Stabilita diskrétnych dynamických systémov

Monika Molnárová

Košice 2019

RECENZOVALI: prof. RNDr. Ján Plavka, CSc.
RNDr. Štefan Berežný, PhD.

Vydavateľ: Technická univerzita v Košiciach
1. vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedá autor.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-553-3345-8

Obsah

Úvod

Učebnica Stabilita diskrétnych dynamických systémov je určená študentom magisterského štúdia odboru Počítačové modelovanie na Fakulte elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach. Venuje sa problematike skúmania vlastností a modelovania stabilných systémov pomocou extremálnych algebier, menovite max-plus algebry a k nej duálnej min-plus algebry. Problematika je prezentovaná aplikáciami v oblasti riadenia výrobných a dopravných procesov.

Učebnica obsahuje deväť kapitol, ktoré sú členené do podkapitol. Každá kapitola začína podkapitolou, ktorá formuluje cieľ danej kapitoly, a pokračuje podkapitolou, v ktorej je prehľad kapitoly vo forme otázok z danej problematiky. Prehľad teoretických poznatkov, postupy riešenia nastolených problémov so zodpovedajúcimi algoritmami spolu s riešenými úlohami, prípadne vizualizáciou predstavených algoritmov, tvoria jadro kapitoly. Záver obsahuje neriešené úlohy doplnené o výsledky.

V prvej kapitole je prezentovaný nástroj, pomocou ktorého sa bude nastolená problematika riešiť a síce max-plus algebra. Predstavené sú jej vlastnosti a zákonitosti pri práci s maticami a vektormi. Kvôli uľahčeniu štúdia sú uvedené paralely medzi max-plus algebrou na jednej strane a klasickou lineárnou algebrou.

Druhá kapitola predstavuje koncepciu modelovania diskrétneho dynamického systému (v skratke DDS) v max-plus algebre na príklade výrobnej linky. Prezentovaná je reprezentácia DDS pomocou matice prechodu. Predstavená je definícia vzostupného orbitu a jeho využitie pri určení najskoršieho možného času ukončenia projektu pre uvažovaný DDS.

V tretej kapitole je predstavená duálna algebra ku max-plus algebre a síce min-plus algebra. Predstavená je definícia zostupného orbitu a jeho využitie pri určení najneskoršieho možného času ukončenia projektu pre uvažovaný DDS. Použitím oboch algebier sa dá skonštruovať tzv. kritický diagram, ktorý umožňuje riadiť daný DDS. Samostatné využitie min-plus algebry je prezentované na dopravnom systéme.

Vo štvrtej kapitole sú uvedené relevantné časti teórie grafov a ich súvis s modelovaním procesov DDS. Definované sú tranzitívne uzávery matíc a prezentované sú efektívne algoritmy na ich výpočet vrátane Floydovho-Warshallovho algoritmu. Popísaná je koncepcia ireducibilných a reducibilných matíc, vrátane algoritmu na transformáciu reducibilnej matice do hornej blokovo trojuholníkovej matice s využitím permutačnej a k nej inverznej matice v max-plus algebre.

Piata kapitola je venovaná systémom rovníc a nerovníc v max-plus algebre. Uvedené sú nutné a postačujúce podmienky existencie riešenia systému rovníc, rovnako aj nutná a postačujúca podmienka jednoznačnosti riešenia. Popísaný je algoritmus riešenia systému rovníc. Uvedená je aplikácia systému rovníc na riešenie úloh súvisiacich s ukončením projektu DDS v časovom limite, navyše na konci kapitoly je definovaná Čebyševova aproximácia a jej význam pre približné riešenie týchto úloh.

V šiestej kapitole je predstavený problém stability DDS, kedy systém pracuje v ustálenom rytme, t. j. dĺžka trvania jednotlivých etáp je konštantná. Je ukázané, že riešenie tejto úlohy súvisí s riešením vlastnej úlohy pre max-plus maticu. Sú popísané algoritmy na výpočet vlastnej hodnoty pomocou Karpovho algoritmu a zodpovedajúcich vlastných vektorov pre prípad ireducibilnej matice.

V siedmej kapitole je predstavená spektrálna teória, pomocou ktorej je problém stability systému riešený vo všeobecnom prípade, teda keď je DDS reprezentované reducibilnou maticou. Popísaný je algoritmus na určenie všetkých vlastných priestorov, t. j. všetkých vektorov, pomocou ktorých sa systém dostane do stabilného stavu. Uvedené sú nutné a postačujúce podmienky na existenciu konečného riešenia vlastného problému.

V ôsmej kapitole je predstavená koncepcia takmer periodickej matice a takmer lineárne periodickej matice v špeciálnom prípade. Uvedené sú nutné a postačujúce podmienky periodickosti ako aj zodpovedajúce polynomiálne algoritmy na výpočet periódy v pozitívnom prípade. Táto kapitola pripravuje pôdu pre riešenie zásadného problému stability DDS, menovite reprezentácie systému maticou, ktorá nezávisle na vstupnom vektore dostane systém do ustáleného stavu vždy.

V deviatej kapitole je zavŕšená snaha o popísanie stabilných DDS. Predstavená je tzv. robustná matica, ktorá zaručuje stabilitu systému za každých okolností teda aj vtedy, keď vstupný vektor nie je vlastným vektorom uvažovanej matice. Postupne sú uvedené nutné a postačujúce podmienky robustnosti najskôr ireducibilnej a potom reducibilnej matice, ktoré využívajú koncepty riešenia vlastnej úlohy a periodických vlastností matice predstavené v predchádzajúcich kapitolách.

Autor ďakuje recenzentom učebnice prof. RNDr. Jánovi Plavkovi, CSc. a RNDr. Štefanovi Berežnému, PhD. za pomoc pri jej písaní.

Autor.

1 Max-plus algebra

1.1 Cieľ kapitoly

Oboznámiť sa s pojmom max-plus algebra, operáciami so skalármi, vektormi a maticami v max-plus algebre a vlastnosťami týchto operácií.

1.2 Prehľad kapitoly v otázkach

- Definujte max-plus algebru.
- Uveďte základné vlastnosti operácií so skalármi v max-plus algebre.
- Uveďte binomickú vetu pre skaláre a dokážte ju pomocou definície mocniny čísla.
- Definujte operácie s maticami: násobenie skalárom, súčet a súčin matíc.
- Uveďte základné vlastnosti operácií s maticami v max-plus algebre.
- Definujte inverznú maticu. Špecifikujte triedu matíc, pre ktoré existuje inverzná matica a uveďte spôsob jej výpočtu.
- Definujte mocninu matice a uveďte efektívny postup pri jej výpočte.
- Uveďte binomickú vetu pre matice a dokážte ju.

1.3 Pojem max-plus algebra

Predtým, ako sa oboznámime s pojmom max-plus algebry, je potrebné si uvedomiť, že táto algebra patrí medzi tzv. extremálne algebry. To sú algebry, kde aspoň jedna z operácií medzi dvoma prvkami má tú vlastnosť, že výsledkom je niektorý z daných dvoch prvkov (teda nie nový prvok). Táto vlastnosť má dôsledky, ktoré si pre max-plus algebru uvedieme v nasledujúcich kapitolách, a ktoré predurčujú extremálne algebry k modelovaniu procesov v rôznych oblastiach ako sú výrobné procesy, digitálna signalizácia, dopravné systémy a pod.
V celej publikácii budeme množinu všetkých konečných reálnych čísel označovať $\mathbb{R}$ a množinu všetkých kladných prirodzených čísel $\mathbb{N}$.

Definícia 1.1 *Nech $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Nech $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Nech $a \oplus b = \max\{a,\ b\}$ a $a \otimes b = a + b$, pre ľubovoľné $a,\ b \in \mathbb{R}^\star$. Usporiadanú trojicu $(\mathbb{R}^\star, \oplus, \otimes)$ budeme nazývať **max-plus algebra**.*

Poznámka 1.1 *Keďže má operácia maxima vlastnosť spomínanú v úvode tohto odseku, teda maximum dvoch prvkov je niektorý z daných dvoch prvkov, jedná sa o extremálnu algebru. Napriek tomu platia v max-plus algebre pre operácie so skalármi rovnaké základné pravidlá ako v lineárnej algebre.*

Veta 1.1 *Nech* a, b, $c \in \mathbb{R}^{\star}$. *Platí*

$$\begin{aligned} a \oplus b &= b \oplus a && \textit{komutatívnosť } \oplus, \\ a \oplus (b \oplus c) &= (a \oplus b) \oplus c && \textit{asociatívnosť } \oplus, \\ a \otimes b &= b \otimes a && \textit{komutatívnosť } \otimes, \\ a \otimes (b \otimes c) &= (a \otimes b) \otimes c && \textit{asociatívnosť } \otimes, \\ a \otimes (b \oplus c) &= a \otimes b \oplus a \otimes c && \textit{distributívnosť } \otimes \textit{ vzhľadom na } \oplus . \end{aligned}$$

Príklad 1.3.1 *Vypočítajme*

a) $3 \otimes 4 = 3 + 4 = 7$,

b) $4 \otimes 3 = 4 + 3 = 7$,

c) $5 \oplus 8 = \max\{5,\ 8\} = 8$,

d) $8 \oplus 5 = \max\{8,\ 5\} = 8$,

e) $2 \otimes (4 \oplus 6) = 2 + \max\{4,\ 6\} = 2 + 6 = 8$,

f) $2 \otimes 4 \oplus 2 \otimes 6 = \max\{2 + 4,\ 2 + 6\} = \max\{6,\ 8\} = 8$. ♡

Špeciálne postavenie prvkov v max-plus algebre majú prvky $\varepsilon = -\infty$ a 0.

Veta 1.2 *Nech* $a \in \mathbb{R}^{\star}$. *Platí*

$$\begin{aligned} a \oplus \varepsilon &= \varepsilon \oplus a = a && \varepsilon \textit{ neutrálny prvok vzhľadom na } \oplus, \\ a \otimes \varepsilon &= \varepsilon \otimes a = \varepsilon && \varepsilon \textit{ absorbujúci vzhľadom na } \otimes, \\ a \otimes 0 &= 0 \otimes a = a && 0 \textit{ neutrálny prvok vzhľadom na } \otimes . \end{aligned}$$

Príklad 1.3.2 *Vypočítajme*

a) $3 \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus 3 = \max\{3,\ \varepsilon\} = 3$,

b) $4 \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes 4 = \varepsilon + 4 = \varepsilon$,

c) $5 \otimes 0 = 0 \otimes 5 = 0 + 5 = 5$. ♡

Definícia 1.2 *Nech $a \in \mathbb{R}^\star$. Nech $p \in \mathbb{N}$. **p-tou mocninou čísla** a nazývame výraz*

$$a^p = \begin{cases} 0 & p = 0 \\ a \otimes a^{p-1} & p = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Príklad 1.3.3 *Vypočítajme*

a) $3^5 = 3 \otimes 3 \otimes 3 \otimes 3 \otimes 3 = 5 \times 3 = 15,$

b) $\varepsilon^2 = \varepsilon \otimes \varepsilon = 2 \times \varepsilon = \varepsilon.$ ♡

Veta 1.3 (Binomická veta pre skaláre) *Nech $a, b \in \mathbb{R}^\star$. Nech $p \in \mathbb{N}$. Platí*

$$(a \oplus b)^p = a^p \oplus b^p. \tag{1}$$

Príklad 1.3.4 *Vypočítajme*

$$(4 \oplus 5)^3 = 3 \times (4 \oplus 5) = 3 \times 4 \oplus 3 \times 5 = 4^3 \oplus 5^3.$$

♡

Vzťah platí pre ľubovoľný počet sčítancov.

Veta 1.4 (Princíp umocňovania) *Nech $a, b \in \mathbb{R}^\star$. Nech $p \in \mathbb{N}$. Platí*

$$\left(\sum_i^{\oplus} a_i\right)^p = \sum_i^{\oplus} (a_i)^p.$$

V max-plus algebre platia ďalšie vlastnosti operácie $\oplus$, ktorými sa líši od lineárnej algebry.

Veta 1.5 *Nech $a, b \in \mathbb{R}^\star$. Platí*

$$\begin{array}{rcll} a \oplus a & = & a & \quad \textit{idempotentnosť } \oplus, \\[2ex] a \oplus b & \geq & a\ (b) & \quad \textit{majoritnosť } \oplus. \end{array}$$

Príklad 1.3.5 *Vypočítajme*

a) $7 \oplus 7 = \max\{7, 7\} = 7,$

b) $7 \oplus (-4) = \max\{7, -4\} \geq 7(-4).$

Vzťah majoritnosti platí pre ľubovoľný počet sčítancov.

Veta 1.6 *Nech $a_i \in \mathbb{R}^\star$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Platí*

$$\sum_i^{\oplus} a_i \geq a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Poznámka 1.2 *Použitím definície algebrickej štruktúry grupa môžeme vlastnosti max-plus algebry* $(\mathbb{R}^\star, \oplus, \otimes)$ *zhrnúť do nasledujúcich bodov.*

1. $(\mathbb{R}, \otimes(+))$ *je lineárne usporiadaná* $(\leq)$ *komutatívna grupa*
   - *uzavretá vzhľadom na* $\otimes$*,*
   - *asociatívna,*
   - *s neutrálnym prvkom* 0*,*
   - *s inverzným prvkom* $-a$ *ku prvku* a *(konečný),*
   - *komutatívna.*

   Navyše každá rovnica $n \times x = b$ *má riešenie v tvare* $x = \frac{b}{n}$*.*
2. $(\mathbb{R}^\star, \oplus(\max))$ *spĺňa*
   - *uzavretá vzhľadom na* $\oplus$*,*
   - *asociatívna,*
   - *s neutrálnym prvkom* ε*,*
   - *- (inverzný prvok neexistuje),*
   - *komutatívna.*
3. ε *absorbujúci vzhľadom na* $\otimes$
4. *Distributívnosť* $\otimes$ *vzhľadom na* $\oplus$*.*

1.4 Operácie s maticami v max-plus algebre

Označme množinu všetkých n-rozmerných vektorov nad $\mathbb{R}^\star$ ako $\mathbb{R}^\star(n)$ a množinu všetkých matíc typu $m \times n$ ako $\mathbb{R}^\star(m, n)$ pre m, $n \in \mathbb{N}$. Operácie súčinu skalára a matice, súčtu matíc rovnakého typu a súčinu matíc vhodných typov definujeme formálne rovnako ako v klasickej algebre zohľadňujúc pritom operácie $\oplus$ a $\otimes$.

Definícia 1.3 *Nech* $A \in \mathbb{R}^\star(m, n)$ *a* $\alpha \in \mathbb{R}^\star$*.* α***-násobkom matice*** A *nazývame maticu* $C \in \mathbb{R}^\star(m, n)$*,* $C = (c_{ij})$*, pre ktorú* $c_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}$*, pre* $i = 1, 2, \ldots, m$*,* $j = 1, 2, \ldots, n$*.*
Zápis: $C = \alpha \otimes A$.

Príklad 1.4.1 *Pre danú maticu* A *a konštantu* α *vypočítajme* $\alpha \otimes A$*, ak*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \alpha = 2.$$

Riešenie.

$$\alpha \otimes A = 2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 2+0 & 2+4 \\ 2+3 & 2+2 & 2+0 \\ 2+5 & 2+3 & 2+\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

♡

Definícia 1.4 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(m,n)$ a $B \in \mathbb{R}^\star(m,n)$.* ***Súčtom matíc*** *$A$ a B nazývame maticu $C \in \mathbb{R}^\star(m,n)$, $C = (c_{ij})$, pre ktorú $c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$, pre $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$.*
Zápis: $C = A \oplus B$.

Príklad 1.4.2 *Pre dané matice A a B vypočítajme $A \oplus B$, ak*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 6 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie.

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max\{1,\,0\} & \max\{0,\,\varepsilon\} & \max\{4,\,6\} \\ \max\{3,\,-1\} & \max\{2,\,0\} & \max\{0,\,4\} \\ \max\{5,\,1\} & \max\{3,\,2\} & \max\{\varepsilon,\,\varepsilon\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

♡

Pre práve definované operácie s maticami platí nasledujúca veta.

Veta 1.7 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(m,n)$, $B \in \mathbb{R}^\star(m,n)$ a $C \in \mathbb{R}^\star(m,n)$. Platí*

$$\begin{aligned} A \oplus B &= B \oplus A && \textit{komutatívnosť } \oplus, \\ A \oplus (B \oplus C) &= (A \oplus B) \oplus C && \textit{asociatívnosť } \oplus, \\ \alpha \otimes (A \oplus B) &= \alpha \otimes A \oplus \alpha \otimes B, \\ \alpha \otimes (\beta \otimes A) &= (\alpha \otimes \beta) \otimes A. \end{aligned}$$

Definícia 1.5 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(m,r)$ a $B \in \mathbb{R}^\star(r,n)$.* ***Súčinom matíc*** *$A$ a B nazývame maticu $C \in \mathbb{R}^\star(m,n)$, $C = (c_{ij})$, pre ktorú $c_{ij} = a_{i1} \otimes b_{1j} \oplus a_{i2} \otimes b_{2j} \oplus \cdots \oplus a_{ir} \otimes b_{rj} = \sum_k^{\oplus} a_{ik} \otimes b_{kj}$, pre $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$.*
Zápis: $C = A \otimes B$

Príklad 1.4.3 *Pre dané matice A a B vypočítajme $A \otimes B$*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

♡

Poznámka 1.3 *Nech $C = A \otimes B$. Každý stĺpec výslednej matice C vznikol pôsobením matice A na zodpovedajúci stĺpec matice B. Túto súvislosť budeme v ďalšom používať a označovať ako* ***princíp stĺpcového účinku****.*

Príklad 1.4.4 *Overme stĺpcový účinok pre druhý stĺpec matice B z príkladu 1.4.3.*

Riešenie.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} . & 4 & . \\ . & 3 & . \\ . & 2 & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & 6 & . \\ . & 7 & . \end{pmatrix}.$$

♡

Veta 1.8 *Nech A, B a C sú matice vhodných rozmerov nad $\mathbb{R}^\star$. Platí*

$$\begin{aligned} A \otimes (B \otimes C) &= (A \otimes B) \otimes C && \textit{asociatívnosť } \otimes, \\ A \otimes (B \oplus C) &= A \otimes B \oplus A \otimes C && \textit{distributívnosť } \otimes \\ & && \textit{vzhľadom na } \oplus, \\ \alpha \otimes (A \otimes B) &= A \otimes (\alpha \otimes B). \end{aligned}$$

Poznámka 1.4 *Horeuvedené vzťahy platia aj pre stĺpcové vektory (matice s jedným stĺpcom). Posledná rovnosť môže mať v takom prípade pre ľubovoľnú maticu A a vektor x podobu*

$$\alpha \otimes (A \otimes x) = A \otimes (\alpha \otimes x). \tag{2}$$

Túto vlastnosť budeme používať v ďalších kapitolách, ak bude práca modelového systému prerušená na určitú dobu.

Podobne ako v klasickej algebre aj v max-plus algebre existuje matica, ktorá je neutrálna vzhľadom na sčítavanie matíc. Nasledujúca definícia je dôsledkom faktu, že neutrálnym prvkom vzhľadom na operáciu $\oplus$ je ε.

Definícia 1.6 *Štvorcovú maticu $\Phi \in \mathbb{R}^\star(n,n)$, $\Phi = (\varphi_{ij})$ nazývame* ***nulovou maticou****, ak $\varphi_{ij} = \varepsilon$, pre $i,j = 1,2,\ldots,n$.*

Príklad 1.4.5 *Nulová matica $\Phi \in \mathbb{R}^\star(3,3)$*

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

♡

Nulová matica Φ je neutrálnym prvkom vzhľadom na sčítavanie matíc.

Veta 1.9 *Nech $\Phi \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je nulová matica. Pre ľubovoľnú maticu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ platí*

$$A \oplus \Phi = \Phi \oplus A = A.$$

Príklad 1.4.6

$$A \oplus \Phi = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

♡

Definícia 1.7 *Štvorcovú maticu $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$, $D = (d_{ij})$ nazývame* ***diagonálnou maticou****, ak pre $i,j = 1,2,\ldots,n$*

$$d_{ij} = \begin{cases} \varepsilon & \text{pre } \ i \neq j \\ \text{ľubovoľné} & \text{pre } \ i = j. \end{cases}$$

Zápis: $D = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$.

Nulová matica je v skutočnosti diagonálnou maticou $\Phi = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$.

Príklad 1.4.7

$$D = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(3, \varepsilon, 1).$$

♡

Podobne ako v prípade nulovej matice môžeme definovať maticu neutrálnu vzhľadom na násobenie matíc v max-plus algebre. Analogicky sa jedná o dôsledok faktu, že neutrálnym prvkom vzhľadom na operáciu $\otimes$ je 0.

Definícia 1.8 *Štvorcovú maticu $E \in \mathbb{R}^\star(n,n)$, $E = (e_{ij})$ nazývame* ***jednotkovou maticou****, ak pre $i,j = 1,2,\ldots,n$*

$$e_{ij} = \begin{cases} \varepsilon & \text{pre } \ i \neq j \\ 0 & \text{pre } \ i = j. \end{cases}$$

Príklad 1.4.8
$$E = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(0,0,0).$$
♡

Jednotková matica E je neutrálnym prvkom vzhľadom na násobenie matíc.

Veta 1.10 *Nech $E \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je jednotková matica. Pre ľubovoľnú maticu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ platí*
$$A \otimes E = E \otimes A = A.$$

Príklad 1.4.9
$$A \otimes E = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
♡

Definícia 1.9 *Každú štvorcovú maticu, ktorú môžeme dostať konečným počtom permutácií riadkov a stĺpcov jednotkovej matice E (diagonálnej matice) nazývame **permutačnou maticou** (**zovšeobecnenou permutačnou maticou**).*

Definícia 1.10 ***Inverznou maticou*** *ku štvorcovej matici $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ nazývame maticu A^{-1}, pre ktorú platí $A \otimes A^{-1} = A^{-1} \otimes A = E$.*

Poznámka 1.5 *Jedinými maticami, ku ktorým existujú inverzné matice v max-plus algebre sú permutačné, resp. zovšeobecnené permutačné matice. Z definície 1.10 vyplýva, že ak $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je zovšeobecnená permutačná matica a $B \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je k nej inverzná matica, tak platí*
$$b_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & \text{pre } a_{ji} \text{ konečné} \\ \varepsilon & \text{pre } a_{ji} = \varepsilon. \end{cases} \tag{3}$$

Špeciálne v prípade diagonálnej matice $A = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$ je inverznou maticou opäť diagonálna matica
$$A^{-1} = \mathrm{diag}(d_{11}^{-1}, d_{22}^{-1}, \ldots, d_{nn}^{-1}).$$

Príklad 1.4.10 *Rozhodnime, či pre matice A a B existuje inverzná matica a ak áno, tak ju nájdime*

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -4 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Riešenie.

a) Keďže prvý riadok matice obsahuje (rovnako ako druhý stĺpec) viac než jeden konečný prvok, matica A nie je zovšeobecnenou permutačnou maticou. Z toho vyplýva, inverzná matica ku matici A neexistuje.

b) Každý riadok a každý stĺpec matice B obsahuje práve jeden konečný prvok, matica B je teda zovšeobecnenou permutačnou maticou. Podľa poznámky 1.5 inverzná matica ku matici B existuje a podľa vzťahu (3) ju vieme vypočítať

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

♡

Definícia 1.11 *Nech* $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. *Nech* $p \in \mathbb{N}$. ***p-tou mocninou matice*** *A nazývame maticu* A^p

$$A^p = \begin{cases} E & p = 0 \\ A \otimes A^{p-1} & p = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Zápis*:* $A^p = (a_{ij}^{(p)})$.

Príklad 1.4.11 *Vypočítajme tretiu mocninu danej matice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix}^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \varepsilon & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ \varepsilon & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

♡

Ak chceme vypočítať konkrétnu mocninu matice, nie je nevyhnutné, aby sme počítali celú postupnosť mocnín matice. Požadovanú mocninu môžeme nájsť aj efektívnym umocňovaním, ktoré popisujeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 1.4.12 *Vypočítajme efektívne* 15. *mocninu matice z príkladu 1.4.11.*

Riešenie. Ľubovoľný mocniteľ matice môže byť vyjadrený ako súčet mocnín čísla 2. Mocninu matice dostaneme teda opakovaným umocnením zadanej matice, aby sme dostali postupnosť mocnín A, A^2, A^4, A^8, ..., a následným vynásobením potrebných členov tejto postupnosti. Keďže $8 = 2^3 < 15 = 16 - 1 = 2^4 - 1$, je v našom prípade potrebné vynásobiť všetky mocniny matice po A^8.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix}^{15} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix}^{8+4+2+1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix}^{2^3+2^2+2^1+2^0} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix}^{8} \otimes \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix}^{4} \otimes \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix}^{2} \otimes \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \varepsilon & 8 \end{pmatrix}^{4} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \varepsilon & 8 \end{pmatrix}^{2} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \varepsilon & 8 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ \varepsilon & 16 \end{pmatrix}^{2} \otimes \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ \varepsilon & 16 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \varepsilon & 8 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ \varepsilon & 32 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ \varepsilon & 16 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \varepsilon & 8 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon & 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 30 & 53 \\ \varepsilon & 60 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

♡

Veta 1.11 *Pre maticu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ sa dá mocnina A^p vypočítať s výpočtovou zložitosťou $O(n^3 \ln p)$.*

Diagonálne prvky mocnín matice, ktorá popisuje systém modelovaný v max-plus algebre (matica prechodu), podstatným spôsobom súvisia s otázkou maximálnej rýchlosti, akou môže systém bežať. Je potrebné si uvedomiť, že diagonálny prvok v p-tej mocnine matice nadobúda minimálne hodnotu, ktorá sa rovná p-tej mocnine príslušného diagonálneho prvku v matici A.

Veta 1.12 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $p \in \mathbb{N}$.*

$$a_{ii}^{(p)} \geq a_{ii}^{p} \quad \textit{pre } i = 1, 2, ..., n.$$

Matematickou indukciou a s využitím nasledujúcej vety o idempotentnosti operácie $\oplus$ pre matice sa dá dokázať binomická veta pre matice.

Veta 1.13 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(m,n)$. Platí*

$$A \oplus A = A \qquad \textit{idempotentnosť } \oplus \textit{ pre matice.}$$

Pre jednotkovú maticu a ľubovoľnú štvorcovú maticu rovnakého typu platí obdoba binomickej vety, ktorá na prvý pohľad pripomína binomickú vetu pre skaláre v lineárnej algebre, každopádne bez konštánt. Dôkaz sa dá ľahko urobiť matematickou indukciou práve využitím idempotentnosti operácie $\oplus$ pre matice.

Veta 1.14 (Binomická veta pre matice) *Nech A, $E \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $p \in \mathbb{N}$. Platí*

$$(E \oplus A)^p = E \oplus A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^p.$$

1.5 Úlohy

1.1 Vypočítajte

a) $2 \otimes 4 \oplus 5$,

b) $3 \oplus 4 \otimes (-2)$,

c) $0 \otimes 2 \oplus 1$,

d) $\varepsilon \otimes 4 \oplus (-4)$,

e) $\varepsilon \oplus (-2) \otimes 1$,

f) $3 \otimes (1 \oplus 2)$,

g) $\epsilon \otimes (1 \oplus 2)$,

h) $0 \otimes (1 \oplus \varepsilon)$,

i) $2 \otimes (\varepsilon \oplus 3)$.

1.2 Vypočítajte $A \oplus B$ pre dané matice, ak

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 3 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & -2 \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -7 & 2 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$.

1.3 Vypočítajte $\alpha \otimes A$ pre matice z cvičenia 1.2, ak

a) $\alpha = 3$, d) $\alpha = 3$, g) $\alpha = -3$.

b) $\alpha = 0$, e) $\alpha = -1$,

c) $\alpha = -2$, f) $\alpha = 4$,

1.4 Vypočítajte $A \otimes B$ pre dané matice, ak

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$,

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

g) $A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & 1 & 3 \\ 4 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1.5 Vypočítajte efektívne

a) $\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 \end{pmatrix}^2$, c) $\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 \end{pmatrix}^6$, e) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}^3$,

b) $\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 \end{pmatrix}^4$, d) $\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 \end{pmatrix}^7$, f) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}^3$,

g) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}^4$, i) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}^2$, k) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & \varepsilon \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ \varepsilon & 3 & 5 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 \end{pmatrix}^4$,

h) $\begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix}^6$, j) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & 3 & 7 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 9 \end{pmatrix}^3$, l) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & 4 & 4 & \varepsilon \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ \varepsilon & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}^5$.

1.6 Zistite, či sa jedná o permutačnú alebo o zovšeobecnene permutačnú maticu. Ak áno, nájdite k nej inverznú maticu.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, i) $\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -7 & 2 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 6 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -3 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & -2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$, k) $\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 5 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$, l) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Výsledky:

1.1

a) 6, d) -4, g) ε,

b) 3, e) -1, h) 1,

c) 2, f) 5, i) 5.

1.2

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & 2 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 6 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1.3

a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & 5 \\ 5 & \varepsilon & 10 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.4

a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$,

1.5

a) $\begin{pmatrix} 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 14 & \varepsilon \\ \varepsilon & 21 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 8 & \varepsilon \\ \varepsilon & 12 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 12 & \varepsilon \\ \varepsilon & 18 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 6 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

h) $\begin{pmatrix} 31 & 33 & 37 \\ 29 & 31 & 35 \\ 30 & 32 & 36 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} 12 & 15 & 23 & 24 \\ \varepsilon & 21 & 27 & 28 \\ \varepsilon & 17 & 23 & 24 \\ \varepsilon & 20 & 26 & 27 \end{pmatrix}$,l) $\begin{pmatrix} 28 & 27 & 25 & 21 \\ 33 & 28 & 28 & 24 \\ 30 & 27 & 30 & 26 \\ 31 & 30 & 28 & 24 \end{pmatrix}$.

i) $\begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 & 9 \\ 5 & 14 & 15 & 14 \\ 8 & \varepsilon & 10 & 11 \\ 5 & 6 & \varepsilon & 8 \end{pmatrix}$, k) $\begin{pmatrix} 20 & 21 & 20 & 23 \\ 15 & 20 & 17 & 18 \\ 15 & 18 & 20 & 18 \\ 11 & 14 & 16 & 14 \end{pmatrix}$,

1.6

a) nie je zovšeobecnene permutačná,

b) nie je zovšeobecnene permutačná,

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$,

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -3 \end{pmatrix}$,

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

f) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$,

g) nie je zovšeobecnene permutačná,

h) nie je zovšeobecnene permutačná,

i) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ -3 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

j) nie je zovšeobecnene permutačná

k) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

l) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -9 & \varepsilon & \varepsilon \\ -3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -3 \\ \varepsilon & \varepsilon & -2 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

2 Aplikácia max-plus algebry

2.1 Cieľ kapitoly

Oboznámiť sa so spôsobom modelovania výrobnej linky v max-plus algebre, konkrétne s reprezentáciou DDS maticou prechodu a technikami na určenie najkratšej doby trvania projektu pomocou orbitu.

2.2 Prehľad kapitoly v otázkach

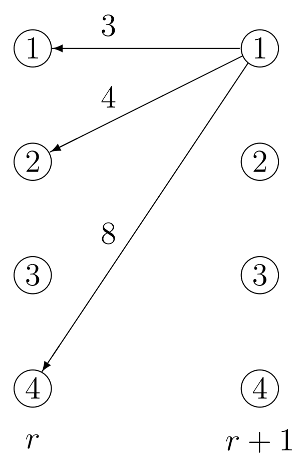
- Popíšte model výrobnej linky v max-plus algebre.
- Definujte maticu prechodu DDS.
- Definujte $(p+1)$-stavový vzostupný orbit pre DDS daný maticou prechodu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ a založený na danom vektore $x \in \mathbb{R}^\star(n)$.
- Popíšte výpočet času ukončenia $(p+1)$-cyklového projektu na výrobnej linke danej maticou prechodu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$, ak sú dané štartové časy jednotlivých strojov.
- Popíšte výpočet času ukončenia $(p+1)$-cyklového projektu na výrobnej linke danej maticou prechodu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$, ak sú dané štartové časy jednotlivých strojov a ak po r-tom výrobnom cykle došlo k prerušeniu výroby na dobu dĺžky δ.
- Definujte rastúci DDS a uveďte postačujúcu podmienku, aby bol DDS rastúci.

2.3 Model výrobnej linky v max-plus algebre

V praxi sa stretávame so systémami, v ktorých sa stavy menia spojite v závislosti na čase a výstupy sú potom reprezentované spojitou funkciou $x(t)$ pre $t \in \mathbb{R}$ (závislosť rýchlosti na čase a pod.) a na druhej strane so systémami, v ktorých sa stavy menia diskrétne a výstupy sú reprezentované v takom prípade diskrétnou funkciou $x(r)$ pre $r = 1, 2, \ldots$. Diskrétne dynamické systémy (skratkou DDS) sa vyskytujú napríklad pri modelovaní dopravných systémov, signálnych sústav či výrobných procesov. Ako si ukážeme v tejto kapitole, prácu s DDS uľahčuje prechod do max-plus algebry, ktorú sme si predstavili v predchádzajúcej kapitole.

Uvažujme teraz model DDS, ktorý reprezentuje výrobnú linku pozostávajúcu z viacerých strojov, ktorých práca je navzájom ovplyvnená. Okrem počtu strojov je preto systém určený dvoma druhmi parametrov. V prvom rade je pre každý stroj známa časová hodnota, kedy začne pracovať. Druhá skupina parametrov udáva, koľko a či vôbec musia jednotlivé stroje čakať na seba, pokým začnú ďalší pracovný úkon.

Nasledujúca schéma zobrazuje výrobnú linku so štyrmi strojmi a vplyv všetkých strojov na prácu prvého stroja (teda obmedzenia prvého stroja). Napríklad šípka od stroja 1 v druhom stĺpci ku stroju 4 v prvom stĺpci znamená, že prvý stroj dostáva prácu od štvrtého stroja (komponent finálneho výrobku). Navyše musí prvý stroj čakať po skončení svojho r-tého pracovného cyklu aspoň 8 časových jednotiek, kým prikročí k $r+1$-vému pracovnému cyklu.



Práca pre 1. stroj:

- 1. stroj pracuje 3 jednotky času, t. j. čaká "na seba" 3 č. j.
- 1. stroj čaká na 2. stroj 4 č. j.
- 1. stroj nečaká na 3. stroj (3. stroj neovplyvňuje prácu 1. stroja)
- 1. stroj čaká na 4. stroj 8 č. j.

Označme $x_i(r)$ čas, kedy najskôr môže nastať r-tá udalosť na i-tom stroji, t. j. dokončenie r-tého pracovného úkonu (cyklu) na i-tom stroji. Potom nasledujúca udalosť, teda ukončenie ďalšieho, $r+1$-vého pracovného cyklu, nastane najskôr vtedy, keď všetky stroje, ktoré ovplyvňujú prácu i-tého stroja, ukončili svoj predchádzajúci pracovný cyklus a aj prácu pre i-tý stroj v prebiehajúcom cykle. Samozrejme maximálna z týchto hodnôt jednotlivých strojov určuje čas ukončenia ďalšieho výrobného cyklu na i-tom stroji. Túto závislosť pre náš modelový systém môžeme pre prvý stroj formálne vyjadriť nasledujúcim spôsobom

$$x_1(r+1) = \max\{x_1(r)+3,\, x_2(r)+4,\, x_4(r)+8\}.$$

Po čiastočnom zovšeobecnení, keď sme konkrétne hodnoty nahradili ľubovoľnými ale konečnými hodnotami a_{11}, a_{12}, a_{14} dostávame

$$x_1(r+1) = \max\{x_1(r)+a_{11},\, x_2(r)+a_{12},\, x_4(r)+a_{14}\}.$$

Každopádne úplnému zovšeobecneniu modelu so štyrmi strojmi bráni skutočnosť, že v rovnici chýbajú údaje tretieho stroja. Tento nedostatok odstránime tak, že dovolíme, aby konštanty okrem konečných reálnych hodnôt, mohli nadobúdať aj hodnotu $\varepsilon = -\infty$. Vzhľadom na fakt, že hodnota ε nemá vzhľadom na operáciu maxima vplyv na výsledok, môžeme položiť $a_{13} = -\infty$ a prepísať poslednú rovnicu do tvaru

$$x_1(r+1) = \max\{x_1(r) + a_{11},\, x_2(r) + a_{12},\, x_3(r) + a_{13},\, x_4(r) + a_{14}\}.$$

Ak tento postup zovšeobecníme, zápis systému s počtom strojov n môžeme rekurzívne pre i-tý stroj, $i = 1,\, 2,\, \dots,\, n$, vyjadriť nasledovne

$$x_i(r+1) = \max\{x_1(r) + a_{i1},\, x_2(r) + a_{i2},\, \dots,\, x_n(r) + a_{in}\}.$$

Keďže v rovnici vystupujú len operácie maxima a sčítania, núka sa nám možnosť použiť na modelovanie tohto DDS nie klasickú (lineárnu) algebru ale práve max-plus algebru, ktorú sme si predstavili v prvej kapitole. Rekurzívny zápis horeuvedeného systému bude mať potom pre $i = 1,\, 2,\, \dots,\, n$ tvar

$$x_i(r+1) = a_{i1} \otimes x_1(r) \oplus a_{i2} \otimes x_2(r) \oplus \dots \oplus\, a_{in} \otimes x_n(r). \tag{4}$$

2.4 Reprezentácia výrobnej linky orbitom

Časovú závislosť jednotlivých strojov v DDS navzájom môžeme zapísať do matice, ktorá bude reprezentovať tento DDS.

Definícia 2.1 ***Maticou prechodu diskrétneho dynamického systému*** *s n strojmi nazývame štvorcovú maticu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ rádu n, v ktorej každý prvok a_{ij}, pre $i, j = 1, 2, \dots, n$, reprezentuje veľkosť vplyvu j-tého stroja na i-tý stroj, ak a_{ij} je konečné, alebo naň nemá vplyv, ak $a_{ij} = \varepsilon$.*

Pre modelový systém z predchádzajúcej časti môžeme zobrať napríklad maticu, ktorej prvý riadok (reprezentuje vplyv jednotlivých strojov na prvý stroj) obsahuje známe hodnoty, ktoré sme už použili

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ak využijeme definíciu súčinu matíc a vzťah (4), vieme teraz rekurzívny popis modelu výrobnej linky vyjadriť v maticovom tvare

$$x(r+1) = A \otimes x(r) \qquad \text{pre } r \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Príklad 2.4.1 *Majme výrobnú linku so štyrmi strojmi, danú maticou prechodu*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Predpokladajme, že všetky stroje začnú pracovať naraz v čase 0. Vypočítajme, kedy najskôr skončí na jednotlivých strojoch a kedy na celej linke

a) *prvý výrobný cyklus,*

b) *druhý výrobný cyklus.*

Riešenie.

a) Pri prvom výrobnom cykle nečakajú stroje na ukončenie práce ostatných strojov, len vykonajú svoj pracovný úkon. Preto sú časy ukončenia prvého výrobného cyklu na jednotlivých strojoch reprezentované hodnotami na hlavnej diagonále matice prechodu daného DDS. V našom prípade to je vektor

$$x(1) = \mathrm{diag}(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ak zoberieme maximálnu z týchto hodnôt, dostaneme čas ukončenia prvého výrobného cyklu na celej linke, t. j. 6 časových jednotiek od spustenia výroby.

b) Ak poznáme vektor reprezentujúci časy ukončenia prvého výrobného cyklu, vieme časy ukončenia druhého výrobného cyklu vypočítať na základe vzťahu (5). Dostávame teda

$$x(2) = A \otimes x(1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Druhý výrobný cyklus na uvažovanej výrobnej linke skončí po uplynutí 14 časových jednotiek.

♡

Jednotlivé stroje môžu začať prácu na projekte v rôznych časoch. Tento prípad ilustrujeme na modifikácii príkladu 2.4.1.

Príklad 2.4.2 *Majme výrobnú linku so štyrmi strojmi, danú maticou prechodu*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Predpokladajme, že čas spustenia výroby na jednotlivých strojoch je daný vektorom $t = (2, 3, 4, 1)^\top$. Vypočítajme, kedy najskôr skončí na jednotlivých strojoch a kedy na celej linke

a) *prvý výrobný cyklus,*

b) *druhý výrobný cyklus.*

Riešenie.

a) Podobne ako v príklade 2.4.1 sú časy ukončenia prvého výrobného cyklu na jednotlivých strojoch reprezentované hodnotami na hlavnej diagonále matice prechodu daného DDS. Každopádne sú tieto hodnoty posunuté o zodpovedajúcu hodnotu danú vektorom t. Dostávame

$$x(1) = \begin{pmatrix} 2 \otimes 3 \\ 3 \otimes 5 \\ 4 \otimes 3 \\ 1 \otimes 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ak zoberieme maximálnu z týchto hodnôt, dostaneme čas ukončenia prvého výrobného cyklu na celej linke, t. j. 8 časových jednotiek od spustenia výroby.

b) Časy ukončenia druhého výrobného cyklu vypočítame opäť pomocou vzťahu (5). Dostávame teda

$$x(2) = A \otimes x(1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Druhý výrobný cyklus na uvažovanej výrobnej linke skončí po uplynutí 15 časových jednotiek od spustenia výroby.

♡

Stáva sa, že v priebehu projektu je potrebné výrobnú linku zastaviť. Dôvodom môže byť výpadok elektrickej energie, nehoda, porucha stroja a pod.

Príklad 2.4.3 *Majme výrobnú linku so štyrmi strojmi, danú maticou prechodu*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Predpokladajme, že všetky stroje začnú pracovať naraz v čase 0. Po prvom výrobnom cykle došlo k zdržaniu 10 časových jednotiek v dôsledku výpadku elektrickej energie. Vypočítajme, kedy najskôr môže skončiť dvoj etapový projekt.

Riešenie. Vzhľadom na poznámku 1.4 a výsledok príkladu 2.4.1 môžeme bezprostredne vypočítať $x(2)$

$$x(2) = A \otimes (\delta \otimes x(1)) = \delta \otimes (A \otimes x(1)) = \delta \otimes x(2) = 10 \otimes \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Čas ukončenia druhého výrobného cyklu na uvažovanej výrobnej linke je 24 časových jednotiek po spustení výroby. ♡

Poznámka 2.1 *Skalár δ môžeme interpretovať ako konštantný vektor $t = (\delta, \delta, \delta, \delta)^\top$ a výsledok príkladu 2.4.3 môžeme dostať podobným postupom ako v príklade 2.4.2. Naopak to však neplatí.*

Definícia 2.2 *Majme DDS so začiatočným stavom daným vektorom $x \in \mathbb{R}^\star(n)$ a maticou prechodu $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Postupnosť stavov $x(1) = x$, $x(2) = A \otimes x$, $x(3) = A^2 \otimes x$, ..., $x(p+1) = A^p \otimes x$ pre $p \in \mathbb{N}^+$ nazývame* ***$(p+1)$-stavový vzostupný orbit*** *založený na vektore x generovaný maticou A.*

Pre modelový systém z predchádzajúceho príkladu má 5-stavový vzostupný orbit tvar:

$$\begin{array}{rcccccc} x(r) & = & \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}. \\ & & & & & & \\ r & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Poznámka 2.2 *Vzhľadom na rovnicu (5) môžeme orbit vytvoriť nielen na základe definície ale aj postupným násobením maticou prechodu*

$$x(r+1) = \begin{cases} x & \text{pre } \ r = 0 \\ A \otimes x(r) & \text{pre } \ r = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{6}$$

Definícia 2.3 *Nech m, $n \in \mathbb{N}^+$. Množinu všetkých matíc typu $m \times n$, v ktorých žiadny riadok ani žiadny stĺpec nepozostáva výlučne z prvkov ε, budeme označovať $F(m, n) \subseteq \mathbb{R}^\star(m, n)$.*

Vzhľadom na definíciu 2.3 $F(m, 1)$ reprezentuje teda množinu všetkých konečných m-rozmerných stĺpcových vektorov pre $m \in \mathbb{N}^+$. V ďalšom texte budeme v prípade vektorov používať označenie $F(m)$ namiesto $F(m, 1)$. Uzavretosť množiny $F(m, n)$ vzhľadom na operáciu násobenia vyjadruje nasledujúca veta.

Veta 2.1 *Nech $m, n, r \in \mathbb{N}^+$. Nech $A \in F(m,r)$ a $B \in F(r,n)$. Potom $A \otimes B = C \in F(m,n)$.*

Definícia 2.4 *DDS s postupnosťou stavových vektorov $x(1)$, $x(2)$, ... nazývame* ***rastúcim****, ak pre $i = 1, 2, \ldots, n$ je*

$$x_i(r+1) \geq x_i(r) \quad \textit{pre} \quad r = 1, 2, \ldots.$$

V 5-stavovom vzostupnom orbite nášho modelového systému hodnoty v každej súradnici narastajú. Súvisí to s maticou prechodu uvažovaného DDS. Z nasledujúcej vety vyplýva, že systémy, ktorými sa zaoberáme, sú rastúce nezávisle na vstupnom vektore x. Je to dôsledok faktu, že každý stroj vykonáva nejaký pracovný úkon a teda $a_{ii} \geq 0$.

Veta 2.2 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ s $a_{ii} \geq 0$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom platí*

(i) $A \in F(n,n)$,

(ii) DDS s maticou prechodu A je rastúci.

Pre odhad dĺžky trvania projektu s počtom výrobných cyklov r na výrobnej linke danej maticou prechodu A je dôležitý dôsledok tejto vety.

Dôsledok 2.1 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ s $a_{ii} \geq 0$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Nech $x \in \mathbb{R}^\star(n)$. Potom pre $r \geq 1$ platí*

$$x_i(r+1) \geq a_{ii}^r \otimes x_i(1).$$

2.5 Úlohy

2.1 Zostrojte maticu prechodu pre nasledujúce DDS

a)
- 1. stroj pracuje 3 č. j. a čaká na 3. stroj 7 č. j.
- 2. stroj pracuje 5 č. j. a čaká na 1. stroj 4 č. j.
- 3. stroj pracuje 6 č. j. a čaká na 2. stroj 2 č. j.,

b)
- 1. stroj pracuje 2 č. j. a čaká na 2. stroj 4 č. j. a na 4. stroj 6 č. j.
- 2. stroj pracuje 7 č. j. a čaká na 3. stroj 8 č. j. a na 4. stroj 3 č. j.
- 3. stroj pracuje 5 č. j. a čaká na 4. stroj 6 č. j.
- 4. stroj pracuje 3 č. j. a čaká na 1. stroj 2 č. j.,

c)
- 1. stroj pracuje 4 č. j. a čaká na 2. stroj 5 č. j. a na 3. stroj 2 č. j.
- 2. stroj pracuje 5 č. j. a čaká na 4. stroj 10 č. j.

- 3. stroj pracuje 7 č. j. a čaká na 2. stroj 3 č. j. a na 4. stroj 6 č. j.
- 4. stroj pracuje 9 č. j. a čaká na 3. stroj 8 č. j.,

d)
- 1. stroj pracuje 3 č. j. a čaká na 2. stroj 8 č. j. a na 3. stroj 2 č. j.
- 2. stroj pracuje 3 č. j. a čaká na 1. stroj 2 č. j., na 3. stroj 2 č. j. a na 4. stroj 5 č. j.
- 3. stroj pracuje 5 č. j. a čaká na 2. stroj 3 č. j. a na 4. stroj 2 č. j.
- 4. stroj pracuje 3 č. j. a čaká na 3. stroj 1 č. j.,

e)
- 1. stroj pracuje 4 č. j. a čaká na 2. stroj 3 č. j.
- 2. stroj pracuje 4 č. j. a čaká na 1. stroj 9 č. j. a na 3. stroj 4 č. j.
- 3. stroj pracuje 6 č. j. a čaká na 1. stroj 3 č. j., na 2. stroj 3 č. j. a na 4. stroj 2 č. j.
- 4. stroj pracuje 4 č. j. a čaká na 2. stroj 6 č. j. a na 3. stroj 3 č. j..

2.2 Vypočítajte orbit dĺžky $p+1$ pre DDS s danou maticou prechodu A, štartovými časmi t a počtom cyklov $p+1$

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad p = 3,$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad t = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad p = 4,$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad p = 4,$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad t = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad p = 4,$

e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & 3 & 7 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad p = 5,$

f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & \varepsilon \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ \varepsilon & 3 & 5 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad p = 4,$

g) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & 4 & 4 & \varepsilon \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ \varepsilon & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p = 5,$

h) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad p = 4,$

i) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & 4 & 4 & \varepsilon \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ \varepsilon & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad p = 5.$

2.3 Vypočítajte, kedy bude ukončená práca na projekte, ktorý pozostáva z $p+1$ výrobných cyklov, je popísaný maticou prechodu A a začal

1.) na každom stroji v čase nula 2.) v čase danom vektorom t

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad p = 6, \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix} \qquad p = 2, \quad t = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & 3 & 7 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad p = 3, \quad t = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & \varepsilon \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ \varepsilon & 3 & 5 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad p = 4, \quad t = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$

e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & 4 & 4 & \varepsilon \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ \varepsilon & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad p = 5, \quad t = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$

2.4 Vypočítajte, kedy bude ukončená práca na projekte z cvičenia 2.3, ktorý pozostáva z $p+1$ výrobných cyklov, ak bola po r-tom výrobnom cykle výroba prerušená na dobu dĺžky δ č. j..

a) $\delta = 5$ $\quad r = 5,$

b) $\delta = 8$ $\quad r = 1,$

c) $\delta = 12$ $\quad r = 2,$

d) $\delta = 20$ $\quad r = 3,$

e) $\delta = 16$ $\quad r = 4.$

Výsledky:

2.1

a) $\begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & 3 & 7 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 9 \end{pmatrix},$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & \varepsilon \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ \varepsilon & 3 & 5 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 \end{pmatrix},$

e) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & 4 & 4 & \varepsilon \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ \varepsilon & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

2.2

a) $x(r): \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix};$

b) $x(r): \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 \\ 20 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 28 \\ 26 \\ 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 34 \\ 32 \\ 33 \end{pmatrix};$

c) $x(r): \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 \\ 35 \\ 26 \\ 27 \end{pmatrix};$

d) $x(r): \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 16 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 23 \\ 17 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 27 \\ 30 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 34 \\ 37 \\ 28 \\ 29 \end{pmatrix};$

e) $x(r): \begin{pmatrix} 4\\5\\7\\9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10\\19\\15\\18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 24\\28\\24\\27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33\\37\\33\\36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42\\46\\42\\45 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 51\\55\\51\\54 \end{pmatrix};$

f) $x(r): \begin{pmatrix} 3\\3\\5\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11\\8\\10\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16\\13\\15\\11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21\\18\\20\\16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26\\23\\25\\21 \end{pmatrix};$

g) $x(r): \begin{pmatrix} 4\\4\\6\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8\\13\\12\\10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16\\17\\18\\19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20\\25\\24\\23 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 28\\29\\30\\31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32\\37\\36\\35 \end{pmatrix}.$

h) $x(r): \begin{pmatrix} 7\\7\\7\\7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13\\15\\13\\10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19\\22\\18\\15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26\\29\\23\\21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33\\36\\28\\28 \end{pmatrix};$

i) $x(r): \begin{pmatrix} 6\\6\\6\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10\\15\\12\\12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18\\19\\18\\21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22\\27\\24\\25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30\\31\\30\\33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 34\\39\\36\\37 \end{pmatrix}.$

2.3

1.) a) $x(7) = (43, 41, 42)^\top$, práca skončí po 43 č. j.,
b) $x(3) = (18, 21, 15, 13)^\top$, práca skončí po 21 č. j.,
c) $x(4) = (33, 37, 33, 36)^\top$, práca skončí po 37 č. j.,
d) $x(5) = (26, 23, 25, 21)^\top$, práca skončí po 26 č. j.,
e) $x(6) = (32, 37, 36, 35)^\top$, práca skončí po 37 č. j..

2.) a) $x(7) = (49, 47, 48)^\top$, práca skončí po 49 č. j.,
b) $x(3) = (19, 22, 17, 14)^\top$, práca skončí po 22 č. j.,
c) $x(4) = (33, 37, 33, 36)^\top$, práca skončí po 37 č. j.,
d) $x(5) = (28, 25, 25, 21)^\top$, práca skončí po 28 č. j.,
e) $x(6) = (42, 47, 44, 45)^\top$, práca skončí po 47 č. j..

2.4

1.) a) $x(7) = (48, 46, 47)^\top$, práca skončí po 48 č. j.,
b) $x(3) = (26, 29, 23, 21)^\top$, práca skončí po 29 č. j.,

c) $x(4) = (45, 49, 45, 48)^\top$, práca skončí po 49 č. j.,

d) $x(5) = (46, 43, 45, 41)^\top$, práca skončí po 46 č. j.,

e) $x(6) = (48, 53, 52, 51)^\top$, práca skončí po 53 č. j..

2.) a) $x(7) = (54, 52, 53)^\top$, práca skončí po 54 č. j.,

b) $x(3) = (27, 30, 25, 22)^\top$, práca skončí po 30 č. j.,

c) $x(4) = (45, 49, 45, 48)^\top$, práca skončí po 49 č. j.,

d) $x(5) = (48, 45, 45, 41)^\top$, práca skončí po 48 č. j.,

e) $x(6) = (58, 63, 60, 61)^\top$, práca skončí po 63 č. j..

3 Min-plus algebra a riadenie DDS

3.1 Cieľ kapitoly

Oboznámiť sa s pojmom min-plus algebra a operáciami so skalármi, vektormi a maticami v min-plus algebre a ich využitím pri riadení výrobného procesu.

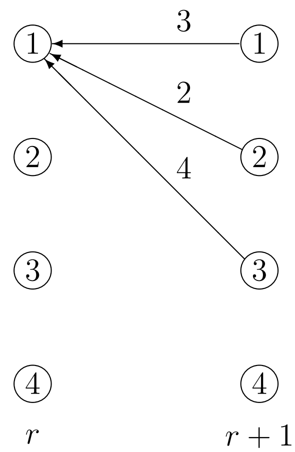
3.2 Prehľad kapitoly v otázkach

- Definujte min-plus algebru.
- Definujte súčin matíc a mocninu matice v min-plus algebre.
- Definujte $(p+1)$-stavový zostupný orbit pre DDS danom maticou $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$ založený na danom vektore $y \in F(n)$.
- Popíšte použitie zostupného orbitu pri určení časov spustenia výroby na jednotlivých strojoch, ak je vopred daný čas ukončenia projektu.
- Definujte kritický stav, kriticky spojené stavy a kritický diagram projektu. Popíšte význam kritického diagramu.
- Definujte konjugovanú maticu a uveďte jej použitie pri riadení výrobného procesu.
- Uveďte základné vlastnosti konjugácie súčtu a súčinu skalárov.
- Uveďte základné vlastnosti konjugácie súčtu a súčinu matíc a mocniny matice.

3.3 Model výrobnej linky z hľadiska ukončenia projektu

Uvažujme rovnaký model DDS, ktorý sme si predstavili v predchádzajúcej kapitole. Vieme už, ako vypočítame najskoršie časy ukončenia nejakej etapy výrobného procesu, ktorá môže reprezentovať ukončenie celého výrobného procesu v rámci nejakého projektu. Ak sa zaviažeme, že projekt ukončíme v tomto čase, vyvstáva otázka, či aj časy spustenia výrobného procesu na jednotlivých strojoch ostávajú bez zmeny. Inak povedané, aké sú najneskoršie časy ukončenia predchádzajúceho výrobného cyklu, aby časy nasledujúceho cyklu ostali dodržané.

Nasledujúci diagram znázorňuje vplyv prvého stroja na prácu ostatných strojov na výrobnrj linke so štyroma strojmi, ktorú už poznáme. Na rozdiel od predchádzajúcej kapitoly všetky šípky z druhého stĺpca smerujú k prvému stroju v prvom stĺpci.



Práca 1. stroja pre linku, t.j. 1. stroj musí ukončiť r-tý úkon nie neskôr ako

- 3 č. j. pred svojim $(r+1)$-vým úkonom
- 2 č. j. pred $(r+1)$-vým úkonom 2. stroja
- 4 č. j. pred $(r+1)$-vým úkonom 3. stroja
- 1. stroj neovplyvňuje 4. stroj

Označme $y_i(r+1)$ čas, kedy najneskôr môže nastať $(r+1)$-vá udalosť na i-tom stroji, t. j. dokončenie $(r+1)$-vého pracovného úkonu (cyklu) na i-tom stroji. Z toho vyplýva, že predchádzajúca udalosť, teda ukončenie r-tého pracovného cyklu na i-tom stroji nastane najneskôr vtedy, ako je čas ukončenia $(r+1)$-vého cyklu na stroji j, ktorý je závislý na stroji i, zmenšený o taký počet časových jednotiek, ktorý je potrebný pre stroj i na vykonanie práce pre stroj j. Minimálna z týchto hodnôt zo všetkých strojov, ktoré sú závislé na stroji i, udáva najneskorší čas ukončenia r-tého pracovného cyklu na stroji i. Túto závislosť pre náš modelový systém môžeme pre prvý stroj formálne vyjadriť nasledujúcim spôsobom

$$y_1(r) = \min\{y_1(r+1) - 3,\ y_2(r+1) - 2,\ y_3(r+1) - 4\}.$$

Ak nahradíme konkrétne čísla konečnými hodnotami $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{12}$, $\bar{a}_{13}$, môžeme písať

$$y_1(r) = \min\{y_1(r+1) + \bar{a}_{11}, y_2(r+1) + \bar{a}_{12}, y_3(r+1) + \bar{a}_{13}\},$$

ale úplnému zovšeobecneniu bráni opäť skutočnosť, že rovnica neobsahuje všetky hodnoty. Chýbajú údaje štvrtého stroja. Tento nedostatok odstránime tak, že dovolíme, aby konštanty okrem konečných reálnych hodnôt, nadobúdali v tomto prípade aj hodnotu $\varepsilon' = \infty$. Ak položíme $\bar{a}_{14} = \varepsilon'$, môžeme písať

$$y_1(r) = \min\{y_1(r+1) + \bar{a}_{11}, y_2(r+1) + \bar{a}_{12}, y_3(r+1) + \bar{a}_{13}, y_4(r+1) + \bar{a}_{14}\},$$

keďže z hľadiska operácie minima hodnota ε' neovplyvní výsledok. Navyše hodnoty $\bar{a}_{ij}$ poznáme z matice prechodu DDS:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= -a_{11}, \\ \bar{a}_{12} &= -a_{21}, \\ \bar{a}_{13} &= -a_{31}, \\ \bar{a}_{14} &= -a_{41}. \end{aligned} \tag{7}$$

Ak tento postup zovšeobecníme, zápis systému s počtom strojov n môžeme rekurzívne pre i-tý stroj vyjadriť nasledovne

$$y_i(r) = \min\{y_1(r+1)+\bar{a}_{i1}, y_2(r+1)+\bar{a}_{i2}, \dots, y_n(r+1)+\bar{a}_{in}\}.$$

Keďže v rovnici vystupujú len operácie minima a sčítania, vyvstáva otázka, či neexistuje opäť možnosť použiť na modelovanie tejto úlohy nie klasickú (lineárnu) algebru, ale inú algebrickú štruktúru.

3.4 Min-plus algebra

V tejto časti si predstavíme min-plus algebru, ktorá je tzv. duálnou algebrou ku max-plus algebre. To nám umožní pokračovať vo formalizácii zápisu z predchádzajúcej časti a teda v modelovaní procesov DDS.

Definícia 3.1 *Nech* $\mathbb{R}$ *je množina reálnych čísel. Nech* $\mathbb{R}^{\star'} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *Nech* $a \oplus' b = \min\{a, b\}$ *a* $a \otimes' b = a + b$, *pre ľubovoľné* $a, b \in \mathbb{R}^{\star'}$. *Usporiadanú trojicu* $(\mathbb{R}^{\star'}, \oplus', \otimes')$ *budeme nazývať* ***min-plus algebra****.*

Príklad 3.4.1 *Vypočítajme*

a) $3 \otimes' 4 = 3 + 4 = 7$,

b) $4 \otimes' 3 = 4 + 3 = 7$,

c) $5 \oplus' 8 = \min\{5, 8\} = 5$,

d) $8 \oplus' 5 = \min\{8, 5\} = 5$,

e) $2 \otimes' (4 \oplus' 6) = 2 + \min\{4, 6\} = 2 + 4 = 6$,

f) $2 \otimes' 4 \oplus' 2 \otimes' 6 = \min\{2 + 4, 2 + 6\} = \min\{6, 8\} = 6$. ♡

Poznámka 3.1 *Každému výsledku v max-plus algebre zodpovedá analogický (vzhľadom na nové operácie) tzv. duálny výsledok, ktorý platí v min-plus algebre. Táto skutočnosť je dôsledkom faktu, že všetky princípy pre obe operácie v max-plus algebre (viď kapitola Max-plus algebra) platia aj v duálnej min-plus algebre (vzhľadom na operácie minimum a súčet).*

Kvôli ľahšej orientácii pri našich úvahách uvedieme niektoré duálne definície operácií s maticami v min-plus algebre.

Definícia 3.2 *Nech* $A \in \mathbb{R}^{\star'}(m, r)$ *a* $B \in \mathbb{R}^{\star'}(r, n)$. ***Súčinom matíc*** A *a* B *nazývame maticu* $C \in \mathbb{R}^{\star'}(m, n)$, $C = (c_{ij})$, *pre ktorú* $c_{ij} = a_{i1} \otimes' b_{1j} \oplus' a_{i2} \otimes' b_{2j} \oplus' \cdots \oplus' a_{ir} \otimes' b_{rj} = \sum_{k}^{\oplus'} a_{ik} \otimes' b_{kj}$, *pre* $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Zápis: $C = A \otimes' B$.

Príklad 3.4.2 *Pre dané matice A a B vypočítajme $A \otimes' B$.*

Riešenie.

$$A \otimes' B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

♡

Definícia 3.3 *Štvorcovú maticu $E' \in \mathbb{R}^{\star'}(n,n)$, $E' = (\bar{e}_{ij})$ nazývame* ***jednotkovou maticou****, ak pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$*

$$\bar{e}_{ij} = \begin{cases} \varepsilon' & \textit{pre} \;\; i \neq j, \\ 0 & \textit{pre} \;\; i = j. \end{cases}$$

Príklad 3.4.3

$$E' = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & 0 & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & 0 \end{pmatrix}.$$

Definícia 3.4 *Nech $A \in \mathbb{R}^{\star'}(n,n)$. Nech $p \in \mathbb{N}$.* ***p-tou mocninou matice*** *A nazývame maticu $A^{[p]}$*

$$A^{[p]} = \begin{cases} E' & p = 0 \\ A \otimes' A^{[p-1]} & p = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Zápis: $A^{[p]} = (a_{ij}^{[p]})$.

Príklad 3.4.4 *Vypočítajme tretiu mocninu danej matice.*

Riešenie.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon' & 4 \end{pmatrix}^{[3]} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon' & 4 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon' & 4 \end{pmatrix}^{[2]} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon' & 4 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ \varepsilon' & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ \varepsilon' & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

♡

3.5 Kritický diagram

Ak využijeme definície operácií $\otimes'$ a $\oplus'$ z predchádzajúcej časti, tak môžeme rekurzívny zápis systému, teda najneskorší čas ukončenia r-tého cyklu na i-tom stroji,

$$y_i(r) = \min\{y_1(r+1) + \bar{a}_{i1}, y_2(r+1) + \bar{a}_{i2}, \ldots, y_n(r+1) + \bar{a}_{in}\}$$

prepísať do tvaru

$$y_i(r) = y_1(r+1) \otimes' \bar{a}_{i1} \oplus' y_2(r+1) \otimes' \bar{a}_{i2} \oplus' \ldots \oplus' y_n(r+1) \otimes' \bar{a}_{in}. \qquad (8)$$

Hodnoty $\bar{a}_{ij}$ sú odvodené z hodnôt a_{ji} matice prechodu A uvažovaného DDS (viď vzťahy (7)), menovite,

$$\bar{a}_{ij} = -a_{ji} \qquad \text{pre } i,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ak použijeme túto skutočnosť, definíciu 3.2 súčinu matíc a vzťah (8), rekurzívny zápis DDS vieme vyjadriť v maticovom tvare

$$y(r) = A' \otimes' y(r+1) = (-A)^\top \otimes' y(r+1). \qquad (9)$$

Príklad 3.5.1 *Majme výrobnú linku so štyrmi strojmi, danú maticou prechodu*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Predpokladajme, že všetky stroje začnú pracovať naraz v čase 0. Nech časy ukončenia štvrtej a piatej etapy sú

$$x(4) = \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad x(5) = \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Aký výpadok pri jednotlivých strojoch môžeme tolerovať po 4. pracovnom úkone, aby sme dodržali časy $x(5)$ ukončenia projektu?

Riešenie. Keďže časy ukončenia projektu sú záväzné, tak najneskorší čas musí byť rovný najskoršiemu času ukončenia piatej etapy, t. j. $y(5) = x(5)$. Ak využijeme túto skutočnosť, môžeme najneskorší čas ukončenia štvrtej etapy určiť pomocou vzťahu (9)

$$\begin{aligned} y(4) &= A' \otimes' y(5) = (-A)^\top \otimes' y(5) = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 & \varepsilon' \\ -4 & -5 & -6 & -3 \\ \varepsilon' & -2 & -3 & 0 \\ -8 & \varepsilon' & -4 & -6 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 23 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Porovnaním najneskorších časov ukončenia 4-tej etapy $y(4)$ a najskorších časov ukončenia 4-tej etapy $x(4)$ zistíme, že

- na 1. stroji je najskorší a najneskorší čas ukončenia 4-ej etapy totožný, t. j. žiaden sklz si nemôžeme na tomto stroji po štvrtej etape dovoliť,
- na 2. stroji je najskorší čas o 1 časovú jednotku menší ako najneskorší čas ukončenia 4-ej etapy, t. j. môžeme si dovoliť sklz si 1 časovú jednotku,
- na 3. stroji si môžeme dovoliť sklz 2 časové jednotky,
- na 4. stroji si žiaden sklz nemôžeme dovoliť.

♡

Definícia 3.5 *Majme DDS s maticou prechodu* $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$ *a vektor* $y \in F(n)$. *Postupnosť stavov* $y(p+1) = y$, $y(p) = A' \otimes' y$, $y(p-1) = (A')^{[2]} \otimes' y$, ..., $y(1) = (A')^{[p]} \otimes' y$ *nazývame* $(p+1)$***-stavový zostupný orbit založený na vektore*** y.

Projekt s piatimi etapami pre modelový systém z príkladu 3.5.1 má nasledujúci 5-stavový zostupný orbit založený na vektore $y = y(5) = x(5)$:

$$\begin{array}{ccccccc} y(r) & = & \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 26 \\ 23 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 21 \\ 18 \\ 21 \\ 18 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}. \\ \\ r & = & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Poznámka 3.2 *Vzhľadom na vzťah* (9) *môže byť zostupný orbit určený postupným násobením maticou* A'

$$y(r) = \begin{cases} y & \textit{for} \quad r = p+1 \\ A' \otimes' y(r+1) & \textit{for} \quad r = p, p-1, \ldots, 1. \end{cases} \tag{10}$$

V príklade 3.5.1 sme určili, aké zdržanie je možné po štvrtej etape na jednotlivých strojoch, aby sme neohrozili čas, ku ktorému sme sa zaviazali projekt ukončiť. Pri tej príležitosti sme zistili, že sú stroje, pri ktorých žiaden sklz nie je možný, inak povedané z hľadiska ukončenia projektu sú kritické.

Definícia 3.6 *Nech DDS je daný maticou prechodu* $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. *Nech* $x(1)$, $x(2)$, ..., $x(p)$ *je p-stavový vzostupný orbit založený na vektore* $x(1)$ *generovaný maticou* A *a* $y(p)$, $y(p-1)$, ..., $y(1)$ *je zodpovedajúci p-stavový zostupný orbit pre* $y(p) = x(p)$. *Ak pre ľubovoľné* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *existuje* $r \in \{1, 2, \ldots, p\}$ *také, že sa najskorší čas ukončenia cyklu* $x_i(r)$ *a najneskorší čas ukončenia cyklu* $y_i(r)$ *rovnajú*

$$x_i(r) = y_i(r), \tag{11}$$

tak $x_i(r)$ *nazývame* ***kritickým stavom***.

Príklad 3.5.2 *Majme výrobnú linku so štyrmi strojmi z príkladu 3.5.1. Určme kritické stavy pre každú etapu päťetapového projektu, ktorý začal na každom stroji v čase 0.*

Riešenie. Najskôr vypočítame päťetapový vzostupný orbit $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$, $x(5)$ založený na vektore $x = x(1) = \mathrm{diag}(A)$ pomocou vzťahu (5). Položíme $y(5) = x(5)$ a následne vypočítame päťetapový zostupný orbit $y(5)$, $y(4)$, $y(3)$, $y(2)$, $y(1)$ pomocou vzťahu (10).

$$x(r): \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix};$$

$$y(r): \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 18 \\ 21 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26 \\ 23 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Nakoniec porovnaním najskorších a najneskorších časov ukončenia jednotlivých etáp dostaneme kritické stavy pre jednotlivé etapy. V prvej, druhej a tretej etape je kritický len štvrtý stroj. V štvrtej etape je kritický prvý a štvrtý stroj. Pri nedodržaní kritických časov nedosiahneme časy ukončenia projektu reprezentované vektorom $x(5) = y(5)$. ♡

Keďže $x(r+1) = A \otimes x(r)$, z definície 1.5 násobenia matíc v max plus algebre vyplýva, že pre každú trojicu i, j, r musí nastať jeden z prípadov:

$$\begin{aligned} x_i(r+1) &> a_{ij} + x_j(r) \\ &= a_{ij} + x_j(r), \end{aligned}$$

pričom pre každé i existuje aspoň jedno j také, že nastáva rovnosť([5]).

Definícia 3.7 *Kritické stavy $x_i(r+1)$ a $x_j(r)$, pre ktoré*

$$x_i(r+1) = a_{ij} + x_j(r), \tag{12}$$

*nazývame **kriticky spojené**.*

Príklad 3.5.3 *Majme výrobnú linku so štyrmi strojmi z príkladu 3.5.2. Určme kriticky spojené stavy pre štvrtú a piatu etapu päťetapového projektu, ktorý začal na každom stroji v čase 0.*

Riešenie. V štvrtej etape sú kritické dva stroje, t. j. čas ukončenia piatej etapy na každom stroji je závislý od niektorého z týchto dvoch strojov:

$$\begin{aligned} x_1(5) &= a_{14} + x_4(4) &= 8 + 24 &= 32, \\ x_2(5) &= a_{21} + x_1(4) &= 2 + 26 &= 28, \\ x_3(5) &= a_{31} + x_1(4) &= 4 + 26 &= 30, \\ x_4(5) &= a_{44} + x_4(4) &= 6 + 24 &= 30. \end{aligned}$$

Kriticky spojené sú stavy

$$\begin{aligned} x_1(5) &\to x_4(4), \\ x_2(5) &\to x_1(4), \\ x_3(5) &\to x_1(4), \\ x_4(5) &\to x_4(4). \end{aligned}$$

Túto závislosť môžeme znázorniť vo vzostupnom orbite graficky nasledovne

$$x(r) : \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

♡

Definícia 3.8 *Ak spojíme vo vzostupnom orbite každé dva kriticky spojené kritické stavy, dostaneme **kritický diagram projektu**.*

Príklad 3.5.4 *Zistime, ktoré kritické stavy z príkladu 3.5.2 sú kriticky spojené.*

Riešenie. Použijeme postup z príkladu 3.5.3 pre všetky kritické stavy, spojíme kriticky spojené stavy a dostaneme kritický diagram projektu:

$$x(r) : \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

♡

3.6 Vizualizácia kritického diagramu v prostredí MATLAB

Problém nájdenia kritického diagramu je z hľadiska určenia neuralgických bodov DDS dôležitý. Manažéri, napr. výrobnej linky, potrebujú prostriedok, ktorý im pomôže riadiť výrobný proces tak, aby boli dodržané časy ukončenia výroby v súlade so záväzkami voči odberateľovi. Inými slovami potrebujú dostupný spôsob na identifikáciu tých strojov v jednotlivých etapách projektu, ktoré sa nemôžu zdržať. Takýto nástroj môžeme poskytnúť vytvorením programu s grafickým výstupom, napr. v MATLABe, na základe algoritmu:

Algoritmus vytvorenia kritického diagramu

(i) zostrojíme n-rozmerný vektor $x(1)$ na základe vstupnej matice prechodu A rádu n a vstupného n-rozmerného vektora t časov spustenia výroby na jednotlivých strojoch: $x(1) = \mathrm{diag}(A) + t$,

(ii) zostrojíme vzostupný orbit $x(1), x(2),\dots, x(p)$ dĺžky p rovnej zadanému počtu etáp, podľa vzťahu $x(r+1) = A \otimes x(r)$, pre $r = 1, 2, \dots, p - 1$, pričom uchováme informáciu, pre aké j vznikla hodnota $x_i(r+1)$ z hodnoty $x_j(r)$, pre $i = 1, 2, \dots, n$ (ak $x_i(r + 1)$ a $x_j(r)$ sú kritické stavy, tak sú kriticky spojené),

(iii) položíme $y(p) = x(p)$ a zostrojíme zostupný orbit $y(p),\dots, y(2)$, $y(1)$ dĺžky p podľa vzťahu $y(r) = A' \otimes' y(r + 1)$, pre $r = p - 1, \dots, 2, 1$,

(iv) porovnáme časy $x_i(r)$ a $y_i(r)$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ v danej etape, a ak sa rovnajú, vyznačíme vo vzostupnom orbite tento kritický stav, postup opakujeme pre etapy $r = 1, 2, \dots, p$,

(v) vo vzostupnom orbite spojíme úsečkou tie dva kritické stavy v dvoch po sebe nasledujúcich etapách, ktoré sú kriticky spojené.

Uvádzame príklad, ktorý sme vypočítali pomocou programu KritickyDiagramDDS vytvoreného v MATLABe.

Príklad 3.6.1 *Pomocou programu KritickyDiagramDDS nájdime pre maticu prechodu A, počet etáp $p = 4$ a vektor časov spustenia výroby na jednotlivých strojoch $t = (2, 0, 3)^\top$ kritický diagram daného DDS.*

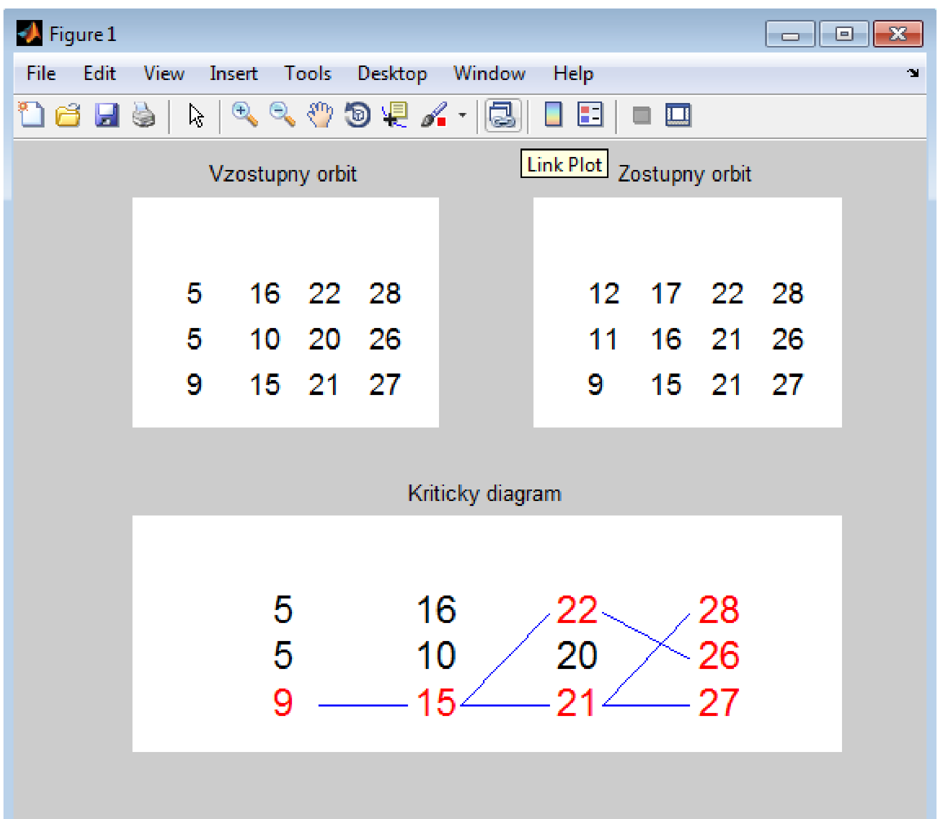
$$A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Spustíme program KritickyDiagramDDS v MATLABe. Zadáme maticu prechodu daného DDS A, počet etáp p projektu a vektor spustenia výroby na jednotlivých strojoch t v dialógovom okne (viď obr. 1).

```
>> dds
Zadaj maticu:[3 -inf 7; 4 5 -inf; -inf 2 6]
Zadaj pocet etap:4
Zadaj vektor t:[2;0;3]
```

Obr. 1: Vstupné dáta

Po zbehnutí programu sa nám otvorí okno, v ktorom je uvedený vzostupný a zostupný orbit, farebne odlíšené kritické stavy a kritický diagram uvažovaného DDS (viď obr. 2).



Obr. 2: Kritický diagram

3.7 Konjugácia

V tejto časti sa budeme venovať v širších súvislostiach operácii, ktorou vznikla z matice A matica A' používaná v predchádzajúcej časti.

Definícia 3.9 *Nech $A = (a_{ij})$ je štvorcová matica rádu n, kde $a_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Maticu $A' = (\bar{a}_{ij})$ nazývame* ***konjugovanou maticou*** *k matici A, ak pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$*

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & pre \;\; a_{ji} \; konečné \\ \varepsilon & pre \;\; a_{ji} = \varepsilon' \\ \varepsilon' & pre \;\; a_{ji} = \varepsilon \end{cases}$$

Operáciu “ $'$ ” nazývame ***konjugáciou****.*

Skalár možno považovať za maticu rádu 1, z čoho vyplýva $a' = -a$. V ďalších vetách uvedieme niektoré vlastnosti konjugácie súčtu a súčinu skalárov a matíc.

Veta 3.1 *Nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Potom platí*

(i) $\left[\sum_j^{\oplus} \lambda_j\right]' = \sum_j^{\oplus'} \lambda_j'$,

(ii) $\left[\sum_j^{\oplus'} \lambda_j\right]' = \sum_j^{\oplus} \lambda_j'$.

Príklad 3.7.1 *Overme pre $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 4$, že*

a) *konjugácia súčtu ($\oplus$) je rovná súčtu ($\oplus'$) konjugácií,*

b) *konjugácia súčtu ($\oplus'$) je rovná súčtu ($\oplus$) konjugácií.*

Riešenie.

a) $\left[\sum_j^{\oplus} \lambda_j\right]' = -4 = \sum_j^{\oplus'} \lambda_j'$,

b) $\left[\sum_j^{\oplus'} \lambda_j\right]' = 3 = \sum_j^{\oplus} \lambda_j'$.

♡

Veta 3.2 *Nech $\lambda \in \mathbb{R}$. Nech $x \in F(m)$. Potom platí*

(i) $\lambda' \otimes \lambda = 0$,

(ii) $|\lambda| = \lambda \oplus \lambda'$,

(iii) $x' \otimes x = 0$.

Veta 3.3 *Nech* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *sú matice rovnakého typu, kde* $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Potom platí*

(i) $(A \oplus B)' = A' \oplus' B'$,

(ii) $(A \oplus' B)' = A' \oplus B'$.

Veta 3.4 *Nech* λ, $\mu \in \mathbb{R}$. *Potom platí*

$$(\lambda \otimes \mu)' = \mu' \otimes' \lambda'.$$

Veta 3.5 *Nech* $A \in F(m, r)$, $B \in F(r, n)$. *Potom platí*

$$(A \otimes B)' = B' \otimes' A'.$$

Použitím vety 3.5 dostaneme nasledujúci výsledok, ktorý uvádza vzťah medzi umocňovaním matice v max-plus a max-min algebre.

Veta 3.6 *Nech* $A \in F(n, n)$. *Potom platí*

$$(A^k)' = (A')^{[k]}.$$

Príklad 3.7.2 *Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov. Nech* A *je matica prechodu daného DDS a* $y(5)$ *časy ukončenia projektu:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad y(5) = \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Kedy najneskôr musíme spustiť výrobu na jednotlivých strojoch, aby sme dodržali časy $y(5)$ *ukončenia projektu?*

Riešenie. Máme nájsť vector $y(1)$, ktorý reprezentuje najneskoršie časy ukončenia prvej etapy. Nie je nevyhnutné nájsť úplný zostupný orbit. Nájdeme štvrtú mocninu konjugovanej matice v min-plus algebre. Namiesto výpočtu v min-plus algebre vypočítame ale štvrtú mocninu matice A v max-plus algebre a konjugujeme ju. Výsledná matica je podľa vety 3.6 štvrtou mocninou konjugovanej matice v min-plus algebre. Následne touto maticou vynásobíme vektor $y(5)$ a dostaneme požadovaný vektor $y(1)$, ktorý určuje najneskoršie časy ukončenia prvej etapy na jednotlivých strojoch.

$$\begin{aligned}
y(1) &= A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' y(5)))) = \\
&= (A')^{[4]} \otimes' y(5) = (A^4)' \otimes' y(5) = \\
&= \begin{pmatrix} 19 & 23 & 20 & 26 \\ 17 & 20 & 17 & 22 \\ 18 & 21 & 18 & 24 \\ 17 & 21 & 18 & 24 \end{pmatrix}' \otimes' \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -19 & -17 & -18 & -17 \\ -23 & -20 & -21 & -21 \\ -20 & -17 & -18 & -18 \\ -26 & -22 & -24 & -24 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Čas spustenia výroby na jednotlivých strojoch bude

$$t = y(1) - \mathrm{diag}(A) = (8, 3, 8, 0)^\top.$$

♡

3.8 Dopravný systém

V tejto časti sa oboznámime s jednou z možných aplikácií min-plus algebry.

Predstavme si kruhovú dopravnú obsluhu mesta, ktorá spája jednotlivé mestské časti N_1, N_2, ..., N_n. Maticou dopravného systému s n spojmi nazývame štvorcovú maticu $D = (d_{ij})$ rádu n, v ktorej každý prvok d_{ij} je buď konečné reálne číslo, ktoré reprezentuje čas prepravy z dopravného uzla j do dopravného uzla i alebo číslo rovné $\varepsilon' = \infty$, ak z dopravného uzla j do dopravného uzla i priamy spoj nepremáva.

Predpokladajme, že autobusy sa vydajú na cestu v časoch u_1, u_2, u_3, $\ldots$, u_n. Aké najskoršie môžu byť časy v_1, v_2, v_3, $\ldots$, v_n, kedy môžeme nastúpiť na autobus v každej mestskej časti? Riešením môže byť buď spoj, ktorý vychádza bezprostredne z danej mestskej časti, alebo spoj, ktorý došiel z predchádzajúcej mestskej časti

$$v_i = \min\{u_i, \min_j\{d_{ij} + v_j\}\}.$$

V maticovom zápise $v = u \oplus' D \otimes' v$. Opakovanou aplikáciou pravej strany rovnice dostávame

$$\begin{aligned}
v &= u \oplus' D \otimes' (u \oplus' D \otimes' v) = \\
&= u \oplus' D \otimes' u \oplus' D^{[2]} \otimes' v = \\
&= \ldots = \\
&= u \oplus' D \otimes' u \oplus' D^{[2]} \otimes' u \oplus' D^{[3]} \otimes' u \oplus' \ldots
\end{aligned}$$

s nasledujúcou interpretáciou:

- u ... spoj vychádza z danej mestskej časti,
- $D \otimes' u$ ... spoj došiel po absolvovaní jednej trasy,
- $D^{[2]} \otimes' u$ ... spoj došiel po absolvovaní dvoch trás,
- $\ldots$

Keďže je n mestských častí, je jasné, že stačí uvažovať $n-1$ trás a preto

$$\begin{aligned} v &= u \oplus' D \otimes' u \oplus' D^{[2]} \otimes' u \oplus' D^{[3]} \otimes' u \oplus' \ldots \oplus' D^{[n-1]} \otimes' u = \\ &= \left(E' \oplus' D \oplus' D^{[2]} \oplus' D^{[3]} \oplus' \ldots \oplus' D^{[n-1]}\right) \otimes' u = \\ &= (E' \oplus' D)^{[n-1]} \otimes' u \end{aligned}$$

Príklad 3.8.1 *Majme kruhový dopravný systém v meste, ktorý spája štyri mestské časti N_1, N_2, N_3 a N_4 s nasledujúcimi spojmi:*

- *z mestskej časti N_1 ide spoj do N_2 a presun trvá 2 č.j.,*
- *z mestskej časti N_2 ide spoj do N_3 a presun trvá 3 č.j.,*
- *z mestskej časti N_3 ide spoj do N_4 a presun trvá 4 č.j.,*
- *z mestskej časti N_4 ide spoj do N_1 a presun trvá 1 č.j.*

Predpokladajme, že autobusy štartujú z jednotlivých mestských častí nasledovne

- *z mestskej časti N_1 v čase 9,*
- *z mestskej časti N_2 v čase 0,*
- *z mestskej časti N_3 v čase 2,*
- *z mestskej časti N_4 neide žiaden autobus.*

Aké najskoršie môžu byť časy v_1, v_2, v_3 a v_4, kedy môžeme nastúpiť na autobus v každej mestskej časti?

Riešenie. Zostrojíme maticu dopravného systému

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & 1 \\ 2 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & 3 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & 4 & \varepsilon' \end{pmatrix}$$

a pomocou odvodeného vzťahu počítame

$$
\begin{aligned}
v &= (E' \oplus' D)^{[3]} \otimes' u = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon' & \varepsilon' & 1 \\ 2 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & 3 & 0 & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & 4 & 0 \end{pmatrix}^{[3]} \otimes' \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \\ \varepsilon' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 6 \\ 9 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \\ \varepsilon' \end{pmatrix} = \\
&= (7, 0, 2, 6)^\top .
\end{aligned}
$$

♡

3.9 Úlohy

3.1 Nájdite konjugovanú maticu A' k matici A

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 8 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ \varepsilon & 0 & -2 \\ 1 & 3 & \varepsilon' \end{pmatrix}$.

3.2 Vypočítajte súčin matíc $A \otimes' B$ v min-plus algebre

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ \varepsilon' & 4 & 5 \\ 0 & \varepsilon' & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon' & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \varepsilon' & 5 & 4 \\ 2 & \varepsilon' & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & \varepsilon' & 0 \\ 5 & \varepsilon' & 6 \end{pmatrix}$.

3.3 Vypočítajte súčin matíc $(B' \otimes A')'$ v max-plus algebre pre matice z cvičenia 3.2 a porovnajte výsledky.

3.4 Aký výpadok u jednotlivých strojov môžme tolerovať pri $(p+1)$-vom pracovnom úkone, aby sme dosiahli časy $x(p+1)$, ak

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad x(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix}$ $\quad x(4) = \begin{pmatrix} 25 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad x(3) = \begin{pmatrix} 22 \\ 20 \\ 21 \end{pmatrix}$ $\quad x(4) = \begin{pmatrix} 28 \\ 26 \\ 27 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$ $\quad x(3) = \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$ $\quad x(4) = \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$ $\quad x(3) = \begin{pmatrix} 20 \\ 23 \\ 17 \\ 15 \end{pmatrix}$ $\quad x(4) = \begin{pmatrix} 27 \\ 30 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & 3 & 7 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad x(4) = \begin{pmatrix} 33 \\ 37 \\ 33 \\ 36 \end{pmatrix}$ $\quad x(5) = \begin{pmatrix} 42 \\ 46 \\ 42 \\ 45 \end{pmatrix}$,

f) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & 3 & 7 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad x(5) = \begin{pmatrix} 42 \\ 46 \\ 42 \\ 45 \end{pmatrix}$ $\quad x(6) = \begin{pmatrix} 51 \\ 55 \\ 51 \\ 54 \end{pmatrix}$.

3.5 Nájdite kritické stavy DDS s maticou prechodu A, vektorom $x(1)$ a počtom etáp p

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad x(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad p = 4$,

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad x(1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad p = 4$,

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$ $\quad x(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad p = 4$,

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$ $\quad x(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad p = 4$,

e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & 3 & 7 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad x(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad p = 5.$

3.6 Zostrojte kritické diagramy projektov z cvičenia 3.5.

3.7 Nájdite kritické diagramy projektov z cvičenia 3.5 pomocou programu KritickyDiagramDDS v MATLABe.

3.8 Zistite, kedy najneskôr musíme spustiť výrobu na jednotlivých strojoch, aby sme dodržali sľúbené časy $y(p+1)$ ukončenia projektu.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad y(4) = \begin{pmatrix} 25 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix},$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad y(4) = \begin{pmatrix} 28 \\ 26 \\ 27 \end{pmatrix},$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$ $\quad y(4) = \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$ $\quad y(4) = \begin{pmatrix} 27 \\ 30 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}.$

e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & 3 & 7 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad y(5) = \begin{pmatrix} 42 \\ 46 \\ 42 \\ 45 \end{pmatrix}.$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$ $\quad y(3) = \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}.$

3.9 Majme kruhový dopravný systém v meste, ktorý spája štyri mestské časti N_1, N_2, N_3 a N_4 s nasledujúcimi spojmi:

- z mestskej časti N_1 ide spoj do N_2 a presun trvá 2 č.j.
- z mestskej časti N_2 ide spoj do N_3 a presun trvá 3 č.j.

- z mestskej časti N_3 ide spoj do N_4 a presun trvá 4 č.j.
- z mestskej časti N_4 ide spoj do N_1 a presun trvá 1 č.j.

Aké najskoršie môžu byť časy v_1, v_2, v_3 a v_4, kedy môžeme nastúpiť na autobus v každej mestskej časti, ak je daný vektor štartovacích časov z jednotlivých mestských častí:

a) $u = (3, 3, 3, 3)^\top$,

b) $u = (3, \varepsilon', \varepsilon', \varepsilon')^\top$,

c) $u = (3, \varepsilon', 3, \varepsilon')^\top$,

d) $u = (3, \varepsilon', \varepsilon', 3)^\top$,

e) $u = (\varepsilon', 2, 3, 5)^\top$,

f) $u = (4, \varepsilon', 10, 12)^\top$?

3.10 Majme kruhový dopravný systém v meste, ktorý spája štyri mestské časti N_1, N_2, N_3 a N_4 s nasledujúcimi spojmi:

- z mestskej časti N_1 ide spoj do N_2 a presun trvá 2 č.j.
- z mestskej časti N_2 ide spoj do N_3 a presun trvá 2 č.j.
- z mestskej časti N_3 ide spoj do N_4 a presun trvá 2 č.j.
- z mestskej časti N_4 ide spoj do N_1 a presun trvá 2 č.j.

Aké najskoršie môžu byť časy v_1, v_2, v_3 a v_4, kedy môžeme nastúpiť na autobus v každej mestskej časti, ak je daný vektor štartovacích časov z jednotlivých mestských častí:

a) $u = (1, 1, 1, 1)^\top$,

b) $u = (1, \varepsilon', \varepsilon', \varepsilon')^\top$,

c) $u = (1, \varepsilon', 1, \varepsilon')^\top$,

d) $u = (1, \varepsilon', \varepsilon', 1)^\top$,

e) $u = (\varepsilon', 3, 4, 2)^\top$,

f) $u = (\varepsilon', 3, 9, 10)^\top$?

Výsledky:

3.1

a) $A' = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

b) $A' = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$,

c) $A' = \begin{pmatrix} -1, & -2, & -3, & -4 \end{pmatrix}^\top$,

d) $A' = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon' & -1 \\ -5 & 0 & -3 \\ -6 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

3.2

a) $A \otimes' B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$,   c) $A \otimes' B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 9 & \varepsilon' & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

b) $A \otimes' B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$,

3.3 Výsledné matice sa rovnajú tým z predchádzajúceho príkladu.

3.4

a) $y(3) = (19, 18, 18)^\top$, 1 č. j. na druhom stroji,

b) $y(3) = (22, 21, 21)^\top$, 1 č. j. na druhom stroji,

c) $y(3) = (18, 21, 15, 14)^\top$, 1 č. j. štvrtom stroji,

d) $y(3) = (20, 23, 17, 16)^\top$, 1 č. j. štvrtom stroji,

e) $y(4) = (38, 37, 35, 36)^\top$, 5 č. j. prvom a 2 č. j. na treťom stroji,

f) $y(5) = (47, 46, 44, 45)^\top$, 5 č. j. prvom a 2 č. j. na treťom stroji.

3.5

a) $x(r): \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix};$

$y(r): \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix};$

b) $x(r): \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 \\ 20 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 28 \\ 26 \\ 27 \end{pmatrix};$

$y(r): \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 28 \\ 26 \\ 27 \end{pmatrix};$

c) $x(r): \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix};$

$y(r): \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix};$

d) $x(r): \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 16 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 23 \\ 17 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 27 \\ 30 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix};$

$y(r): \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 23 \\ 17 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 27 \\ 30 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix};$

e) $x(r): \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 24 \\ 28 \\ 24 \\ 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 \\ 37 \\ 33 \\ 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42 \\ 46 \\ 42 \\ 45 \end{pmatrix};$

$y(r): \begin{pmatrix} 26 \\ 16 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 19 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 34 \\ 32 \\ 28 \\ 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 38 \\ 37 \\ 35 \\ 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42 \\ 46 \\ 42 \\ 45 \end{pmatrix}.$

3.6

$$\text{a)}\ \ x(r):\ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix};$$

$$\text{b)}\ \ x(r):\ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 \\ 20 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 28 \\ 26 \\ 27 \end{pmatrix};$$

$$\text{c)}\ \ x(r):\ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$\text{d)}\ \ x(r):\ \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 16 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 23 \\ 17 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 27 \\ 30 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix};$$

$$\text{e)}\ \ x(r):\ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 24 \\ 28 \\ 24 \\ 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 \\ 37 \\ 33 \\ 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42 \\ 46 \\ 42 \\ 45 \end{pmatrix};$$

3.7

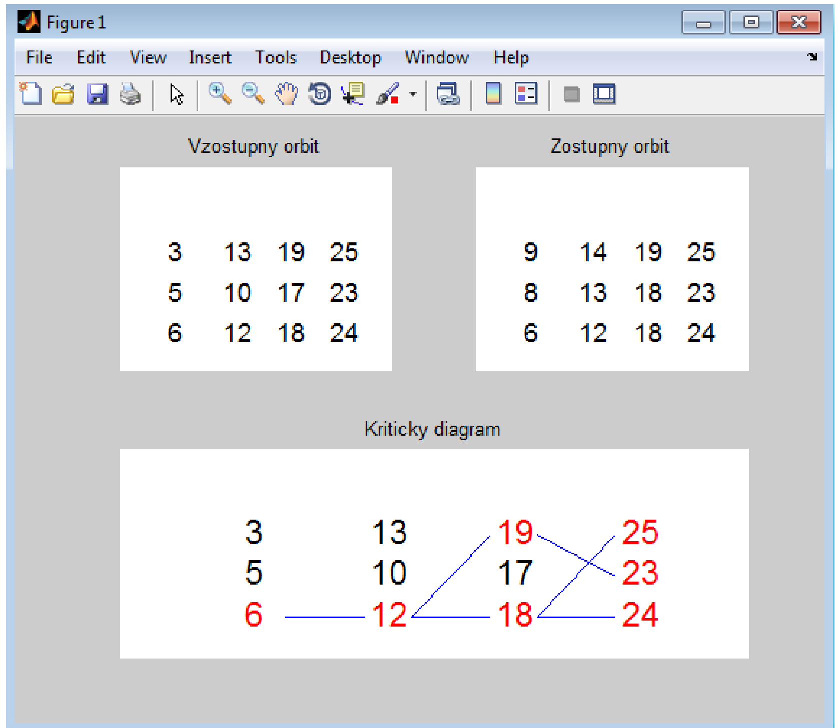


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Vzostupny orbit
3 13 19 25
5 10 17 23
6 12 18 24
Zostupny orbit
9 14 19 25
8 13 18 23
6 12 18 24
Kriticky diagram
3 13 19 25
5 10 17 23
6 12 18 24

a)

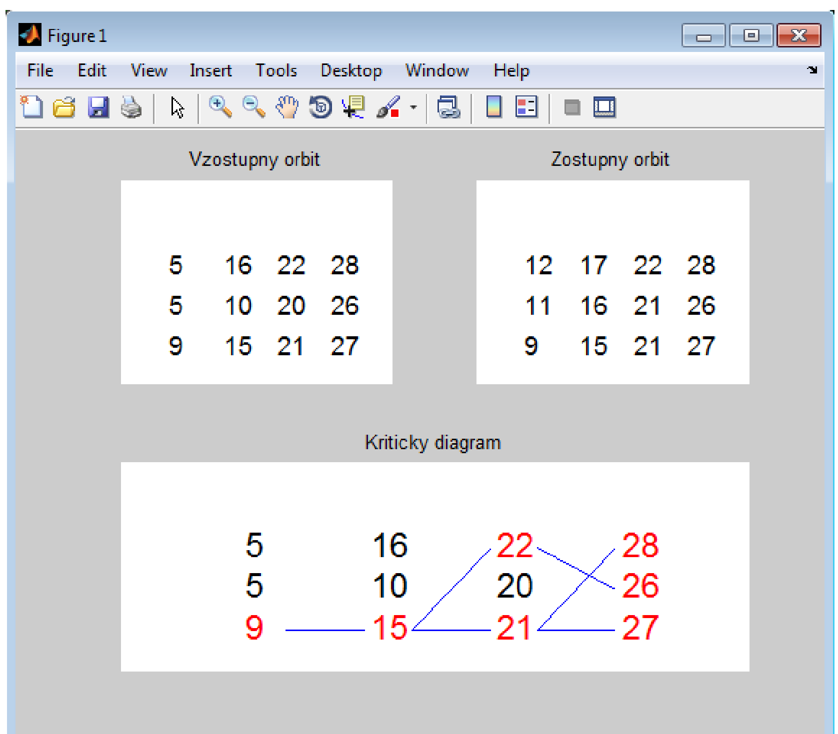


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Vzostupny orbit
5 16 22 28
5 10 20 26
9 15 21 27
Zostupny orbit
12 17 22 28
11 16 21 26
9 15 21 27
Kriticky diagram
5 16 22 28
5 10 20 26
9 15 21 27

b)

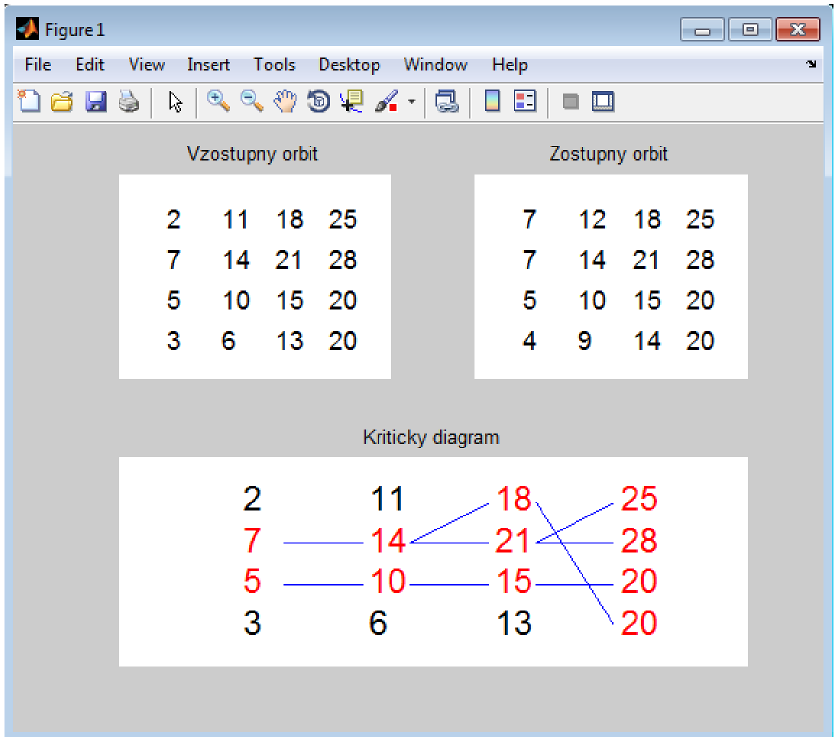


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Vzostupny orbit
2 11 18 25
7 14 21 28
5 10 15 20
3 6 13 20
Zostupny orbit
7 12 18 25
7 14 21 28
5 10 15 20
4 9 14 20
Kriticky diagram
2 11 18 25
7 14 21 28
5 10 15 20
3 6 13 20

c)

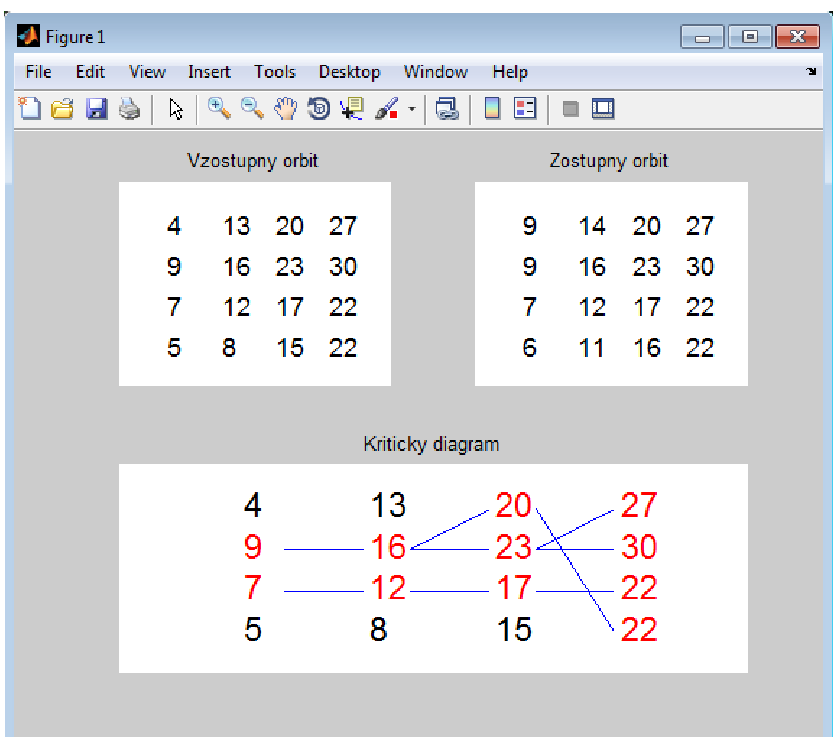
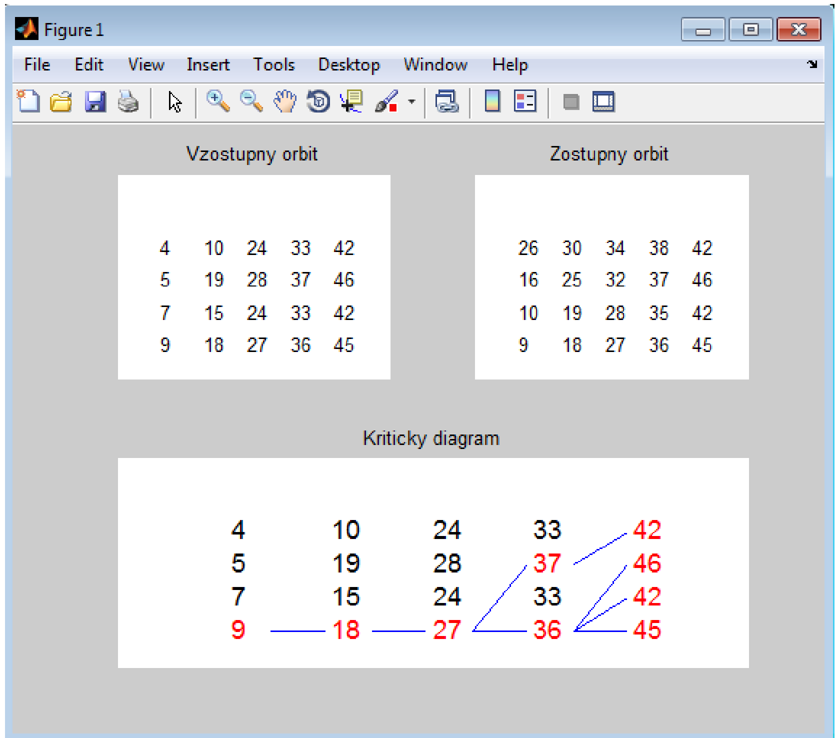


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Vzostupny orbit
4 13 20 27
9 16 23 30
7 12 17 22
5 8 15 22
Zostupny orbit
9 14 20 27
9 16 23 30
7 12 17 22
6 11 16 22
Kriticky diagram
4 13 20 27
9 16 23 30
7 12 17 22
5 8 15 22

d)

e) 

3.8

a) $y(1) = (9,\ 8,\ 6)^\top,\qquad t = (6,\ 3,\ 0)^\top,$

b) $y(1) = (12,\ 11,\ 9)^\top,\qquad t = (9,\ 6,\ 3)^\top,$

c) $y(1) = (7,\ 7,\ 5,\ 4)^\top,\ \ t = (5,\ 0,\ 0,\ 1)^\top,$

d) $y(1) = (9,\ 9,\ 7,\ 6)^\top,\ \ t = (7,\ 2,\ 2,\ 3)^\top,$

e) $y(1) = (26,\ 16,\ 10,\ 9)^\top,\ \ t = (22,\ 11,\ 3,\ 0)^\top,$

f) $y(1) = (7,\ 7,\ 5,\ 4)^\top,\qquad t = (5,\ 0,\ 0,\ 1)^\top.$

3.9

a) $v = (3, 3, 3, 3)^\top,$

b) $v = (3, 5, 8, 12)^\top,$

c) $v = (3, 5, 3, 7)^\top,$

d) $v = (3, 5, 8, 3)^\top,$

e) $v = (6, 2, 3, 5)^\top,$

f) $v = (4, 6, 9, 12)^\top.$

3.10

a) $v = (1, 1, 1, 1)^\top$,

b) $v = (1, 3, 5, 7)^\top$,

c) $v = (1, 3, 1, 3)^\top$,

d) $v = (1, 3, 5, 1)^\top$,

e) $v = (4, 3, 4, 2)^\top$,

f) $v = (9, 3, 5, 7)^\top$.

4 Digrafy a ich využitie pre DDS

4.1 Cieľ kapitoly

Oboznámiť sa s pojmom digraf matice prechodu DDS, slabý a silný tranzitívny uzáver matice. Oboznámiť sa s technikami výpočtu a využitím tranzitívnych uzáverov matice. Oboznámiť sa s pojmom reducibilná a ireducibilná matica. Oboznámiť sa s pojmom horná blokovo-trojuholníková matica a transformáciou reducibilnej matice do tvaru hornej blokovo-trojuholníkovej matice.

4.2 Prehľad kapitoly v otázkach

- Definujte digraf zodpovedajúci matici prechodu DDS a pojem maximálna priemerná váha cyklu.
- Definujte slabý tranzitívny uzáver matice a interpretujte element na pozícii v i-tom riadku j-tom stĺpci.
- Definujte p-regulárnu maticu a uveďte postačujúcu podmienku p-regulárnosti matice.
- Definujte silný tranzitívny uzáver matice. Uveďte vzťahy na prevod tranzitívnych uzáverov.
- Popíšte Floydov-Warshallov algoritmus.
- Definujte ireducibilné a reducibilné matice.
- Popíšte algoritmus na overenie ireducibility matice s využitím tranzitívnych uzáverov.
- Popíšte algoritmus na nájdenie silne súvislých komponentov digrafu reducibilnej matice s využitím tranzitívnych uzáverov.
- Uveďte postup transformácie reducibilnej matice na hornú blokovo-trojuholníkovú maticu pomocou permutačnej matice.
- Definujte definitnú maticu a uveďte jej vlastnosti.

4.3 Digraf zodpovedajúci matici prechodu DDS

Vlastnosti matíc v max-plus algebre (a teda aj duálnej min-plus algebre) sa dajú skúmať pomocou vlastností zodpovedajúceho digrafu. Keďže DDS sú reprezentované maticou prechodu, je namieste pýtať sa, ak sa táto matica chová. V tejto kapitole si predstavíme niektoré časti teórie digrafov spolu so zodpovedajúcimi algoritmami, ktoré súvisia s problematikou DDS.

Definícia 4.1 *Pre maticu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ definujeme* ***digraf*** $\mathcal{G}(A) = (V, E)$ *s množinou vrcholov $V = \{1, 2, ..., n\}$ a hranami (i, j) s konečnou váhou a_{ij}. Ak usporiadanej dvojici (i, j) zodpovedá hodnota $a_{ij} = \varepsilon$, tak digraf $\mathcal{G}(A)$ neobsahuje hranu z vrchola i do vrchola j.*

Definícia 4.2 ***Dráha*** *v digrafe $\mathcal{G}(A) = (V, E)$ je taká postupnosť vrcholov $p = (i_1, i_2, ..., i_{r+1})$ s $r \geq 0$, že $(i_t, i_{t+1}) \in E$ pre každé $t \in \{1, 2, ..., r\}$. Číslo r nazývame* ***dĺžkou dráhy*** *a označujeme $|p|$. Ak $i_1 = i_{r+1}$, tak p nazývame* ***cyklom****.* ***Elementárna dráha*** *je dráha bez opakovaní vrcholov.* ***Elementárny cyklus*** *je dráha, v ktorej sa vyskytuje jediné zopakovanie vrchola $i_1 = i_{r+1}$.* ***Váhou dráhy (cyklu)*** *nazývame sumu váh jej hrán a označujeme $w(p)$ $(w(c))$. Ak c je cyklus s kladnou dĺžkou, tak podiel váhy cyklu a dĺžky cyklu nazývame* ***priemernou váhou cyklu*** *a označujeme $\bar{w}(c)$.* ***Maximálnu priemernú váhu cyklu*** *zo všetkých elementárnych cyklov v $\mathcal{G}(A)$ označujeme $\lambda(A)$. Cyklus s priemernou váhou rovnou $\lambda(A)$ nazývame* ***kritickým cyklom****.*

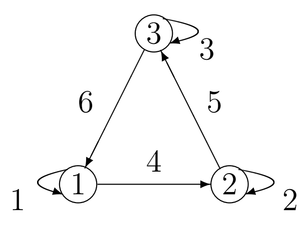
Poznámka 4.1 *Priemerná váha cyklu nemôže presiahnuť hodnoty priemerných váh elementárnych cyklov, ktoré obsahuje. Keďže je v digrafe konečný počet elementárnych cyklov, $\lambda(A)$ stále existuje. Ak v digrafe nie je cyklus s kladnou dĺžkou, tak $\lambda(A) = \varepsilon$.*

Ak $A \in F(n, n)$, tak matica neobsahuje riadok ani stĺpec pozostávajúci výlučne z hodnôt ε. Z toho vyplýva, že sa z každého vrchola dá pokračovať do iného vrchola. Vzhľadom na konečný počet vrcholov sa musí niektorý vrchol zopakovať a vzniká cyklus.

Veta 4.1 *Nech $A \in F(n, n)$. Potom digraf $\mathcal{G}(A)$ obsahuje aspoň jeden cyklus konečnej váhy.*

Príklad 4.3.1 *Nájdime pre danú maticu $A \in F(n, n)$ pomocou zodpovedajúceho digrafu maximálnu priemernú váhu cyklu a zodpovedajúce kritické cykly.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 5 \\ 6 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$$



Riešenie. Vzhľadom na poznámku 4.1 stačí uvažovať elementárne cykly v $\mathcal{G}(A)$. Z digrafu $\mathcal{G}(A)$ je evidentné, že maximálna priemerná váha cyklu matice A je priemerná váha jediného kritického cyklu $c = (1, 2, 3, 1)$ s váhou $w(c) = 15$ a dĺžkou $|c| = 3$. Maximálna priemerná váha je teda $\lambda(A) = \bar{w}(c) = \dfrac{w(c)}{|c|} = 5$. ♡

4.4 Tranzitívne uzávery matice a Floydov-Warshallov algoritmus

Vzťah medzi mocninami danej matice $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$ a váhami dráh v zodpovedajúcom digrafe vyjadruje nasledujúca veta.

Veta 4.2 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Maximálna váha zo všetkých dráh z vrchola i do vrchola j dĺžky r, pre $r = 1, 2, \ldots$ je daná hodnotou $a_{ij}^{(r)}$.*

Tento výsledok sa dá využiť aj na výpočet maximálnej priemernej váhy cyklu prechádzajúceho cez vrchol i dĺžky r pomocou $\dfrac{a_{ii}^{(r)}}{r}$ pre $r = 1, 2, \ldots$.

Definícia 4.3 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$.* ***Slabým tranzitívnym uzáverom matice*** *A v max-plus algebre nazývame sumu jej mocnín*

$$\Delta(A) = A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \cdots \tag{13}$$

Poznámka 4.2 *Ak $\Delta(A) = (\delta_{ij})$, tak δ_{ij} reprezentuje maximálnu váhu dráhy z vrchola i do vrchola j nezávisle na dĺžke dráhy. Špeciálne, ak $i = j$, tak diagonálny prvok δ_{ii} predstavuje maximálnu váhu cyklov prechádzajúcich cez vrchol i.*

Váha cyklov (obsahujúcich vrcholy daného kritického cyklu), ktorých dĺžka je rovná násobku dĺžky kritického cyklu, je rovná zodpovedajúcemu násobku váhy daného kritického cyklu. Inými slovami, ak po rovnakom kritickom cykle obehneme niekoľkokrát, dostaneme opäť kritický cyklus.

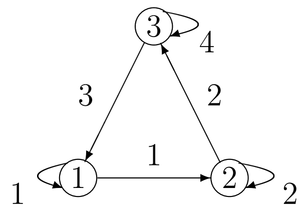
Veta 4.3 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Nech $\mathcal{G}(A)$ obsahuje kritický cyklus dĺžky L $c = (i_1, i_2, \ldots, i_L, i_1)$. Potom pre všetky násobky q čísla L (prirodzeným číslom) platí*

$$a_{i_s i_s}^{(q)} = (\lambda(A))^q \quad \forall s = 1, 2, \ldots, L$$

Ilustrujme túto vetu na nasledujúcom príklade.

Príklad 4.4.1 *Nájdime pre danú maticu A pomocou zodpovedajúceho digrafu maximálnu priemernú váhu cyklu, nájdime kritické cykly a vypočítajme váhu cyklov, ktoré vzniknú použitím kritického cyklu dvakrát, trikrát a štyrikrát.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \\ 3 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix}$$



Riešenie. Z digrafu $\mathcal{G}(A)$ je evidentné, že jediným kritickým cyklom je slučka $c = (3,3)$ s váhou $w(c) = 4$. Jej dĺžka je 1 a pre maximálnu priemernú váhu platí $\lambda(A) = \bar{w}(c) = w(c)$. Pre váhu cyklov dĺžky 2, 3 a 4, ktoré vzniknú opakovaným prechádzaním kritickej slučky, platí $a_{33}^{(k)} = (\lambda(A))^k = 4^k$, pre $k = 1,\ 2,\ \ldots$ ako vidíme na mocninách matice:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & \mathbf{8} \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 10 \\ 11 & 8 & \mathbf{12} \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 11 \\ 13 & 10 & 14 \\ 15 & 12 & \mathbf{16} \end{pmatrix}.$$

♡

Ak hľadáme odpoveď na otázku, či existujú v digrafe dráhy maximálnej (prípadne konečnej) váhy prechádzajúce cez jednotlivé vrcholy, je potrebné definovať pojem p-regulárnosti.

Definícia 4.4 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\Delta_p = A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \cdots \oplus A^p$. Maticu A nazývame p-**regulárnou** v max-plus algebre, ak*

$$\Delta(A) = \Delta_p = \Delta_{p+1} = \Delta_{p+2} = \ldots$$

Znamená to, že vzťah (13) z definície 4.3 pre výpočet slabého tranzitívneho uzáveru matice má pre p-regulárnu maticu tvar

$$\Delta(A) = A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \ldots \oplus A^p. \tag{14}$$

Pre p-regulárnosť matice má rozhodujúci význam maximálna priemerná váha cyklu $\lambda(A)$.

Veta 4.4 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Potom platí*

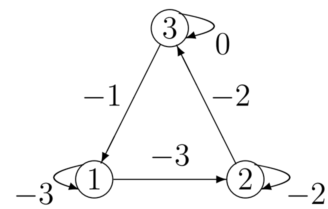
(i) Ak $\lambda(A) \leq 0$, tak existuje $p \leq n$, že je matica A p-regulárna.

(ii) Ak $\lambda(A) > 0$, tak neexistuje p, aby bola matica A p-regulárna.

Na základe poznámky 4.2 a vety 4.4 vieme odpovedať, že v prípade, ak $\lambda(A) \leq 0$, tak v digrafe prislúchajúcom matici A existujú dráhy maximálnej váhy prechádzajúce cez jednotlivé vrcholy a na nájdenie týchto váh stačí uvažovať dráhy, ktorých dĺžka nepresiahne hodnotu p. Uvedomme si, že ak sa z vrchola i nedá dosiahnuť vrchol j, tak je $\delta_{ij} = \varepsilon$.

Príklad 4.4.2 *Nájdime maximálnu váhu dráh nezávisle na dĺžke, ktoré prechádzajú cez jednotlivé vrcholy.*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 & -2 \\ -1 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$



Riešenie. Podobne ako v príklade 4.4.1 je jediným kritickým cyklom opäť slučka $c = (3, 3)$ s váhou $w(c) = 0$. Jej dĺžka je 1 a pre maximálnu priemernú váhu platí $\lambda(A) = \bar{w}(c) = w(c) = 0$. Keďže $\lambda(A) \leq 0$, vieme na základe vety 4.4 po výpočte konečného počtu mocnín matice určiť maximálne váhy dráh. Keďže

$$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -5 & -5 \\ -3 & -4 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} -6 & -7 & -5 \\ -3 & -6 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

a teda $A^3 \leq A^2$, stačí položiť $p = 2$. Na základe definície 4.3 dostávame

$$\Delta(A) = A \oplus A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -5 \\ -3 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podľa poznámky 4.2 δ_{ij} reprezentuje maximálnu váhu dráhy z vrchola i do vrchola j nezávisle na dĺžke dráhy. ♡

Definícia 4.5 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$.* ***Silným tranzitívnym uzáverom matice*** *A v max-plus algebre nazývame sumu*

$$\Gamma(A) = E \oplus A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \cdots \tag{15}$$

Poznámka 4.3 *Zo slabého tranzitívneho uzáveru matice môžeme jednoduchým spôsobom dostať silný tranzitívny uzáver*

$$\Gamma(A) = E \oplus \Delta(A). \tag{16}$$

Rovnako jednoducho dostaneme naopak zo silného tranzitívneho uzáveru slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A) = A \otimes \Gamma(A). \tag{17}$$

Na základe binomickej vety sa dá podstatne zjednodušiť výpočet silného tranzitívneho uzáveru p-regulárnej matice.

Veta 4.5 *Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech D je p-regulárna pre nejaké $p \geq 1$, tak silný tranzitívny uzáver existuje a platí*

$$\Gamma(D) = (E \oplus D)^p.$$

Pre maticu D s konečnou hodnotou $\lambda(D) \leq 0$ platí, že ak dĺžka dráhy p dosiahne hodnotu n (počet vrcholov), tak dráha musí obsahovať cyklus (nekladnej váhy) a teda je váha tejto dráhy nanajvýš rovná váhe tej elementárnej dráhy p', ktorá vznikne z dráhy p' po vynechaní všetkých cyklov.

Veta 4.6 *Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\lambda(D) \leq 0$. Potom platí*

$$D^n \leq E \oplus \Delta_{n-1}.$$

Na základe tejto vety môžeme p-regulárnosť bližšie špecifikovať.

Veta 4.7 *Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\lambda(D) \leq 0$. Potom pre ľubovoľné $p \geq n-1$ platí*

$$\Gamma(D) = (E \oplus D)^p. \tag{18}$$

Pri efektívnom umocňovaní matíc je výpočtová zložitosť výpočtu silného tranzitívneho uzáveru podľa vety 4.7 $O(n^3 \ln n)$. Rovnakú výpočtovú zložitosť má aj výpočet slabého tranzitívneho uzáveru, ak použijeme vzťah (17). Každopádne toto nie je najefektívnejší postup pri výpočte uzáverov matice. Výpočtovú zložitosť $O(n^3)$ dosiahneme, ak použijeme Floydov-Warshallov algoritmus.

Veta 4.8 (Floydov-Warshallov algoritmus) *Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\lambda(D) \leq 0$. Nech $D^{\{1\}} = D$, $D^{\{2\}}$, ..., $D^{\{n+1\}}$ je postupnosť matíc, pre ktorú*

$$d_{ij}^{\{k+1\}} = \begin{cases} d_{ij}^{\{k\}} \oplus d_{ik}^{\{k\}} \otimes d_{kj}^{\{k\}} & \textit{pre} \quad i \neq k \wedge j \neq k, \\ d_{ij}^{\{k\}} & \textit{pre} \quad i = k \vee j = k, \end{cases} \tag{19}$$

pre $k = 1, 2, \ldots, n$. Potom

$$\Delta(D) = D^{\{n+1\}}.$$

Príklad 4.4.3 *Vypočítajme pomocou Floydovho-Warshallovho algoritmu pre maticu*

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

a) *slabý tranzitívny uzáver matice,*

b) *silný tranzitívny uzáver matice.*

Riešenie.

a) Položíme $D^{\{1\}} = D$ a pomocou formuly (19) počítame druhý a postupne ďalšie členy postupnosti

$$D^{\{2\}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$d_{ij}^{\{1+1\}} = \begin{cases} d_{ij}^{\{1\}} \oplus d_{i1}^{\{1\}} \otimes d_{1j}^{\{1\}} & \text{pre} \quad i \neq 1 \wedge j \neq 1, \\ d_{ij}^{\{1\}} & \text{pre} \quad i = 1 \vee j = 1, \end{cases}$$

$$D^{\{3\}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \mathbf{0} & \varepsilon \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad D^{\{4\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Nakoniec určíme slabý tranzitívny uzáver matice D

$$\Delta(D) = D^{\{5\}} = D^{\{4\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

b) Pomocou rovnice (16) vypočítame silný tranzitívny uzáver matice D

$$\Gamma(D) = E \oplus \Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

♡

4.5 Vizualizácia Floydovho-Warshallovho algoritmu v prostredí MATLAB

Na základe vety 4.8 vieme vytvoriť program, ktorý vypočíta slabý tranzitívny uzáver matice.

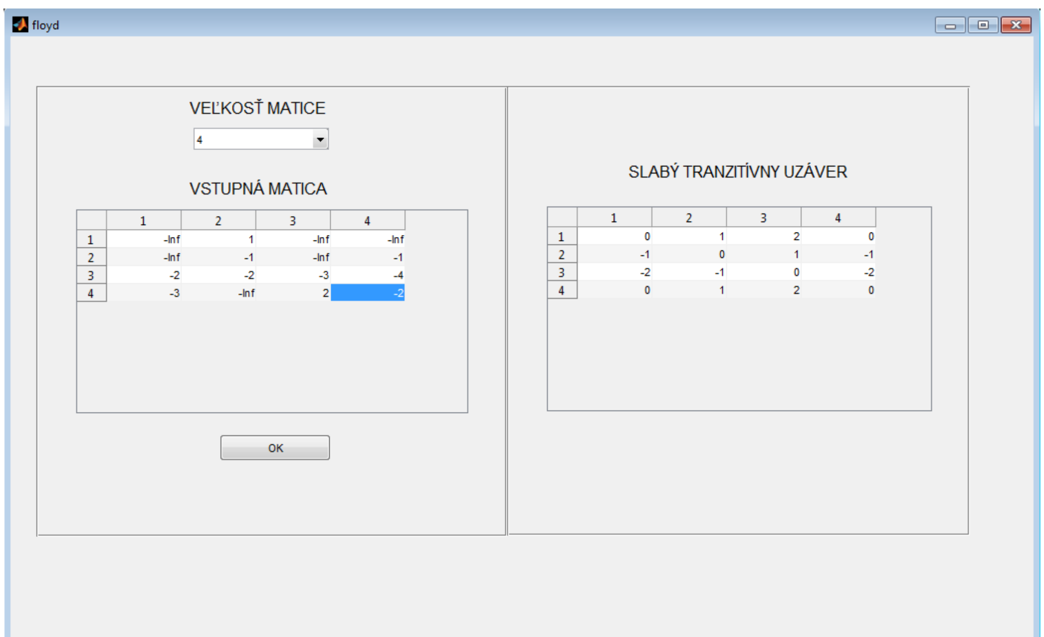
Uvádzame príklad, ktorý sme vypočítali pomocou programu FloydWarshallAlgoritmus[1] vytvoreného v MATLABe.

[1] Tento program (MATLABFloyd.zip) je vložený do PDF súboru, ktorý práve čítate. Vzhľadom na bezpečnostné obmedzenia prehliadača Adobe Reader je potrebné použiť alternatívny prehliadač PDF súborov, aby sme ho mohli otvoriť, napr. SumatraPDF, Foxit Reader, Okular.

Príklad 4.5.1 *Pomocou programu FloydWarshallAlgoritmus vypočítajme slabý tranzitívny uzáver matice A s $\lambda(A) = 0$.*

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & \varepsilon & -1 \\ -2 & -2 & -3 & -4 \\ -3 & \varepsilon & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Spustíme program FloydWarshallAlgoritmus v MATLABe. V dialógovom okne zadáme rozmer matice. Následne sa v dialógovom okne upraví rozmer tabuľky, do ktorej zadávame maticu ($-\infty$ nahrádza -Inf). Po stlačení tlačidla O. K. zbehne program a v pravej časti dialógového okna sa zobrazí výsledok, t. j. slabý tranzitívny uzáver matice (viď obr. 3).



Obr. 3: Slabý tranzitívny uzáver z Floydovho-Warshallovho algoritmu

♡

4.6 Ireducibilné a reducibilné matice

Matice v max-plus algebre môžeme rozdeliť do dvoch tried. Nasledujúca definícia nám umožní špecifikáciu týchto tried.

Definícia 4.6 *Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Digraf $\mathcal{G}(A)$ nazývame* ***silne súvislý****, ak pre ľubovoľnú dvojicu rôznych vrcholov i, j existuje dráha z vrchola i do vrchola j v $\mathcal{G}(A)$.*

Silnú súvislosť digrafu asociovaného s maticou vieme overiť pomocou slabého tranzitívneho uzáveru danej matice. Algoritmus je jednoduchý:

Algoritmus silná súvislosť

(i) ohodnotíme každú hranu v digrafe $\mathcal{G}(A)$ váhou 0 (každá konečná hodnota sa v matici A zmení na 0, dostaneme maticu D s $\lambda(D) \leq 0$),

(ii) vypočítame $\Delta(D)$,

(iii) rozhodneme o súvislosti digrafu na základe prvkov $\Delta(D)$ (ak sú všetky prvky $\Delta(D)$ konečné, digraf $\mathcal{G}(A)$ je silne súvislý, v opačnom prípade nie je súvislý).

Príklad 4.6.1 *Overme pomocou Floydovho–Warshallovho algoritmu silnú súvislosť digrafu zodpovedajúceho matici*

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Vzhľadom na Algoritmus silná súvislosť každú konečnú hodnotu v matici A nahradíme hodnotou 0 a dostaneme maticu D z príkladu 4.4.3. Keďže $\Delta(D)$ obsahuje aj prvky $-\infty$, digraf matice A nie je silne súvislý. ♡

Definícia 4.7 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Maticu A nazývame **ireducibilnou**, ak $\mathcal{G}(A)$ je silne súvislý. Maticu A, ktorá nie je ireducibilná, nazývame **reducibilnou**.*

Matica A z príkladu 4.6.1 bola reducibilnou maticou.

Veta 4.9 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. $\mathcal{G}(A)$ je silne súvislý práve vtedy, ak pre každé dva rôzne vrcholy existuje cyklus, ktorý ich obsahuje.*

Definícia 4.8 *Nech $\mathcal{G}(A) = (V, E)$ je digraf. Poddigraf $\mathcal{K} = (K, E \cap K^2)$ generovaný neprázdnou podmnožinou $K \subseteq V$ s vlastnosťami*

(i) pre každé dva rôzne vrcholy existuje v $\mathcal{K}$ cyklus, ktorý ich obsahuje,

(ii) K je maximálna podmnožina s vlastnosťou (i),

*nazývame **silne súvislý komponent** $\mathcal{G}(A)$. Komponent, ktorý obsahuje cyklus kladnej dĺžky, nazývame **netriviálny**. V opačnom prípade je komponent **triviálny**. Množinu všetkých netriviálnych silne súvislých komponentov $\mathcal{G}(A)$ označujeme $\mathrm{SCC}^*(\mathcal{G}(A))$ a množinu všetkých silne súvislých komponentov $\mathrm{SCC}(\mathcal{G}(A))$.*

Slabý tranzitívny uzáver sa dá využiť aj na nájdenie silne súvislých komponentov digrafu v prípade, ak digraf nebol silne súvislý. Algoritmus je jednoduchý:

Algoritmus silne súvislé komponenty

(i) ohodnotíme každú hranu v digrafe $\mathcal{G}(A)$ váhou 0 a vypočítame $\Delta(D)$,

(ii) zvolíme i a nájdeme v i-tom riadku $\Delta(D)$ všetky konečné hodnoty δ_{ij}, pre ktoré aj δ_{ji} je konečné, teda vrchol i leží v spoločnom silne súvislom komponente s vrcholmi j,

(iii) odstránime všetky riadky a stĺpce, ktoré zodpovedali vrcholom spoločného silne súvislého komponentu nájdeného v kroku (i),

(iv) opakujeme kroky (i) a (ii), kým nie sú všetky vrcholy priradené niektorému silne súvislému komponentu.

Poznámka 4.4 *Podľa rovnice* (16) *sa* $\Gamma(D)$ *a* $\Delta(D)$ *môžu líšiť len na diagonále (viď príklad 4.4.3). Ak* $\delta_{ii} = \varepsilon$*, digraf* $\mathcal{G}(A)$ *neobsahuje cyklus prechádzajúci vrcholom* i*, teda* $K = \{i\}$ *generuje triviálny komponent* $\mathcal{K}$*.* $\Delta(D)$ *obsahuje konečné prvky vtedy a len vtedy, ak aj* $\Gamma(D)$*.*

Príklad 4.6.2 *Nájdime pomocou Floydovho-Warshallovho algoritmu silne súvislé komponenty digrafu zodpovedajúceho matici*

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Z príkladu 4.6.1 vieme, že digraf $\mathcal{G}(D)$ nie je silne súvislý. Ak použijeme vypočítaný slabý tranzitívny uzáver a Algoritmus silne súvislé komponenty, vidíme, že z prvého vrchola sa dá dostať do druhého aj tretieho a rovnako sa z týchto vrcholov dá dostať do prvého vrchola. Inak povedané, spomínané vrcholy ležia na spoločnom cykle. Množina vrcholov $K_1 = \{1, 2, 3\}$ generuje teda netriviálny silne súvislý komponent $\mathcal{K}_1$. Štvrtý vrchol neleží na žiadnom cykle ($\delta_{44} = \varepsilon$), preto $K_2 = \{4\}$ tvorí triviálny komponent $\mathcal{K}_2$. ♡

4.7 Súvislé číslovanie

Matica môže byť po konečnom počte pernutácií riadkov a stĺpcov prepísaná do horného trojuholníkového, resp. horného blokovo-trojuholníkového tvaru. Permutácie sú spojené s prečíslovaním vrcholov zodpovedajúceho digrafu.

Definícia 4.9 *Digraf, ktorý neobsahuje okrem slučiek žiadne cykly nazývame* ***acyklický****.*

Definícia 4.10 ***Acyklický digraf je súvisle očíslovaný****, ak pre každú hranu* $(i,\, j)$ *platí* $i \leq j$*.*

Veta 4.10 *Každý acyklický digraf je možné súvisle očíslovať.*

Uvádzame Algoritmus súvislé očíslovanie acyklického digrafu:

Algoritmus súvislé očíslovanie acyklického digrafu

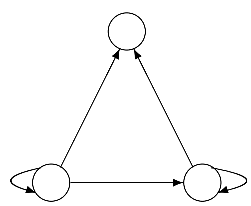
(i) odstránime slučky,

(ii) priradíme terminálnym vrcholom najvyššie čísla,

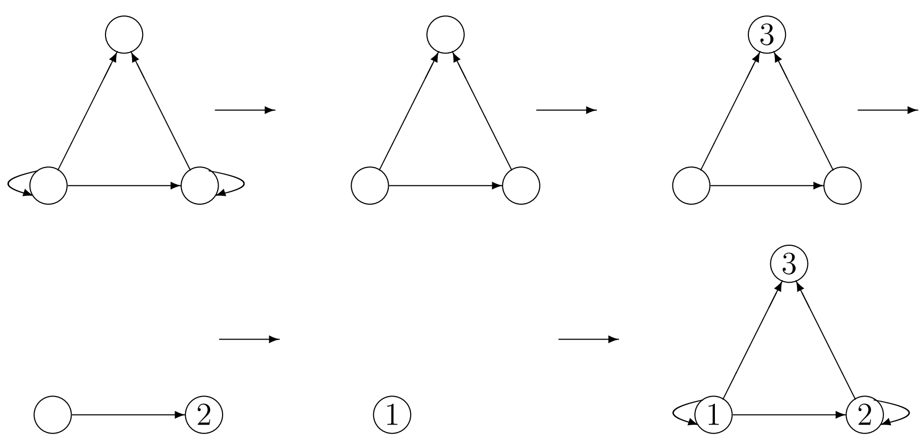
(iii) odstránime terminálne vrcholy (nevychádza žiadna hrana) aj s incidentnými hranami,

(iv) opakujeme body (ii) a (iii), kým nie sú očíslované všetky vrcholy.

Príklad 4.7.1 *Súvisle očísľujme daný digraf*



Riešenie. Vzhľadom na Algoritmus súvislé očíslovanie acyklického digrafu vytvoríme postupnosť digrafov so súvisle očíslovaným digrafom na konci:



♡

Definícia 4.11 ***Digraf reducibilnej matice je súvisle očíslovaný****, ak pre každú hranu* (i, j) *pre vrcholy* i *a* j *z rôznych silne súvislých komponentov platí* $i < j$*.*

Poznámka 4.5 *Reducibilná matica súvisle očíslovaného acyklického digrafu má tvar hornej trojuholníkovej matice. Reducibilná matica so súvisle očíslovaným digrafom, ktorý nie je acyklický, má tvar hornej blokovo-trojuholníkovej matice. Každý diagonálny blok reprezentuje jeden silne súvislý komponent. Počet diagonálnych blokov udáva teda počet silne súvislých komponentov.*

Vzhľadom na príklad 4.6.2 bol digraf reducibilnej matica A z príkladu 4.6.1 súvisle očíslovaný.

Súvislé očíslovanie digrafu reducibilnej matice dosiahneme pomocou nasledujúceho algoritmu:

ALGORITMUS SÚVISLÉ OČÍSLOVANIE DIGRAFU REDUCIBILNEJ MATICE

(i) nájdeme silne súvislé komponenty,

(ii) vytvoríme tzv. kondenzovaný digraf, v ktorom každý vrchol reprezentuje jeden silne súvislý komponent K_i a hrana vedie z vrchola K_i do vrchola K_j práve vtedy, ak vedie hrana z niektorého vrchola komponentu K_i do niektorého vrchola komponentu K_j,

(iii) kondenzovaný digraf je acyklický, súvisle ho očíslujeme $1, 2, \ldots,$

(iv) očíslujeme vrcholy jednotlivých komponentov v súlade so súvislým očíslením zodpovedajúceho kondenzovaného digrafu, pričom najnižšie hodnoty dostanú vrcholy, ktoré zodpovedajú komponentu s číslom 1 v kondenzovanom digrafe, nasledujú vrcholy komponentu 2 a v tomto postupe pokračujeme, kým nie sú očíslované vrcholy všetkých komponentov.

Príklad 4.7.2 *Súvisle očíslujme digraf reducibilnej matice*

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Pomocou ALGORITMUS SILNE SÚVISLÉ KOMPONENTY nájdeme silne súvislé komponenty. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver matice pomocou Floydovho-Warshallovho algoritmu

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

a určíme silne súvislé komponenty $\mathcal{K}_1$ generovaný vrcholmi $K_1 = \{1, 5\}$, $\mathcal{K}_2$ generovaný vrcholmi $K_2 = \{2, 3, 4\}$ a $\mathcal{K}_3$ generovaný vrcholmi $K_3 = \{6\}$. Potom vytvoríme zodpovedajúci kondenzovaný digraf, ktorý následne súvisle očíslujeme. Keďže je kondenzovaný digraf digrafom z príkladu 4.7.1, K_1 zodpovedá vrcholu 2, K_2 vrcholu 1 a K_3 vrcholu 3. Nakoniec očíslujeme vrcholy jednotlivých komponentov. Vrcholy komponentu $\mathcal{K}_2$ ako prvé, potom vrcholy komponentu $\mathcal{K}_1$ a nakoniec vrcholy komponentu $\mathcal{K}_3$. Teda

$$\begin{array}{ccc} 2 & \longrightarrow & 1 \\ 3 & \longrightarrow & 2 \\ 4 & \longrightarrow & 3 \\ 1 & \longrightarrow & 4 \\ 5 & \longrightarrow & 5 \\ 6 & \longrightarrow & 6. \end{array}$$

♡

V rámci jedného silne súvislého komponentu na poradí číslovania vrcholov nezáleží. Z toho vyplýva, že súvislé očíslovanie vrcholov digrafu, zodpovedajúceho reducibilnej matici, nie je jednoznačné. Každému prečíslovaniu vrcholov digrafu zodpovedá permutácia jej vrcholov

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

ktorú reprezentuje permutačná matica P. Táto matica má v každom riadku práve jednu hodnotu 0 a síce v i-tom riadku v stĺpci $\pi(i)$. Transformáciu reducibilnej matice D do horného blokovo-trojuholníkového tvaru D_π dosiahneme pomocou vzťahu

$$D_\pi = P^{-1} \otimes D \otimes P \tag{20}$$

Príklad 4.7.3 *Transformujme reducibilnú maticu D pomocou permutácie π*

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

na hornú blokovo-trojuholníkovú maticu.

Riešenie. Zostrojíme permutačnú maticu P a pomocou formuly (3) aj inverznú maticu P^{-1}. Použijeme vzťah (20) na výpočet hornej blokovo-trojuholníkovej matice.

$$D_\pi = P^{-1} \otimes D \otimes P =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ \hline \varepsilon & D_{22} & D_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & D_{33} \end{array}\right).$$

♡

Matice v príklade 4.7.2 a príklade 4.7.3 sú rovnaké a permutácia π v príklade 4.7.3 je súvislým očíslovaním z príkladu 4.7.2. Teda digraf reducibilnej matice D v predchádzajúcom príklade obsahuje tri silne súvislé komponenty generované vrcholmi $K_1 = \{1,5\}$, $K_2 = \{2,3,4\}$ a $K_3 = \{6\}$. Keďže počet vrcholov v komponentoch $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$ je väčší ako 1 je číslovanie vrcholov v príklade 4.7.3 len jednou z možností súvislého číslovania digrafu zodpovedajúceho danej matici D.

Veta 4.11 *Nech $T(n,n)$ je trieda matíc v hornom blokovo-trojuholníkovom tvare. Potom $T(n,n)$ je uzavretá vzhľadom na operácie $\oplus$ a $\otimes$, t. j. pre A, $B \in T(n,n)$ platí*

(i) $A \oplus B \in T(n,n)$,

(ii) $A \otimes B \in T(n,n)$.

Vzhľadom na predchádzajúcu vetu tranzitívne uzávery matice v hornom trojuholníkovom tvare budú opäť matice v hornom trojuholníkovom tvare a tranzitívne uzávery matice v hornom blokovo-trojuholníkovom tvare budú opäť matice v hornom blokovo-trojuholníkovom tvare.

Príklad 4.7.4 *Nájdime silný tranzitívny uzáver hornej blokovo-trojuholníkovej matice*

$$D_\pi = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right).$$

Riešenie. Použitím Floydovho-Warshallovho algoritmu dostaneme

$$\Delta(D_\pi) = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right).$$

♡

4.8 Definitné matice

Predtým ako zhrnieme podstatné výsledky pre dôležitý prípad ireducibilnej matice uvedieme nasledujúce definície.

Definícia 4.12 *Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Vrchol j, ktorý leží na kritickom cykle v $\mathcal{G}(D)$ nazývame* ***vlastný vrchol****.*

Definícia 4.13 *Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Maticu D nazývame* ***definitnou****, ak*

(i) $\lambda(D) = 0$,

(ii) $\mathcal{G}(D)$ *je silne súvislý.*

Nasledujúca veta sumarizuje vlastnosti definitnej matice.

Veta 4.12 *Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je definitná s digrafom $\mathcal{G}(D)$. Potom platí*

(i) $D \in F(n,n)$, $\Delta(D)$ *existuje a je konečná (ak $n > 1$) a δ_{ij} pre $i \neq j$ reprezentuje nejakú dráhu maximálnej váhy z vrchola i do vrchola j dĺžky nepresahujúcej $n-1$,*

(ii) každý diagonálny prvok δ_{ii} reprezentuje nejaký cyklus maximálnej váhy zo všetkých cyklov obsahujúcich vrchol i dĺžky nepresahujúcej n,

(iii) $\mathcal{G}(D)$ *obsahuje aspoň jeden elementárny cyklus váhy 0 a žiaden s kladnou váhou,*

(iv) $\mathcal{G}(D)$ *obsahuje aspoň jeden vlastný vrchol, pre každý vlastný vrchol j je $\delta_{jj} = 0$, pre každý iný vrchol k je $\delta_{kk} < 0$.*

Príklad 4.8.1 *Zistime, či je daná matica definitná*

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 6 & 4 \\ -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Vzhľadom na ALGORITMUS SILNÁ SÚVISLOSŤ použitím Floydovho-Warshallovho algoritmu a vzťahu (18) dostaneme

$$\Gamma(D) = (E \oplus D)^3 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podľa poznámky 4.4 $\Delta(D) = \Gamma(D)$, teda $\mathcal{G}(A)$ je silne súvislý. Máme nájsť maximálnu priemernú váhu cyklu $\lambda(A)$. Vypočítame postupnosť mocnín matice A po štvrtú a použijeme hodnoty na diagonále, aby sme určili $\lambda(A)$.

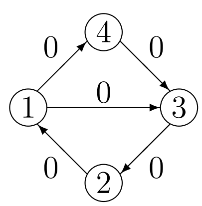
$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 6 & 4 \\ -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 3 \\ -6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -3 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & -2 \\ -4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 6 & 4 \\ -1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -5 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

Keďže najvyššia hodnota na diagonálach je 0, je maximálna priemerná váha cyklu $\lambda(A) = 0$. Teda matica A je definitná.

♡

Poznámka 4.6 *Overenie silnej súvislosti digrafu môžeme aj z jeho diagramu:*



Digraf zodpovedajúci matici z predchádzajúceho príkladu obsahuje cyklus prechádzajúci všetkými vrcholmi $c = (1, 4, 3, 2, 1)$. Teda je silne súvislý.

Pre výpočet tranzitívnych uzáverov matice prechodu rastúceho DDS (viď definícia 2.4) platia užitočné vzťahy.

Veta 4.13 *Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. DES s maticou prechodu D je rastúci vtedy a len vtedy ak $D \geq E$ a potom $D \in F(n, n)$. Ak D je definitná a DES je rastúci, tak*

(i) $d_{ii} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n,$

(ii) $\Gamma(D) = D^{n-1} = \Delta(D)$ *a* $D \otimes \Delta(D) = \Delta(D)$.

4.9 Úlohy

4.1 Pre danú maticu A nakreslite digraf $\mathcal{G}(A)$, nájdite všetky elementárne cykly, vypočítajte ich priemernú váhu a maximálnu priemernú váhu $\lambda(A)$. Určte kritické cykly.

a) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ \varepsilon & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & \varepsilon & 7 & 3 \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & \varepsilon & -1 \\ -2 & -2 & -3 & -4 \\ -3 & \varepsilon & 2 & -2 \end{pmatrix}$,

f) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & \varepsilon & -4 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$.

4.2 Vypočítajte maximálnu váhu dráh dĺžky l z vrchola i do ostatných vrcholov

a) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$ $i = 1$, $l = 2$, resp. $l = 3$,

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ \varepsilon & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $i = 2$, $l = 2$, resp. $l = 3$,

c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$ $i = 3$, $l = 2$, resp. $l = 3$, resp. $l = 4$,

d) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & \varepsilon & 7 & 3 \end{pmatrix}$ $i = 4$, $l = 2$, resp. $l = 3$, resp. $l = 4$.

4.3 Pomocou vhodných mocnín matice A vypočítajte maximálnu priemernú váhu cyklu $\lambda(A)$ pre matice z cvičenia 4.2.

4.4 Pre matice z cvičenia 4.1 rozhodnite, či sú p-regulárne.

4.5 Ak existuje silný a slabý tranzitívny uzáver matice A, tak ho vypočítajte metódou postupného umocňovania pre matice z cvičenia 4.1.

4.6 Pomocou slabého tranzitívneho uzáveru vhodnej matice zistite, či je digraf $\mathcal{G}(A)$ matice A silne súvislý. Ak nie, nájdite silne súvislé komponenty digrafu, digraf súvisle očíslujte. Súvisle očíslovaný digraf nakreslite a napíšte jeho maticu.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & 3 & 1 \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 1 & 1 & \varepsilon \\ 3 & 2 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 1 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$.

Výsledky:

4.1

a) $\lambda(A) = 3$, kritické cykly: $c_l = (3, 3)$, $c_2 = (1, 2, 1)$;

b) $\lambda(A) = 4$, kritické cykly: $c_l = (2, 2)$, $c_2 = (2, 3, 2)$, $c_3 = (1, 2, 3, 1)$;

c) $\lambda(A) = 5$, kritický cyklus: $c = (2, 3, 4, 2)$;

d) $\lambda(A) = 5$, kritický cyklus: $c = (1, 2, 4, 3, 1)$;

e) $\lambda(A) = 0$, kritický cyklus: $c = (1, 2, 4, 3, 1)$;

f) $\lambda(A) = 0$, kritický cyklus: $c = (2, 3, 4, 2)$.

4.2

a) Maximálnu váhu zo všetkých dráh z vrchola $i = 1$ dĺžky 2, resp. 3 nájdeme v prvom riadku matice A^2, resp. A^3

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 10 \\ 7 & 8 & 8 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix};$$

b) Maximálnu váhu zo všetkých dráh z vrchola $i = 2$ dĺžky 2, resp. 3 nájdeme v druhom riadku matice A^2, resp. A^3

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 8 & 8 & 10 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 14 \\ 12 & 12 & 14 \\ 10 & 10 & 12 \end{pmatrix};$$

c) Maximálnu váhu zo všetkých dráh z vrchola $i = 3$ dĺžky 2, 3, resp. 4 nájdeme v treťom riadku matice A^2, A^3, resp. A^4

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 & 5 \\ 9 & 9 & 7 & 9 \\ 11 & 11 & 9 & 8 \\ 10 & 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 11 & 12 \\ 15 & 15 & 13 & 12 \\ 15 & 14 & 15 & 14 \\ 15 & 15 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 16 & 16 \\ 19 & 18 & 19 & 18 \\ 20 & 20 & 18 & 20 \\ 21 & 21 & 19 & 18 \end{pmatrix};$$

d) Maximálnu váhu zo všetkých dráh z vrchola $i = 4$ dĺžky 2, 3, resp. 4 nájdeme v štvrtom riadku matice A^2, A^3, resp. A^4

$$A^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 10 & \varepsilon & 10 \\ 6 & 8 & 11 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 7 \\ 10 & 10 & 10 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 17 & 14 \\ 14 & 14 & 15 & 12 \\ 11 & 13 & 14 & 13 \\ 13 & 16 & 15 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 21 & 18 \\ 18 & 20 & 19 & 18 \\ 17 & 17 & 20 & 17 \\ 18 & 20 & 21 & 20 \end{pmatrix}.$$

4.3

a) Maximálnu váhu zo všetkých cyklov dĺžky 1, 2, resp. 3 nájdeme na hlavnej diagonále matice A, A^2, resp. A^3. $\lambda(A) = 3$.

b) Maximálnu váhu zo všetkých cyklov dĺžky 1, 2, resp. 3 nájdeme na hlavnej diagonále matice A, A^2, resp. A^3. $\lambda(A) = 4$.

c) Maximálnu váhu zo všetkých cyklov dĺžky 1, 2, 3, resp. 4 nájdeme na hlavnej diagonále matice A, A^2, A^3, resp. A^4. $\lambda(A) = 5$.

d) Maximálnu váhu zo všetkých cyklov dĺžky 1, 2, 3, resp. 4 nájdeme na hlavnej diagonále matice A, A^2, A^3, resp. A^4. $\lambda(A) = 5$.

4.4

a) nie, c) nie, e) áno,

b) nie, d) nie, f) áno.

4.5

a) neexistujú, c) neexistujú,

b) neexistujú, d) neexistujú,

e) $$\Gamma(A) = (E \oplus A)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(A) = A \otimes \Gamma(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

f) $$\Gamma(A) = (E \oplus A)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(A) = A \otimes \Gamma(A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.6

a) $$B = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \Delta(B) = B \otimes (E \oplus B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_1 = \{1\}$
$K_2 = \{2, 3\}$ napr. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & 3 & 1 \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A_\pi = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{array}\right);$$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta(B) = B \otimes (E \oplus B)^3 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$

$K_1 = \{1\}$
$K_2 = \{2, 4\}$
$K_3 = \{3\}$ napr. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A_\pi = \left(\begin{array}{c|cc|c} 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 & 1 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{array}\right);$$

c) $B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta(B) = B \otimes (E \oplus B)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$

$K_1 = \{1, 2, 3\}$
$K_2 = \{4\}$ napr. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 1 & 1 & \varepsilon \\ 3 & 2 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A_\pi = A = \left(\begin{array}{ccc|c} \varepsilon & 5 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 1 & 1 & \varepsilon \\ 3 & 2 & \varepsilon & 3 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{array}\right);$$

d) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta(B) = B \otimes (E \oplus B)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$K_1 = \{1\}$
$K_2 = \{2\}$
$K_3 = \{3, 4, 5\}$ napr. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 1 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A_\pi = \left(\begin{array}{ccc|c|c} \varepsilon & 3 & 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 4 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 5 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right).$$

5 Lineárne max-plus systémy

5.1 Cieľ kapitoly

Oboznámiť sa s pojmom sústava nerovníc, sústava rovníc, hlavné riešenie. Oboznámiť sa so spôsobom riešenia sústavy rovníc pomocou nutných a postačujúcich podmienok existencie riešenia a jednoznačnosti riešenia. Oboznámiť sa s využitím riešenia sústav rovníc pre riešenie problémov súvisiacich s riadením DDS. Oboznámiť sa s pojmom Čebyševova vzdialenosť a Čebyševove najlepšie riešenie. Oboznámiť sa s využitím Čebyševovej vzdialenosti pre aproximáciu riešenia problémov súvisiacich s riadením DDS.

5.2 Prehľad kapitoly v otázkach

- Definujte sústavu nerovníc a jej riešenie.
- Uveďte nutnú a postačujúcu podmienku, aby vektor x bol riešením sústavy nerovníc.
- Definujte hlavné riešenie sústavy nerovníc.
- Definujte sústavu rovníc a jej riešenie.
- Uveďte všetky možnosti riešiteľnosti sústavy.
- Uveďte nutnú a postačujúcu podmienku existencie riešenia sústavy rovníc.
- Uveďte nutnú a postačujúcu podmienku jednoznačnosti riešenia sústavy rovníc.
- Uveďte algoritmus riešenia sústavy rovníc.
- Popíšte využitie riešenia sústav rovníc pre riešenie problému dosažiteľnosti vopred daných časov ukončenia projektu.
- Definujte Čebyševovu vzdialenosť.
- Uveďte postup aproximácie riešenia problému dosažiteľnosti vopred daných časov ukončenia projektu pomocou Čebyševovho najlepšieho riešenia.

5.3 Sústavy nerovníc

Riešiteľnosť sústavy rovníc v max-plus algebre súvisí s riešiteľnosťou sústavy nerovníc. Z tohto dôvodu sa budeme v tejto kapitole venovať najskôr sústavám nerovníc.

Definícia 5.1 *Nech* A, $B \in \mathbb{R}^\star(m,n)$.

$$\begin{array}{lll} A < B & \iff & a_{ij} < b_{ij} \quad \textit{pre } i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n. \\ A \leq B & \iff & a_{ij} \leq b_{ij} \quad \textit{pre } i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n. \end{array}$$

Definícia 5.2 *Nech* S_1, S_2, $\ldots$, S_t, T *sú podmnožiny množiny* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Nech* f *je zobrazenie*

$$f:\ S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_t \longrightarrow T.$$

Zobrazenie f *nazývame* ***izotónnym****, ak zachováva nerovnosť* $\leq$*, t. j. ak pre* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_t)$ *a* $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_t)$ *platí*

$$X \leq Y \quad \Longrightarrow \quad f(X) \leq f(Y).$$

Izotónnosť operácií $\oplus$, $\oplus'$ a $\otimes$ formuluje nasledujúca veta.

Veta 5.1 *Nech* x_1, x_2, y_1, $y_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Nech* $x_1 \leq y_1$ *a* $x_2 \leq y_2$. *Potom platí*

(i) $x_1 \oplus x_2 \leq y_1 \oplus y_2$,

(ii) $x_1 \oplus' x_2 \leq y_1 \oplus' y_2$,

(iii) $x_1 \otimes x_2 \leq y_1 \otimes y_2$.

Poznámka 5.1 *Všetky súčty a násobenia skalárov a matíc a kombinácie týchto operácií sú v oboch algebrách, max-plus a min-plus, izotónne.*

Vzhľadom na použitie v ďalšom texte uvádzame izotónnosť pre operáciu násobenia matíc.

Veta 5.2 *Nech* A, $B \in \mathbb{R}^\star(m,r)$, C, $D \in \mathbb{R}^\star(r,n)$. *Nech* $A \leq B$ *a* $C \leq D$. *Potom platí*

$$A \otimes C \leq B \otimes D.$$

Dôsledkom tejto vety je nasledujúce tvrdenie.

Veta 5.3 *Nech* $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$, $A \geq E$. *Potom platí*

(i) $A \in F(n,n)$,

(ii) DDS s maticou prechodu A *je rastúci.*

Definícia 5.3 *Nech $B \in \mathbb{R}^\star(m,n)$ a $c \in \mathbb{R}^\star(m)$. Nerovnicu*

$$B \otimes x \leq c \tag{21}$$

*nazývame **sústavou nerovníc** v max-plus algebre. Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^\star(n)$, pre ktorý $A \otimes \alpha \leq c$, nazývame **riešením sústavy nerovníc** (21).*

Pre formuláciu nutnej a postačujúcej podmienky riešiteľnosti sústavy nerovníc v max-plus algebre potrebujeme duálnu, t. j. min-plus algebru.

Veta 5.4 *Nech $B \in F(m,n)$, $x \in F(n)$ a $c \in F(m)$. Potom platí*

$$B \otimes x \leq c \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq B' \otimes' c.$$

Dôkaz: Ak $x \in F(n)$, tak $B \otimes x$ je konečný vektor, pre ktorý platí

$$\begin{aligned} B \otimes x \leq c \;\; &\Leftrightarrow \;\; \sum_j{}^{\oplus} b_{ij} \otimes x_j \leq c_i && \forall i \\ &\Leftrightarrow \;\; b_{ij} \otimes x_j \leq c_i && \forall i,\, \forall j \\ &\Leftrightarrow \;\; x_j \leq b'_{ji} + c_i && \forall i,\, \forall j \\ &\Leftrightarrow \;\; x_j \leq \min_i (b'_{ji} + c_i) && \forall j \\ &\Leftrightarrow \;\; x \leq B' \otimes' c \end{aligned}$$

♢

Definícia 5.4 *Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. **Hlavným riešením sústavy nerovníc** $B \otimes x \leq c$ nazývame vektor $x^\sharp = B' \otimes' c \in F(n)$.*

Vetu 5.4 môžeme preformulovať do nasledujúceho tvaru.

Veta 5.5 *Nech $B \in F(m,n)$, $x \in F(n)$ a $c \in F(m)$. Potom $x^\sharp$ je najväčším riešením nerovnice $B \otimes x \leq c$.*

5.4 Sústavy rovníc

Definícia 5.5 *Nech $B \in \mathbb{R}^\star(m,n)$ a $c \in \mathbb{R}^\star(m)$. Rovnicu*

$$B \otimes x = c \tag{22}$$

*nazývame **sústavou rovníc** v max-plus algebre. Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^\star(n)$, pre ktorý $B \otimes \alpha = c$, nazývame **riešením sústavy rovníc** (22). Množinu všetkých riešení sústavy (22) označíme*

$$S(B,c) = \{x \in \mathbb{R}^\star(n);\, B \otimes x = c\}. \tag{23}$$

Rovnako ako v lineárnej algebre, aj v max-plus algebre môže sústava nemať žiadne riešenie, mať práve jedno riešenie, resp. mať nekonečne veľa riešení. Na ilustráciu rôznych prípadov riešiteľnosti sústav rovníc uvádzame nasledujúce príklady.

Príklad 5.4.1 *Riešme sústavu rovníc*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Rovnice môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \max\{1 + x_1,\, 2 + x_2\} = 0 &\iff x_1 \le -1 \wedge x_2 \le -2, \\ \max\{3 + x_1,\, 4 + x_2\} = 0 &\iff x_1 \le -3 \wedge x_2 \le -4. \end{aligned}$$

Riešením môže byť len vektor $x = (x_1, x_2)^\top$, pre ktorý $x_1 \le -3$ a súčasne $x_2 \le -4$. Z toho vyplýva, že prvá rovnica nebude nikdy splnená. Sústava rovníc nemá riešenie. $S(B, c) = \emptyset$. ♡

Príklad 5.4.2 *Riešme sústavu rovníc*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Rovnice môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \max\{3 + x_1,\, 2 + x_2\} = 0 &\iff x_1 \le -3 \wedge x_2 \le -2, \\ \max\{1 + x_1,\, 4 + x_2\} = 0 &\iff x_1 \le -1 \wedge x_2 \le -4. \end{aligned}$$

Riešením môže byť len vektor $x = (x_1, x_2)^\top$, pre ktorý $x_1 \le -3$ a súčasne $x_2 \le -4$. Z toho vyplýva, že ak zvolíme $x_1 = -3$ a súčasne $x_2 = -4$, budú splnené obe rovnice. $x = (-3, -4)^\top$ je jediným riešením danej sústavy. $S(B, c) = \{(-3, -4)^\top\}$. ♡

Príklad 5.4.3 *Riešme sústavu rovníc*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Rovnice môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \max\{x_1,\, 2 + x_2\} = 0 &\iff x_1 \le 0 \wedge x_2 \le -2, \\ \max\{x_1,\, 4 + x_2\} = 0 &\iff x_1 \le 0 \wedge x_2 \le -4. \end{aligned}$$

Riešením môže byť len vektor $x = (x_1, x_2)^\top$, pre ktorý $x_1 \le 0$ a súčasne $x_2 \le -4$. Z toho vyplýva, že ak zvolíme $x_1 = 0$, tak x_2 môže byť ľubovoľné, ak spĺňa $x_2 \le -4$. Daná sústava má preto nekonečne veľa riešení. $S(B, c) = \{(0,\, x_2)^\top\,;\, x_2 \le -4\}$. ♡

Riešiť sústavy spôsobom, aký sme použili v predchádzajúcich jednoduchých príkladoch, môže byť pri väčšom rozmere sústavy komplikované. Navyše podstatnou úlohou zostáva, aby sme mohli jednoznačne zodpovedať dve kardinálne otázky, a síce, či sústava má riešenie a ak áno, či je jediné. Najskôr vyriešime dva **špeciálne prípady**:

1. vektor pravých strán $c = \varepsilon$,

2. matica sústavy $B = \varepsilon$.

Prípad 1. Ak vektor pravých strán pozostáva výlučne z prvkov ε ($c = \varepsilon$) a j-tý stĺpec matice B označíme B_j, tak pre jednotlivé súradnice riešenia platí

- ak $B_j \neq \varepsilon$, tak $x_j = \varepsilon$,
- ak $B_j = \varepsilon$, tak x_j je ľubovoľné

a množinu všetkých riešení môžeme vyjadriť v tvare

$$S(B,c) = \{x \in \mathbb{R}^\star(n);\ x_j = \varepsilon,\ \text{ak } B_j \neq \varepsilon,\ j \in N\}.$$

Príklad 5.4.4 *Nájdime všetky riešenia sústavy rovníc*

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Z prepisu rovníc

$$\begin{gathered} \max\{\varepsilon + x_1,\ 2 + x_2\} = \varepsilon, \\ \max\{\varepsilon + x_1,\ \varepsilon + x_2\} = \varepsilon \end{gathered}$$

je zrejmé, že x_2 musí mať hodnotu ε, keďže druhý stĺpec matice sústavy $B_2 \neq \varepsilon$, a x_1 môže byť ľubovoľné, keďže prvý stĺpec matice sústavy $B_1 = \varepsilon$. Sústava má teda nekonečne veľa riešení

$$S(B,c) = \{(x_1, \varepsilon)^\top;\ x_1 \in \mathbb{R}^\star\}.$$

♡

Prípad 2. Ak celá matica B pozostáva z prvkov ε, teda $B = \varepsilon$, tak môžu nastať dva prípady

- ak $c = \varepsilon$, tak $S(B,c) = \mathbb{R}^\star(n)$,
- ak $c \neq \varepsilon$, tak $S(B,c) = \emptyset$.

V ďalšom texte môžeme teda uvažovať sústavu, ktorej matica B ani vektor pravých strán c nepozostávajú výlučne z prvkov ε. Napriek tomu sa môže stať, že niektorá súradnica vektora pravých strán nie je konečná. Ak existuje $i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$ také, že $c_i = \varepsilon$, tak rozlišujeme dva prípady:

1. $b_{ij} = \varepsilon$ pre všetky $j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$,

2. $b_{ij} \neq \varepsilon$ pre aspoň jedno $j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Prípad 1. Ak pre všetky $j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ je $b_{ij} = \varepsilon$, tak vynecháme i-tú rovnicu sústavy. Nemá vplyv na riešenie.
Prípad 2. Pre všetky $j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$, pre ktoré $b_{ij} \neq \varepsilon$, položíme $x_j = \varepsilon$. i-tú rovnicu sústavy vynecháme, rovnako ako tie stĺpce j matice sústavy, kde $b_{ij} \neq \varepsilon$ a príslušné súradnice vektora x.
Dostaneme sústavu, ktorej vektor pravých strán je už konečný.

Príklad 5.4.5 *Nájdime všetky riešenia sústavy rovníc*

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Keďže $c_4 = \varepsilon$ a aj celý štvrtý riadok matice sústavy pozostáva z prvkov ε, štvrtá rovnica neovplyvní riešenie sústavy, a preto ju vynecháme. Zároveň $c_1 = \varepsilon$, tak overíme prvý riadok

$$\begin{aligned} b_{11} &\neq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \varepsilon, \\ b_{12} &= \varepsilon, \\ b_{13} &\neq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Vynecháme prvú rovnicu, a keďže x_1 a x_3 sme už určili, vynecháme aj prvý a tretí stĺpec matice B a prvú a tretiu súradnicu vektora x. Dostaneme sústavu s konečným vektorom pravých strán

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ktorá vedie k rovniciam $4 + x_2 = 0$ a $1 + x_2 = 0$. Sústava teda nemá riešenie. ♡

Ak vektor pravých strán je konečný a matica sústavy B obsahuje ε-stĺpec B_j, tak príslušné x_j je ľubovoľné, $x_j \in \mathbb{R}^\star$.

Príklad 5.4.6 *Nájdime všetky riešenia sústavy rovníc*

$$\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & -3 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Keďže c je konečné ($c \in F(n)$) a $B_2 = \varepsilon$, tak x_2 je ľubovoľné ($x_2 \in \mathbb{R}^\star$) a sústavu môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z rovníc vypočítame zvyšné súradnice riešenia

$$\begin{aligned}
&\max\{2+x_1,\, -3+x_3\} = 0, && \\
&\max\{2+x_1,\, \varepsilon\} = 0 && \iff \quad x_1 = -2, \\
&\max\{\varepsilon,\, x_3\} = 0 && \iff \quad x_3 = 0.
\end{aligned}$$

Vzhľadom na jednoznačnosť riešenia, ktorá vyplýva z druhej a tretej rovnice, stačí overiť, či riešenie vyhovuje prvej rovnici. Vyhovuje a teda množina riešení je

$$S(B,c) = \{(-2,\, x_2,\, 0)^\top;\, x_2 \in \mathbb{R}^\star\}.$$

♡

Ak matica sústavy B obsahuje ε-riadok pre $i \in M = \{1, 2, \dots, m\}$ a príslušná súradnica vektora pravých strán c_i je konečná, tak sústava nemá riešenie.

Príklad 5.4.7 *Nájdime všetky riešenia sústavy rovníc*

$$\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & -3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Keďže druhý riadok matice sústavy pozostáva z hodnôt ε a c_2 je konečné, tak z druhej rovnice sústavy

$$\max\{\varepsilon + x_1,\, \varepsilon + x_2,\, \varepsilon + x_3\} = 0$$

vyplýva, že riešenie neexistuje. ♡

Pri overovaní riešiteľnosti sústavy rovníc zohráva podstatnú úlohu hlavné riešenie príslušnej sústavy nerovníc. Pre $j \in N$ môžeme j-tú súradnicu hlavného riešenia sústavy nerovníc z definície 5.4 prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}
x_j^\sharp &= \left(\max_{i \in M} b_{ij} \otimes c_i^{-1}\right)^{-1} = \\
&= \min\{c_i \otimes b_{ij}^{-1};\, i \in M,\, b_{ij} \in \mathbb{R}\}. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Pre $j \in N$ označme $M_j(B,c)$ množinu indexov tých rovníc, ktoré sú splnené j-tou súradnicou hlavného riešenia $x^\sharp$, čiže

$$M_j(B,c) = \{i \in M;\, x_j^\sharp = c_i \otimes b_{ij}^{-1}\}. \qquad (25)$$

Hlavné riešenie sústavy nerovníc je jeho najväčším riešením. Každé riešenie systému je nanajvýš rovné hlavnému riešeniu a každá rovnica systému musí byť splnená niektorou z tých súradníc riešenia, ktorá sa rovná príslušnej súradnici hlavného riešenia.

Veta 5.6 *Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Pre sústavu $B \otimes x = c$ platí*

(i) $x \leq x^\sharp$, *pre všetky riešenia* $x \in S(B,c)$,

(ii) $x \in S(B,c)$ *vtedy a len vtedy, ak* $x \leq x^\sharp$ *a*

$$\bigcup_{j\colon x_j = x_j^\sharp} M_j = M,$$

(iii) $\left(B \otimes x^\sharp\right)_i = c_i$, *pre aspoň jedno* $i \in M$.

Príklad 5.4.8 *Rozhodnime pomocou vety 5.6, či je vektor x riešením sústavy*

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $x = (-3,-4,-3)^\top$,

b) $x = (-2,-5,-3)^\top$.

Riešenie. Prepíšeme sústavu

$$\begin{array}{lcl} \max\{1+x_1, \varepsilon, 3+x_3\} & = & 0 \\ \max\{2+x_1, 4+x_2, \varepsilon\} & = & 0 \\ \max\{\varepsilon, 4+x_2, x_3\} & = & 0. \end{array}$$

Nájdeme hlavné riešenie $x^\sharp = (-2,-4,-3)^\top$ a ku každej súradnici príslušnú množinu indexov podľa vzťahu (25):

$$M_1 = \{2\}, \qquad M_2 = \{2,3\}, \qquad M_3 = \{1\}.$$

a) Súradnice vektora $x = (-3,-4,-3)^\top$ sú rovnaké ako súradnice hlavného riešenia pre $j = 2$ a $j = 3$. Keďže $x \leq x^\sharp$ a

$$\bigcup_{j\colon x_j = x_j^\sharp} M_j = M_2 \cup M_3 = M,$$

tak podľa vety 5.6 (ii) je x riešením sústavy.

b) Súradnice vektora $x = (-2,-5,-3)^\top$ sú rovnaké ako súradnice hlavného riešenia pre $j = 1$ a $j = 3$. Keďže

$$\bigcup_{j\colon x_j = x_j^\sharp} M_j = M_1 \cup M_3 = \{1,2\} \neq M,$$

tak podľa vety 5.6 (ii) $x = (-2,-5,-3)^\top$ nie je riešením sústavy.

♡

Nutnou a postačujúcou podmienkou existencie riešenie sústavy rovníc je, aby postupnosť množín M_j, pre $j \in N$, pokrývala celú množinu M, resp. aby hlavné riešenie bolo riešením sústavy rovníc.

Veta 5.7 *Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Pre sústavu $B \otimes x = c$ sú nasledujúce podmienky ekvivalentné*

(i) $S(B,c) \neq \emptyset$,

(ii) $x^\sharp \in S(B,c)$,

(iii) $\bigcup\limits_{j \in N} M_j = M$.

Keďže pre predošlý príklad platí $\bigcup\limits_{j \in N} M_j = M$, tak sústava má riešenie. Inak povedané, $x^\sharp$ je riešením sústavy. Malou modifikáciou matice sústavy dostaneme v nasledujúcom príklade rozdielny výsledok z hľadiska riešiteľnosti.

Príklad 5.4.9 *Zistime, či sústava má riešenie*

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Nájdeme hlavné riešenie $x^\sharp = (-2, -4, -3)^\top$ a ku každej súradnici podľa vzťahu (25) príslušnú množinu indexov:

$$M_1 = \{2\}, \qquad M_2 = \{2\}, \qquad M_3 = \{1\}.$$

Postupujeme podľa vety 5.7 a overíme, či $\bigcup\limits_{j \in N} M_j = M$:

$$\bigcup_{j \in N} M_j = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{1, 2\} \neq M.$$

Sústava nemá riešenie. ♡

Poznámka 5.2 *Riešiteľnosť sústavy z predchádzajúceho príkladu sme mohli overiť aj tak, že overíme, či je hlavné riešenie riešením danej sústavy:*

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 3 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nutnou a postačujúcou podmienkou jednoznačnosti riešenia sústavy je, aby bez žiadnej súradnice hlavného riešenia neboli splnené všetky rovnice.

Veta 5.8 *Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Pre sústavu $B \otimes x = c$ platí $S(B,c) = \{x^\sharp\}$ vtedy a len vtedy, ak platia nasledujúce podmienky*

(i) $\bigcup_{j\in N} M_j = M$,

(ii) $\bigcup_{j\in N'} M_j \neq M$, *pre žiadne* $N' \subset N$, $N' \neq N$.

Každá sústava $A \otimes x = c$, kde c je konečný vektor, sa dá transformovať na sústavu $B \otimes x = 0$ a tým zjednodušiť riešenie.

Príklad 5.4.10 *Nájdime všetky riešenia sústavy rovníc*

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -6 & -4 & -3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ -4 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Kvôli zjednodušeniu výpočtu transformujeme sústavu rovníc na sústavu, v ktorej je vektor pravých strán nulový. Nájdeme maticu sústavy, ktorej prvky zodpovedajú hodnotám $b_{ij} = a_{ij} \otimes c_i^{-1}$. Dostaneme sústavu

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ -3 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jednotlivé súradnice hlavného riešenia nájdeme podľa rovnice (24) ako maximum príslušného stĺpca tejto matice a následnou zmenou znamienka, t. j. $x^\sharp = (3, 1, -2)^\top$. Zistíme, ktoré rovnice sú „pokryté“ jednotlivými súradnicami hlavného riešenia:

$$M_1 = \{2, 4\}, \qquad M_2 = \{1, 2, 5\}, \qquad M_3 = \{3, 4\}.$$

Keďže $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = M$, podľa vety 5.7 je $x^\sharp$ riešením sústavy a teda sústava má aspoň jedno riešenie. Navyše existuje taká podmnožina indexov $N' = \{2, 3\} \subset N$, že $M_2 \cup M_3 = M$, čiže na splnenie všetkých rovníc sústavy stačí druhá a tretia súradnica hlavného riešenia. Z toho vyplýva, že prvá súradnica riešenia je ľubovoľná hodnota $x_1 \leq 3$ (viď veta 5.6 (i)). Množina riešení je

$$\begin{aligned} S(B,c) &= \{(x_1, 1, -2)^\top;\ x_1 \leq x_1^\sharp\} = \\ &= \{(x_1, 1, -2)^\top;\ x_1 \leq 3\}. \end{aligned}$$

♡

Na záver uvádzame zhrnutie najdôležitejších výsledkov. Vetu 5.7 môžeme formulovať ako dve nutné a postačujúce podmienky existencie riešenia sústavy rovníc.

Veta 5.9 *Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Sústava $B \otimes x = c$ má riešenie vtedy a len vtedy, ak $\bigcup_{j \in N} M_j = M$.*

Veta 5.10 *Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Sústava $B \otimes x = c$ má riešenie vtedy a len vtedy, ak $x^\sharp$ je jej riešením. Navyše, ak $x^\sharp$ je riešením sústavy, tak je jej najväčším riešením.*

Vetu 5.8 môžeme formulovať nasledovne.

Veta 5.11 *Nech $B \in F(m,n)$ a $c \in F(m)$. Sústava $B \otimes x = c$ má práve jedno riešenie vtedy a len vtedy, ak $\bigcup_{j \in N} M_j = M$ a $\bigcup_{j \in N'} M_j \neq M$, pre žiadne $N' \subset N$, $N' \neq N$.*

Algoritmus riešenia sústavy rovníc

(i) Ak $c = \varepsilon$ a $B = \varepsilon$, tak $S(B,c) = \mathbb{R}^\star(n)$.

(ii) Ak $c = \varepsilon$ a $B \neq \varepsilon$, tak pre stĺpce $B_j \neq \varepsilon$ matice B je $x_j = \varepsilon$, ostatné súradnice sú ľubovoľné.

(iii) Ak $c \neq \varepsilon$ a $c_i \neq \varepsilon$, také že i-tý riadok B obsahuje len hodnoty ε, tak $S(B,c) = \emptyset$.

(iv) Ak $c \neq \varepsilon$, tak

  (a) ak existuje riadok, pre ktorý $c_i = \varepsilon$, tak
  - pre $b_{ij} \neq \varepsilon$
    - položíme $x_j = \varepsilon$,
    - vynecháme j-té stĺpce B a j-té súradnice vektora x,
  - vynecháme i-tú rovnicu,

  (b) ak existuje stĺpec $B_j = \varepsilon$, tak
  - položíme $x_j \in \mathbb{R}^\star$,
  - vynecháme j-té stĺpce matice sústavy a j-té súradnice vektora x,

  (c) nájdeme hlavné riešenie $x^\sharp$ novej sústavy,

  (d) nájdeme množiny indexov M_j podľa vzťahu (25),

(e) overíme, či platí $\bigcup_{j\in N} M_j = M$, ak nie, tak $S(B,c) = \emptyset$, ak áno, overíme, či platí $\bigcup_{j\in N'} M_j \neq M$, pre žiadne $N' \subset N$, $N' \neq N$. Ak áno, $S(B,c) = \{x^\sharp\}$, ak nie, tak sústava má nekonečne veľa riešení a pre $N' \subset N$ také, že $\bigcup_{j\in N'} M_j = M$ položíme $x_l \leq x_l^\sharp$ pre $l \in N \backslash N'$ a $x_l = x_l^\sharp$ pre $l \in N'$.

5.5 Ukončenie projektu v časovom limite

Majme DDS s maticou prechodu A. Namiesto časov, kedy sa spúšťa výroba na jednotlivých strojoch, je tu požiadavka, aby $(p+1)$-etapový projekt skončil na jednotlivých strojoch vo vopred určenom čase, ktorý je daný vektorom c. Vzniká teda úloha nájsť taký vektor x ukončenia prvej etapy, aby bola splnená rovnica

$$A^p \otimes x = c. \tag{26}$$

Ak označíme $B = A^p$, tak riešime sústavu rovníc $B \otimes x = c$. Podľa vety 5.9 má sústava riešenie vtedy, ak je riešením hlavné riešenie $x^\sharp = B' \otimes' c$, resp. $x^\sharp = (A^p)' \otimes' c$. Keďže $x^\sharp$ je najväčším riešením nerovnice $B \otimes x \leq c$, tak reprezentuje najneskoršie časy ukončenia prvej etapy projektu

$$y(1) = x^\sharp = (A^p)' \otimes' c, \tag{27}$$

za podmienky, aby neboli prekročené časy ukončenia projektu reprezentované vektorom c. Podľa vety 5.10 je buď $x^\sharp = (A^p)' \otimes' c$ riešením sústavy $A^p \otimes x = c$ alebo riešenie neexistuje.

Príklad 5.5.1 *Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov. Nech A je matica prechodu daného DDS. Nech c je vektor reprezentujúci predpísané časy ukončenia 5-etapového projektu*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Sú stanovené časy ukončenia projektu dosiahnuteľné?

Riešenie. Nájdeme pomocou (27) $y(1) = x^\sharp$ hlavné riešenie sústavy nerovníc $A^4 \otimes x \leq c$ a overíme, či je riešením sústavy rovníc $A^4 \otimes x = c$:

$$\begin{aligned} y(1) &= x^\sharp = (A^4)' \otimes' c = \\ &= \begin{pmatrix} -19 & -17 & -18 & -17 \\ -23 & -20 & -21 & -21 \\ -20 & -17 & -18 & -18 \\ -26 & -22 & -24 & -24 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ A^4 \otimes y(1) &= \begin{pmatrix} 19 & 23 & 20 & 26 \\ 17 & 20 & 17 & 22 \\ 18 & 21 & 18 & 24 \\ 17 & 21 & 18 & 24 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 28 \\ 29 \\ 28 \end{pmatrix} = y(5). \end{aligned}$$

Keďže $y(5) \neq c$, hlavné riešenie nie je riešením sústavy rovníc a preto sú stanovené časy nedosiahnuteľné. ♡

5.6 Čebyševova aproximácia

V teórii aproximácií je dôležité merať vzdialenosť dvoch vektorov. Bežne sa používa tzv. Čebyševova vzdialenosť.

Definícia 5.6 *Nech x, $y \in F(n)$.* ***Čebyševovou vzdialenosťou vektorov*** *x a y nazývame číslo*

$$\xi(x, y) = \max_i |x_i - y_i|. \tag{28}$$

Ak použijeme definíciu absolútnej hodnoty, môžeme prepísať Čebyševovu vzdialenosť nasledovne

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= \max_i \{\max\{x_i - y_i\}, \max\{y_i - x_i\}\} = \\ &= \max\{\max_i\{x_i - y_i\}, \max_i\{y_i - x_i\} \end{aligned}$$

a pomocou konjugácie na tvar

$$\xi(x, y) = x' \otimes y \oplus y' \otimes x. \tag{29}$$

Poznámka 5.3 *V prípade, že $y \geq x$, tak $\xi(x, y) = x' \otimes y$.*

Pomocou Čebyševovej vzdialenosti sa dá odhadnúť pre daný DDS s maticou prechodu A čas potrebný na uskutočnenie p etáp projektu, t. j. čas práce stroja, ktorý pracuje najpomalejšie a teda najdlhšie. Ak použijeme dôsledok 2.1, je pre i-tý stroj doba práce minimálne a_{ii}^p:

$$\xi(x_i(1), x_i(p+1)) = x_i(1)' \otimes x_i(p+1) \ \geq \ x_i(1)' \otimes a_{ii}^p \otimes x_i(1) = a_{ii}^p.$$

Čebyševova vzdialenosť vektorov $x(1)$ a $x(p+1)$ udáva čas potrebný na uskutočnenie p-etapového projektu:

$$\begin{aligned} \xi(x(1), x(p+1)) &= x(1)' \otimes x(p+1) = \\ &= \sum_i^{\oplus} x_i(1)' \otimes x_i(p+1) \geq \\ &\geq \sum_i^{\oplus} a_{ii}^p = \left(\sum_i^{\oplus} a_{ii} \right)^p. \end{aligned}$$

Príklad 5.6.1 *Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov. Odhadnime čas potrebný na uskutočnenie 5 etáp projektu pomocou matice prechodu daného DDS.*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. $\xi(x(1), x(p+1)) \geq \left(\sum_i^{\oplus} a_{ii} \right)^p = 6^5 = 30.$ ♡

Definícia 5.7 *Nech f je zobrazenie z množiny S do množiny $F(m)$. Nech $c \in F(m)$. Každé riešenie $x \in S$ úlohy typu*

$$\textit{minimalizujme hodnotu} \quad \xi(f(x), c)$$

budeme nazývať ***Čebyševove najlepšie riešenie****.*

Čebyševove najlepšie riešenie nie je jednoznačné. Môžeme hľadať

- najväčšie Čebyševove najlepšie riešenie,
- najmenšie Čebyševove najlepšie riešenie.

Veta 5.12 *Nech $B \in F(m, n)$ a $c \in F(m)$. Nech $x^\sharp$ je hlavné riešenie nerovnice $B \otimes x \leq c$. Nech $S_\leq(B, c) = \{x \in \mathbb{R}^\star(n);\ B \otimes x \leq c\}$. Potom $x^\sharp$ je Čebyševove najlepšie riešenie vzhľadom na všetky riešenia nerovnice $B \otimes x \leq c$:*

$$\xi(B \otimes x^\sharp, c) = \min_{x \in S_\leq} \xi(B \otimes x, c).$$

Príklad 5.6.2 *Pre projekt z príkladu 5.5.1 za predpokladu, že stanovené časy nemôžeme prekročiť, určme*

a) *Aké je Čebyševove najlepšie riešenie?*

b) *Aká je hodnota funkcie ξ?*

Riešenie.

a) Čebyševove najlepšie riešenie je $y(1) = x^\sharp = (A^4)' \otimes' c = (11, 7, 10, 4)^\top$, prostredníctvom ktorého dosiahneme najneskoršie časy ukončenia projektu $y(5) = A^4 \otimes y(1) = (30, 28, 29, 28)^\top$ za predpokladu, že neprekročíme predpísané časy.

b) Určíme presnosť riešenia, vypočítame

$$\xi(A^4 \otimes y(1), c) = \max\{(30-30), (30-28), (30-29), (30-28)\} = 2.$$

♡

Ak budeme riešiť podobnú úlohu ako v príklade 5.6.2, ale nebudeme požadovať, aby vopred stanovené časy nesmeli byť prekročené, ale aby „rozptyl“ okolo týchto časov bol minimálny, pomôže nám nasledujúca veta.

Veta 5.13 *Nech $B \in F(m, n)$ a $c \in F(m)$. Nech $x^\sharp$ je hlavné riešenie nerovnice $B \otimes x \leq c$. Nech $\mu^2 = \xi(B \otimes x^\sharp, c)$ a $y_\mu = \mu \otimes x^\sharp$. Potom platí*

$$\xi(B \otimes y_\mu, c) = \min_{x \in R(n)} \xi(B \otimes x, c).$$

Príklad 5.6.3 *Pre projekt z príkladu 5.5.1 za predpokladu, že stanovené časy môžeme prekročiť, určme Čebyševove najlepšie riešenie.*

Riešenie. Postupujeme podľa vety 5.13. Nájdeme Čebyševovu vzdialenosť $\mu^2 = \xi(B \otimes x^\sharp, c)$:

$$\mu^2 = \xi(B \otimes y(1), c) = 2$$

a posunieme časy $y(1)$ o polovicu tejto hodnoty, t. j. o 1 časovú jednotku

$$y_\mu(1) = 1 \otimes y(1) = 1 \otimes \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ak vypočítame časy ukončenia celého projektu, ktoré dosiahneme vektorom $y'(1)$, vidíme, že prvý stroj prekročí stanovený čas o jednu jednotku

$$y_\mu(5) = 1 \otimes y(5) = 1 \otimes \begin{pmatrix} 30 \\ 28 \\ 29 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 29 \\ 30 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

Čebyševova vzdialenosť vektora časov ukončenia projektu od vektora stanovených časov ukončenia je polovica z hodnoty, ktorú sme dostali, ak riešime úlohu s nepovoleným prekročením stanovených časov ukončenia projektu

$$\xi(B \otimes y_\mu(1), c) = 1.$$

♡

5.7 Úlohy

5.1 Odhadnite dobu trvania p etáp projektu pre danú maticu a daný počet výrobných cyklov

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & \varepsilon & 7 \\ 3 & 4 & \varepsilon \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad p = 10,$ c) $A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 & 6 \\ 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 8 & 7 & \varepsilon \\ 1 & 3 & \varepsilon & 8 \end{pmatrix} \quad p = 6,$

b) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad p = 8,$ d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & \varepsilon & 9 \\ \varepsilon & 4 & 10 & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad p = 5.$

5.2 Nájdite hlavné riešenie nerovnice $B \otimes x \leq c$

a) $\begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{pmatrix} \otimes x \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix},$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \otimes x \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 4 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \otimes x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & 3 & 7 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 9 \end{pmatrix} \otimes x \leq \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}.$

5.3 Rozhodnite, či má riešenie rovnica $B \otimes x = c$ zodpovedajúca nerovnici z cvičenia 5.2.

5.4 Zistite, či má sústava riešenie. Ak áno, zistite, či má jediné riešenie.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$ d) $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 7 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$

5.5 Nájdite všetky riešenia rovnice $B \otimes x = c$

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 5 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$,

g) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$.

5.6 Nájdite všetky riešenia rovnice $B \otimes x = c$

a) $\begin{pmatrix} 5 & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & 2 & 4 \\ 1 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 5 & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & 2 & 4 \\ 1 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 5 & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & 2 & 4 \\ 1 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 5 & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & 2 & 4 \\ 8 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}$.

5.7 Nájdite všetky riešenia rovnice $B \otimes x = c$

a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 3 \\ 8 & 9 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 10 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 7 & 8 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 3 \\ \varepsilon \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & 12 & 9 & 5 \\ 8 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 9 & 11 & 7 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

5.8 Nájdite všetky riešenia rovnice $B \otimes x = c$

a) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & 7 \\ \varepsilon & 9 & 8 \\ \varepsilon & 5 & 9 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 5 & \varepsilon & 7 \\ 1 & \varepsilon & 3 \\ 6 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & \varepsilon \\ 5 & 6 & \varepsilon \\ 4 & 9 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 6 & 2 \\ \varepsilon & 9 & 7 \\ \varepsilon & 8 & 4 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5.9 Pomocou vety 5.7 rozhodnite o riešiteľnosti rovnice $B \otimes x = c$ a nájdite všetky jej riešenia

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 9 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 11 \\ 3 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 11 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 9 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 11 \\ 3 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 11 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{b)}\ \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 9 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 11 \\ 3 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 11 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{d)}\ \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5.10 Zistite, či sú dosiahnuteľné časy ukončenia c projektu pre DDS s danou maticou prechodu A a daným počtom etáp

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 28 \\ 28 \\ 28 \end{pmatrix} \quad p+1 = 4,$$

$$\text{b)}\ A = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon & 7 \\ 4 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \quad p+1 = 4,$$

$$\text{c)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix} \quad p+1 = 3,$$

$$\text{d)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 7 & 8 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \quad p+1 = 3,$$

$$\text{e)}\ A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & 3 & 7 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} \quad p+1 = 5,$$

$$\text{f)}\ A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 \\ \varepsilon & 3 & 7 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 44 \\ 48 \\ 44 \\ 47 \end{pmatrix} \quad p+1 = 5.$$

5.11 Nájdite Čebyševove najlepšie riešenie rovnice $B \otimes x = c$, pre $B = A^p$ a (p+1)-stavový projekt z cvičenia 5.10.

Výsledky:

5.1

a) $\xi(x(1), x(p+1)) \geq 90$,

b) $\xi(x(1), x(p+1)) \geq 56$,

c) $\xi(x(1), x(p+1)) \geq 48$,

d) $\xi(x(1), x(p+1)) \geq 50$.

5.2

a) $x^\sharp = (7,\ 6,\ 5)^\top$,

b) $x^\sharp = (-1,\ -2,\ -3,\ -4)^\top$,

c) $x^\sharp = (7,\ 5,\ 6)^\top$,

d) $x^\sharp = (11,\ 10,\ 7,\ 5)^\top$.

5.3

a) áno,

b) áno,

c) nie,

d) nie.

5.4

a) nemá riešenie
$x^\sharp = (-5,\ -6,\ -7)^\top \quad M_1 = \{2\},\ M_2 = \{2\},\ M_3 = \{3\}$,

b) má jediné riešenie
$x^\sharp = (-4,\ -5,\ -4)^\top \quad M_1 = \{3\},\ M_2 = \{2\},\ M_3 = \{1\}$,

c) má nekonečne veľa riešení
$x^\sharp = (-2,\ -3,\ -2)^\top \quad M_1 = \{1,2\},\ M_2 = \{1,2,3\},\ M_3 = \{1\}$,

d) má nekonečne veľa riešení
$x^\sharp = (-9,\ -6,\ -3)^\top \quad M_1 = \{1\},\ M_2 = \{1,3\},\ M_3 = \{2\}$.

5.5

a) $S(B,c) = \{(7,\ 6)^\top\}$,

b) $S(B,c) = \{(7,\ 6)^\top\}$,

c) $S(B,c) = \{(x_1,\ 6)^\top;\ x_1 \leq 5\}$,

d) $S(B,c) = \{(7,\ 6,\ 5)^\top\}$,

e) $S(B,c) = \emptyset$,

f) $S(B,c) = \{(x_1,\ 6,\ x_3)^\top;\ x_1 \leq\ 7,\ x_3 \leq 5\}$,

g) $S(B,c) = \{(x_1,\ 3,\ 2)^\top;\ x_1 \leq 4\}$.

5.6

a) $S(B,c) = \{(\varepsilon,\ \varepsilon,\ -1)^\top\}$,

b) $S(B,c) = \emptyset$,

c) $S(B,c) = \emptyset$,

d) $S(B,c) = \{(-5,\ \varepsilon,\ \varepsilon)^\top\}$.

5.7

a) $S(B,c) = \emptyset$,

b) $S(B,c) = \{(-4,\ \varepsilon,\ -5,\ -4)^\top\}$,

c) $S(B,c) = \{(x_1,\ -3,\ \varepsilon,\ x_4)^\top;\ x_1 \leq\ -2,\ x_4 \leq -2\}$,

d) $S(B,c) = \{(\varepsilon,\ x_2,\ -6,\ -3)^\top;\ x_2 \leq\ -9\}$.

5.8

a) $S(B,c) = \emptyset$,

b) $S(B,c) = \emptyset$,

c) $S(B,c) = \{(x_1,\ -3,\ x_3)^\top;\ x_1 \leq\ -2,\ x_3 \in \mathbb{R}^\star\}$,

d) $S(B,c) = \{(x_1,\ -6,\ -3)^\top;\ x_1 \in \mathbb{R}^\star\}$.

5.9

a) $S(B,c) = \emptyset$,

b) $S(B,c) = \{(-5,\ x_2,\ -7)^\top;\ x_2 \leq\ -6\}$,

c) $S(B,c) = \{(x_1,\ -6,\ -7)^\top;\ x_1 \leq\ -6\}$,

d) $S(B,c) = \{(-3,\ -4,\ -2)^\top\}$.

5.10

a) $y(1) = x^\sharp = (14,\ 13,\ 9)^\top$
$y(4) = (28,\ 28,\ 27)^\top$
nie sú dosiahnuteľné,

b) $y(1) = x^\sharp = (16,\ 15,\ 11)^\top$
$y(4) = (30,\ 30,\ 29)^\top$
nie sú dosiahnuteľné,

c) $y(1) = x^\sharp = (13,\ 7,\ 6,\ 7)^\top$
$y(3) = (21,\ 21,\ 21,\ 18)^\top$
nie sú dosiahnuteľné,

d) $y(1) = x^\sharp = (16,\ 10,\ 9,\ 10)^\top$
$y(3) = (24,\ 24,\ 24,\ 21)^\top$
nie sú dosiahnuteľné,

e) $y(1) = x^\sharp = (34,\ 20,\ 14,\ 13)^\top$
$y(5) = (50,\ 50,\ 46,\ 49)^\top$
nie sú dosiahnuteľné,

f) $y(1) = x^\sharp = (28,\ 18,\ 12,\ 11)^\top$
$y(5) = (44,\ 48,\ 44,\ 47)^\top$
sú dosiahnuteľné.

5.11

a) $\xi = 1$
$$y_\mu(1) = \frac{1}{2} \otimes y(1) = (14,5;\ 13,5;\ 9,5)^\top,$$

b) $\xi = 1$
$$y_\mu(1) = \frac{1}{2} \otimes y(1) = (16,5;\ 15,5;\ 11,5)^\top,$$

c) $\xi = 3$
$$y_\mu(1) = \frac{3}{2} \otimes y(1) = (14,5;\ 8,5;\ 7,5;\ 8,5)^\top,$$

d) $\xi = 3$
$$y_\mu(1) = \frac{3}{2} \otimes y(1) = (17,5;\ 11,5;\ 10,5;\ 11,5)^\top,$$

e) $\xi = 4$
$$y_\mu(1) = 2 \otimes y(1) = (36,\ 22,\ 16,\ 15)^\top,$$

f) $\xi = 0$
$$y_\mu(1) = y(1) = (28,\ 18,\ 12,\ 11)^\top\ .$$

6 Ustálený stav DDS a vlastný priestor ireducibilnej matice

6.1 Cieľ kapitoly

Oboznámiť sa s pojmom ustálený stav DDS, vlastný problém max-plus matice, konečné riešenie vlastného problému ireducibilnej matice. Oboznámiť sa so súvislosťou ustáleného stavu s riešením vlastného problému matice prechodu daného DDS.

6.2 Prehľad kapitoly v otázkach

- Definujte ustálený stav DDS.
- Definujte vlastný problém pre max-plus maticu.
- Popíšte výpočet maximálnej priemernej váhy cyklu matice pomocou Karpovho algoritmu.
- Popíšte algoritmus na riešenie vlastného problému pre definitnú maticu.
- Popíšte algoritmus na riešenie vlastného problému pre ireducibilnú maticu.
- Definujte fundamentálne vlastné vektory a ekvivalentné vlastné vektory. Uveďte nutnú a postačujúcu podmienku ekvivalentnosti vlastných vektorov.
- Definujte bázu vlastného priestoru ireducibilnej matice a popíšte vlastný priestor pomocou bázy.

6.3 Ustálený stav a vlastný problém

Snahou manažérov DDS je dosiahnuť stav, aby systém bežal spôsobom, že medzi ukončením dvoch po sebe idúcich etáp je konštantný interval dĺžky λ, t. j. ak zoberieme napr. výrobnú linku, chceme, aby pre všetky stroje i a všetky výrobné cykly r platil vzťah

$$x_i(r+1) = \lambda + x_i(r).$$

Ak to vyjadríme v max-plus algebre, tak aby platilo

$$x_i(r+1) = \lambda \otimes x_i(r).$$

Definícia 6.1 *Hovoríme, že DDS je v **ustálenom stave**, ak existuje také $\lambda \in \mathbb{R}$, že pre každé $r \in \mathbb{N}$*

$$x(r+1) = \lambda \otimes x(r). \tag{30}$$

Z definície 2.2 vieme, že $x(r+1) = A \otimes x(r)$. Zároveň má platiť vzťah (30). Teraz teda môžeme formulovať algebrický problém, ktorého riešenie vedie k vyriešeniu problému formulovaného v úvode tejto časti, t. j. kedy sa DDS dostane do ustáleného stavu.

Definícia 6.2 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Riešiť rovnicu*

$$A \otimes x = \lambda \otimes x \tag{31}$$

*t. j. hľadať vektor $x \in \mathbb{R}^\star(n)$ a skalár $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ také, že účinok matice A na vektor x je rovnaký ako účinok konštanty λ na vektor x, nazývame riešiť **vlastný problém** pre maticu A. Hodnotu λ nazývame **vlastnou hodnotou** a príslušný vektor x **vlastným vektorom** matice A.*

Definícia 6.3 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Hovoríme, že **vlastný problém má konečné riešenie**, ak existuje konečná hodnota λ a konečný vektor x také, že $A \otimes x = \lambda \otimes x$.*

6.4 Vlastná hodnota a Karpov algoritmus

Pre ireducibilnú maticu je maximálna priemerná váha cyklu $\lambda(A)$ v zodpovedajúcom digrafe jedinou vlastnou hodnotou.

Veta 6.1 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je ireducibilná matica. Potom platí, že $\lambda(A)$ je jediná vlastná hodnota matice A. Navyše ak $n > 1$, tak má vlastný problém konečné riešenie.*

Poznámka 6.1 *V prípade ak $n = 1$ a $A = (\varepsilon)$, je matica A ireducibilná, ale $\lambda(A) = \varepsilon$.*

Vlastnú hodnotu môžeme vypočítať z postupnosti prvých n mocnín matice A. Diagonálne prvky reprezentujú postupne maximálne váhy cyklov dĺžky $r = 1, 2, \ldots, n$. Predelíme váhy cyklov ich dĺžkou a dostaneme priemerné váhy cyklov. Vyberieme maximálnu hodnotu, ktorá je maximálnou priemernou váhou cyklu $\lambda(A)$. Pri efektívnom umocňovaní je výpočtová zložitosť tohto postupu $O(n^4)$. Karpov algoritmus pre ireducibilné matice, ktorý uvádzame, má výpočtovú zložitosť $O(n^3)$.

Veta 6.2 (Karpov algoritmus) *Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$ je ireducibilná matica. Nech a_i^k je prvok v i-tom riadku a prvom stĺpci matice A^k pre $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Potom platí*

$$\lambda(A) = \max_i \left\{ \min_k \left\{ \frac{a_i^{n+1} - a_i^k}{n+1-k} \right\} \right\} \tag{32}$$

pre konečné hodnoty a_i^{n+1} a a_i^k.

Príklad 6.4.1 *Pre danú ireducibilnú maticu A vypočítajme vlastnú hodnotu $\lambda(A)$ pomocou Karpovho algoritmu.*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon & 4 \\ 5 & 3 & \varepsilon \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Potrebujeme len prvé stĺpce mocnín matice A, t. j. na základe stĺpcového princípu vlastne orbit pre vektor $x(1)$ rovný prvému stĺpcu matice A pre $r = 1, 2, \ldots, n+1$:

$$x(r): \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Pomocou tohto orbitu a vzťahu(32) počítame postupne po súradniciach požadované hodnoty a nakoniec nájdeme minimálnu z nich:

- $i = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

$$\min \left\{ \frac{20-14}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-4}{3} \right\} = 5.$$

- $i = 2$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

$$\min\left\{\frac{19-15}{1}, \frac{19-9}{2}, \frac{19-5}{3}\right\} = 4.$$

- $i = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

$$\min\left\{\frac{20-16}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-6}{3}\right\} = 4.$$

Maximálna z týchto hodnôt je hľadaná maximálna priemerná váha cyklu

$$\lambda(A) = \max\{5, 4, 4\} = 5.$$

♡

6.5 Fundamentálne vlastné vektory a báza vlastného priestoru

Pomocou KARPOVHO ALGORITMU vieme nájsť vlastnú hodnotu ireducibilnej matice. Aby sme vyriešili vlastný problém úplne, potrebujeme nájsť aj zodpovedajúce vlastné vektory. Najskôr predstavíme postup, pomocou ktorého nájdeme vlastné vektory pre definitnú maticu D (viď definíciu 4.13). Pripomíname slabý tranzitívny uzáver matice (viď definíciu 4.3) a FLOYDOV–WARSHALLOV ALGORITMUS (viď vetu 4.8), resp. výpočet pomocou vety 4.7 a vzťahu (17), ktoré sme predstavili v predchádzajúcej kapitole. Keďže je $\lambda(D) = 0$, je matica p-regulárna a podľa vety 4.4 slabý tranzitívny uzáver $\Delta(D)$ existuje.

Veta 6.3 *Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je definitná. Nech j je vlastný vrchol. Nech d je j-tý stĺpec $\Delta(D)$. Potom d je konečný vlastný vektor matice D (s vlastnou hodnotou $\lambda(D) = 0$).*

Definícia 6.4 *Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je definitná. Stĺpce slabého tranzitívneho uzáveru $\Delta(D)$ zodpovedajúce vlastným vrcholom nazývame **fundamentálne vlastné vektory** matice D.*

Príklad 6.5.1 *Pre danú definitnú maticu D nájdime fundamentálne vlastné vektory*

$$D = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & -1 \\ 0 & -2 & \varepsilon \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Pomocou Floydovho–Warshallovho algoritmu (viď vetu 4.8) nájdeme slabý tranzitívny uzáver matice

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podľa vety 4.12 (iv) nulovým diagonálnym prvkom $\delta_{11} = 0$ a $\delta_{33} = 0$ zodpovedajú fundamentálne vlastné vektory:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

♡

Zovšeobecnime opísaný postup pre ľubovoľnú ireducibilnú maticu. Ak je uvažovaná matica $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ ireducibilná, tak matica D, pre ktorú platí $A = \lambda(A) \otimes D$, t. j. $D = \lambda(A)^{-1} \otimes A$, je definitná. Ak d je vlastný vektor matice D, t. j.

$$D \otimes d = \lambda(D) \otimes d = d,$$

tak platí

$$\begin{aligned} A \otimes d &= \lambda(A) \otimes D \otimes d = \\ &= \lambda(A) \otimes d. \end{aligned}$$

To znamená, že d je vlastný vektor aj matice A. Z týchto úvah vyplýva nasledujúca veta.

Veta 6.4 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je ireducibilná matica. Potom má vlastný problém pre maticu A konečné riešenie, ktoré sa dá nájsť v čase $O(n^3)$.*

Algoritmus pre riešenie vlastného problému ireducibilnej matice

(i) vypočítame pomocou Karpovho algoritmu vlastnú hodnotu $\lambda(A)$,

(ii) vytvoríme definitnú maticu D pomocou $D = \lambda(A)^{-1} \otimes A$,

(iii) vypočítame $\Delta(D)$ jedným zo spôsobov

- pomocou Floyd-Warshallovho algoritmu,
- $\Gamma(D) = (E \oplus D)^{n-1}$ a $\Delta(D) = D \otimes \Gamma(D)$,

(iv) nájdeme fundamentálne vlastné vektory pre maticu D (stĺpce $\Delta(D)$ s $\delta_{jj} = 0$) prislúchajúce vlastnej hodnote $\lambda(D) = 0$,

(v) fundamentálne vlastné vektory matice D sú fundamentálnymi vlastnými vektormi matice A prislúchajúcimi vlastnej hodnote $\lambda(A)$.

Kvôli jednoznačnosti budeme v našich ďalších úvahách definitnú maticu, ktorá zodpovedá ireducibilnej matici A označovať A_λ. Teda $A_\lambda = \lambda(A)^{-1} \otimes A$.

Príklad 6.5.2 *Pre ireducibilnú maticu A z príkladu 6.4.1 nájdime riešenie vlastného problému.*

Riešenie. Vlastnú hodnotu matice $\lambda(A) = 5$ sme vypočítali v príklade 6.4.1. Pomocou transformácie $A_\lambda = \lambda(A)^{-1} \otimes A$ dostaneme definitnú maticu z príkladu 6.5.1. Jej vlastné vektory sú aj vlastnými vektormi matice A. ♡

Definícia 6.5 *Dvojicu vlastných vrcholov (vlastných indexov, vlastných vektorov) nazývame **ekvivalentnými vlastnými vrcholmi (vlastnými indexmi, vlastnými vektormi)**, ak existuje spoločný kritický cyklus, ktorý ich obsahuje.*
Zápis: $i \approx j$, resp. $\Delta_i \approx \Delta_j$

Veta 6.5 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ s $\lambda(A) > \varepsilon$. Nech $D = \lambda(A)^{-1} \otimes A$. Nech i a j sú vlastné indexy a Δ_i a Δ_j sú zodpovedajúce stĺpce $\Delta(D)$. Potom existuje konečné α také, že $\Delta_i = \alpha \otimes \Delta_j$ vtedy a len vtedy, ak $i \approx j$.*

Príklad 6.5.3 *Zistime, či sú ekvivalentné vlastné vektory matice A z príkladu 6.5.2.*

Riešenie. Keďže pre vrcholy 1 a 3 existuje spoločný cyklus s váhou 0, tak sú podľa definície 6.5 príslušné vlastné vektory ekvivalentné $\Delta_1 \approx \Delta_3$. Navyše $\Delta_1 = 1 \otimes \Delta_3$, takže vlastné vektory Δ_1 a Δ_3 sú ekvivalentné aj na základe vety 6.5. ♡

Definícia 6.6 *Množinu všetkých vlastných vektorov matice $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ nazývame* ***vlastným priestorom*** *a označujeme $V(A)$. Množinu všetkých vlastných vektorov matice $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ prislúchajúcich vlastnej hodnote λ označujeme $V(A,\lambda)$.*

Pre ireducibilnú maticu vzhľadom na jednoznačnosť vlastnej hodnoty (viď vetu 6.1) platí

$$V(A) = V(A,\lambda).$$

Definícia 6.7 ***Bázou $\mathcal{B}$ vlastného priestoru*** *$V(A)$ danej ireducibilnej matice $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ nazývame maximálnu množinu neekvivalentných fundamentálnych vlastných vektorov.*

Veta 6.6 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je ireducibilná matica. Potom pre x, $y \in V(A)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí*

(i) $x \oplus y \in V(A)$,

(ii) $\alpha \otimes x \in V(A)$.

Využijúc vetu 6.6 a definíciu 6.7 môžeme vlastný priestor ireducibilnej matice popísať nasledujúcim spôsobom

$$V(A) = \left\{ \sum_i^{\oplus} \alpha_i \otimes \Delta_i\,;\ \alpha_i \in \mathbb{R}^\star,\ \Delta_i \in \mathcal{B} \right\} \tag{33}$$

Príklad 6.5.4 *Nájdime bázu a popíšme vlastný priestor matice A z príkladu 6.5.2.*

Riešenie. Keďže je dvojica fundamentálnych vektorov Δ_1 a Δ_3 ekvivalentná, pozostáva báza len z jedného vektora. Zvoľme napr. $\mathcal{B} = \{\Delta_3\}$. Vlastný priestor obsahuje všetky vektory, ktoré sú lineárnou kombináciou prvkov bázy. V našom prípade teda $V(A) = \{\alpha \otimes \Delta_3;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$. ♡

6.6 Čebyševova aproximácia a ustálený stav

Pri riadení výrobnej linky je žiadúce, aby linka pracovala v režime ustáleného stavu hneď od začiatku. Ak pre dané časy spustenia práce na jednotlivých strojoch ustálený stav nedosiahneme, znamená to, že vektor reprezentujúci časy ukončenia prvého výrobného cyklu nie je vlastným vektorom matice prechodu daného DDS.

Príklad 6.6.1 *Majme 5-stavový projekt na výrobnej linke danej ireducibilnou maticou prechodu A za predpokladu, že všetky stroje začnú pracovať v čase 0*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ \varepsilon & 4 & 6 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zistime, či sa systém dostane do ustáleného stavu hneď na začiatku.

Riešenie. Stačí overiť, či platí rovnosť $A \otimes x(1) = \lambda \otimes x(1)$

$$A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \neq \lambda \otimes x(1) = 6 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

systém sa do ustáleného stavu na začiatku nedostane. ♡

Príklad 6.6.2 *Nahraďme vektor $x(1)$ v príklade 6.6.1 Čebyševovou najlepšou aproximáciou z priestoru $V(A)$ a nájdime zodpovedajúci vektor štartových časov.*

Riešenie. Najskôr určíme vlastný priestor matice A. Pomocou Karpovho algoritmu vypočítame vlastnú hodnotu $\lambda(A) = 6$. Vytvoríme definitnú maticu $D = \lambda(A)^{-1} \otimes A$ a vypočítame jej slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & -2 \\ -9 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Na základe núl na hlavnej diagonále určíme fundamentálne vlastné vektory $\Delta_1 = (0, -3, -5, -9)^\top$, $\Delta_2 = (3, 0, -2, -6)^\top$ a $\Delta_3 = (0, -3, 0, -4)^\top$. Keďže $\Delta_2 = 3 \otimes \Delta_1$, platí $\Delta_2 \approx \Delta_1$ a báza bude obsahovať len dva vektory. Zvoľme $\mathcal{B} = \{\Delta_1,\ \Delta_3\}$. Vlastný priestor je

$$V(A) = \Big\{x = \alpha_1 \otimes \Delta_1 \oplus \alpha_3 \otimes \Delta_3,\ \alpha_1,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}^\star\Big\}.$$

V druhej časti budeme hľadať taký vektor, ktorý by bol z vlastného priestoru, teda budeme riešiť rovnicu $\alpha_1 \otimes \Delta_1 \oplus \alpha_3 \otimes \Delta_3 = x(1)$ (i keď vieme, že vektor $x(1)$ nie je vlastným vektorom matice vektor A a teda táto rovnica nemá riešenie). Po prepise do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \\ -5 & 0 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

nájdeme hlavné riešenie príslušnej nerovnice, čiže hodnoty koeficientov α_1 a α_3

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Napokon dostaneme vektor

$$x_v = \ 4 \otimes \Delta_1 \oplus 4 \otimes \Delta_2 \ = \ 4 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix} \oplus 4 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ktorý je vlastným vektorom a je to najväčší vlastný vektor menší ako $x(1)$. V riešení pokračujeme výpočtom Čebyševovej vzdialenosti vektorov x_v a $x(1)$

$$\xi(x_v,\, x(1)) = \max\{0, 3, 2, 4\} = 4 = \mu^2 \quad \Longrightarrow \quad \mu = 2$$

Hľadané riešenie $x(1)'$ nájdeme posunutím vektora $x(1)$ o hodnotu μ

$$x(1)' = 2 \otimes x_v = 2 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zodpovedajúci vektor štartových časov dostaneme, ak od časov ukončenia prvého cyklu $x(1)'$ odrátame časy trvania jedného cyklu na jednotlivých strojoch

$$t = x(1)' - x(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

♡

Poznámka 6.2 *Dosiahnuté štartové časy zaručujú minimálny rozptyl okolo hodnôt 0.*

6.7 Úlohy

6.1 Pre danú ireducibilnú maticu A vypočítajte pomocou Karpovho algoritmu $\lambda(A)$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 2 \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 & -1 \\ 1 & -1 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 4 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 5 \\ 4 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$,

f) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 2 \\ 8 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$,

g) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 4 \\ 3 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$,

h) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & 1 \\ 7 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$,

i) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

j) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & \varepsilon & 7 & 3 \end{pmatrix}$,

k) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ 3 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$,

l) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$.

6.2 Transformujte matice A z cvičenia 6.1 na definitné matice A_λ.

6.3 Nájdite fundamentálne vlastné vektory pre matice A_λ z cvičenia 6.2.

6.4 Nájdite vlastnú hodnotu a fundamentálne vlastné vektory pre matice A z cvičenia 6.1.

6.5 Pomocou definície rozhodnite, ktoré z vlastných vektorov z cvičenia 6.4 sú ekvivalentné.

6.6 Na základe nutnej a postačujúcej podmienky rozhodnite, ktoré z vlastných vektorov z cvičenia 6.4 sú ekvivalentné.

6.7 Pre nasledujúce ireducibilné matice nájdite bázu vlastného priestoru a vlastný priestor popíšte.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 4 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \varepsilon \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$,

g) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 5 & 4 & \varepsilon \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$,

h) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & \varepsilon & 7 & 3 \end{pmatrix}$,

i) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 3 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 7 \\ 3 & \varepsilon & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

j) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 1 & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & 1 & 0 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$,

k) $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & \varepsilon \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ \varepsilon & 3 & 5 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

l) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & 4 & 4 & \varepsilon \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ \varepsilon & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

6.8 Zistite, či sa DDS s maticou prechodu z cvičenia 6.7 dostanú do ustáleného stavu hneď na začiatku 5-stavového projektu, ak všetky stroje začínajú pracovať v čase 0.

6.9 Zistite, či sa DDS s maticou prechodu z cvičenia 6.7 dostanú do ustáleného stavu hneď na začiatku 5-stavového projektu, ak jednotlivé stroje začínajú pracovať v čase danom vektorom t.

a) $t = (0, 1, 0)^\top$,

b) $t = (0, 0, 2)^\top$,

c) $t = (1, 3, 0)^\top$,

d) $t = (0, 3, 6)^\top$,

e) $t = (0, 2, 0)^\top$,

f) $t = (0, 3, 4)^\top$,

g) $t = (0, 1, 4, 5)^\top$,

h) $t = (0, 0, 1, 2)^\top$,

i) $t = (0, 3, 0, 2)^\top$,

j) $t = (0, 2, 5, 0)^\top$,

k) $t = (4, 1, 2, 0)^\top$,

l) $t = (1, 2, 0, 3)^\top$.

6.10 Nahraďte $x(1)$ Čebyševovou najlepšou aproximáciou z priestoru $V(A)$ pre tie systémy z cvičenia 6.8, ktoré sa nedostali do ustáleného stavu hneď na začiatku a nájdite zodpovedajúci vektor štartových časov.

Výsledky:

6.1

a) $x(r): \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \lambda(A) = 3;$

b) $x(r): \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \lambda(A) = 2;$

c) $x(r): \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} \lambda(A) = 4;$

d) $x(r): \begin{pmatrix} 4 \\ \varepsilon \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ 19 \end{pmatrix} \lambda(A) = 5;$

e) $x(r): \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix} \lambda(A) = 3;$

f) $x(r): \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} \lambda(A) = 4;$

g) $x(r): \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \lambda(A) = 2;$

h) $x(r): \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} \lambda(A) = 3;$

i) $x(r): \begin{pmatrix} 4 \\ \varepsilon \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 24 \\ 26 \\ 25 \end{pmatrix} \lambda(A) = 5;$

j) $x(r): \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 6 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix} \lambda(A) = 5;$

k) $x(r): \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 6 \\ \varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ \varepsilon \\ 10 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 14 \\ \varepsilon \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ \varepsilon \\ 18 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 22 \\ \varepsilon \\ 19 \end{pmatrix} \lambda(A) = 4;$

l) $x(r): \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix} \lambda(A) = 3.$

6.2

a) $A_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & -1 \\ 0 & -2 & \varepsilon \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix},$

b) $A_\lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & -3 \\ -1 & -3 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$

c) $A_\lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & \varepsilon & -4 \end{pmatrix},$

d) $A_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 & -1 \\ -1 & \varepsilon & -3 \end{pmatrix},$

e) $A_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & 2 \\ 1 & -2 & \varepsilon \end{pmatrix},$

f) $A_\lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & -2 \\ 4 & \varepsilon & -2 \end{pmatrix},$

g) $A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & 2 \\ 1 & -2 & \varepsilon \end{pmatrix},$

h) $A_\lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & -2 \\ 4 & \varepsilon & -2 \end{pmatrix},$

i) $A_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & -2 & \varepsilon & -4 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$

j) $A_\lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & \varepsilon & -1 \\ -2 & -2 & -3 & -4 \\ -3 & \varepsilon & 2 & -2 \end{pmatrix},$

k) $A_\lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ -1 & \varepsilon & -3 & \varepsilon \end{pmatrix},$

l) $A_\lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & -4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & -3 \\ -1 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$

6.3

a) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \Delta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$

b) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

c) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \Delta_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$

d) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$

e) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \ \Delta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$

f) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ \Delta_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};$

g) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \ \Delta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$

h) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ \Delta_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};$

i) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \Delta_3 = \Delta_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

j) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};$

k) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Delta_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Delta_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$;

l) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Delta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Delta_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\Delta_4 = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6.4

a) $\lambda(A) = 3$,

b) $\lambda(A) = 2$,

c) $\lambda(A) = 4$,

d) $\lambda(A) = 5$,

e) $\lambda(A) = 3$,

f) $\lambda(A) = 4$,

g) $\lambda(A) = 2$,

h) $\lambda(A) = 3$,

i) $\lambda(A) = 5$,

j) $\lambda(A) = 5$,

k) $\lambda(A) = 4$

l) $\lambda(A) = 3$.

Vlastné vektory sú rovnaké ako pre matice A_λ z cvičenia 6.3.

6.5

a) $c = (1, 3, 1) \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_3$,

b) $c = (1, 2, 1) \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2$,

c) $c = (1, 2, 3, 1) \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

d) $c = (1, 2, 3, 1) \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

e) $c = (1, 2, 3, 1) \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

f) $c = (1, 2, 3, 1) \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

g) $c = (1, 2, 3, 1) \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

h) $c = (1, 2, 3, 1) \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

i) $c = (2, 3, 4, 2) \Longrightarrow \Delta_2 \approx \Delta_3 \approx \Delta_4$,

j) $c = (1, 2, 4, 3, 1) \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3 \approx \Delta_4$,

k) $c = (1, 2, 1) \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2$,
$c = (3, 4, 3) \Longrightarrow \Delta_3 \approx \Delta_4$,

l) $c = (1, 2, 3, 1) \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,
$c = (4, 4) \Longrightarrow \Delta_4$.

6.6

a) $\Delta_1 = 1 \otimes \Delta_3 \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_3$,

b) $\Delta_1 = -1 \otimes \Delta_2 \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2$,

c) $\Delta_1 = 1 \otimes \Delta_2 \wedge \Delta_2 = 1 \otimes \Delta_3 \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

d) $\Delta_1 = -2 \otimes \Delta_2 \wedge \Delta_2 = 1 \otimes \Delta_3 \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

e) $\Delta_1 = 3 \otimes \Delta_2 \wedge \Delta_2 = -2 \otimes \Delta_3 \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

f) $\Delta_1 = 2 \otimes \Delta_2 \wedge \Delta_2 = 2 \otimes \Delta_3 \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

g) $\Delta_1 = 3 \otimes \Delta_2 \wedge \Delta_2 = -2 \otimes \Delta_3 \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

h) $\Delta_1 = 2 \otimes \Delta_2 \wedge \Delta_2 = 2 \otimes \Delta_3 \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,

i) $\Delta_2 = 1 \otimes \Delta_3 \wedge \Delta_3 = \Delta_4 \Longrightarrow \Delta_2 \approx \Delta_3 \approx \Delta_4$,

j) $\Delta_1 = -1 \otimes \Delta_2 \wedge \Delta_2 = -1 \otimes \Delta_3 \wedge \Delta_1 = \Delta_4 \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3 \approx \Delta_4$,

k) $\Delta_1 = 2 \otimes \Delta_2 \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2$,
$\Delta_3 = -3 \otimes \Delta_4 \Longrightarrow \Delta_3 \approx \Delta_4$,

l) $\Delta_1 = 1 \otimes \Delta_2 \wedge \Delta_2 = 2 \otimes \Delta_3 \Longrightarrow \Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3$,
Δ_4.

6.7

a) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Δ_1, resp. Δ_2, resp. Δ_3
$V(A) = \{\alpha \otimes (0, 1, 2)^\top ;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

b) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Δ_1, resp. Δ_2, resp. Δ_3

$V(A) = \{\alpha \otimes (2,0,1)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

c) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, Δ_1, resp. Δ_2, resp. Δ_3

$V(A) = \{\alpha \otimes (0,3,1)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

d) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, Δ_1, resp. Δ_2, resp. Δ_3

$V(A) = \{\alpha \otimes (0,2,4)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

e) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, Δ_1, resp. Δ_2, resp. Δ_3

$V(A) = \{\alpha \otimes (0,2,0)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

f) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, Δ_1, resp. Δ_2, resp. Δ_3

$V(A) = \{\alpha \otimes (0,2,4)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

g) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Δ_2, resp. Δ_3, resp. Δ_4

$V(A) = \{\alpha \otimes (-2,0,1,1)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

h) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, Δ_1, resp. Δ_2, resp. Δ_3, resp. Δ_4

$V(A) = \{\alpha \otimes (2,1,0,2)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

i) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

Δ_1 a Δ_3, resp. Δ_1 a Δ_4, resp. Δ_2 a Δ_3, resp. Δ_2 a Δ_4

$V(A) = \{\alpha \otimes (0,2,2,-1)^\top \oplus \beta \otimes (0,2,3,0)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$,

j) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$,

Δ_1 a Δ_4, resp. Δ_2 a Δ_4, resp. Δ_3 a Δ_4

$V(A) = \{\alpha \otimes (0, 1, 3, -1)^\top \oplus \beta \otimes (-6, -5, -3, 0)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$,

k) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & -2 \\ -9 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, Δ_1 a Δ_3, resp. Δ_2 a Δ_3

$V(A) = \{\alpha \otimes (3, 0, -2, -6)^\top \oplus \beta \otimes (0, -3, 0, -4)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$,

l) $\Delta(A_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -9 \\ 3 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, Δ_1 a Δ_3, resp. Δ_2 a Δ_3

$V(A) = \{\alpha \otimes (0, 3, 0, 3)^\top \oplus \beta \otimes (-5, -2, 0, -2)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$.

6.8

a) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 4 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

b) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 5 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

c) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 3 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

d) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 4 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

e) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 2 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

f) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 3 \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

g) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 5 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

h) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 5 \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

i) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 4 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

j) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 3 \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

k) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 5 \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$,

l) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 6 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6.9

a) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda(A) \otimes x(1) = 4 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

b) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 5 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

c) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda(A) \otimes x(1) = 3 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$,

d) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \lambda(A) \otimes x(1) = 4 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$,

e) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 2 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

f) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 3 \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$,

g) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \lambda(A) \otimes x(1) = 5 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$,

h) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \lambda(A) \otimes x(1) = 5 \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$,

i) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 4 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

j) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda(A) \otimes x(1) = 3 \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$,

k) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda(A) \otimes x(1) = 5 \otimes \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$,

l) $A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \neq \lambda(A) \otimes x(1) = 6 \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

6.10

a) $\alpha \otimes \Delta_1 = x(1) \;\Rightarrow\; \alpha = \Delta_1' \otimes' x(1) = 1$,

$x_v = 1 \otimes \Delta_1 = (\,1,\, 2,\, 3\,)^\top$,

$\xi(x_v,\, x(1)) = 1 \;\Rightarrow\; \mu = \dfrac{1}{2}$,

$$x(1)' = \frac{1}{2} \otimes x_v = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)^\top,$$

$$t = x(1)' - x(1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)^\top;$$

b) $\alpha \otimes \Delta_1 = x(1) \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow x_v = (3, 1, 2)^\top,$

$\xi(x_v, x(1)) = 2 \Rightarrow \mu = 1,$

$x(1)' = (4, 2, 3)^\top,\ t = (0, -1, 1)^\top;$

c) $\alpha \otimes \Delta_1 = x(1) \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow x_v = (-1, 2, 0)^\top,$

$\xi(x_v, x(1)) = 3 \Rightarrow \mu = \frac{3}{2},$

$x(1)' = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2})^\top,\ t = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})^\top;$

d) $\alpha \otimes \Delta_1 = x(1) \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow x_v = (-2, 0, 2)^\top,$

$\xi(x_v, x(1)) = 6 \Rightarrow \mu = 3,$

$x(1)' = (1, 3, 5)^\top,\ t = (-3, 0, 3)^\top;$

e) $\alpha \otimes \Delta_1 = x(1) \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow x_v = (-1, 1, -1)^\top,$

$\xi(x_v, x(1)) = 3 \Rightarrow \mu = \frac{3}{2},$

$x(1)' = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right)^\top,\ t = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right)^\top;$

f) $\alpha \otimes \Delta_1 = x(1) \Rightarrow \alpha = -3 \Rightarrow x_v = (-3, -1, 1)^\top,$

$\xi(x_v, x(1)) = 6 \Rightarrow \mu = 3,$

$x(1)' = (0, 2, 4)^\top,\ t = (-3, 0, 3)^\top;$

g) $\alpha \otimes \Delta_2 = x(1) \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow x_v = (-1, 1, 2, 2)^\top,$

$\xi(x_v, x(1)) = 5 \Rightarrow \mu = \frac{5}{2},$

$x(1)' = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right)^\top,\ t = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right)^\top;$

h) $\alpha \otimes \Delta_1 = x(1) \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow x_v = (3, 2, 1, 3)^\top,$

$\xi(x_v, x(1)) = 2 \Rightarrow \mu = 1,$

$x(1)' = (4, 3, 2, 4)^\top,\ t = (-1, -1, 0, 1)^\top;$

i) $\alpha_1 \otimes \Delta_1 \oplus \alpha_3 \otimes \Delta_3 = x(1) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_3)^\top = (\Delta_1, \Delta_3)' \otimes' x(1) = (0, 2)^\top$,
$x_v = 0 \otimes \Delta_1 \oplus 2 \otimes \Delta_3 = (\,0,\ 2,\ 2,\ -1\,)^\top$,
$\xi(x_v,\, x(1)) = 4 \Rightarrow \mu = 2$,
$x(1)' = 2 \otimes x_v = (\,2,\ 4,\ 4,\ 1\,)^\top$,
$t = x(1)' - x(1) = (\,-2,\ 1,\ 2,\ 0\,)^\top$;

j) $\alpha_1 \otimes \Delta_1 \oplus \alpha_4 \otimes \Delta_4 = x(1) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_4)^\top = (-2, 3)^\top \Rightarrow$
$x_v = (\,-2,\ -1,\ 1,\ 3\,)^\top$,
$\xi(x_v,\, x(1)) = 5 \Rightarrow \mu = \frac{5}{2}$,
$x(1)' = (\,\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{11}{2}\,)^\top$, $t = (\,-\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\,)^\top$;

k) $\alpha_1 \otimes \Delta_1 \oplus \alpha_3 \otimes \Delta_3 = x(1) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_3)^\top = (3, 3)^\top \Rightarrow x_v = (\,3,\ 0,\ 3,\ -1\,)^\top$,
$\xi(x_v,\, x(1)) = 4 \Rightarrow \mu = 2$,
$x(1)' = (\,5,\ 2,\ 5,\ 1\,)^\top$, $t = (\,2,\ -1,\ 0,\ -2\,)^\top$;

l) $\alpha_1 \otimes \Delta_1 \oplus \alpha_3 \otimes \Delta_3 = x(1) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_3)^\top = (1, 6)^\top \Rightarrow x_v = (\,1,\ 4,\ 6,\ 4\,)^\top$,
$\xi(x_v,\, x(1)) = 3 \Rightarrow \mu = \frac{3}{2}$,
$x(1)' = \left(\frac{5}{2},\ \frac{11}{2},\ \frac{15}{2},\ \frac{11}{2}\right)^\top$, $t = \left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)^\top$.

7 Vlastný priestor reducibilnej matice

7.1 Cieľ kapitoly

Oboznámiť sa s postupom riešenia vlastného problému reducibilnej max-plus matice na základe spektrálnej vety. Oboznámiť sa s podmienkami existencie konečného riešenia vlastného problému reducibilnej matice.

7.2 Prehľad kapitoly v otázkach

- Definujte vlastný priestor prislúchajúci vlastnej hodnote, množinu všetkých vlastných hodnôt a množinu všetkých vlastných vektorov max-plus matice.
- Definujte hlavnú vlastnú hodnotu matice, hlavný vlastný vektor a hlavný vlastný priestor matice.
- Sformulujte tvrdenie, na základe ktorého nájdeme hlavný vlastný priestor matice.
- Sformulujte tvrdenie, na základe ktorého nájdeme bázu hlavného vlastného priestoru.
- Sformulujte nutnú a postačujúcu podmienku existencie konečného vlastného vektora.
- Definujte triedy matice vo Frobeniovom normálnom tvare, definujte začiatočné a koncové triedy matice.
- Sformulujte spektrálnu vetu a definujte spektrálnu triedu matice.
- Sformulujte tvrdenie, na základe ktorého nájdeme bázu vlastného priestoru pre vlastnú hodnotu matice.
- Popíšte postup na určenie vlastného priestoru pre vlastnú hodnotu matice.
- Popíšte algoritmus na riešenie vlastného problému pre reducibilnú maticu.

7.3 Hlavný vlastný priestor

V tejto kapitole sa budeme venovať riešeniu vlastného problému pre reducibilné matice. Rozšírime teda náš záujem dostať DDS do ustáleného stavu na všeobecný prípad, ak matica prechodu nie je ireducibilná, ako tomu bolo v predchádzajúcej kapitole.

Definícia 7.1 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ a $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. Množinu všetkých vlastných vektorov matice A prislúchajúcich hodnote λ rozšírenú o ε nazveme* ***vlastným priestorom matice*** *A* ***prislúchajúcim vlastnej hodnote*** *λ a označíme $V(A,\lambda)$*

$$V(A,\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^\star(n);\ A \otimes x = \lambda \otimes x\}\,. \tag{34}$$

Množinu všetkých vlastných hodnôt matice A označíme $\Lambda(A)$

$$\Lambda(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}^\star;\ V(A,\lambda) \neq \{\varepsilon\}\}\,. \tag{35}$$

Množinu všetkých vlastných vektorov matice A rozšírenú o ε označíme $V(A)$

$$V(A) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(A)} V(A,\lambda). \tag{36}$$

Pre ľubovoľnú maticu je maximálna priemerná váha cyklu vlastnou hodnotou s príslušnými vlastnými vektormi, ako sme ich popísali v predchádzajúcej kapitole pre ireducibilné matice.

Veta 7.1 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Potom $\lambda(A)$ je jej vlastnou hodnotou. Ak je $\lambda(A)$ konečné, tak je každý stĺpcový vektor slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$ zodpovedajúci nulovej hodnote na diagonále vlastným vektorom matice A prislúchajúcim vlastnej hodnote $\lambda(A)$.*

Definícia 7.2 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Vlastnú hodnotu $\lambda(A)$ nazveme* ***hlavnou vlastnou hodnotou matice*** *A.*

Veta 7.2 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\lambda(A)$ je konečné a Δ_1, Δ_2,..., Δ_n sú stĺpcové vektory slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$. Potom pre vlastný priestor matice A prislúchajúci vlastnej hodnote $\lambda(A)$ platí*

$$V(A,\lambda(A)) = \left\{ \sum_{k \in N_c^*(A)}^{\oplus} \alpha_k \otimes \Delta_k;\ \alpha_k \in \mathbb{R}^\star,\ k \in N_c^*(A) \right\} \tag{37}$$

kde $N_c^*(A)$ je maximálna množina neekvivalentných vlastných vrcholov matice A.

Definícia 7.3 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Vlastný vektor prislúchajúci hlavnej vlastnej hodnote $\lambda(A)$ nazveme* ***hlavným vlastným vektorom matice*** *A. Zodpovedajúci priestor vlastných vektorov $V(A,\lambda(A))$ nazveme* ***hlavným vlastným priestorom matice*** *A.*

Definícia 7.4 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Dimenziu hlavného vlastného priestoru matice A nazveme* ***hlavnou dimenziou matice*** *A a označíme $\mathrm{pd}\,(A)$.*

Hlavnú dimenziu matice určíme pomocou definície ekvivalentnosti vlastných vrcholov zodpovedajúceho digrafu, podľa ktorej ak dva vrcholy ležia na spoločnom kritickom cykle, tak sú ekvivalentné. Na základe toho zavedieme najskôr pojem vysoko súvislého komponentu.

Definícia 7.5 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Hovoríme, že dva vrcholy $i, j \in \mathcal{G}(A)$ sú* ***vysoko-spojené****, zapisujeme $i \equiv_h j$, ak i a j ležia na spoločnom cykle c s priemernou váhou $\bar{w}(c) = \lambda(A)$. Poddigrafy generované triedami ekvivalencie reflexívneho uzáveru $\equiv_h$ nazývame* ***vysoko súvislé komponenty*** *$\mathcal{G}(A)$. Množinu všetkých vysoko súvislých komponentov $\mathcal{G}(A)$ označme $\mathrm{HCC}(\mathcal{G}(A))$. $\mathcal{K} \in \mathrm{HCC}(\mathcal{G}(A))$ sa nazýva triviálnym, ak $\mathcal{K}$ neobsahuje cyklus kladnej dĺžky s priemernou váhou rovnou $\lambda(A)$. Množinu všetkých netriviálnych vysoko súvislých komponentov označujeme $\mathrm{HCC}^*(\mathcal{G}(A))$. Poddigraf, ktorý obsahuje len kritické cykly, nazývame* ***kritickým digrafom*** *a označujeme $\mathcal{G}_c(A)$.*

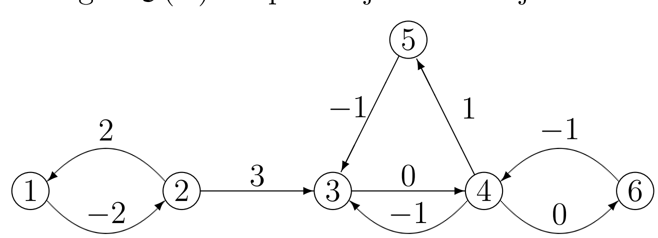
Z definície 7.5 vyplýva, že počet netriviálnych vysoko súvislých komponentov (kritických komponentov) je rovný mohutnosti množiny $N_c^*(A)$ z vety 7.2, čo je hlavná dimenzia uvažovanej matice.

Pripomeňme si, že sme v kapitole Digrafy a ich využitie pre DDS uviedli postup, ktorým vieme ľubovoľnú reducibilnú maticu upraviť do blokovo-trojuholníkového tvaru.

Príklad 7.3.1 *Pre danú reducibilnú maticu A v hornom blokovo-trojuholníkovom tvare určme hlavnú dimenziu*

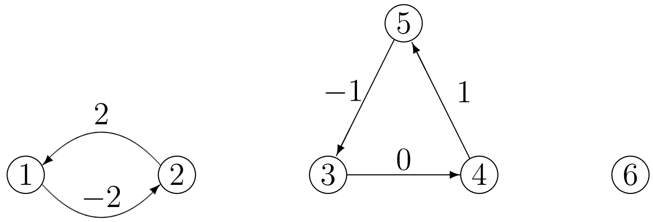
$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \varepsilon & A_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right).$$

Riešenie. Digraf $\mathcal{G}(A)$ zodpovedajúci matici je na obrázku (viď obr. 4).



Obr. 4: Digraf $\mathcal{G}(A)$

Obsahuje dva silne súvislé komponenty $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$ generované množinami vrcholov $K_1 = \{1, 2\}$ a $K_2 = \{3, 4, 5, 6\}$. Prvý z nich je aj vysoko súvislý komponent, pretože vrcholy 1 a 2 ležia na spoločnom kritickom cykle. V prípade $\mathcal{K}_2$ to neplatí, vrcholy 3, 4 a 5 ležia na spoločnom kritickom cykle (tvoria vysoko súvislý komponent), ale vrchol 6 neleží na žiadnom kritickom cykle, tvorí teda triviálny vysoko súvislý komponent (viď obr. 5). Keďže počet netriviálnych vysoko súvislých komponentov je 2, tak $\operatorname{pd}(A) = 2$. ♡



Obr. 5: Kritický digraf $\mathcal{G}_c(A)$

Veta 7.3 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\lambda(A)$ je konečné a $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ sú stĺpcové vektory slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$. Potom bázu hlavného vlastného priestoru matice $V(A, \lambda(A))$ dostaneme, ak pre každý netriviálny vysoko súvislý komponent zvolíme práve jeden vektor Δ_j prislúchajúci danému vysoko súvislému komponentu.*

Príklad 7.3.2 *Nájdime bázu hlavného vlastného priestoru reducibilnej matice v hornom blokovo-trojuholníkovom tvare*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline \varepsilon & A_{22} & A_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & A_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 4 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 3 & 6 & 0 \\ \varepsilon & 2 & 2 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{array}\right).$$

Riešenie. Vypočítame maximálnu priemernú váhu cyklov každého silne súvislého komponentu. Keďže $\lambda(A_{11}) = \lambda(A_{22}) = 4$ a $\lambda(A_{33}) = 2$, maximálna priemerná váha cyklov celej matice je $\lambda(A) = 4$. Na základe vety 7.1 vytvoríme maticu $A_\lambda = -4 \otimes A$ a vypočítame jej slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(A_\lambda) = \left(\begin{array}{c|rr|r} 0 & -5 & -3 & -9 \\ \hline \varepsilon & 0 & 2 & -4 \\ \varepsilon & -2 & 0 & -6 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 \end{array}\right).$$

Nuly na hlavnej diagonále reprezentujú fundamentálny systém vlastných vektorov. Na základe netriviálnych kritických komponentov $\mathcal{K}_1 = \{1\}$ a $\mathcal{K}_2 = \{2, 3\}$ ($\operatorname{pd}(A) = 2$) zvolíme napríklad $N_c^*(A) = \{1, 2\}$ a určíme bázu

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

♡

7.4 Konečné vlastné vektory

Z hľadiska aplikácií, t. j. nájdenia ustáleného stavu pre konkrétny DDS ako je napr. výrobná linka, je dôležité, aby mal vlastný problém pre maticu prechodu konečné riešenie.

Definícia 7.6 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ a $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. Množinu všetkých konečných vlastných vektorov matice A prislúchajúcich hodnote λ označíme $V^+(A,\lambda)$*

$$V^+(A,\lambda) = V(A,\lambda) \cap \mathbb{R}(n).$$

Množinu všetkých konečných vlastných vektorov matice A označíme $V^+(A)$

$$V^+(A) = V(A) \cap \mathbb{R}(n).$$

Ak má vlastný problém pre danú maticu konečné riešenie, tak všetky konečné vlastné vektory zodpovedajú hlavnej vlastnej hodnote $\lambda(A)$.

Veta 7.4 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Ak $A \neq \varepsilon$ a $V^+(A) \neq \emptyset$, tak je $\lambda(A)$ konečné a všetky konečné vlastné vektory matice prislúchajú vlastnej hodnote $\lambda(A)$*

$$A \otimes x = \lambda(A) \otimes x \qquad \forall x \in V^+(A).$$

Existencia konečného vlastného vektora závisí od fundamentálnych vlastných vektorov prislúchajúcich hlavnej vlastnej hodnote.

Veta 7.5 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\lambda(A)$ je konečné a Δ_1, Δ_2,..., Δ_n sú stĺpcové vektory slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$. Potom je množina konečných vlastných vektorov $V^+(A)$ neprázdna práve vtedy, ak $\sum_{k \in N_c(A)}^{\oplus} \Delta_k$ je konečný vektor, kde $N_c(A)$ je množina vlastných vrcholov matice A.*

Príklad 7.4.1 *Rozhodnime o existencii konečného vlastného vektora matice z príkladu 7.3.2*

Riešenie. Podľa vety 7.4 stačí uvažovať vlastné vektory prislúchajúce hlavnej vlastnej hodnote $\lambda(A)$. Rozhodneme potom na základe vety 7.5. V príklade 7.3.2 sme našli slabý tranzitívny uzáver matice $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A = -4 \otimes A$, ktorého tri prvé stĺpce obsahujú fundamentálny systém vlastných vektorov zodpovedajúcich hlavnej vlastnej hodnote $\lambda(A) = 4$. Vektor

$$\sum_{k \in N_c(A)}^{\oplus} \Delta_k = \Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

nie je konečný a preto konečný vlastný vektor pre danú maticu neexistuje. ♡

Priestor konečných vlastných vektorov matice (ak je neprázdny) popíšeme pomocou neekvivalentných vlastných vektorov (nemusia byť konečné).

Veta 7.6 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\lambda(A)$ je konečné a Δ_1, Δ_2,..., Δ_n sú stĺpcové vektory slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$. Ak je množina konečných vlastných vektorov $V^+(A)$ neprázdna, tak*

$$V^+(A) = \left\{ \sum_{k \in N_c^*(A)}{}^{\oplus} \alpha_k \otimes \Delta_k;\ \alpha_k \in \mathbb{R},\ k \in N_c^*(A) \right\},\ kde$$

$N_c^*(A)$ je maximálna množina neekvivalentných vlastných vrcholov matice A.

Vlastný priestor matice po odobratí vektora pozostávajúceho výlučne z hodnôt ε obsahuje len konečné vektory iba v prípade ireducibilnej matice.

Veta 7.7 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ a $\lambda \in \Lambda(A)$. Potom $V(A) - \{\varepsilon\} = V^+(A)$ vtedy a len vtedy, ak A je ireducibilná.*

7.5 Spektrálna veta

V tejto časti kapitoly uvedieme najdôležitejší výsledok vedúci k úplnému vyriešeniu vlastného problému pre ľubovoľnú reducibilnú maticu. Jedná sa o tzv. spektrálnu vetu, na základe ktorej vieme nájsť všetky vlastné hodnoty matice a následne aj všetky vlastné priestory zodpovedajúce jednotlivým vlastným hodnotám (viď [4]).

Definícia 7.7 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Hovoríme, že matica je vo* ***Frobeniovom normálnom tvare*** *(skrátene FNT), ak je v tvare*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & \varepsilon \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{t1} & A_{t2} & \dots & A_{tt} \end{array} \right)$$

kde A_{11}, A_{22}, ..., A_{tt} sú ireducibilné štvorcové matice.

Maticiam A_{11}, A_{22}, ..., A_{tt} zodpovedajú silne súvislé komponenty v digrafe s vrcholovými množinami N_1, N_2, ..., N_t. Zodpovedajúci kondenzovaný digraf s vrcholmi N_1, N_2, ..., N_t spĺňa podmienku: Ak vedie hrana z vrchola N_i do vrchola N_j, tak $i \geq j$.

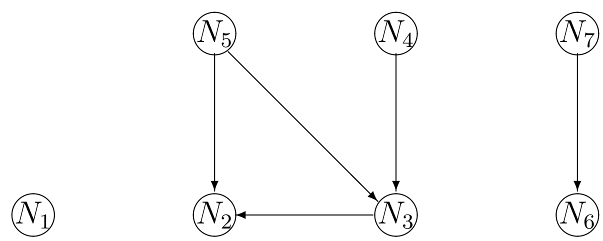
Definícia 7.8 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je vo Frobeniovom normálnom tvare. Nech A_{11}, A_{22}, ..., A_{tt} sú všetky diagonálne bloky matice A a N_1, N_2, ..., N_t zodpovedajúce vrcholové množiny v digrafe.* ***Triedami matice*** *A budeme nazývať množiny N_1, N_2, ..., N_t.* ***Začiatočnými triedami matice*** *A budeme nazývať tie triedy matice A, do ktorých v kondenzovanom digrafe nevchádza žiadne hrana.* ***Koncovými triedami matice*** *A budeme nazývať tie triedy matice A, z ktorých v kondenzovanom digrafe nevychádza žiadna hrana.*

Príklad 7.5.1 *Určme začiatočné a koncové triedy matice*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
A_{11} & . & . & . & . & . & . \\ \hline
. & A_{22} & . & . & . & . & . \\ \hline
. & * & A_{33} & . & . & . & . \\ \hline
. & . & * & A_{44} & . & . & . \\ \hline
. & * & * & . & A_{55} & . & . \\ \hline
. & . & . & . & . & A_{66} & . \\ \hline
. & . & . & . & . & * & A_{77}
\end{array}\right),$$

v ktorej blok označený symbolicky bodkou pozostáva výlučne z hodnôt ε a blok označený symbolicky hviezdičkou pozostáva z ľubovoľných hodnôt.

Riešenie. Matica je vo Frobeniovom normálnom tvare a preto môžme bezprostredne nakresliť príslušný kondenzovaný digraf (viď obr. 6). Na základe



Obr. 6: Kondenzovaný digraf

definície 7.8 určíme, že začiatočnými triedami sú triedy N_1, N_4, N_5 a N_7 a koncovými triedami sú triedy N_1, N_2, N_6.

$\heartsuit$

Poznámka 7.1 *Jednotlivé triedy matice môžu reprezentovať netriviálny silne súvislý komponent, teda obsahovať cyklus. Kvôli prehľadnosti nebudeme túto skutočnosť znázorňovať slučkou ani v ďalších častiach kapitoly.*

Veta 7.8 (Spektrálna veta) *Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ je matica vo FNT*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
A_{11} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \hline
A_{21} & A_{22} & \dots & \varepsilon \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline
A_{t1} & A_{t2} & \dots & A_{tt}
\end{array}\right).$$

Potom pre množinu všetkých vlastných hodnôt matice A platí

$$\Lambda(A) = \{\lambda(A_{jj});\ \lambda(A_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \lambda(A_{ii})\}.$$

Definícia 7.9 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je vo Frobeniovom normálnom tvare. Ak*

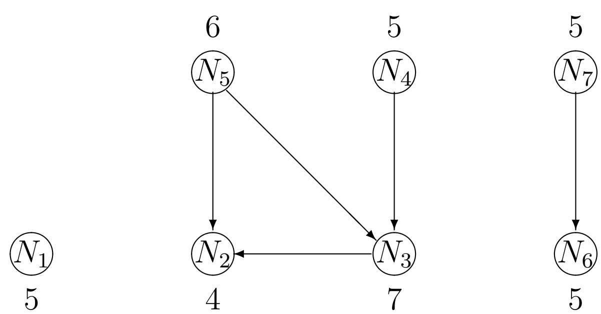
$$\lambda(A_{jj}) = \max_{N_i \to N_j} \lambda(A_{ii})$$

tak N_j budeme nazývať ***spektrálnou triedou matice*** *A.*

Jedná sa o tie triedy matice, do ktorých nevchádza hrana z tried s vyššou hodnotou λ. Navyše, ak trieda N_j je spektrálna, tak maximálna priemerná váha cyklu príslušného komponentu je vlastnou hodnotou matice A, t. j. $\lambda(A_{jj}) \in \Lambda(A)$.

Príklad 7.5.2 *Určme spektrálne triedy matice A z príkladu 7.5.1, ak sú dané maximálne priemerné váhy cyklov jednotlivých silne súvislých komponentov $\lambda(A_{11}) = 5$, $\lambda(A_{22}) = 4$, $\lambda(A_{33}) = 7$, $\lambda(A_{44}) = 5$, $\lambda(A_{55}) = 6$, $\lambda(A_{66}) = 5$, $\lambda(A_{77}) = 5$.*

Riešenie. Keďže N_1, N_3, N_4, N_5, N_6 a N_7 sú tie triedy, do ktorých nevchádza hrana z triedy s vyššou hodnotou λ (viď obr. 7), tak sa jedná o spektrálne triedy.



Obr. 7: Spektrálne triedy matice

♡

Príklad 7.5.3 *Určme množinu všetkých vlastných hodnôt matice A z príkladu 7.5.2.*

Riešenie. Maximálne priemerné váhy cyklov tých komponentov, ktoré zodpovedajú spektrálnym triedam sú vlastné hodnoty matice A.

$$\begin{aligned} \Lambda(A) &= \{\lambda(A_{11}),\, \lambda(A_{33}),\, \lambda(A_{44}),\, \lambda(A_{55}),\, \lambda(A_{66}),\, \lambda(A_{77})\} = \\ &= \{5,\, 7,\, 6\}. \end{aligned}$$

♡

Jednoduchým dôsledkom definície začiatočnej triedy je nasledujúca veta.

Veta 7.9 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Potom všetky začiatočné triedy matice A sú spektrálne.*

Hlavná vlastná hodnota je najväčším prvkom množiny všetkých vlastných hodnôt matice A.

Veta 7.10 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Pre hlavnú vlastnú hodnotu matice A platí*

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \max \Lambda(A) \\ &= \max\{\lambda;\ (\exists x \in \mathbb{R}^\star(n),\ x \neq \varepsilon)\ \ A \otimes x = \lambda \otimes x\}.\end{aligned}$$

Nutnou a postačujúcou podmienkou, aby bola hlavná vlastná hodnota jedinou vlastnou hodnotou matice A je, aby všetky začiatočné triedy mali maximálnu priemernú váhu cyklu rovnú hodnote $\lambda(A)$.

Veta 7.11 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné*

(i) $V(A) = V(A, \lambda(A))$

(ii) všetky začiatočné triedy majú vlastnú hodnotu $\lambda(A)$.

Poznámka 7.2 *Počet vlastných hodnôt matice je ohraničený počtom silne súvislých komponentov príslušného digrafu a nemôže teda prekročiť počet jeho vrcholov:* $1 \leq |\Lambda(A)| \leq n$.

Skôr ako popíšeme algoritmus na nájdenie vlastného priestoru pre vlastnú hodnotu reducibilnej matice na základe spektrálnej vety, uvedieme nasledujúcu lemu, bez ktorej by to nebolo možné.

Lema 7.1 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ a $\lambda \in \Lambda(A)$. Nech $x \in V(A,\lambda) - V^+(A,\lambda)$ a nepozostáva výlučne z ε. Potom $n > 1$ a matica A sa dá napísať v tvare*

$$\left(\begin{array}{c|c} A^{(11)} & \varepsilon \\ \hline A^{(21)} & A^{(22)} \end{array}\right),$$

pričom $\lambda = \lambda(A^{(22)})$.

Uvažujme, že matica $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je vo Frobeniovom normálnom tvare. Nech N_1, N_2, ..., N_t sú triedy matice A prislúchajúce silne súvislým komponentom A_{11}, A_{22}, ..., A_{tt} so zodpovedajúcimi maximálnymi priemernými váhami cyklov $\lambda(A_{11})$, $\lambda(A_{22})$, ..., $\lambda(A_{tt})$. Pre zvolenú vlastnú hodnotu $\lambda(A_{jj}) \in \Lambda(A)$ (N_j je spektrálna trieda) rozdelíme triedy matice do dvoch množín

$$\begin{aligned}M_2 &= \bigcup_{i \in S_2} N_i, \\ M_1 &= \bigcup_{i \in S_1} N_i\end{aligned}$$

podľa toho, či z triedy N_i vedie hrana do uvažovanej spektrálnej triedy N_j alebo nie, čomu zodpovedajú množiny indexov

$$\begin{aligned} S_2 &= \{i \in \{1,2,\ldots,t\};\ N_i \to N_j\}, \\ S_1 &= \{1,2,\ldots,t\} - S_2. \end{aligned}$$

Na základe lemy 7.1 vieme maticu A prepísať do tvaru

$$A \equiv \left(\begin{array}{r|l} A[M_1] & \varepsilon \\ \hline * & A[M_2] \end{array} \right),$$

kde blok označený symbolicky ako ε pozostáva výlučne z hodnôt ε a blok označený symbolicky ako * pozostáva z ľubovoľných hodnôt, pričom uvažovaná vlastná hodnota $\lambda(A_{jj})$ zodpovedá matici $A[M_2]$: $\lambda(A_{jj}) = \lambda(A[M_2])$. Navyše vlastný vektor matice A má tiež blokový tvar $x = (x[M_1],\, x[M_2])^\top$, kde

- $x[M_2]$ je konečný vlastný vektor $A[M_2]$ zodpovedajúci $\lambda(A_{jj})$,
- $x[M_1] = \varepsilon$ (pozostáva výlučne z hodnôt ε).

Analogicky ako pri ireducibilnej matici popíšeme zodpovedajúci vlastný priestor pomocou bázy. Pre ľubovoľné $\lambda \in \Lambda(A)$ označíme

$$I(\lambda) = \{i \in \{1,2,\ldots,t\};\ \lambda(A_{ii}) = \lambda,\ N_i \text{ je spektrálny}\} \tag{38}$$

a množinu vlastných vrcholov prislúchajúcich hodnote λ

$$N_c(\lambda) = \bigcup_{i \in I(\lambda)} N_c(A_{ii}) = \left\{ j \in N;\ \delta_{jj} = 0,\ j \in \bigcup_{i \in I(\lambda)} N_i \right\},$$

kde δ_{jj} je diagonálny prvok slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1} \otimes A$. Hovoríme, že vrcholy i a j sú λ-ekvivalentné, ak ležia na spoločnom cykle s priemernou váhou λ. Označujeme $i \sim_\lambda j$.

Veta 7.12 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ a $\lambda \in \Lambda(A)$ je konečné. Nech Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n sú stĺpce slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda = \lambda^{-1} \otimes A$. Potom $\Delta_j \in \mathbb{R}^\star(n)$ (teda neobsahujú $+\infty$) pre všetky $j \in N_c(\lambda)$ a bázu príslušného vlastného priestoru $V(A,\lambda)$ dostaneme, ak zoberieme jeden vektor Δ_j pre každú triedu ekvivalencie $\sim_\lambda$.*

Predchádzajúce úvahy nám teraz pomôžu popísať algoritmus na nájdenie vlastných vektorov prislúchajúcich konečnej vlastnej hodnote matice $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ vo Frobeniovom normálnom tvare a určenie zodpovedajúceho vlastného priestoru na základe vety 7.12. Pre $\lambda \in \Lambda(A)$ určíme podľa vzťahu (38) množinu indexov $I(\lambda)$ všetkých tried, ktoré majú uvažovanú vlastnú hodnotu. Môžu nastať dva prípady

- Ak $I(\lambda) = \{j\}$, teda existuje jediná trieda s danou vlastnou hodnotou, vytvoríme množiny

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to N_j} N_i \qquad \text{a} \qquad M_1 = N - M_2 \tag{39}$$

a nájdeme bázové vlastné vektory. Ich súradnice zodpovedajúce množine M_1 majú hodnoty ε a súradnice zodpovedajúce množine M_2 sú konečné vlastné vektory matice $A[M_2]$. Tie nájdeme podľa vety 7.12 pomocou slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda[M_2] = \lambda^{-1} \otimes A[M_2]$. Pomocou bázových vlastných vektorov určíme vlastný priestor

$$V(A, \lambda) = \{x = (x[M_1], x[M_2])^\top;\ x[M_1] = \varepsilon,\ x[M_2] \in V^+(A[M_2])\}.$$

- Ak $|I(\lambda)| > 1$, teda existuje viac tried s danou vlastnou hodnotou, pre každú neprázdnu podmnožinu indexov $J \subseteq I(\lambda)$ vytvoríme zodpovedajúcu množinu tried $S = \bigcup_{j \in J} N_j$. Následne rozdelíme všetky triedy matice na základe vzťahu ku množine S

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to S} N_i \qquad \text{a} \qquad M_1 = N - M_2 \tag{40}$$

a nájdeme postupne bázové vlastné vektory, ako sme popísali v predchádzajúcom prípade. Pomocou bázových vlastných vektorov určíme vlastný priestor.

Algoritmus pre riešenie vlastného problému reducibilnej matice vo FNT

(i) vypočítame pomocou Karpovho algoritmu hodnoty $\lambda(A_{ii})$, pre $i = 1, 2, \ldots, t$,

(ii) nájdeme spektrálne triedy,

(iii) určíme $\Lambda(A)$

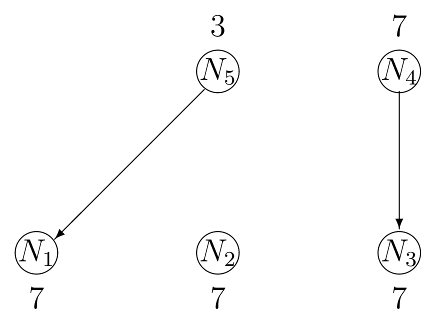
$$\Lambda(A) = \{\lambda(A_{ii});\ N_i \text{ je spektrálna}\},$$

(iv) nájdeme vlastné priestory $V(A, \lambda)$ pre $\lambda \in \Lambda(A)$.

Príklad 7.5.4 *Pre danú maticu A vo FNT riešme vlastný problém*

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc}
7 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & 7 & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & 7 & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & 4 & 7 & . & . & . & . \\
. & . & . & 7 & 2 & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & . & 4 & 0 & 5 & . & . \\
. & . & . & . & . & 3 & 7 & . & . \\
\hline
1 & 0 & . & . & . & . & . & 2 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & 2
\end{array}\right).$$

Riešenie. Podľa hore uvedeného algoritmu určíme najskôr maximálne priemerné váhy cyklov matíc, ktoré tvoria diagonálne bloky: $\lambda(A_{11}) = \lambda(A_{22}) = \lambda(A_{33}) = \lambda(A_{44}) = 7$ a $\lambda(A_{55}) = 3$. Diagonálnym blokom zodpovedajú triedy matice $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3\}$, $N_3 = \{4, 5\}$, $N_4 = \{6, 7\}$, $N_5 = \{8, 9\}$. Na základe definície 7.9 a kondenzovaného digrafu (viď obr. 8) rozhodneme, ktoré z nich sú spektrálne.



Obr. 8: Vlastný problém

Keďže všetky triedy sú spektrálne, množina všetkých vlastných hodnôt matice A je $\Lambda(A) = \{\lambda(A_{11}), \lambda(A_{22}), \lambda(A_{33}), \lambda(A_{44}), \lambda(A_{55})\} = \{7, 3\}$. Nakoniec nájdeme vlastný priestor pre každú vlastnú hodnotu.

Pre $\lambda = 7$ určíme podľa vzťahu (38) množinu indexov tých tried, ktoré majú vlastnú hodnotu 7: $I(\lambda) = I(7) = \{1, 2, 3, 4\}$. Postupne zoberieme tie neprázdne podmnožiny $J \subseteq I(\lambda)$, ktoré pokryjú všetky možnosti, a k nim vytvoríme zodpovedajúce množiny tried $S = \bigcup\limits_{j \in J} N_j$.

- Nech $J = \{1\}$, potom $S = \{N_1\}$ a podľa vzťahu (40) urobíme rozklad všetkých tried matice do množín

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to S} N_i = \{N_1, N_5\} \qquad \text{a} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_2, N_3, N_4\}.$$

  Vlastné vektory budeme hľadať v tvare $x = (x[M_1], x[M_2])^\top$, kde $x[M_1] = \varepsilon$ a $x[M_2] \in V^+(A[M_2])$. Potrebujeme teda určiť konečné vlastné vektory matice

$$A[M_2] = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & \varepsilon \\ \hline A_{51} & A_{55} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 2 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 \end{array}\right).$$

  Podľa vety 7.12 určíme tieto vlastné vektory $(x[M_2])$ pomocou slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda[M_2] = \lambda^{-1} \otimes A[M_2] = 7^{-1} \otimes A[M_2]$

$$\Delta(A_\lambda[M_2]) = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -3 & \varepsilon & \varepsilon \\ -5 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -6 & -7 & -5 & -3 \\ -11 & -12 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

na základe núl na hlavnej diagonále. V našom prípade sú vektory dva a keďže sú lineárne nezávislé, jedná sa o prvky bázy: $(0, -5, -6, -11)^\top$ a $(-3, 0, -7, -12)^\top$. Po doplnení hodnôt ε na miesta súradníc, ktoré zodpovedajú triedam množiny M_1, dostávame vlastné vektory matice A, ktoré zodpovedajú množine indexov $J = \{1\}$

$$(0, -5, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -6, -11)^\top \quad \text{a} \quad (-3, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -7, -12)^\top.$$

- Nech $J = \{3, 4\}$, potom $S = \{N_3, N_4\}$ a podľa vzťahu (40) urobíme rozklad všetkých tried matice do množín

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to S} N_i = \{N_3, N_4\} \qquad \text{a} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_1, N_2, N_5\}.$$

Vlastné vektory budeme opäť hľadať v tvare $x = (x[M_1], x[M_2])^\top$, kde $x[M_1] = \varepsilon$ a $x[M_2] \in V^+(A[M_2])$. Potrebujeme teda určiť konečné vlastné vektory matice

$$A[M_2] = \left(\begin{array}{c|c} A_{33} & \varepsilon \\ \hline A_{43} & A_{44} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 4 & 0 & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Pomocou slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda[M_2] = \lambda^{-1} \otimes A[M_2]$

$$\Delta(A_\lambda[M_2]) = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -3 & -3 & -6 & -2 \\ -7 & -7 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

určíme vlastné vektory $(x[M_2])$ matice $A[M_2]$. V tomto prípade dostaneme dva konečné vektory, ktoré sú ale lineárne závislé, preto vyberieme jeden z nich: $(0, 0, -3, -7)^\top$. Ako „vedľajší produkt výpočtu“ dostávame aj ďalší prvok bázy, ktorý zodpovedá voľbe $J = \{4\}$ a preto nie je konečný: $(\varepsilon, \varepsilon, -2, 0)^\top$. Po doplnení hodnôt ε na miesta súradníc, ktoré zodpovedajú triedam množiny M_1, dostávame vlastné vektory matice A, ktoré zodpovedajú množine indexov $J = \{3, 4\}$

$$(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, 0, -3, -7, \varepsilon, \varepsilon)^\top \quad \text{a} \quad (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -2, 0, \varepsilon, \varepsilon)^\top.$$

- Nech $J = \{2\}$, potom $S = \{N_2\}$ a podľa vzťahu (40) urobíme rozklad všetkých tried matice do množín

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to S} N_i = \{N_2\} \qquad \text{a} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_1, N_3, N_4, N_5\}.$$

Vlastné vektory budeme opäť hľadať v tvare $x = (x[M_1], x[M_2])^\top$, kde $x[M_1] = \varepsilon$ a $x[M_2] \in V^+(A[M_2])$. Potrebujeme teda určiť konečné vlastné vektory matice

$$A[M_2] = (A_{22}) = (7)\,.$$

V tomto jednoduchom prípade je pre maticu $A_\lambda[M_2] = \lambda^{-1} \otimes A[M_2]$ slabý tranzitívny uzáver priamo rovný matici

$$A_\lambda[M_2] = (0) = \Delta(A_\lambda[M_2]).$$

Prvok bázy je vektor: $(0)^\top$ a po doplnení hodnôt ε na miesta súradníc, ktoré zodpovedajú triedam množiny M_1, dostávame vlastný vektor matice A, ktorý zodpovedá množine indexov $J = \{2\}$

$$(\varepsilon, \varepsilon, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)^\top.$$

Pomocou bázy, ktorej prvky sme postupne vypočítali,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} \;=\; & \{(0, -5, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -6, -11)^\top, \\
& (-3, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -7, -12)^\top, \\
& (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, 0, -3, -7, \varepsilon, \varepsilon)^\top, \\
& (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -2, 0, \varepsilon, \varepsilon)^\top, \\
& (\varepsilon, \varepsilon, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)^\top\}
\end{aligned}$$

popíšeme vlastný priestor zodpovedajúci vlastnej hodnote $\lambda = 7$

$$\begin{aligned}
V(A, 7) \;=\; & \{\alpha \otimes (0, -5, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -6, -11)^\top \oplus \\
& \beta \otimes (-3, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -7, -12)^\top \oplus \\
& \gamma \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, 0, -3, -7, \varepsilon, \varepsilon)^\top \oplus \\
& \delta \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -2, 0, \varepsilon, \varepsilon)^\top \oplus \\
& \omega \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)^\top,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega \in \mathbb{R}^\star\}.
\end{aligned}$$

Pre $\lambda = 3$ postupujeme analogicky. Rozdiel je v tom, že túto vlastnú hodnotu má jediná trieda a teda $I(\lambda) = I(3) = \{5\}$. Podľa vzťahu (39) urobíme rozklad všetkých tried matice do množín

$$M_2 = \bigcup_{N_i \to S} N_i = \{N_5\} \qquad \text{a} \qquad M_1 = N - M_2 = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}.$$

Vlastné vektory budeme opäť hľadať v tvare $x = (x[M_1], x[M_2])^\top$, kde $x[M_1] = \varepsilon$ a $x[M_2] \in V^+(A[M_2])$. Potrebujeme teda určiť vlastné vektory matice

$$A[M_2] = (A_{55}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podľa vety 7.12 určíme tieto vlastné vektory $(x[M_2])$ pomocou slabého tranzitívneho uzáveru matice $A_\lambda[M_2] = \lambda^{-1} \otimes A[M_2]$

$$\Delta(A_\lambda[M_2]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

na základe núl na hlavnej diagonále. V našom prípade sú vektory dva a keďže sú lineárne závislé, vyberáme jeden prvok bázy: $(0, -1)^\top$. Po doplnení hodnôt ε na miesta súradníc, ktoré zodpovedajú triedam množiny M_1, dostávame vlastný vektor matice A

$$(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -1)^\top.$$

Bázou priestoru je

$$\mathcal{B} \;=\; \{(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -1)^\top\}$$

a vlastný priestor zodpovedajúci vlastnej hodnote $\lambda = 3$

$$V(A, 3) \;=\; \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -1)^\top,\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}.$$

♡

Poznámka 7.3 *Pri riešení predchádzajúceho príkladu sme namiesto podmnožiny $J = \{3, 4\}$ mohli zvoliť podmnožinu $J = \{3\}$, čo by viedlo k rovnakému rozkladu tried na $M_2 = \{N_3, N_4\}$ a $M_1 = \{N_1, N_2, N_5\}$ a teda k rovnakému výsledku. Naopak voľba $J = \{4\}$ je už zbytočná, pretože je už zahrnutá vo výbere $J = \{3, 4\}$, resp. $J = \{3\}$.*

Na záver môžeme na základe spektrálnej vety uviesť nutnú a postačujúcu podmienku existencie konečného vlastného vektora matice (viď [5]).

Veta 7.13 $V^+(A) \neq \emptyset$ *vtedy a len vtedy ak vlastná hodnota všetkých koncových tried je rovná* $\lambda(A)$.

Na základe triviálneho faktu, že hlavná vlastná hodnota $\lambda(A)$ je maximálnou z vlastných hodnôt, môžeme nutnú a postačujúcu podmienku existencie konečného vlastného vektora matice formulovať aj inak.

Veta 7.14 $V^+(A) = \emptyset$ *vtedy a len vtedy ak vlastná hodnota niektorej koncovej triedy je menšia ako* $\lambda(A)$.

Príklad 7.5.5 *Pre maticu A z príkladu 7.5.4 rozhodnime na základe vety 7.13, či existuje konečný vlastný vektor.*

Riešenie. Keďže všetky koncové triedy majú vlastnú hodnotu $\lambda(A) = 7$, konečné riešenie vlastného problému existuje.

♡

7.6 Úlohy

7.1 Určte pomocou kritického digrafu hlavnú dimenziu ireducibilných matíc z cvičenia 7.2.

7.2 Pre nasledujúce ireducibilné matice nájdite bázu hlavného vlastného priestoru a popíšte ho.

a) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ \varepsilon & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & \varepsilon & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

7.3 Určte pomocou kritického digrafu hlavnú dimenziu reducibilných matíc z cvičenia 7.4.

7.4 Pre danú reducibilnú maticu A vypočítajte $\lambda(A)$.

a) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & \varepsilon \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{array}\right)$,

b) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 4 & 10 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{array}\right)$,

c) $A = \left(\begin{array}{c|cc} 4 & 6 & 5 \\ \hline \varepsilon & 4 & 3 \\ \varepsilon & 3 & 4 \end{array}\right)$,

d) $A = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & \varepsilon & 7 \\ \hline \varepsilon & 2 & 3 \\ \varepsilon & 3 & 1 \end{array}\right)$,

e) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 5 & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon & 6 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 1 \end{array}\right)$,

f) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & \varepsilon & 5 \\ 1 & 2 & \varepsilon & 6 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 2 \end{array}\right)$,

g) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 4 & \varepsilon \\ 8 & 2 & 3 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 6 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 5 \end{array}\right)$,

h) $A = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 6 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ \hline \varepsilon & 3 & 4 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & 2 & 3 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 5 \end{array}\right)$,

i) $A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 4 & 2 & \varepsilon & 5 & 1 \\ 1 & 2 & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 2 & 2 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{array}\right)$,

j) $A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 0 & 5 & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon & 6 & \varepsilon & 4 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 1 & \varepsilon & 1 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 2 \end{array}\right)$,

k) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & 4 \\ 4 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 1 & \varepsilon \end{array}\right)$,

l) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 5 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$,

m) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 4 & \varepsilon \\ 6 & 2 & 3 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 6 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 5 \end{array}\right)$.

7.5 Pre nasledujúce reducibilné matice nájdite bázu hlavného vlastného priestoru a popíšte ho.

a) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & \varepsilon & 2 & 3 \\ \varepsilon & 6 & 3 & 1 \end{array}\right)$,

b) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 5 & 1 & 3 \\ \varepsilon & 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$,

c) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 4 & \varepsilon & 6 & 2 \\ 3 & \varepsilon & 1 & 5 \end{array}\right)$,

d) $A = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 4 & 3 & 6 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 5 \end{array}\right)$,

e) $A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 4 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & 5 & 2 & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$,

f) $A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 3 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 2 \\ \varepsilon & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$.

7.6 Pre nasledujúce reducibilné matice nájdite bázu hlavného vlastného priestoru a popíšte ho.

a) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \hline 6 & 5 & 4 \end{array}\right)$,

b) $A = \left(\begin{array}{c|cc} 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 6 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$,

c) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 7 & 2 \end{array}\right)$,

d) $A = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \end{array}\right)$,

e) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 4 & \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & \varepsilon & 8 & 2 \end{array}\right)$,

f) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 4 & \varepsilon & 4 & 2 \\ 3 & \varepsilon & 1 & 2 \end{array}\right)$,

g) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{array}\right)$,

h) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \end{array}\right)$,

i) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 4 & \varepsilon & 6 & 2 \\ 5 & \varepsilon & 1 & 6 \end{array}\right)$,

j) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & 4 & 2 \\ 1 & \varepsilon & 4 & 4 \end{array}\right)$.

7.7 Zistite, či existuje konečný vlastný vektor zodpovedajúci hlavnej vlastnej hodnote pre matice z cvičenia 7.2. Ak áno, nájdite všetky konečné vlastné vektory a popíšte priestor konečných riešení. Rozhodnite, či existuje báza tohto priestoru.

7.8 Zistite, či existuje konečný vlastný vektor zodpovedajúci hlavnej vlastnej hodnote pre matice z cvičenia 7.5. Ak áno, nájdite všetky konečné vlastné vektory a popíšte priestor konečných riešení. Rozhodnite, či existuje báza tohto priestoru.

7.9 Zistite, či existuje konečný vlastný vektor zodpovedajúci hlavnej vlastnej hodnote pre matice z cvičenia 7.6. Ak áno, nájdite všetky konečné vlastné vektory a popíšte priestor konečných riešení. Rozhodnite, či existuje báza tohto priestoru.

7.10 Určte množinu všetkých konečných vlastných hodnôt matíc z cvičenia 7.6.

7.11 Popíšte všetky vlastné priestory matíc z cvičenia 7.6.

7.12 Určte triedy matice. Na základe kondenzovaného digrafu nájdite všetky začiatočné, koncové a spektrálne triedy matice.

a) $$A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 8 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 6 \end{array}\right),$$

b) $$A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 8 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & 4 & 6 \end{array}\right),$$

c) $$A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 8 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 6 \end{array}\right),$$

d) $$A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 5 \end{array}\right),$$

e) $$A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 8 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

7.13 Určte množinu všetkých konečných vlastných hodnôt matíc z cvičenia 7.12.

7.14 Popíšte všetky vlastné priestory matíc z cvičenia 7.12.

Výsledky:

7.1

a) $\mathrm{pd}\,(A) = 2$,

b) $\mathrm{pd}\,(A) = 1$,

c) $\mathrm{pd}\,(A) = 1$,

d) $\mathrm{pd}\,(A) = 1$.

7.2

a) $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$V(A, 3) = \{\alpha \otimes (0, -2, -2)^\top \oplus \beta \otimes (1, -1, 0)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$,

b) $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$V(A, 4) = \{\alpha \otimes (0, 0, -2)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

c) $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$V(A, 5) = \{\alpha \otimes (-3, -1, 0, 0)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

d) $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$V(A, 5) = \{\alpha \otimes (0, -1, -2, 0)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$.

7.3

a) $\mathrm{pd}\,(A) = 2$,

b) $\mathrm{pd}\,(A) = 2$,

c) $\mathrm{pd}\,(A) = 3$,

d) $\mathrm{pd}\,(A) = 2$,

e) $\mathrm{pd}\,(A) = 3$,

f) $\mathrm{pd}\,(A) = 2$,

g) $\mathrm{pd}\,(A) = 2$,

h) $\mathrm{pd}\,(A) = 3$,

i) $\mathrm{pd}\,(A) = 3$,

j) $\mathrm{pd}\,(A) = 4$,

k) $\mathrm{pd}\,(A) = 1$,

l) $\mathrm{pd}\,(A) = 1$,

m) $\mathrm{pd}\,(A) = 1$.

7.4

a) $\lambda(A) = 2$,

b) $\lambda(A) = 5$,

c) $\lambda(A) = 4$,

d) $\lambda(A) = 3$,

e) $\lambda(A) = 3$,

f) $\lambda(A) = 4$,

g) $\lambda(A) = 6$,

h) $\lambda(A) = 6$,

i) $\lambda(A) = 4$,

j) $\lambda(A) = 3$,

k) $\lambda(A) = 5$,

l) $\lambda(A) = 2$,

m) $\lambda(A) = 6$.

7.5

a) $$\Delta = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -3 & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$V(A,3) = \{\alpha \otimes (0,-1,2,2)^\top \oplus \beta \otimes (-3,0,3,3)^\top \oplus \gamma \otimes (\varepsilon,\varepsilon,0,0)^\top;$ $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}^\star\}$,

b) $$\Delta = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ -3 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$V(A,4) = \{\alpha \otimes (0,-3,-2,-1)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon,\varepsilon,-1,0)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$,

c) $$\Delta = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -2 & -4 & 0 & -4 \\ -3 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$V(A,6) = \{\alpha \otimes (-2,0,-4,-5)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon,\varepsilon,0,-5)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$,

d) $$\Delta = \left(\begin{array}{r|rr|rr} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -1 & 0 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 2 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline -2 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ -7 & -6 & -8 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$V(A,6) = \{\alpha \otimes (0,-1,1,-2,-7)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon,-2,0,-3,-8)^\top \oplus$
$\gamma \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0,-5)^\top;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}^\star\}$,

e) $$\Delta = \left(\begin{array}{rr|rr|r} 0 & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -3 & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 0 & -2 & 0 & -1 & \varepsilon \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \varepsilon \\ \hline -1 & -3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$V(A,4) = \{\alpha \otimes (0,-3,0,1,-1)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon,\varepsilon,-1,0,-2)^\top \oplus$
$\gamma \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0)^\top;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}^\star\}$,

f) $$\Delta = \left(\begin{array}{rr|rr|lr} 0 & -3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 2 & 3 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 3 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 2 & 1 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$V(A,3) = \{\alpha \otimes (0,-1,2,2,2,3)^\top \oplus \beta \otimes (-3,0,3,3,1,2)^\top \oplus$
$\gamma \otimes (\varepsilon,\varepsilon,0,0,-2,-1)^\top \oplus \delta \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-1,0)^\top;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}^\star\}$.

7.6

a) $$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & -1 & \varepsilon \\ -3 & -3 & \varepsilon \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$V(A,4) = \{\alpha \otimes (\varepsilon,\varepsilon,0)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

b) $$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$V(A,4) = \{\alpha \otimes (0,2,1)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

c) $$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$V(A,3) = \{\alpha \otimes (0,0,4)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

d) $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$V(A,3) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, 0, 0)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

e) $\Delta = \begin{pmatrix} -2 & -4 & \varepsilon & \varepsilon \\ -5 & -4 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$V(A,6) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, 2)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

f) $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -4 & -2 & -4 \\ -3 & -5 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

$V(A,6) = \{\alpha \otimes (0, 2, -2, -3)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

g) $\Delta = \begin{pmatrix} -2 & -5 & \varepsilon & \varepsilon \\ -3 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$V(A,5) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, -1)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

h) $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$V(A,5) = \{\alpha \otimes (0, -1, 0, 0)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

i) $\Delta = \begin{pmatrix} -3 & -4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -4 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

$V(A,6) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, -5)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon, \varepsilon, -4, 0)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$,

j) $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ -3 & -3 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$V(A,4) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, 0)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon, \varepsilon, -2, 0)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$.

7.7

a) $V^{+}(A,3) = \{\alpha \otimes (0,-2,-2)^{\top} \oplus \beta \otimes (1,-1,0)^{\top};\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}$,

b) $V^{+}(A,4) = \{\alpha \otimes (0,0,-2)^{\top};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$,

c) $V^{+}(A,5) = \{\alpha \otimes (-3,-1,0,0)^{\top};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$,

d) $V^{+}(A,5) = \{\alpha \otimes (0,-1,-2,0)^{\top};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

7.8

a) $V^{+}(A,3) = \{\alpha \otimes (0,-1,2,2)^{\top} \oplus \beta \otimes (-3,0,3,3)^{\top} \oplus \gamma \otimes (\varepsilon,\varepsilon,0,0)^{\top};$ $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}\}$,

b) $V^{+}(A,4) = \{\alpha \otimes (0,-3,-2,-1)^{\top} \oplus \beta \otimes (\varepsilon,\varepsilon,-1,0)^{\top};\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}$,

c) $V^{+}(A,6) = \{\alpha \otimes (-2,0,-4,-5)^{\top} \oplus \beta \otimes (\varepsilon,\varepsilon,0,-5)^{\top};\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}$,

d) $V^{+}(A,6) = \{\alpha \otimes (0,-1,1,-2,-7)^{\top} \oplus \beta \otimes (\varepsilon,-2,0,-3,-8)^{\top} \oplus$ $\gamma \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0,-5)^{\top};\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}\}$,

e) $V^{+}(A,4) = \{\alpha \otimes (0,-3,0,1,-1)^{\top} \oplus \beta \otimes (\varepsilon,\varepsilon,-1,0,-2)^{\top} \oplus$ $\gamma \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,0)^{\top};\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}\}$,

f) $V^{+}(A,3) = \{\alpha \otimes (0,-1,2,2,2,3)^{\top} \oplus \beta \otimes (-3,0,3,3,1,2)^{\top} \oplus$ $\gamma \otimes (\varepsilon,\varepsilon,0,0,-2,-1)^{\top} \oplus \delta \otimes (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,-1,0)^{\top};\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}\}$.

7.9

a) $V^{+}(A,4) = \emptyset$,

b) $V^{+}(A,4) = \{\alpha \otimes (0,2,1)^{\top};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$,

c) $V^{+}(A,3) = \{\alpha \otimes (0,0,4)^{\top};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$,

d) $V^{+}(A,3) = \emptyset$,

e) $V^{+}(A,6) = \emptyset$,

f) $V^{+}(A,6) = \{\alpha \otimes (0,2,-2,-3)^{\top};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$,

g) $V^{+}(A,5) = \emptyset$,

h) $V^{+}(A,5) = \{\alpha \otimes (0,-1,0,0)^{\top};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$,

i) $V^{+}(A,6) = \emptyset$,

j) $V^{+}(A,4) = \emptyset$.

7.10

a) $\Lambda(A) = \{4\}$,

b) $\Lambda(A) = \{2, 4\}$,

c) $\Lambda(A) = \{2, 3\}$,

d) $\Lambda(A) = \{3\}$,

e) $\Lambda(A) = \{6\}$,

f) $\Lambda(A) = \{4, 6\}$,

g) $\Lambda(A) = \{5\}$,

h) $\Lambda(A) = \{3, 5\}$,

i) $\Lambda(A) = \{6\}$,

j) $\Lambda(A) = \{4\}$.

7.11

a) $V(A,4) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$;

b) $V(A,2) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, 0, -1)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,
$V(A,4) = \{\alpha \otimes (0, 2, 1)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$;

c) $V(A,2) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,
$V(A,3) = \{\alpha \otimes (0, 0, 4)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$;

d) $V(A,3) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, 0, 0)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$;

e) $V(A,6) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, 2)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$;

f) $V(A,4) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, -3)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,
$V(A,6) = \{\alpha \otimes (0, 2, -2, -3)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$;

g) $V(A,5) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, -1)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,

h) $V(A,3) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, -1)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon, \varepsilon, -3, 0)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$,
$V(A,5) = \{\alpha \otimes (0, -1, 0, 0)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$;

i) $V(A,6) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, -5)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon, \varepsilon, -4, 0)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$;

j) $V(A,4) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, 0, 0)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon, \varepsilon, -2, 0)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$.

7.12

a) $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2,3\}$, $N_3 = \{4,5\}$, $N_4 = \{6\}$, $N_5 = \{7,8\}$
začiatočné: N_2, N_4, N_5; koncové: N_1, N_2, N_3; spektrálne: N_2, N_3, N_4, N_5,

b) $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2,3\}$, $N_3 = \{4,5\}$, $N_4 = \{6\}$, $N_5 = \{7,8\}$
začiatočné: N_4, N_5; koncové: N_1, N_2; spektrálne: N_4, N_5,

c) $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2,3\}$, $N_3 = \{4,5\}$, $N_4 = \{6\}$, $N_5 = \{7,8\}$
začiatočné: N_2, N_4, N_5; koncové: N_1, N_2, N_3; spektrálne: N_2, N_4, N_5,

d) $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2,3\}$, $N_3 = \{4,5\}$, $N_4 = \{6\}$, $N_5 = \{7,8\}$
začiatočné: N_2, N_4, N_5; koncové: N_1, N_2, N_3; spektrálne: N_1, N_2, N_3, N_4, N_5,

e) $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2,3\}$, $N_3 = \{4,5\}$, $N_4 = \{6\}$, $N_5 = \{7,8\}$
začiatočné: N_5; koncové: N_1, N_2; spektrálne: N_5.

7.13

a) $\Lambda(A) = \{2,\ 4,\ 3,\ 6\}$,

b) $\Lambda(A) = \{3,\ 6\}$,

c) $\Lambda(A) = \{6\}$,

d) $\Lambda(A) = \{5\}$,

e) $\Lambda(A) = \{6\}$.

7.14

a) $V(A,2) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, 0, -1, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,
$V(A,3) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, \varepsilon, \varepsilon)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,
$V(A,4) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -1, -3, \varepsilon, \varepsilon)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -1, 0, -2, \varepsilon, \varepsilon)^\top;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^\star\}$,
$V(A,6) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -2)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$;

b) $V(A,3) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, \varepsilon, \varepsilon)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$,
$V(A,6) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -2)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$;

c) $V(A,6) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, \varepsilon, \varepsilon)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon, 0, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)^\top \oplus \gamma \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -2)^\top;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}^\star\}$;

d) $V(A,5) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -2, -5, \varepsilon, \varepsilon)^\top \oplus \beta \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -2, 0, -3, \varepsilon, \varepsilon)^\top \oplus \gamma \otimes (\varepsilon, 0, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)^\top \oplus \delta \otimes (0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -4, -4, -5)^\top \oplus \omega \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, \varepsilon, \varepsilon)^\top \oplus \varphi \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -1)^\top;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \omega,\ \varphi \in \mathbb{R}^\star\}$;

e) $V(A,6) = \{\alpha \otimes (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 0, -2)^\top;\ \alpha \in \mathbb{R}^\star\}$.

8 Periodické vlastnosti max-plus matíc

8.1 Cieľ kapitoly

Oboznámiť sa s pojmom periodickosť max-plus matice a lineárna periodickosť max-plus matice. Oboznámiť sa s nutnými a postačujúcimi podmienkami periodickosti a efektívnymi algoritmami na overenie, resp. výpočet periódy a špeciálnej lineárnej periódy s konštantnou maticou lineárnych faktorov v kladnom prípade.

8.2 Prehľad kapitoly v otázkach

- Definujte takmer periodickú maticu v max-plus algebre a periódu matice.

- Definujte silne súvislý komponent digrafu a periódu silne súvislého komponentu.

- Popíšte Balcerov-Veinottov kondenzačný algoritmus pre výpočet periódy digrafu.

- Sformulujte postačujúcu podmienku periodickosti matice a popíšte algoritmus na jej overenie a výpočet periódy v kladnom prípade.

- Sformulujte nutnú a postačujúcu podmienku periodickosti matice a popíšte algoritmus na jej overenie a výpočet periódy v kladnom prípade.

- Definujte takmer lineárne periodickú maticu v max-plus algebre a lineárnu periódu matice.

- Sformulujte nutnú a postačujúcu podmienku lineárnej periodickosti matice s konštantnou maticou lineárnych faktorov a popíšte algoritmus na jej overenie a výpočet lineárnej periódy v kladnom prípade.

8.3 Pojem periodickosti matice v max-plus algebre

Operácia maxima v max-plus algebre môže spôsobiť, že, na rozdiel od lineárnej algebry, sa v max-plus algebre začnú matice s určitou pravidelnosťou v postupnosti mocnín danej matice opakovať. Kvôli jednoduchosti zápisu označme pre $n \in \mathbb{N}$ množinu $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pojem najmenší spoločný násobok budeme označovať skratkou nsn a najväčší spoločný deliteľ skratkou nsd.

Definícia 8.1 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Hovoríme, že A je* ***takmer periodická****, ak pre všetky $i,j \in N$ je periodická postupnosť $a^*_{ij} = (\, a^{(r)}_{ij};\ r \in \mathbb{N}^+ \,)$, t. j.*

$$(\exists p \in \mathbb{N}^+)\,(\exists R_{ij} \in \mathbb{N})\,(\forall r > R_{ij}) \quad a^{(r+p)}_{ij} = a^{(r)}_{ij}.$$

Najmenšie p s touto vlastnosťou nazývame ***periódou*** *a^*_{ij} a označujeme* $\mathrm{per}(a^*_{ij})$. *Číslo R_{ij} nazývame* ***defektom*** *a^*_{ij} a označujeme* $\mathrm{def}(a^*_{ij})$. ***Perióda matice*** *A je definovaná ako*

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{nsn}\{\, \mathrm{per}(a^*_{ij});\ i,j \in N \,\}. \tag{41}$$

Číslo $\mathrm{def}(A) = \max\{R_{ij};\ i,j \in N\,\}$ *nazývame* ***defektom matice*** *A.*

Príklad 8.3.1 *Zistime, či je matica A periodická. Ak áno, nájdime periódu a defekt matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 0 & 3 \\ 2 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Po výpočte prvých štyroch mocnín matice pozorujeme, že hodnoty neustále narastajú:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 8 \\ 10 & 10 & 8 \\ 8 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Nedá sa teda očakávať, že matice sa v postupnosti mocnín skúmanej matice začnú opakovať. Matica A zrejme nie je takmer periodická. ♡

Príklad 8.3.2 *Zistime, či je matica A periodická. Ak áno, nájdime periódu a defekt matice*

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Po výpočte prvých šiestich mocnín matice sme zistili, že platia rovnosti

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = A^{4+3k}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & \varepsilon \end{pmatrix} = A^{5+3k}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = A^{6+3k}.$$

Každá postupnosť $a^*_{ij} = (\, a^{(r)}_{ij};\ r \in \mathbb{N}^+ \,)$ pre ľubovoľné i, j je periodická s periódou 3, to znamená, že matica A je takmer periodická a podľa vzťahu (41) je perióda matice $\mathrm{per}(A) = 3$. Toto periodické správanie sa matice sa navyše prejavuje od začiatku a preto je defekt matice $\mathrm{def}(A) = 0$. ♡

Príklad 8.3.3 *Zistime, či je matica A periodická. Ak áno, nájdime periódu a defekt matice*

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ -3 & -1 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Po výpočte prvých ôsmych mocnín matice sme zistili, že postupnosť prvých štyroch mocnín nevykazuje periodické správanie sa:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ -2 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & -4 & 0 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & -3 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tento neperiodický úsek určuje defekt matice $\mathrm{def}(A) = 4$. Počnúc piatou mocninou sa matice opakujú s periódou $\mathrm{per}(A) = 2$

$$A^5 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -5 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = A^{5+2k}$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix} = A^{6+2k}.$$

♡

Perióda matice rovnako ako neperiodická časť môžu byť v prípade ľubovoľnej periodickej matice veľké a overovanie periodickosti testovaním mocnín matice neefektívne. Preto sa v ďalšom texte zameriame na hľadanie postačujúcich, resp. nutných a postačujúcich podmienok periodickosti matice, ktoré by umožnili konštrukciu efektívnych (polynomiálnych) algoritmov na overenie, resp. výpočet periódy matice v pozitívnom prípade. Budeme pritom využívať digraf zodpovedajúci matici ako sme si ho definovali, spolu s ďalšími pojmami, v kapitole *Digrafy a ich využitie pre DDS*.

Definícia 8.2 *Nech* $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. $\mathrm{SCC}^*(\mathcal{G}(A))$ *označme množinu všetkých netriviálnych silne súvislých komponentov* $\mathcal{G}(A)$ *a* $\mathrm{SCC}(\mathcal{G}(A))$ *množinu všetkých silne súvislých komponentov. Pre každý komponent* $\mathcal{K} \in \mathrm{SCC}(\mathcal{G}(A))$ *označme* $\lambda(\mathcal{K})$ *maximálnu priemernú váhu cyklu v* $\mathcal{K}$. ***Periódu silne súvislého komponentu*** *definujeme ako*

$$\mathrm{per}(\mathcal{K}) \;=\; \mathrm{nsd}\,\{\, |c|;\ c \text{ je cyklus v } \mathcal{K},\ |c| > 0 \,\}. \tag{42}$$

Ak $\mathcal{K}$ *je triviálny, tak* $\mathrm{per}(\mathcal{K}) = 0$.

Balcerov-Veinottov kondenzačný algoritmus je určený na výpočet periódy silne súvislého digrafu. Môžeme ho teda použiť aj na výpočet periódy silne súvislého komponentu v prípade, ak digraf pozostáva z viac ako jedného komponentu. Algoritmus pracuje metódou kondenzácie vrcholov a jeho výpočtová zložitosť je $O(n^2)$. Uvádzame jeho stručný popis.

Balcerov-Veinottov kondenzačný algoritmus

Predpokladajme, že $\mathcal{G} = (N, E)$ je silne súvislý digraf s vrcholovou množinou $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ a hranovou množinou E. Vytvárame tri postupnosti. Postupnosť digrafov $(\mathcal{G}_r;\ r = 1, 2, \ldots)$, postupnosť podmnožín $(I_r \subseteq N;\ r = 1, 2, \ldots)$ a postupnosť rôznych vrcholov $(j_r \in I_r;\ r = 1, 2, \ldots)$. Algoritmus štartuje s hodnotami $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$, $I_1 = \{1\}$ a $j_1 = 1$. Množina I_2 je množina tých vrcholov, do ktorých vedie hrana z vrchola j_1 v digrafe $\mathcal{G}_1$. Digraf $\mathcal{G}_2$ vznikne kondenzáciou vrcholov množiny I_2 do jedného vrchola, pričom tento vrchol preberá všetky hrany, ktoré viedli z pôvodných vrcholov do nejakého vrchola. Všeobecne pre ľubovoľné $r > 0$ je I_r množina terminálnych vrcholov tých hrán, ktoré vedú z vrchola j_{r-1} v digrafe $\mathcal{G}_{r-1}$. Vrchol j_r vyberáme z I_r (môže to byť minimálna hodnota) a $\mathcal{G}_r$ je kondenzácia $\mathcal{G}_{r-1}$, kde vrcholy z množiny I_r sa kondenzujú do vrchola j_r. Digraf $\mathcal{G}_{2n-2}$ je cyklus a jeho dĺžka predstavuje periódu pôvodného digrafu $\mathcal{G}$.

Definícia 8.3 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Hovoríme, že matica A spĺňa* ***podmienku cyklov****, ak váha každého cyklu v digrafe $\mathcal{G}(A)$ je rovná 0, t. j. $w(c) = 0$.*

Matica spĺňajúca podmienku cyklov je takmer periodická (viď [11]).

Veta 8.1 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$ spĺňa podmienku cyklov. Nech $d \in \mathbb{N}$. Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné*

(i) $\mathrm{per}(A) \,|\, d$,

(ii) $(\forall \mathcal{K} \in \mathrm{SCC}^*(\mathcal{G}(A))) \quad \mathrm{per}(\mathcal{K}) \,|\, d$.

Na základe predošlej vety môžeme zostrojiť formulu pre výpočet periódy matice spĺňajúcej podmienku cyklov.

Veta 8.2 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$ spĺňa podmienku cyklov. Potom*

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{nsn}\,\{\, \mathrm{per}(\mathcal{K});\ \mathcal{K} \in \mathrm{SCC}^*(\mathcal{G}(A))\,\}. \tag{43}$$

Výpočtová zložitosť nasledujúceho algoritmu na overenie postačujúcej podmienky periodickosti je $O(n^3)$.

Algoritmus na overenie podmienky cyklov

(i) nájdeme $\Delta(A)$ pomocou Floydovho-Warshallovho algoritmu,

(ii) overíme $\delta_{ii} \leq 0$ pre všetky i,

(iii) nájdeme $\Delta(A')$ (konjugovanej matice) pomocou Floydovho–Warshallovho algoritmu,

(iv) overíme $\delta'_{ii} \leq 0$ pre všetky i.

V prípade, ak algoritmus dá kladnú odpoveď, nasledujúci algoritmus vypočíta periódu matice v čase $O(n^3)$.

Algoritmus na výpočet periódy matice s podmienkou cyklov

(i) nájdeme silne súvislé komponenty pomocou $\Delta(A)$,

(ii) vypočítame periódu každého netriviálneho silne súvislého komponentu pomocou Balcerovho-Veinottovho algoritmu,

(iii) vypočítame $\mathrm{per}(A)$ podľa formuly (43) s použitím Euclidovho algoritmu na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa $\mathrm{nsd}\{a, b\}$

$$\mathrm{nsn}\{a, b\} = \frac{ab}{\mathrm{nsd}\{a, b\}}.$$

Príklad 8.3.4 *Overme podmienku cyklov a v kladnom prípade vypočítajme periódu matice.*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & -1 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & \varepsilon & 8 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

Riešenie. Daná reducibilná matica je v tvare hornej blokovo-trojuholníkovej matice a teda na základe diagonálnych blokov určíme silne súvislé komponenty. Komponenty $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$ generované množinami vrcholov $K_1 = \{1, 2, 3\}$ a $K_2 = \{4, 5\}$ sú netriviálne, obsahujú len cykly, ktorých váha je rovná nule. Komponent $\mathcal{K}_3$ generovaný množinou $K_3 = \{6\}$ neobsahuje cyklus, je teda triviálny. Matica spĺňa podmienku cyklov, z čoho vyplýva, že je takmer periodická. Jej periódu určíme na základe periódy netriviálnych komponentov. Na základe (42) je $\mathrm{per}(\mathcal{K}_1) = \mathrm{nsd}\,\{\,2,\,3\,\} = 1$ a $\mathrm{per}(\mathcal{K}_2) = \mathrm{nsd}\,\{\,2\,\} = 2$. Pomocou vzťahu (43) určíme periódu matice

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{nsn}\,\{\,\mathrm{per}(\mathcal{K});\ \mathcal{K} \in \mathrm{SCC}^*(\mathcal{G}(A))\,\} = \mathrm{nsn}\,\{\,2, 1\,\} = 2.$$

♡

8.4 Periodické matice

V tejto časti sa budeme zaoberať periodickosťou ľubovoľnej max-plus matice vo všeobecnosti. Pre výpočet periódy matice je nevyhnutný pojem vysoká perióda vysoko súvislého komponentu. Kvôli zrozumiteľnosti uvádzame jeho definíciu spolu s definíciou vysoko súvislého komponentu z predchádzajúcej kapitoly (viď definíciu 7.5).

Definícia 8.4 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Hovoríme, že dva vrcholy $i, j \in \mathcal{G}(A)$ sú* ***vysoko-spojené****, zapisujeme $i \equiv_h j$, ak i a j ležia na spoločnom cykle c s priemernou váhou $\bar{w}(c) = \lambda(A)$. Poddigrafy generované triedami ekvivalencie reflexívneho uzáveru $\equiv_h$ nazývame* ***vysoko súvislé komponenty*** *$\mathcal{G}(A)$. Množinu všetkých vysoko súvislých komponentov $\mathcal{G}(A)$ označme $\mathrm{HCC}(\mathcal{G}(A))$. $\mathcal{K} \in \mathrm{HCC}(\mathcal{G}(A))$ sa nazýva triviálnym, ak $\mathcal{K}$ neobsahuje cyklus kladnej dĺžky s priemernou váhou rovnou $\lambda(A)$. Množinu všetkých netriviálnych vysoko súvislých komponentov označujeme $\mathrm{HCC}^*(\mathcal{G}(A))$. Pre každý $\mathcal{K} \in \mathrm{HCC}(\mathcal{G}(A))$ definujme* ***vysokú periódu*** *$\mathcal{K}$ ako*

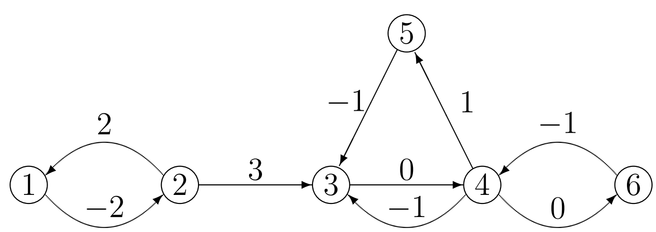
$$\mathrm{hper}(\mathcal{K}) \;=\; \mathrm{nsd}\,\{\,|c|;\; c \text{ je cyklus v } \mathcal{K},\, |c| > 0,\, \bar{w}(c) = \lambda(A)\,\}. \tag{44}$$

Ak $\mathcal{K}$ je triviálny, tak $\mathrm{hper}(\mathcal{K}) = 0$.

Príklad 8.4.1 *Nájdime vysokosúvislé komponenty digrafu zodpovedajúceho matici*

$$A = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right).$$

Riešenie. Digraf $\mathcal{G}(A)$ zodpovedajúci matici je na obrázku (viď obr. 9).



Obr. 9: Digraf $\mathcal{G}(A)$

Na základe príkladu 7.3.1 vieme, že digraf obsahuje tri vysoko súvislé komponenty. Komponenty $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$ generované množinami vrcholov $K_1 = \{1, 2\}$ a $K_2 = \{3, 4, 5\}$ obsahujú kritický cyklus, sú teda netriviálne. Komponent $\mathcal{K}_3$ generovaný množinou vrcholov $K_3 = \{6\}$ neobsahuje kritický cyklus, je teda triviálny. ♡

Uvažujme teraz všeobecný prípad reducibilnej matice, ktorej digraf obsahuje cykly rôznej váhy. Nasledujúca veta formuluje nutnú a postačujúcu podmienku periodickosti matice v max-plus algebre (viď [14]).

Veta 8.3 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné*

(i) *A je takmer periodická,*

(ii) $(\,\forall \mathcal{K} \in \mathrm{SCC}^*(\mathcal{G}(A))\,)\ \lambda(\mathcal{K}) = 0.$

Len dĺžky kritických cyklov majú vplyv na veľkosť periódy. Perióda matice sa preto vypočíta na základe periód vysoko súvislých komponentov zodpovedajúceho digrafu.

Veta 8.4 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je takmer periodická. Potom*

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{nsn}\,\{\,\mathrm{hper}(\mathcal{K});\ \mathcal{K} \in \mathrm{HCC}^*(\mathcal{G}(A))\,\}. \tag{45}$$

Príklad 8.4.2 *Overme periodickosť matice z príkladu 8.4.1 a v kladnom prípade vypočítajme periódu matice.*

Riešenie. Digraf obsahuje dva silne súvislé komponenty. Oba sú netriviálne a ich maximálna priemerná váha cyklov je rovná 0. Matica je teda podľa vety 8.3 takmer periodická. Vypočítame vysoké periódy netriviálnych vysoko súvislých komponentov podľa vzťahu (44). Pre komponent $\mathcal{K}_1 = \{1,2\}$ je $\mathrm{hper}(\mathcal{K}_1) = 2$ a pre komponent $\mathcal{K}_2 = \{3,4,5\}$ je $\mathrm{hper}(\mathcal{K}_2) = 3$. Nakoniec vypočítame periódu matice podľa vzťahu (45)

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{nsn}\,\{\,\mathrm{hper}(\mathcal{K});\, \mathcal{K} \in \mathrm{HCC}^*(\mathcal{G}(A))\,\} = \mathrm{nsn}\,\{\,2,3\,\} = 6.$$

♡

Nasledujúci algoritmus na overenie nutnej a postačujúcej podmienky periodickosti a výpočet periódy matice v kladnom prípade je založený na vete 8.3 a vete 8.4 a má výpočtovú zložitosť $O(n^3)$.

Algoritmus na overenie periodickosti a výpočet periódy matice

(i) použijeme Algoritmus silne súvislé komponenty na nájdenie silne súvislých komponentov pomocou Floydovho-Warshallovho algoritmu,

(ii) vypočítame $\lambda(\mathcal{K})$ každého netriviálneho silne súvislého komponentu pomocou Karpovho algoritmu a overíme, či $\lambda(\mathcal{K}) = 0$,

(iii) nájdeme netriviálne vysoko súvislé komponenty a vypočítame ich vysoké periódy pomocou Gavalcovho algoritmu (viď poznámku 8.1),

(iv) vypočítame per(A) podľa formuly (45) ako najmenší spoločný násobok vysokých períód všetkých netriviálnych vysoko súvislých komponentov s použitím Euclidovho algoritmu na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa nsd$\{a, b\}$ a

$$\mathrm{nsn}\{a, b\} = \frac{ab}{\mathrm{nsd}\{a, b\}}.$$

Poznámka 8.1 *Gavalcov algoritmus je založený na dvoch tvrdeniach. Prvé z nich hovorí, že vysoká perióda vysoko súvislého komponentu nie je ovplyvnená hranami, ktoré neležia na žiadnom kritickom cykle (cykle váhy 0). Druhé tvrdenie hovorí, že ak každá hrana vysoko súvislého komponentu leží na kritickom cykle, tak sa vysoká perióda komponentu rovná perióde komponentu. Z toho vyplýva, že vysokú periódu vysoko súvislého komponentu vypočítame tak, že vylúčime hrany, ktoré neležia na kritickom cykle a pomocou Balcerovho-Veinottovho algoritmu vypočítame periódu takto vzniknutého digrafu.*

8.5 Lineárne periodické matice

Zovšeobecnením pojmu periodickosti matice, ktorej sme sa venovali v predchádzajúcich častiach kapitoly, je lineárna periodickosť matice v max-plus algebre. Je to druh periodickosti, pri ktorom sa hodnoty v postupnosti opakujú s určitým pravidelným prírastkom.

Definícia 8.5 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Hovoríme, že A je* ***takmer lineárne periodická matica****, ak pre všetky i, j je lineárne periodická postupnosť $a^*_{ij} = (\, a^{(r)}_{ij};\ r \in \mathbb{N}^+ \,)$, t. j.*

$$(\exists p \in \mathbb{N}^+)\,(\exists R_{ij} \in \mathbb{N})\,(\exists q_{ij} \in \mathbb{R}^\star)\,(\forall r > R_{ij}) \quad a^{(r+p)}_{ij} = a^{(r)}_{ij} + p \times q_{ij}.$$

Najmenšie p s touto vlastnosťou nazývame ***lineárnou periódou*** *a^*_{ij} a označujeme* lper(a^*_{ij})*. Číslo q_{ij} nazývame* ***lineárnym faktorom*** *a^*_{ij} a označujeme* lfac(a^*_{ij})*. Číslo R_{ij} nazývame* ***lineárnym defektom*** *a^*_{ij} a označujeme* ldef(a^*_{ij})*.* ***Lineárna perióda matice*** *A je definovaná ako*

$$\mathrm{lper}(A) = \mathrm{nsn}\{\, \mathrm{lper}(a^*_{ij});\ i, j \in N \,\}.$$

Maticu lfac$(A) = Q$ *s* $q_{ij} =$ lfac(a^*_{ij}) *nazývame* ***maticou lineárnych faktorov matice*** *A. Číslo* ldef$(A) = \max\{R_{ij};\ i, j \in N\}$ *nazývame* ***lineárnym defektom matice*** *A.*

Periodickosť je špeciálnym prípadom lineárnej periodickosti. Vzťah medzi periodickosťou matice na jednej strane a lineárnou periodickosťou matice na strane druhej popisuje nasledujúca veta.

Veta 8.5 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je takmer periodická matica s periódou* $\mathrm{per}(A)$. *Potom A je takmer lineárne periodická a platí*

(i) $\mathrm{lper}(A) = \mathrm{per}(A)$,

(ii) $\mathrm{lfac}(A) = Q$ *s* $q_{ij} = 0$ *pre* $i, j \in N$.

Uvažujme v ďalšom texte špeciálny prípad lineárnej periodickosti, keď je matica lineárnych faktorov konštantná.

Veta 8.6 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné*

(i) A je takmer lineárne periodická a $\mathrm{lfac}(A) = Q$ *s* $q_{ij} = \lambda(A)$ *pre* $i, j \in N$,

(ii) $A_\lambda = \lambda(A)^{-1} \otimes A$ *je takmer periodická.*

Navyše v kladnom prípade $\mathrm{per}(A_\lambda) = \mathrm{lper}(A)$.

Ako dôsledok vety 8.6 a vety 8.3 môžeme sformulovať nasledujúcu nutnú a postačujúcu podmienku lineárnej periodickosti matice s konštantnou maticou lineárnych faktorov.

Veta 8.7 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné*

(i) A je takmer lineárne periodická a $\mathrm{lfac}(A) = Q$ *s* $q_{ij} = \lambda(A)$ *pre* $i, j \in N$,

(ii) $(\,\forall \mathcal{K} \in \mathrm{SCC}^*(\mathcal{G}(A))\,)\ \lambda(\mathcal{K}) = \lambda(A)$.

Ak matica A spĺňa podmienku z vety 8.7, že maximálna priemerná váha cyklu každého netriviálneho silne súvislého komponentu je rovná maximálnej priemernej váhe cyklu matice $\lambda(A)$, tak A je takmer lineárne periodická s konštantnou maticou lineárnych faktorov. Môžeme ju transformovať na maticu $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$. Výsledná matica A_λ je podľa vety 8.6 takmer periodická s periódou $\mathrm{per}(A_\lambda)$. Teda $\mathrm{lper}(A) = \mathrm{per}(A_\lambda)$.

Výpočtová zložitosť nasledujúceho algoritmu na overenie nutnej a postačujúcej podmienky lineárnej periodickosti s konštatnou maticou lineárnych faktorov a na výpočet lineárnej periódy matice v kladnom prípade je $O(n^3)$.

Algoritmus na overenie lineárnej periodickosti a výpočet lineárnej periódy matice

(i) použijeme Algoritmus silne súvislé komponenty na nájdenie silne súvislých komponentov pomocou Floydovho-Warshallovho algoritmu,

(ii) vypočítame $\lambda(\mathcal{K})$ každého netriviálneho silne súvislého komponentu pomocou Karpovho algoritmu a overíme, či $\lambda(\mathcal{K}) = \lambda(A)$,

(iii) transformujeme maticu $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$,

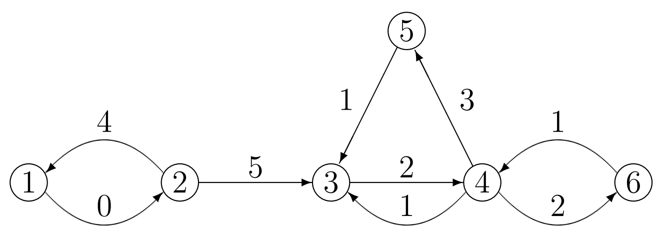
(iv) nájdeme netriviálne vysoko súvislé komponenty $\mathcal{G}(A_\lambda)$ a vypočítame ich vysoké periódy pomocou Gavalcovho algoritmu,

(v) vypočítame $\mathrm{per}(A_\lambda)$ podľa formuly (45) ako najmenší spoločný násobok vysokých periód všetkých netriviálnych vysoko súvislých komponentov s použitím Euclidovho algoritmu na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa $\mathrm{nsd}\{a, b\}$ a
$$\mathrm{nsn}\{a, b\} = \frac{ab}{\mathrm{nsd}\{a, b\}},$$

(vi) $\mathrm{lper}(A) = \mathrm{per}(A_\lambda)$.

Príklad 8.5.1 *Overme lineárnu periodickosť s konštantnou maticou lineárnych faktorov matice A a v kladnom prípade vypočítajme lineárnu periódu matice*
$$A = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & 3 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right).$$

Riešenie. Podľa príkladu 8.4.2 digraf $\mathcal{G}(A)$ zodpovedajúci matici obsahuje dva netriviálne silne súvislé komponenty (viď obr. 10). Maximálna priemerná



Obr. 10: Digraf $\mathcal{G}(A)$

váha cyklov týchto silne súvislých komponentov je $\lambda(A) = 2$. Matica je teda takmer lineárne periodická s konštantnou maticou lineárnych faktorov $Q = (q_{ij})$, $q_{ij} = 2$. Transformujeme maticu na $A_\lambda = \lambda^{-1}(A) \otimes A$ a dostávame takmer periodickú maticu
$$A_\lambda = \left(\begin{array}{cc|cccc} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$
z príkladu 8.4.2 s $\mathrm{per}(A_\lambda) = 6$. Podľa vety 8.6 je $\mathrm{lper}(A) = \mathrm{per}(A_\lambda) = 6$. ♡

8.6 Úlohy

8.1 Pre nasledujúce ireducibilné matice rozhodnite, či je zodpovedajúca matica A_λ periodická. Ak áno, nájdite jej periódu.

a) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ \varepsilon & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & \varepsilon & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

8.2 Pre nasledujúce reducibilné matice rozhodnite, či je zodpovedajúca matica A_λ pre $\lambda = \lambda(A)$ periodická. Ak áno, nájdite jej periódu.

a) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & \varepsilon & 2 & 3 \\ \varepsilon & 6 & 3 & 1 \end{array}\right)$,

b) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 5 & 1 & 3 \\ \varepsilon & 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$,

c) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 4 & \varepsilon & 6 & 2 \\ 3 & \varepsilon & 1 & 5 \end{array}\right)$,

d) $A = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 4 & 3 & 6 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 5 \end{array}\right)$,

e) $A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 4 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & 5 & 2 & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$,

f) $A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 3 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 2 \\ \varepsilon & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$,

g) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{array}\right)$,

h) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \end{array}\right)$,

i) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 4 & \varepsilon & 6 & 2 \\ 5 & \varepsilon & 1 & 6 \end{array}\right)$,

j) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & 4 & 2 \\ 1 & \varepsilon & 4 & 4 \end{array}\right)$,

k) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & 3 & 4 \\ 1 & \varepsilon & 2 & 2 \end{array}\right)$,

l) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 3 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 \end{array}\right)$,

m) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \end{array}\right)$,

n) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 3 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 \end{array}\right)$.

8.3 Pre reducibilné matice z cvičenia 8.2 rozhodnite, či sú lineárne periodické s konštantnou maticou lineárnych faktorov. Ak áno, nájdite ich lineárnu periódu a lineárny faktor.

8.4 Pre nasledujúce reducibilné matice rozhodnite, či je zodpovedajúca matica A_λ pre $\lambda = \lambda(A)$ periodická. Ak áno, nájdite jej periódu.

a) $A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 6 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & 2 & 3 \end{array}\right)$,

b) $A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & 2 & 4 \end{array}\right)$,

c) $A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 6 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & 2 & 4 \end{array}\right)$,

d) $A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 1 & 2 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 \end{array}\right)$,

e) $A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$,

f) $A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$,

g) $A = \left(\begin{array}{cc|c|ccc} 1 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 1 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 4 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$,

h) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 2 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & 1 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$,

i) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 2 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 0 & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$, j) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 8 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & 2 & 3 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$,

k) $A = \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} 1 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 1 & \varepsilon & 1 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 & 5 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 0 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{array}\right)$,

l) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} -1 & 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 0 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 1 & \varepsilon & 1 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & 4 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & -2 & 1 \end{array}\right)$.

8.5 Pre reducibilné matice z cvičenia 8.4 rozhodnite, či sú lineárne periodické s konštantnou maticou lineárnych faktorov. Ak áno, nájdite ich lineárnu periódu a lineárny faktor.

Výsledky:

8.1

a) $\mathrm{per}(A_\lambda) = 1$,
b) $\mathrm{per}(A_\lambda) = 1$,
c) $\mathrm{per}(A_\lambda) = 3$,
d) $\mathrm{per}(A_\lambda) = 4$.

8.2

a) $\mathrm{per}(A_\lambda) = 2$,
b) $\mathrm{per}(A_\lambda) = 2$,
c) $\mathrm{per}(A_\lambda) = 2$,
d) $\mathrm{per}(A_\lambda) = 2$,
e) $\mathrm{per}(A_\lambda) = 2$,
f) $\mathrm{per}(A_\lambda) = 2$,
g) nie,
h) nie,

i) nie,

j) nie,

k) nie,

l) nie,

m) nie,

n) nie.

8.3

a) $\operatorname{lper}(A) = 2$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 3$;

b) $\operatorname{lper}(A) = 2$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 4$;

c) $\operatorname{lper}(A) = 2$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 6$;

d) $\operatorname{lper}(A) = 2$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 6$;

e) $\operatorname{lper}(A) = 2$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 4$;

f) $\operatorname{lper}(A) = 2$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 3$;

g) nie;

h) nie;

i) nie;

j) nie;

k) nie;

l) nie;

m) nie;

n) nie.

8.4

a) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 2$,

b) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 1$,

c) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 1$,

d) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 6$,

e) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 2$,

f) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 3$,

g) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 2$,

h) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 6$,

i) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 6$,

j) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 1$,

k) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 6$,

l) $\operatorname{per}(A_\lambda) = 2$.

8.5

a) $\operatorname{lper}(A) = 2$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 4$,

b) $\operatorname{lper}(A) = 1$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 4$,

c) $\operatorname{lper}(A) = 1$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 4$,

d) $\operatorname{lper}(A) = 6$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 4$,

e) $\operatorname{lper}(A) = 2$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 3$,

f) $\operatorname{lper}(A) = 3$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 3$,

g) $\operatorname{lper}(A) = 2$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 3$,

h) $\operatorname{lper}(A) = 3$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 3$,

i) $\operatorname{lper}(A) = 6$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 3$,

j) $\operatorname{lper}(A) = 1$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 5$,

k) $\operatorname{lper}(A) = 6$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 2$,

l) $\operatorname{lper}(A) = 2$, $\operatorname{lfac}(A): \ q_{ij} = 2$.

9 Robustné matice

9.1 Cieľ kapitoly

Oboznámiť sa s pojmom robustnosť max-plus matice. Oboznámiť sa s nutnými a postačujúcimi podmienkami robustnosti ireducibilnej aj reducibilnej matice a efektívnymi algoritmami na overenie robustnosti.

9.2 Prehľad kapitoly v otázkach

- Definujte robustnú maticu v max-plus algebre.
- Sformulujte nutnú a postačujúcu podmienku robustnosti ireducibilnej matice a popíšte algoritmus na jej overenie.
- Sformulujte nutnú a postačujúcu podmienku robustnosti reducibilnej matice a popíšte algoritmus na jej overenie.

9.3 Pojem robustnosti matice v max-plus algebre

Pojem robustnosti matice je úzko spätý s ustáleným stavom diskrétneho dynamického systému a teda aj s pojmami vlastný vektor a periodickosť matice (viď predchádzajúca kapitola). Pripomeňme si, že systém je v ustálenom stave, ak existuje vektor x a hodnota λ také, že je splnená rovnosť

$$A \otimes x = \lambda \otimes x \tag{46}$$

Definícia 9.1 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Hovoríme, že A je **robustná**, ak pre každý vektor $x \in \mathbb{R}^\star(n)$ existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že $A^k \otimes x$ je vlastným vektorom matice A, t. j. platí*

$$A \otimes (A^k \otimes x) = \lambda \otimes (A^k \otimes x) \tag{47}$$

Je teda zrejmé, že diskrétne dynamické systémy reprezentované maticou prechodu, ktorá je robustná, majú tú vlastnosť, že sa vždy dostanú skôr či neskôr do ustáleného stavu a to nezávisle na dĺžke trvania jedného cyklu na jednotlivých strojoch a času ich spustenia do prevádzky.

Príklad 9.3.1 *Zistime, či pre maticu A a vektor x sa systém dostane do ustáleného stavu*

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Jedná sa o ireducibilnú maticu. Navyše hodnota $\lambda(A) = 0$. Teda ide o periodickú maticu. Keďže najväčší spoločný deliteľ dĺžok cyklov v kritickom digrafe je rovný 1, perióda matice $\mathrm{per}(A) = 1$. Po výpočte prvých šiestich mocnín matice zistíme, že sa hodnoty stabilizovali:

$$A^5 = A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Overme, či platí rovnosť (47) pre $k = 5$.

$$A \otimes (A^5 \otimes x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda(A) \otimes (A^5 \otimes x).$$

Čiže našli sme pre daný vektor x konštantu $k = 5$ takú, že $A^k \otimes x$ je vlastným vektorom matice A. ♡

Samozrejme nemôžeme bez uvedenia ďalších súvislostí na základe toho, že sa systém pri konkrétnom vektore dostal do ustáleného stavu, tvrdiť, že daná matica je robustná. V ďalších častiach kapitoly sa zameriame postupne na riešenie problematiky robustnosti matíc a to najskôr pre ireducibilné a následne reducibilné matice.

9.4 Robustnosť ireducibilných matíc

V tejto časti sa budeme zaoberať robustnosťou ireducibilnej max-plus matice (viď Definícia 4.7). Uvažujme netriviálny prípad matice, ktorá má v každom stĺpci aspoň jednu konečnú hodnotu. Takúto maticu budeme nazývať stĺpcovo - konečná matica. Dôsledkom toho je existencia konečnej maximálnej priemernej váhy cyklu $\lambda(A)$.

Na základe vety 8.3, vety 8.6 a faktu, že periodickosť matice je špeciálnym prípadom lineárnej periodickosti matice v max-plus algebre je zrejmé, že každá ireducibilná stĺpcovo - konečná matica je lineárne periodická s konštantnou maticou lineárnych faktorov $Q = (q_{ij})$, $q_{ij} = \lambda(A)$ a s lineárnou periódou $\mathrm{lper}(A) = \mathrm{per}(A_\lambda)$, kde $A_\lambda = \lambda(A)^{-1} \otimes A$.

Uvádzame nutnú a postačujúcu podmienku robustnosti ireducibilnej matice (prispôsobenú našej terminológii), ktorú dokázal profesor Butkovič v [4].

Veta 9.1 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$ je stĺpcovo - konečná ireducibilná matica. A je robustná vtedy a len vtedy, ak* $\mathrm{lper}(A) = 1$.

Na základe tejto vety môžeme doplniť záver príkladu 9.3.1 o tvrdenie, že daná matica je robustná, t. j. nezáleží na voľbe vektora x, aby sa systém dostal do ustáleného stavu. Inými slovami stačí overiť, že ireducibilná matica A je stĺpcovo - konečná a perióda matice $A_\lambda = \lambda(A)^{-1} \otimes A$ je rovná 1.

Príklad 9.4.1 *Zistime, či ireducibilná matica A je robustná*

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 2 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Jedná sa o ireducibilnú stĺpcovo - konečnú maticu. Maximálna priemerná váha cyklu je $\lambda(A) = 2$. Úpravou zadanej matice dostaneme maticu

$$A_\lambda = \lambda(A)^{-1} \otimes A = 2^{-1} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 2 & 3 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

ktorá je totožná s maticou v príklade 9.3.1. Na základe vety 9.1 zadaná matica je robustná. ♡

Príklad 9.4.2 *Zistime, či ireducibilná matica A je robustná*

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Jedná sa o ireducibilnú stĺpcovo - konečnú maticu. Maximálna priemerná váha cyklu je $\lambda(A) = 0$. Teda ide o periodickú maticu. Zodpovedajúci kritický digraf obsahuje jediný elementárny cyklus dĺžky 3. Z toho vyplýva, že perióda matice $\mathrm{per}(A) = 3$. Na základe vety 9.1 zadaná matica nie je robustná. ♡

9.5 Robustnosť reducibilných matíc

Problematika robustnosti reducibilných matíc je rovnako ako problematika vlastného problému reducibilných matíc zložitejšia v porovnaní s ireducibilnými maticami. V kapitole Vlastný priestor reducibilnej matice sme sa venovali spektrálnej teórii. Predstavili sme Frobeniov normálny tvar matice (viď Definícia 7.7) a zodpovedajúce triedy matice (viď Definícia 7.8). Špeciálnu pozornosť sme venovali spektrálnym triedam matice (viď Definícia 7.9). Pripomíname označenie $T = \{1, 2, \ldots, t\}$. Označme ďalej $T_i = \{j \in T;\ N_j \to N_i\}$.

V prípade ireducibilných matíc sú autormi nutnej a postačujúcej podmienky robustnosti reducibilných matíc, ktorú uvádzame (viď [4]), profesori P. Butkovič, S. Gaubert a R. A. Cunningham-Green.

Veta 9.2 *Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$ je stĺpcovo - konečná reducibilná matica vo Frobeniovom normálnom tvare. Nech N_1, N_2, ..., N_t sú triedy matice A. A je robustná vtedy a len vtedy, ak platia nasledujúce podmienky*

(i) všetky netriviálne triedy N_1, N_2, ..., N_t sú spektrálne,

(ii) *ak pre* $i, j \in T$ *sú* N_i *a* N_j *netriviálne triedy a* $i \notin T_j$ *a* $j \notin T_i$*, tak* $\lambda(A_{ii}) = \lambda(A_{jj})$,

(iii) $\mathrm{lper}(A_{jj}) = 1$ *pre všetky* $j \in T$.

Je potrebné uviesť, že posledná podmienka v horeuvedenej vete je vlastne podmienkou z vety 9.1, keďže blokové matice A_{ii} reprezentujú silne súvislé komponenty digrafu matice A a teda sú ireducibilné.

Príklad 9.5.1 *Zistime, či je daná matica* A *robustná*

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 3 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 2 \\ \varepsilon & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

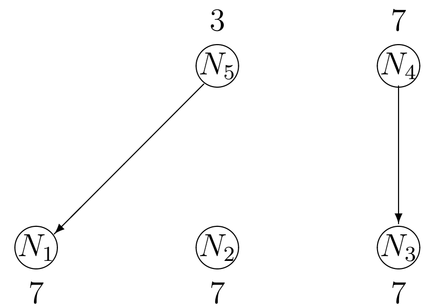
Riešenie. Jedná sa o maticu vo Frobeniovom normálnom tvare. Keďže platí $\lambda(A_{11}) = \lambda(A_{22}) = \lambda(A_{33}) = 3$, tak je zrejmé, že sú všetky triedy spektrálne. Navyše je automaticky splnená aj druhá podmienka vety 9.2. Teda v takomto prípade stačí overovať tretiu podmienku. Vzhľadom na to, že kritické digrafy matíc A_{22}, resp. A_{33}, obsahujú len jeden cyklus dĺžky 2, dostávame $\mathrm{lper}(A_{22}) = \mathrm{lper}(A_{33}) = 2$. Matica A nie je robustná. ♡

V ďalších príkladoch sa budeme venovať všeobecnejším prípadom reducibilných matíc, menovite prípadom, keď má matica viac ako jednu vlastnú hodnotu.

Príklad 9.5.2 *Zistime, či je daná matica* A *robustná*

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc} 7 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & 7 & . & . & . & . & . & . & . \\ \hline . & . & 7 & . & . & . & . & . & . \\ \hline . & . & . & 4 & 7 & . & . & . & . \\ . & . & . & 7 & 2 & . & . & . & . \\ \hline . & . & . & . & 4 & 0 & 5 & . & . \\ . & . & . & . & . & 3 & 7 & . & . \\ \hline 1 & 0 & . & . & . & . & . & 2 & 4 \\ . & . & . & . & . & . & . & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Riešenie. Jedná sa o maticu vo Frobeniovom normálnom tvare z príkladu 7.5.4. Tam sme ukázali, že všetky triedy sú netriviálne a spektrálne. Z kondenzovaného digrafu (viď obr. 11) je zrejmé, že druhá podmienka robustnosti splnená nie je. Platí totiž, že $2 \notin T_5 = \emptyset$ a zároveň $5 \notin T_2 = \emptyset$, ale $\lambda(A_{22}) = 7 \neq \lambda(A_{55}) = 3$. Na základe vety 9.2 zadaná matica nie je robustná. ♡

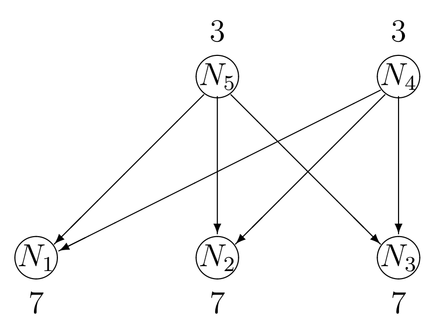


Obr. 11: Kondenzovaný digraf

Príklad 9.5.3 *Zistime, či je daná matica A robustná*

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc}
7 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & 7 & . & . & . & . & . & . & . \\ \hline
. & . & 7 & . & . & . & . & . & . \\ \hline
. & . & . & 4 & 7 & . & . & . & . \\
. & . & . & 7 & 2 & . & . & . & . \\ \hline
0 & . & 0 & . & 4 & 0 & 4 & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & 3 & . & . \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & 2
\end{array}\right).$$

Riešenie. Modifikovali sme maticu z predchádzajúceho príkladu. Zmenili sme hodnoty v matici A_{55} a pridali hrany a_{61}, a_{63}, a_{83} a a_{84}. Naďalej však platí, že všetky triedy sú netriviálne a spektrálne (viď obr. 12). Navyše ďalšie spojenia medzi triedami zabezpečili, že druhá podmienka robustnosti splnená tentokrát je. Keďže $\mathrm{lper}(A_{33}) = 2$ ako aj $\mathrm{lper}(A_{55}) = 2$ (kritické digrafy obsahujú len cykly dĺžky dva), tak tretia podmienka splnená nie je. Na základe vety 9.2 zadaná matica nie je robustná. ♡



Obr. 12: Kondenzovaný digraf

Stačí malá modifikácia predchádzajúceho príkladu a výsledok bude pozitívny.

Príklad 9.5.4 *Zistime, či je daná matica A robustná*

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc}
7 & 4 & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & 7 & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & 7 & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & 7 & 7 & . & . & . & . \\
. & . & . & 7 & 2 & . & . & . & . \\
\hline
0 & . & 0 & . & 4 & 0 & 4 & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & 3 & . & . \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & 3
\end{array}\right).$$

Riešenie. Zmenili sme hodnoty a_{44} a a_{99} oproti predchádzajúcemu príkladu. Matica ostala vo Frobeniovom normálnom tvare. Zmeny neovplyvnili platnosť prvej a druhej podmienky (kondenzovaný digraf je rovnaký ako v predchádzajúcom príklade). Keďže ale v oboch kritických digrafoch pribudli slučky, $\operatorname{lper}(A_{ii}) = 1$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, 5$. Teda tretia podmienka splnená tentokrát je. Na základe vety 9.2 zadaná matica je robustná. ♡

9.6 Úlohy

9.1 Zistite, či sú dané ireducibilné matice robustné.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & -1 \\ 0 & -2 & \varepsilon \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 & -1 \\ 1 & -1 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & \varepsilon & -2 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 4 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & 2 \\ 1 & -2 & \varepsilon \end{pmatrix}$,

f) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 2 \\ 8 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$,

g) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 4 \\ 3 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$,

h) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & 1 \\ 7 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$,

i) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & \varepsilon & -4 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$,

j) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & \varepsilon & -1 \\ -2 & -2 & -3 & -4 \\ -3 & \varepsilon & 2 & -2 \end{pmatrix}$,

k) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ 3 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$, l) $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$.

9.2 Zistite, či sú dané reducibilné matice robustné.

a) $A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 6 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & 2 & 3 \end{array}\right)$,

b) $A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & 2 & 4 \end{array}\right)$,

c) $A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 6 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & 2 & 4 \end{array}\right)$,

d) $A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 1 & 2 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 \end{array}\right)$,

e) $A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$,

f) $A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$,

g) $A = \left(\begin{array}{cc|c|ccc} 1 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 1 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 4 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 0 \end{array}\right)$,

h) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 2 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & 1 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$,

i) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 2 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 0 & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$,

j) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 8 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & 2 & 3 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$,

k) $A = \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} 1 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 1 & \varepsilon & 1 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 & 5 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 0 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{array}\right)$,

l) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} -1 & 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 0 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 1 & \varepsilon & 1 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & 4 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & -2 & 1 \end{array}\right)$.

9.3 Zistite, či sú dané reducibilné matice robustné.

a) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \hline 6 & 5 & 4 \end{array}\right)$,

b) $A = \left(\begin{array}{c|cc} 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 6 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$,

c) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 7 & 2 \end{array}\right)$,

d) $A = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \end{array}\right)$,

e) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \end{array}\right)$,

f) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 5 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \end{array}\right)$,

g) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 1 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 7 & 2 \end{array}\right)$,

h) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & 4 & 2 \\ 1 & \varepsilon & 4 & 4 \end{array}\right)$.

i) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & 3 & 4 \\ 1 & \varepsilon & 2 & 2 \end{array}\right)$.

j) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 4 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 4 \end{array}\right)$,

k) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 4 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 4 \end{array}\right)$,

l) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 3 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 3 \end{array}\right).$ m) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 3 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 3 \end{array}\right).$

9.4 Zistite, či sú dané reducibilné matice robustné.

$$\text{a)}\ A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & 8 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 6 \end{array}\right),$$

$$\text{b)}\ A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 5 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 1 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & 5 & 3 \end{array}\right),$$

$$\text{c)}\ A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 2 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 \end{array}\right),$$

$$\text{d)}\ A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 6 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 5 \end{array}\right),$$

$$\text{e) } A=\left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 2 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & 4 & 3 \end{array}\right),$$

$$\text{f) } A=\left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & 3 & 0 \end{array}\right),$$

$$\text{g) } A=\left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 2 & 3 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & 4 & 2 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & 3 & 0 \end{array}\right),$$

$$\text{h) } A=\left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 2 & 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & 4 & 3 \end{array}\right),$$

Výsledky:

9.1

a) nie je robustná,

b) nie je robustná,

c) nie je robustná,

d) nie je robustná,

e) je robustná,
f) nie je robustná,
g) je robustná,
h) je robustná,
i) je robustná,
j) nie je robustná,
k) nie je robustná,
l) nie je robustná.

9.2

a) nie je robustná,
b) je robustná,
c) je robustná,
d) nie je robustná,
e) nie je robustná,
f) nie je robustná,
g) nie je robustná,
h) nie je robustná,
i) nie je robustná,
j) je robustná,
k) nie je robustná,
l) nie je robustná.

9.3

a) nie je robustná,
b) je robustná,
c) nie je robustná,
d) nie je robustná,
e) nie je robustná,
f) je robustná,
g) je robustná,
h) nie je robustná,
i) je robustná,
j) je robustná,
k) nie je robustná,
l) nie je robustná,
m) nie je robustná.

9.4

a) nie je robustná,
b) nie je robustná,
c) nie je robustná,
d) nie je robustná,
e) je robustná,
f) je robustná,
g) je robustná,
h) je robustná.

Literatúra

[1] Bacceli, F. L. – Cohen, G. – Olsder, G. J. – Quadrat, J. P.: Synchronization and Linearity, J. Wiley and Sons, 1992.

[2] Balcer, Y. – Veinott, A. F.: Computing a graph's period quadratically by node condensation, Discr. Mathem. **38**, 1973, 295-303.

[3] Brualdi, R. A. – Ryser, H. J.: Combinatorial Matrix Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **39**, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[4] Butkovič, P.: Max-linear Systems: Theory and Algorithms, Springer-Verlag London 2010, ISBN 978-1-84996-298-8.

[5] Cuninghame-Green, R. A.: Minimax algebra, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems **166**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[6] De Schutter, B.: On the ultimate behaviour of the sequence of consecutive powers of a matrix in the max-plus algebra, Linear Algebra and its Applications **307**, 2000, 103–117.

[7] Gavalec, M.: Periodicity in extremal algebras, GAUDEAMUS University of Hradec Králové 2004, ISBN 80-7041-762-5.

[8] Heidergott, B. – Olsder, G. J. – van der Woude, J.: Max plus at work: Modeling and analysis of synchronized systems, Princeton University Press 2004, ISBN 978-0-69111-763-8.

[9] Chartrand, G. – Oellermann, O. R.: Applied and algorithmic graph theory, McGraw-Hill, Inc., 1993, ISBN 0-07-557101-3.

[10] Karp, R. M.: A characterization of the minimum cycle mean in a digraph, Discrete Mathematics **23**, 1978, 309–311.

[11] Molnárová, M.: Periods of matrices with zero-weight cycles in max-algebra, Tatra Mountains Math. Publ. **16**, 1999, 135–141.

[12] Molnárová, M.: Computational complexity of Nachtigall's representation, Optimization **52**, 2003, 93–104.

[13] Molnárová, M.: Generalized matrix period in max-plus algebra, Linear Algebra and its Applications **404**, 2005, 345–366.

[14] Molnárová, M. – Pribiš, J.: Matrix period in max-algebra, Discrete Applied Mathematics **103**, 1999, 167–175.

[15] Nachtigall, K.: Powers of Matrices over an Extremal Algebra with Applications to Periodic Graphs, Math.Methods of Oper.Research **46**, 1997, 87–102.

[16] Plavka, J.: Parametric Discrete Dynamic Systems, max-plus and fuzzy cases, EQUILIBRIA, Košice, 2008, ISBN 978-80-89284-23-8.

[17] Sinha, H. K.: Linear Systems, J. Wiley and Sons, 1991.

[18] Thomason, M. G.: Convergence of powers of a fuzzy matrix, J. Math. Anal. Appl. **57**, 1977, 476-480.

[19] Warshall, D.: A theorem on Boolean matrices, J. ACM **9**, 1962, 11–12.

[20] Zimmermann, K.: Extremální algebra, Ekonomický ústav ČSAV, Praha, 1976.

[21] Zimmermann, U.: Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic structures, Ann. Discrete Math. **10**, North Holland, Amsterdam, 1981.

Názov: Stabilita diskrétnych dynamických systémov

Autor: RNDr. Monika Molnárová, PhD.

Vydavateľ: Technická univerzita v Košiciach
Rok: 2019
Vydanie: prvé
Počet strán: 174
Náklad: 50 ks

ISBN 978-80-553-3345-8

ISBN 978-80-553-3345-8