešené príklady 8.7.2 a 8.7.3)
  - v nej budú vystupovať len goniometrické výrazy s rovnakým argumentom;
  - v nej bude vystupovať len jeden goniometrický výraz (musíme pritom zachovať rovnaký argument);
- zavedieme substitúciu, dostaneme rovnicu známeho typu, ktorú vyriešime;
- vrátime sa k pôvodnej premennej, čo nás dovedie k jednoduchým goniometrickým rovniciam.

Na získanie všetkých riešení je potrebné vziať do úvahy **periódy jednotlivých goniometrických funkcií**:

- pre každé $k \in \mathbb{Z}$ a pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:
$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x \qquad \text{a} \qquad \cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x; \tag{30}$$

[9]Pod argumentom funkcie rozumieme jej nezávislú premennú.

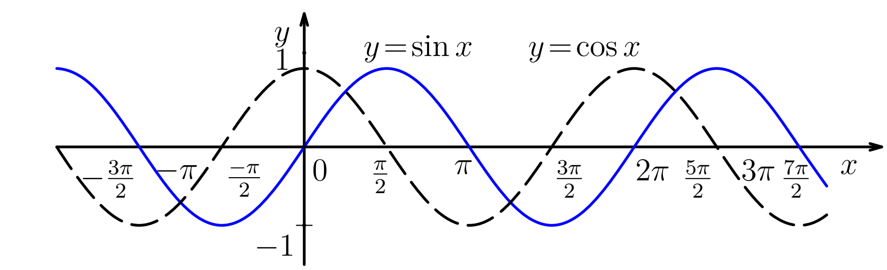
- pre každé $k \in \mathbb{Z}$ a pre každé $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ platí

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x; \tag{31}$$

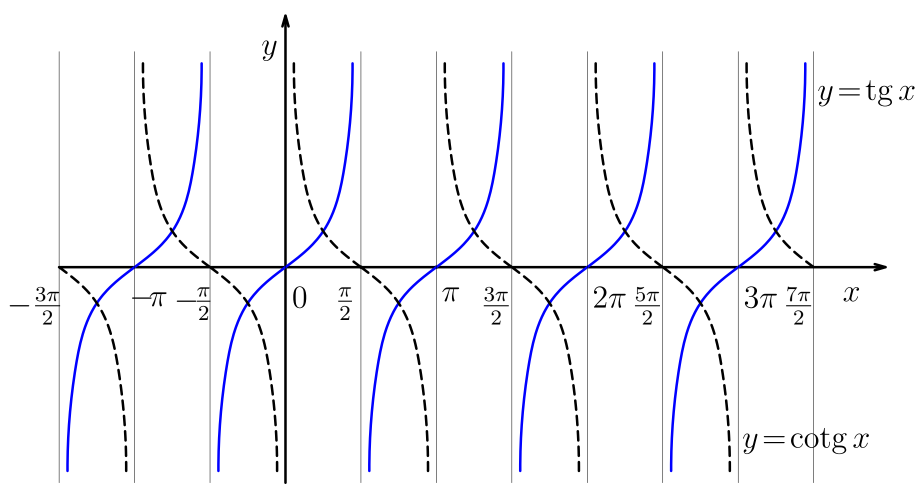
- pre každé $k \in \mathbb{Z}$ a pre každé $x \neq k\pi$

$$\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x. \tag{32}$$

V prvom rade je potrebné vedieť vyriešiť **jednoduché goniometrické rovnice** typu $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, resp. $\operatorname{cotg} = a$, kde $a \in \mathbb{R}$. Riešenie takýchto rovníc môžeme dostať buď pomocou grafov zodpovedajúcich funkcií (viď Obr. 38 a Obr. 39) alebo z jednotkovej kružnice.



Obr. 38: Grafy funkcií $\sin x$ a $\cos x$



Obr. 39: Grafy funkcií $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$

Je nepostrádateľné poznať pri tom funkčné hodnoty minimálne sínusu a kosínusu aspoň v prvom kvadrante:

sin	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

Tabuľka 1: Tabuľka funkčných hodnôt sínusu a kosínusu

Príklad 8.7.1 *Riešme nasledujúce rovnice*

$$\text{a) } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{b) } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ c) } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{d) } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Riešenie.

a) Funkcia sínus nadobúda kladnú hodnotu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ v

- I. kvadrante pre $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$,
- II. kvadrante pre $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$.

Na základe vzťahu (30) dostávame potom všetky riešenia pre $k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{a} \qquad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

b) Riešenie druhej rovnice určíme na základe riešenia x_1 prvej rovnice. Funkcia sínus nadobúda zápornú hodnotu $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ v

- III. kvadrante pre $x_3 = \pi + x_1 = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\pi$,
- IV. kvadrante pre $x_4 = 2\pi - x_1 = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{3}\pi$.

Na základe vzťahu (30) dostávame potom všetky riešenia pre $k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \qquad \text{a} \qquad x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi.$$

c) Funkcia kosínus nadobúda kladnú hodnotu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ v

- I. kvadrante pre $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$,

- IV. kvadrante pre $x_4 = 2\pi - x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$.

Na základe vzťahu (30) dostávame potom všetky riešenia pre $k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{a} \qquad x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi.$$

d) Funkcia kosínus nadobúda zápornú hodnotu $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ v

- II. kvadrante pre $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$,
- III. kvadrante pre $x_3 = \pi + x_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$.

Na základe vzťahu (30) dostávame potom všetky riešenia pre $k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \qquad \text{a} \qquad x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi.$$ ♡

Poznámka 8.5 *Pri zápise riešení sme v predchádzajúcom príklade použili indexy, ktoré zodpovedali kvadrantu, v ktorom sa nachádzali (napr. x_4 je riešenie zo IV. kvadrantu). Vzťahy pre riešenia x_2, x_3 a x_4 sme určili z grafov funkcií sínus a kosínus a odporúčame zapamätať si ich.*

Príklad 8.7.2 *Vyriešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*

$$3\cos^2 x - \sin x + 1 = 0.$$

Riešenie. Nahradíme na základe vzťahu (25) výraz $\cos^2 x$, t. j. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Po dosadení do rovnice a jednoduchej úprave dostaneme

$$3\sin^2 x + \sin x - 4 = 0,$$

čo je rovnica, v ktorej neznáma vystupuje len vo výraze $\sin x$. Preto po substitúcii $y = \sin x$ nadobudne tvar kvadratickej rovnice $3y^2 + y - 4 = 0$. Ľahko určíme jej korene: $y_1 = -\frac{4}{3}$ a $y_2 = 1$. Vrátime sa k substitúcii:

- pre $y_1 = -\frac{4}{3}$ dostávame rovnicu $\sin x = -\frac{4}{3}$, ktorá nemá riešenie, keďže hodnoty funkcie sínus sú z intervalu $< -1, 1 >$;
- pre $y_1 = 1$ dostávame $\sin x = 1$. Táto rovnica má na intervale $\langle 0; 2\pi)$ jediné riešenie $x = \frac{\pi}{2}$. Vzhľadom na (30) sa každé riešenie danej rovnice dá zapísať v tvare $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. ♡

Príklad 8.7.3 *Vyriešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu*

$$\cos 2x = \cos x.$$

Riešenie. Máme rovnicu s rôznymi argumentami: $2x$ a x. Na základe (28) je $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, To nám umožní upraviť danú rovnicu na rovnicu s rovnakým argumentom x na tvar

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x. \tag{33}$$

V rámci druhého kroku opäť použijeme základnú goniometrickú identitu (25), z ktorej je $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Odtiaľ rovnica (33) po jednoduchej úprave nadobudne tvar

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Ak tu položíme $y = \cos x$, tak dostaneme kvadratickú rovnicu $2y^2 - y - 1 = 0$, ktorej korene sú $y_1 = 1$ a $y_2 = -\frac{1}{2}$. Vzhľadom na použitú substitúciu vyriešime rovnice

- $\cos x = 1$. Z grafu funkcie $y = \cos x$ vidno, že jej riešením je množina

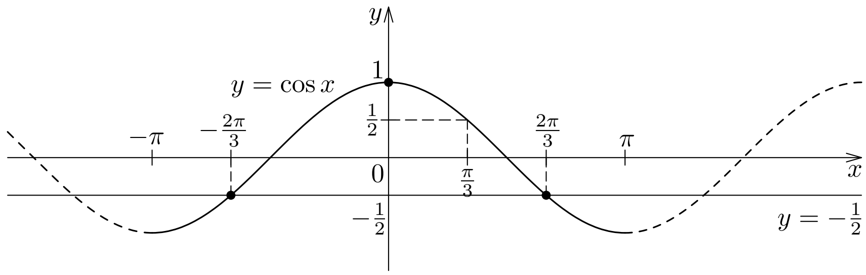
  $$\mathcal{K}_1 = \{x \in \mathbb{R} : \; x = 2k\pi\}.$$

- $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. Rovnicu vyriešime analogicky ako v príklade 8.7.1. Načrtneme graf funkcie $y = \cos x$ a priamku $y = -\dfrac{1}{2}$ (viď Obr. 40). Je zrejmé, že riešením našej rovnice $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ sú x-ové súradnice priesečníkov grafu a priamky. Tých je nekonečne veľa. Z tabuľky 1 na strane 148 by sme mali vedieť, že $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. Teda $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$. Ak sa lepšie prizrieme na Obr. 40, tak ľahko zistíme, že na intervale $(-\pi; \pi\rangle$ sú x-ové súradnice spomínaných priesečníkov rovné $x = \dfrac{\pm 2\pi}{3}$, resp. $x_2 = \pi - x_1 = \dfrac{2\pi}{3}$ a $x_3 = \pi + x_1 = \dfrac{4\pi}{3}$ (čo je na základe periodickosti ekvivalent riešenia $x = -\dfrac{2\pi}{3}$). S prihliadnutím na periódu 2π dostaneme

  $$x = \frac{\pm 2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi(3k \pm 1)}{3} \quad \text{t. j.} \quad \mathcal{K}_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : \; x = \frac{2\pi(3k \pm 1)}{3}\right\}.$$

Riešením danej rovnice je teda množina $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$. Overte, že množinu $\mathcal{K}$ môžeme zapísať v úspornejšom tvare

$$\mathcal{K} = \left\{x \in \mathbb{R} : \; x = \frac{2k\pi}{3}\right\}. \qquad \heartsuit$$



Obr. 40: Náčrt priesečníkov grafu funkcie $y = \cos x$ a priamky $y = -1/2$

8.8 Úlohy

8.1 Upravte (zjednodušte) daný číselný výraz

a) $\left(-(-3)^2 + 5^2 - 4^2 + 3^2\right)^2$,

b) $\dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2}\right) - 2}{\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)^2}$,

c) $1{,}2 + \dfrac{3}{5} - \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$,

d) $\dfrac{(-2)^3}{3^2} + \dfrac{-1^3}{9} + \left(\dfrac{2}{-3}\right)^3$,

e) $\dfrac{\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}}{\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{48}}$,

f) $\left(2^3 : 3^2 + \dfrac{1}{3^2}\right) \cdot \sqrt{16}$,

g) $\dfrac{(-0{,}6)^2 \cdot 0{,}5 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 : \frac{5}{8}}{\frac{2}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}$,

h) $\dfrac{-1}{2^2} - \left(\dfrac{-2^2}{3}\right)^2 - \dfrac{16}{(-3)^2} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$,

i) $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{7}\right)}{\left(\frac{3}{7} - 1\frac{1}{2}\right) : \frac{3}{8}}$,

j) $\sqrt{0,03 + \dfrac{1}{100}} \cdot \sqrt{10^2 - 8^2} - (\sqrt{3})^2$.

8.2 Roznásobte

a) $f(x) = -2(x^2 - 4x + 4)$,

b) $f(x) = 6\left(\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{9}x\right)$,

c) $f(x) = 7x\left(\dfrac{1}{49x^5} - \dfrac{1}{21x^4}\right)$,

d) $f(x) = \sqrt{x}\left(\dfrac{9}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt{x^3}}\right)$,

e) $f(x) = x^2\left(\dfrac{9}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt{x^3}}\right)$,

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{9}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt{x^3}}\right)$.

8.3 Upravte na súčin vyňatím pred zátvorku

a) $f(x) = 3x^2 + 6x$,

b) $f(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$,

c) $f(x) = \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{2}{3}x^2$,

d) $f(x) = 4a^2b - 6ab^2$,

e) $f(x) = 5\sqrt{x} - 10\sqrt{x^3}$,

f) $f(x) = \dfrac{9}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt{x^3}}$,

g) $f(x) = (x-y)^2 + (x-y)(x+y)$,

h) $f(x) = (x+4)(x-1) - (x-1)^2$.

8.4 Rozložte na súčin v $\mathbb{R}$

a) $f(x) = x^2 - 9$,

b) $f(x) = x^3 + 27$,

c) $f(x) = x^3 - 27$,

d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$,

e) $f(x) = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$,

f) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$,

g) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$,

h) $f(x) = x^3 + x + 2$,

i) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$,

j) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$,

k) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$,

l) $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$,

m) $f(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5$,

n) $f(x) = (6x+17)^2 - (x-3)^2$,

o) $f(x) = (x+y)^4 - (x-y)^4$,

p) $f(x) = (x-3)^3 + (x+3)^3$.

8.5 Doplňte daný výraz na štvorec

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$,

b) $f(x) = x^2 + 3x + 1$,

c) $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$,

d) $f(x) = 2 - 6x - 3x^2$,

e) $f(x) = x^2 - 2x + 2$,

f) $f(x) = x^2 + 4x - 7$,

g) $f(x) = x^2 - 5x + 1$,

h) $f(x) = x^2 + 10x + 22$,

i) $f(y) = 6y - y^2$,

j) $f(a) = 8 - 7a^2$,

k) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$,

l) $f(z) = 2 - 2z^2 - 12z$.

8.6 Upravte (zjednodušte) daný výraz

a) $\dfrac{x}{x^2-4} \cdot \dfrac{x+2}{3x}$,

b) $\dfrac{x}{x^2-6x+9} : \dfrac{5x}{3-x}$,

c) $\dfrac{\frac{2-x}{x+3}}{\frac{4-4x}{x^2+3x}}$,

d) $\dfrac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2}$,

e) $\dfrac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2}$,

f) $\dfrac{-2x(x+2) - (3-x^2)}{(x+2)^2}$,

g) $\dfrac{2x(4-x^2) - x^2(-2x)}{(4-x^2)^2}$,

h) $\dfrac{2x(x^2+4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2}$,

i) $\dfrac{2(x-1)^2 - (2x-1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$,

j) $\dfrac{3x^2 \cdot 2(x+1)^2 - x^3 \cdot 4(x+1)}{4(x+1)^4}$.

8.7 Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $\dfrac{3-x}{2} - \left(\dfrac{7-x}{3} - \dfrac{x+3}{4}\right) + \dfrac{7-x}{6} - \dfrac{9+7x}{8} + x = 0;$

b) $x - \dfrac{1-3x/2}{4} - \dfrac{2-x/4}{3} = 2;$

c) $1 + \dfrac{x}{1-2x} = \dfrac{x+3}{2x+1}\,;$

d) $\dfrac{2}{y-3} - \dfrac{1}{y+2} = \dfrac{1}{y+6}\,;$

e) $\dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-x}\,;$

f) $\dfrac{2x}{x-2} + \dfrac{1}{2-x} + 1 = \dfrac{3x+3}{x-2} + \dfrac{4}{2-x}\,;$

g) $\dfrac{1}{3-x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{2(x-3)} + \dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x-3};$

h) $\dfrac{5}{x-2} + \dfrac{3}{x-3} = \dfrac{7}{x-1}\,;$

i) $\dfrac{x}{2x+1} + \dfrac{1}{1-4x^2} = \dfrac{3x-1}{6x-3}\,;$

j) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 = \left(\dfrac{2x-1}{x-3}\right)^2;$

k) $\dfrac{4x-7}{6x-13} = \dfrac{2x-4}{3x-7}\,;$

l) $\dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{1}{x-2}\,;$

m) $\dfrac{5-x}{2x-1} = \dfrac{15-4x}{3x+1}$;

n) $\dfrac{3x-2}{x-3} - \dfrac{x-4}{x+3} = \dfrac{15x-3}{x^2-9}$.

8.8 Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

b) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$;

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

e) $x^2 - 2x + 5 = 0$;

f) $x^2 - 4x + 9 = 0$;

g) $4x^2 + 4x - 3 = 0$;

h) $6x^2 + 7x + 2 = 0$;

i) $x^2 - 4x = 0$;

j) $x^2 - 4 = 0$;

k) $x^2 + 4 = 0$;

l) $x^2 + 7x + 10 = 0$;

m) $x^2 - x - 6 = 0$;

n) $x^2 + 3x - 10 = 0$;

o) $x^2 - 8x + 12 = 0$;

p) $x^2 + 8x + 15 = 0$;

r) $x^2 - 2x - 8 = 0$;

s) $x^2 + 2x - 8 = 0$;

t) $\dfrac{0{,}2p^2}{1\,080 - 0{,}1p^2} = 1$;

u) $\dfrac{0{,}2p^2}{750 - 0{,}1p^2} = 1$.

8.9 Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$;

c) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$;

d) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$.

8.10 Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $x^2 - 9 = 0$,

b) $x^3 + 27 = 0$,

c) $x^3 - 27 = 0$,

d) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$,

e) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 0$,

f) $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$,

g) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$,

h) $x^3 + x + 2 = 0$,

i) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$,

j) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$,

k) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$,

l) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$,

m) $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5 = 0,$

n) $(6x + 17)^2 - (x - 3)^2 = 0,$

o) $(x + 2)^4 - (x - 2)^4 = 0,$

p) $(x - 3)^3 + (x + 3)^3 = 0.$

8.11 Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $36 = 30(1 + \frac{1}{4}i);$

b) $6\ 386{,}625 = 6\ 300(1 + \frac{5}{12}i);$

c) $4\ 983{,}33 = 5\ 000(1 - 0{,}08\frac{n}{360});$

d) $16\ 630{,}77 = 15\ 000(1 + i)^3;$

e) $1{,}299881 = (1 + \frac{j}{4})^{20};$

f) $10\ 000 = (6\ 341{,}84 + x) \cdot 1{,}025^2.$

8.12 Vyriešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

a) $\frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} \geqq \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6};$

b) $3x^2 - 2x + 5 > 0;$

c) $-3x^2 - 7x + 6 \geqq 0;$

d) $x^2 + 2x < 6x - 15;$

e) $(x+2)(x+8) \leqq (x+8)(4x-25);$

f) $x^4 + x^3 - x - 1 \leqq 0;$

g) $x^4 + x^3 + x + 1 \leqq 0;$

h) $x^4 + 13x^2 + 36 \leqq 0;$

i) $x^4 - 13x^2 + 36 \leqq 0;$

j) $x^4 - 12x^2 + 36 \leqq 0;$

k) $\frac{(x + 2)^3 x^8 (1 - x^2)^3}{(x - 3)^5 (x - 1)(x - 2)^4} \leqq 0;$

l) $\frac{1}{x + 2} \leqq \frac{3}{x - 2};$

m) $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x - 6} < 0;$

n) $\frac{-x^3 + x^2 - x + 1}{x + 8} \geqq 0;$

o) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geqq 1;$

p) $\frac{1}{(x - 1)(x - 2)} \leqq \frac{1}{x(x + 1)};$

q) $\frac{x + 1}{x - 5} \geqq \frac{x - 2}{x - 5};$

r) $\frac{1 - 3x}{x + 4} < 2;$

s) $x^2 - 0{,}2x + 0{,}01 \leqq 0;$

t) $\frac{5 - x}{2x - 2} + \frac{1 + 4x}{2x + 2} < 1.$

8.13 Určte množiny, na ktorých sú nasledujúce výrazy

1. kladné,
2. záporné

a) $15x^4 + 12x^3$;

b) $5x^4 - 20x^3$;

c) $12x^3 - 24x^2 + 12x$;

d) $12x^3 - 12x$;

e) $\dfrac{-2x(x+2) - (3-x^2)}{(x+2)^2}$;

f) $\dfrac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2}$;

g) $\dfrac{10(x+2)^2 - 10x \cdot (x+2)2}{(x+2)^4}$;

h) $\dfrac{2(x-1)^2 - (2x-1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$;

i) $\dfrac{(2x-3)x^2 - (x^2-3x-2) \cdot 2x}{x^4}$;

j) $\dfrac{2x(4-x^2) - x^2(-2x)}{(4-x^2)^2}$;

k) $\dfrac{2x \cdot (x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$;

l) $\dfrac{3x^2 \cdot 2(x+1)^2 - x^3 \cdot 4(x+1)}{4(x+1)^4}$.

8.14 Vyriešte v $\mathbb{R}^2$, resp. v $\mathbb{R}^3$, sústavy rovníc:

a) $\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & -1 \\ 6x & + & 4y & = & 24 \end{array}$,

b) $\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & - & x_2 & = & 34 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{array}$,

c) $\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 6y & = & 46 \\ 5x & - & 4y & = & 1 \end{array}$,

d) $\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 4 \end{array}$,

e) $\begin{array}{rcrcr} 10x & + & y & = & -26 \\ 25x & - & 2y & = & -83 \end{array}$,

f) $\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 4x_2 & = & 14 \end{array}$,

g) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}$,

h) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & 5z & = & 0 \end{array}$.

i) $\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -9 \end{array}$,

j) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & - & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & -2 \\ 3x & - & 8y & - & 9z & = & 8 \end{array}$.

k) $\begin{array}{rcrcrcr} 7x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ -10x_1 & + & 15x_2 & - & 11x_3 & = & 4 \end{array}$,

l) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 7 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array}$.

8.15 Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-1} = 2^{2x+4}$,

b) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x} + 4 - 5 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x} = 0$,

c) $3^{x+1} - 3^x - 162 = 0$,

d) $\left(\dfrac{8}{9}\right)^{3x-1} = \left(\dfrac{9}{8}\right)^{2x+4}$,

e) $4^{3-2x} - 2^{2-3x} = 2^{4-3x} - 4^{2-2x}$,

f) $81 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^x + 45 - 36 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 0$, h) $\dfrac{1}{5^x} + 5^x = \dfrac{26}{5}$.

g) $6 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 13 + 6 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 0$,

8.16 Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $(1 + 0{,}04)^n = 2$,

b) $20\ 000 \cdot \mathrm{e}^{5i} = 29\ 099$,

c) $17\ 000 \cdot (1 + \dfrac{0{,}04}{4})^{4n} = 18\ 500$,

d) $17\ 000(1 + \dfrac{0{,}04}{4})^{4n} = 18\ 500\,\mathrm{e}^{0{,}03n}$,

e) $10\ 000 \cdot (1 + \dfrac{0{,}04}{2})^{2n} = 11\ 000$,

f) $10\ 000 \cdot (1 + \dfrac{0{,}04}{4})^{4n} = 11\ 000$,

g) $10\ 000 \cdot (1 + \dfrac{0{,}04}{6})^{6n} = 11\ 000$,

h) $10\ 000 \cdot (1 + \dfrac{0{,}04}{12})^{12n} = 11\ 000$.

8.17 Určte hodnoty logaritmov:

a) $\log 1\ 000$,

b) $\log_2 0{,}5$,

c) $\log_{17} 1$,

d) $\log_9 \dfrac{1}{3}$,

e) $\log_2 4$,

f) $\log_2 \sqrt[3]{4}$,

g) $\ln \mathrm{e}^2$,

h) $\ln \mathrm{e}^{-1}$.

8.18 Vypočítajte hodnoty výrazov:

a) $5 \log 5 + 6 \log 2 - \log 20$,

b) $\log_5 250 + \log_5 \dfrac{125}{2} - \log_5 5^{-1}$,

c) $4 \log_6 3 + 5 \log_6 2 - \log_6 12$,

d) $\log 1\ 500 - \log 15$,

e) $2 \ln \mathrm{e}^3 - \ln \dfrac{1}{\mathrm{e}}$,

f) $\ln \mathrm{e}^{-4} + \ln \mathrm{e}^5$.

8.19 Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $\log_4 x = 2$,

b) $\log_4 x = 1$,

c) $\log_4 x = -3$,

d) $\log_5 x = 2$,

e) $\log_5 x = 1$,

f) $\log_5 x = -3$,

g) $\ln x = 4$,

h) $\ln x = -1$,

i) $\log(x + 5) = \log(2x - 1)$,

j) $\log(x + 3) - \log 2 = 1 - \log(x + 2)$,

k) $\log_3(x^2 - 8x) = 2$, l) $\log_6(4x + 8) = 2$.

8.20 Vypočítajte hodnotu $\sin x$ pre x rovné:

a) $390°, -570°, \frac{13}{6}\pi, -\frac{23}{6}\pi, \frac{77}{6}\pi$,
b) $210°, -1\ 830°, \frac{55}{6}\pi, -\frac{53}{6}\pi$,
c) $840°, 3\ 360°, \frac{7}{3}\pi, \frac{163}{3}\pi, -\frac{70}{3}\pi$,
d) $450°, \frac{53}{2}\pi, \frac{42}{4}\pi, -\frac{38}{4}\pi$,
e) $630°, -\frac{5}{2}\pi, \frac{46}{4}\pi, -450°$,
f) $720°, -540°, -\frac{39}{3}\pi, \frac{16}{4}\pi$.

8.21 Vypočítajte hodnotu $\cos x$ pre x rovné:

a) $1\ 845°, -765°, \frac{47}{4}\pi, -\frac{110}{8}\pi$,
b) $-135°, 2\ 025°, \frac{11}{4}\pi, \frac{122}{8}\pi$,
c) $480°, -1\ 320°, \frac{70}{3}\pi, \frac{40}{6}\pi$,
d) $450°, \frac{121}{2}\pi, -\frac{37}{2}\pi, \frac{34}{4}\pi$,
e) $900°, 37\pi, \frac{18}{2}\pi$,
f) $1\ 800°, 28\pi, \frac{72}{6}\pi$.

8.22 Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$,
b) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
c) $\sin x = -\frac{1}{2}$,
d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
e) $\cos x = 1$,
f) $\cos x = \frac{1}{2}$,
g) $\cos x = -\frac{1}{2}$,
h) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8.23 Určte najmenšiu nezápornú hodnotu x, pre ktorú platí:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ \cos x = \frac{1}{2}$,
b) $\sin x = \frac{1}{2} \ \wedge \ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
c) $\sin x = 0 \ \wedge \ \cos x = 1$,
d) $\sin x = 0 \ \wedge \ \cos x = -1$,
e) $\sin x = 1 \ \wedge \ \cos x = 0$,
f) $\sin x = -1 \ \wedge \ \cos x = 0$.

8.24 Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $\cos 2x = \sin x$,

b) $\sin 2x = \cos x$,

c) $\sin 2x = \sin x$,

d) $\sin^2 x = \sin x$,

e) $\cos^2 x = \cos x$,

f) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$,

g) $4\cos^2 x + 2\sin^2 x + 5\cos(-x) - 5 = 0$,

h) $2\cos^2 x - 5\sin(-x) + 1 = 0$,

i) $\sin^2 x = 3 + 2\sin x$,

j) $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$.

8.25 Nakreslite grafy oboch funkcií a vypočítajte hodnoty premennej p, kde sa pretínajú:

a) $D(p) = 180 - 4p - p^2$
$S(p) = 96 + 4p$,

b) $q = 18 - 4p - p^2$
$q = p^2 + 2p + 10$,

c) $D(p) = \dfrac{60}{p} + 39$
$S(p) = 15 + 3p$,

d) $D : p \cdot q - 18 = 0$
$S : p - q + 3 = 0$,

e) $D(p) = \dfrac{21}{p} + 7$
$S(p) = p + 3$,

f) $D : 10p \cdot q - 74p - 81 = 0$
$S : 10p - 10q + 35 = 0$.

Výsledky:

8.1

a) 81,

b) 1,

c) $-\dfrac{41}{25} = -1{,}64$,

d) $-\dfrac{35}{27}$,

e) $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$,

f) 4,

g) $-\dfrac{76}{75} = -1{,}01\overline{33}$,

h) $-\dfrac{32}{9}$,

i) $\dfrac{1}{45}$,

j) $-\dfrac{9}{5} = -1{,}8$.

8.2

a) $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$,

b) $f(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{3}x$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{7x^4} - \dfrac{1}{3x^3}$,

d) $f(x) = 9 + \dfrac{6}{x}$,

e) $f(x) = 9\sqrt{x^3} + 6\sqrt{x}$,

f) $f(x) = \dfrac{9}{x} + \dfrac{6}{x^2}$.

8.3

a) $f(x) = 3x\,(x+2)$,

b) $f(x) = 12x\,(x-1)^2$,

c) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^2\,(2x-1)$,

d) $f(x) = 2ab\,(2a-3b)$,

e) $f(x) = 5\sqrt{x}\,(1-2x)$,

f) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}\left(3 + \dfrac{2}{x}\right)$,

g) $f(x) = 2x\,(x-y)$,

h) $f(x) = 5\,(x-1)$.

8.4

a) $f(x) = (x-3)(x+3)$,

b) $f(x) = (x+3)(x^2-3x+9)$,

c) $f(x) = (x-3)(x^2+3x+9)$,

d) $f(x) = (x+1)^3$,

e) $f(x) = (x+4)^3$,

f) $f(x) = (x-3)(x^2+1)$,

g) $f(x) = (x-3)(x+1)(x-1)$,

h) $f(x) = (x+1)(x^2-x+2)$,

i) $f(x) = (x-3)^3$,

j) $f(x) = (x-2)^3$,

k) $f(x) = (x-2)(x+1)(x-1)$,

l) $f(x) = (x-1)(x^2+4)$,

m) $f(x) = (x^2+x+1)(x^2+5)$,

n) $f(x) = 35(x+2)(x+4)$,

o) $f(x) = 8xy(x^2+y^2)$,

p) $f(x) = 2x(x^2+27)$.

8.5

a) $f(x) = (x-2)^2 + 1$,

b) $f(x) = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}$,

c) $f(x) = 2(x-3)^2$,

d) $f(x) = -3(x+1)^2 + 5$,

e) $f(x) = (x-1)^2 + 1$,

f) $f(x) = (x+2)^2 - 11$,

g) $f(x) = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{21}{4}$,

h) $f(x) = (x+5)^2 - 3$,

i) $f(y) = -(y-3)^2 + 9$,

j) $f(a) = 8 - 7a^2$,

k) $f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$,

l) $f(z) = -2(z+3)^2 + 20$.

8.6

a) $\frac{1}{3(x-2)}$,

b) $\frac{1}{5(3-x)}$,

c) $\frac{x(x-2)}{4(x-1)}$,

d) $\frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$,

e) $\frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$,

f) $\frac{-(x^2+4x+3)}{(x+2)^2} = -\frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$,

g) $\frac{8x}{(x^2-4)^2}$,

h) $\frac{8x}{(x^2+4)^2}$,

i) $-\frac{2x}{(x-1)^3}$,

j) $\frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$.

8.7

a) $\mathcal{K} = \{1\}$,

b) $\mathcal{K} = \{2\}$,

c) $\mathcal{K} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$,

d) $\mathcal{K} = \left\{-\frac{24}{7}\right\}$,

e) $\mathcal{K} = \mathbb{R} - \{1; -1\}$,

f) $\mathcal{K} = \emptyset$,

g) $\mathcal{K} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$,

h) $\mathcal{K} = \{-3 \pm \sqrt{30}\}$,

i) $\mathcal{K} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

j) $\mathcal{K} = \left\{-\frac{1}{3};\ 2\right\}$,

k) $\mathcal{K} = \{3\}$,

l) $\mathcal{K} = \{17\}$,

m) $\mathcal{K} = \{2\}$,

n) $\mathcal{K} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

8.8

a) $\mathcal{K} = \{2; 3\}$,

b) $\mathcal{K} = \{-3; -2\}$,

c) $\mathcal{K} = \{2\}$,

d) $\mathcal{K} = \{3\}$,

e) $\mathcal{K} = \emptyset$,

f) $\mathcal{K} = \emptyset$,

g) $\mathcal{K} = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right\}$,

h) $\mathcal{K} = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right\}$,

i) $\mathcal{K} = \{0; 4\}$,

j) $\mathcal{K} = \{\pm 2\}$,

k) $\mathcal{K} = \emptyset$,

l) $\mathcal{K} = \{-5; -2\}$,

m) $\mathcal{K} = \{-2; 3\}$,

n) $\mathcal{K} = \{-5; 2\}$,

o) $\mathcal{K} = \{6; 2\}$,

p) $\mathcal{K} = \{-5; -3\}$,

r) $\mathcal{K} = \{-2; 4\}$,

s) $\mathcal{K} = \{-4; 2\}$,

t) $\mathcal{K} = \{\pm 60\}$,

u) $\mathcal{K} = \{\pm 50\}$.

8.9

a) $\mathcal{K} = \{\pm 1; \pm 2\}$,

b) $\mathcal{K} = \{\pm 2\}$,

c) $\mathcal{K} = \emptyset$,

d) $\mathcal{K} = \{\pm 3\}$.

8.10

a) $\mathcal{K} = \{\pm 3\}$,

b) $\mathcal{K} = \{-3\}$,

c) $\mathcal{K} = \{3\}$,

d) $\mathcal{K} = \{-1\}$,

e) $\mathcal{K} = \{-4\}$,

f) $\mathcal{K} = \{3\}$,

g) $\mathcal{K} = \{\pm 1;\ 3\}$,

h) $\mathcal{K} = \{-1\}$,

i) $\mathcal{K} = \{3\}$,

j) $\mathcal{K} = \{2\}$,

k) $\mathcal{K} = \{\pm 1;\ 2\}$,

l) $\mathcal{K} = \{1\}$,

m) $\mathcal{K} = \emptyset$,

n) $\mathcal{K} = \{-4; -2\}$,

o) $\mathcal{K} = \{0\}$,

p) $\mathcal{K} = \{0\}$.

8.11

a) $i = 0{,}8$,

b) $i = 0{,}033$,

c) $n = 15{,}003$,

d) $i = 0{,}035$,

e) $j = 0{,}053$; $j = -8{,}0528$,

f) $x = 3\ 176{,}304$.

8.12

a) $\mathcal{K} = \langle 2; \infty)$,

b) $\mathcal{K} = \mathbb{R}$,

c) $\mathcal{K} = \left\langle -3; \frac{2}{3} \right\rangle$,

d) $\mathcal{K} = \emptyset$

e) $\mathcal{K} = (-\infty;\ -8\rangle \cup \langle 9;\ \infty)$,

f) $\mathcal{K} = \langle -1;\ 1\rangle$,

g) $\mathcal{K} = \{-1\}$,

h) $\mathcal{K} = \emptyset$,

i) $\mathcal{K} = \langle -3; -2\rangle \cup \langle 2; 3\rangle$,

j) $\mathcal{K} = \{\pm\sqrt{6}\}$,

k) $\mathcal{K} = \langle -2;\ -1\rangle \cup \{0\} \cup (3; \infty)$,

l) $\mathcal{K} = \langle -4; -2) \cup (2; \infty)$,

m) $\mathcal{K} = (-4; -1) \cup (-1; 6)$,

n) $\mathcal{K} = (-8; 1\rangle$,

o) $\mathcal{K} = (-\infty; -2) \cup (-1; 0\rangle$,

p) $\mathcal{K} = (-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right\rangle \cup (1; 2)$,

q) $\mathcal{K} = (5; \infty)$,

r) $\mathcal{K} = (-\infty; -4) \cup \left(-\frac{7}{5}; +\infty\right)$,

s) $\mathcal{K} = \{0, 1\}$,

t) $\mathcal{K} = (-1; 1)$.

8.13

a) 1. $\mathcal{K} = \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right) \cup (0; \infty)$,
2. $\mathcal{K} = \left(-\frac{4}{5}; 0\right)$,

b) 1. $\mathcal{K} = (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$,
2. $\mathcal{K} = (0; 4)$,

c) 1. $\mathcal{K} = (0; 1) \cup (1; \infty)$,
2. $\mathcal{K} = (-\infty; 0)$,

d) 1. $\mathcal{K} = (-1; 0) \cup (1; \infty)$,
2. $\mathcal{K} = (-\infty; -1) \cup (0; 1)$,

e) 1. $\mathcal{K} = (-3; -2) \cup (-2; -1)$,
2. $\mathcal{K} = (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$,

f) 1. $\mathcal{K} = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
2. $\mathcal{K} = (-1; 0) \cup (0; 1)$,

g) 1. $\mathcal{K} = (-2; 2)$,
2. $\mathcal{K} = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$,

h) 1. $\mathcal{K} = (0; 1)$,
2. $\mathcal{K} = (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$,

i) 1. $\mathcal{K} = \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (0; \infty)$,
2. $\mathcal{K} = \left(-\frac{4}{3}; 0\right)$,

j) 1. $\mathcal{K} = (0; 2) \cup (2; \infty)$,
2. $\mathcal{K} = (-\infty; -2) \cup (-2; 0)$,

k) 1. $\mathcal{K} = (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$,
2. $\mathcal{K} = (0; 1) \cup (1; \infty)$,

l) 1. $\mathcal{K} = (-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; \infty)$,
2. $\mathcal{K} = (-3; -1)$.

8.14

a) $[x, y] = [2, 3]$,
b) $[x_1, x_2] = [4, -6]$,
c) $[x, y] = [5, 6]$,
d) $[x_1, x_2] = [-1, 2]$,
e) $[x, y] = [-3, 4]$,
f) $[x_1, x_2] = [2, -1]$,
g) $[x_1, x_2, x_3] = [3, -1, 2]$,
h) sústava nemá riešenie,
i) $[x_1, x_2, x_3] = [1-18t, 3+2t, -2+11t], t \in \mathbb{R}$,
j) $[x, y, z] = [-11t, -1-12t, 7t], t \in \mathbb{R}$,
k) sústava nemá riešenie,
l) $[x, y, z] = [-1, 4, 0]$.

8.15

a) $\mathcal{K} = \left\{-\dfrac{3}{5}\right\}$,
b) $\mathcal{K} = \{0\}$,
c) $\mathcal{K} = \{4\}$,
d) $\mathcal{K} = \left\{-\dfrac{3}{5}\right\}$,
e) $\mathcal{K} = \{2\}$,
f) $\mathcal{K} = \{-2\}$,
g) $\mathcal{K} = \{\pm 1\}$,
h) $\mathcal{K} = \{\pm 1\}$.

8.16

a) $n = 17{,}673$,
b) $i = 0{,}075$,
c) $n = 129$,
d) $n = 8{,}62$,
e) $n = 2{,}4065$,
f) $n = 2{,}3946$,
g) $n = 2{,}3907$,
h) $n = 2{,}3867$.

8.17

a) 3,
b) -1,
c) 0,
d) $-\dfrac{1}{2}$,
e) 2,
f) $\dfrac{2}{3}$,
g) 2,
h) -1.

8.18

a) 4,
b) 8,
c) 3,
d) 2,
e) 7,
f) 1.

8.19

a) 16, b) 4, c) $\frac{1}{64}$, d) 25, e) 5, f) $\frac{1}{125}$, g) e^4, h) e^{-1}, i) 6, j) 2, k) $-1; 9$, l) 7.

8.20

a) $\frac{1}{2}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) 1, e) -1, f) 0.

8.21

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $-\frac{1}{2}$, d) 0, e) -1, f) 1.

8.22

a) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$,

b) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$,

c) $\frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$,

d) $\frac{5}{4}\pi + 2k\pi,\ \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$,

e) $2k\pi$,

f) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$,

g) $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi,\ \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$,

h) $\frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$.

8.23

a) $\frac{\pi}{3}$, b) $\frac{5}{6}\pi$, c) 0, d) π, e) $\frac{\pi}{2}$, f) $\frac{3}{2}\pi$.

8.24

a) $\frac{12k+1}{6}\pi,\ \frac{12k+5}{6}\pi,\ \frac{4k+3}{2}\pi$, b) $\frac{12k+1}{6}\pi,\ \frac{12k+5}{6}\pi,\ \frac{2k+1}{2}\pi$,

c) $k\pi,\ \dfrac{6k \pm 1}{3}\pi,$

d) $k\pi,\ \dfrac{4k+1}{2}\pi,$

e) $2k\pi,\ \dfrac{2k+1}{2}\pi,$

f) $\dfrac{4k \pm 1}{4}\pi,$

g) $\dfrac{6k \pm 1}{3}\pi,$

h) $\dfrac{12k+7}{6}\pi,\ \dfrac{12k+11}{6}\pi,$

i) $\dfrac{4k-1}{2}\pi,$

j) $k\pi.$

8.25

a) $\mathcal{K} = \{-14; 6\},$

b) $\mathcal{K} = \{-3; 1\},$

c) $\mathcal{K} = \{-2; 10\},$

d) $\mathcal{K} = \{-6; 3\},$

e) $\mathcal{K} = \{-3; 7\},$

f) $\mathcal{K} = \{-1{,}5; 5{,}4\}.$

Literatúra

[1] Brabec, J. – Martan, F. – Rozenský, Z.: Matematická analýza I, SNTL/ALFA, Praha, 1985.

[2] Buša, J. – Schrotter, Š.: Stredoškolská matematika pre študentov FEI TU v Košiciach, ISBN 978 – 80 – 553 – 2193 – 6. Dostupné online: `http://people.tuke.sk/jan.busa/MA1/Busa_Schrotter_Stredoskolska_matematika_2015.pdf` (august 2018).

[3] Džurina, J. – Grinčová, A. – Pirč, V.: Matematická analýza 1, Technická univerzita v Košiciach, ISBN 80 – 8073 – 307 – 4. Dostupné online: `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/eLearning/uLern/maI.htm` (august 2018).

[4] Džurina, J. – Grinčová, A. – Pirč, V.: Matematika 1, Elfa, Košice, 2009. ISBN 978 – 80 – 8086 – 115 – 5.

[5] Džurina, J. – Pirč, V.: Calculus 1, 1. vydanie, Elfa, Košice, 2010, ISBN 978 – 80 – 8086 – 165 – 0.

[6] Eliáš, J. – Horváth, J. – Kajan, J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 1, ALFA, 6. vydanie, Bratislava, 1985.

[7] Eliáš, J. – Horváth, J. – Kajan, J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2, ALFA, 6. vydanie, Bratislava, 1986.

[8] Grinčová, A. – Molnárová, M.: MATEMATIKA I a jej využitie v ekonómii (Zbierka riešených a neriešených úloh), Technická univerzita v Košiciach, ISBN 978 – 80 – 553 – 1158 – 6. Dostupné online: `http://people.tuke.sk/monika.molnarova/` (august 2018).

[9] Harshbarger, R. J. – Reynolds, J.: Mathematical Applications for Management, Life, and Social Sciences, D. C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts, Toronto, 1989, ISBN 0 – 669 – 16263 – 9.

[10] Hoffmann, L. D. – Bradley, G. L: Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences, McGraw-Hill Publishing Company, 1989, ISBN 0 – 07 – 029334 – 1.

[11] Ivan, J.: Matematika 1, SNTL/ALFA, Bratislava, 1983.

[12] Jirásek, F. – Kriegelstein, E. – Tichý, Z.: Sbírka řešených příkladů z matematiky, SNTL/ALFA, Praha, 1982.

[13] Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M.: Matematika I, SVTL, Bratislava, 1966.

[14] Molnárová, M.: MATEMATIKA I A REPETITÓRIUM Z MATEMATIKY pre Hospodársku informatiku, Technická univerzita v Košiciach, Košice, 2018, ISBN 978-80-553-2734-1.

[15] Molnárová, M. – Myšková, H.: Úvod do lineárnej algebry, zbierka riešených a neriešených úloh, Technická univerzita v Košiciach, ISBN 80 – 8073 – 361 – 9. Dostupné online: `http://people.tuke.sk/monika.molnarova/` (august 2018).

[16] Pirč, V. – Haščák, A.: Matematická analýza 1, Elfa, Košice, 2000, ISBN 80 – 88786 – 92 – 4.

[17] Pirč, V. – Sedláčková, A.: Finančná matematika, Elfa, Košice, 2002, ISBN 80 – 89066 – 21 – 6.

[18] Small, D. B. – Hosack, J. M.: Calculus an Integrated Approach, McGraw-Hill Publishing Company, 1990, ISBN 0 – 07 – 058264 – 5.

[19] Šoltés, V. – Juhászová, Z.: Zbierka úloh z vyššej matematiky, Elfa, Košiice, 1995.

[20] Šoltés, V. – Hudec, O. – Penjak, V. – Lacková, D. – Révészová, L.: Matematika I, Elfa, Košiice, 2005, ISBN 80 – 8073 – 333 – 3.

Názov: MATEMATIKA I pre Hospodársku informatiku

Autor: Monika Molnárová

Vydavateľ: Technická univerzita v Košiciach
Rok: 2021
Vydanie: prvé
Náklad: 50 ks
Rozsah: 174

ISBN 978-80-553-3954-2

ISBN 978-80-553-3954-2