Racionálne funkcie

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

1. Algebrické rovnice
   - Hornerova schéma
   - Racionálny koreň algebrickej rovnice
2. Racionálne funkcie
   - Racionálne funkcie
   - Rozklad na elementárne (parciálne) zlomky

Polynóm

Definícia

Každú funkciu $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, nazývame polynómom nad $\mathbb{R}$. Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazývame koeficientami polynómu $P(x)$. Číslo n nazývame stupeň polynómu.

Hodnotou polynómu $P(x)$ v bode $\alpha \in \mathbb{R}$ nazývame číslo $P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n$.

Nech $\alpha \in \mathbb{R}$. Koreňom (nulovým bodom) polynómu $P(x)$ nazývame číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ vtedy, ak $P(\alpha) = 0$.

Hornerova schéma

Výpočet hodnoty polynómu pomocou Hornerovej schémy

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\ &= ((\ldots((a_n)_1 x + a_{n-1})_2 x + \ldots + a_1)_n x + a_0)_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|rrrcrr} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & b_{n-1}\cdot\alpha & b_{n-2}\cdot\alpha & \ldots & b_1\cdot\alpha & b_0\cdot\alpha \\ \hline & a_n & b_{n-1}\alpha + a_{n-1} & b_{n-2}\alpha + a_{n-2} & \ldots & b_1\alpha + a_1 & b_0\alpha + a_0 \\ & = b_{n-1} & = b_{n-2} & = b_{n-3} & \ldots & = b_0 & = P(\alpha) \end{array}$$

Ak $P(\alpha) = 0$

$$P(x) = (x-\alpha)\cdot(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0)$$

Hornerova schéma - Príklad 1

$$P(x) = x^2 - 7x + 10$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -7 & 10 & & \\
3 & & 3 & -12 & & \\
\hline
 & 1 & -4 & -2 & = & P(3)
\end{array}$$

Hornerova schéma - Príklad 2

$$P(x) = x^2 - 7x + 10$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -7 & 10 & & \\ 2 & & 2 & -10 & & \\ \hline & 1 & -5 & 0 & = & P(2) \end{array}$$

Ak $P(\alpha) = 0$

$$P(x) = (x-2) \cdot (x-5)$$

Algebrická rovnica

Definícia

Nech $n \in \mathbb{N}$. Majme polynóm $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$ pre $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Nech $a_n \neq 0$. Rovnicu

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

nazývame algebrickou rovnicou n-tého stupňa s celočíselnými koeficientami.

Príklady algebrických rovníc I

Príklad 1. $x^2 - 7x + 10 = 0$

Príklad 2. $x^2 - 4x + 5 = 0$

Príklad 3. $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

Príklad 4. $x^3 - 27 = 0$

Príklad 5. $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = 0$

Príklad 6. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

Príklad 7. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Algebrická rovnica

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_i \in \mathbb{Z}$, pre $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, a nech $a_n \neq 0$. Ak $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pre p, q nesúdeliteľné, je koreňom rovnice (1), tak je koeficient a_n deliteľný číslom q a koeficient a_0 deliteľný číslom p.

Príklady algebrických rovníc II

Príklad 7. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Príklad 8. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

Príklad 9. $x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2 = 0$

Definícia racionálnej funkcie

Definícia

Nech $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy na $\mathbb{R}$, nech $Q(x)$ nie je nulový polynóm. Nech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sú jediné navzájom rôzne reálne korene polynómu $Q(x)$. Každú funkciu tvaru
$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} : \mathbb{R} - \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \longrightarrow \mathbb{R}$
nazývame reálnou racionálnou funkciou.
Ak je stupeň polynómu $P(x)$ menší než stupeň polynómu $Q(x)$, tak $R(x)$ je rýdzoracionálna funkcia.

Veta

Každá racionálna funkcia sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie.

Rýdzoracionálna funkcia – Príklad

Príklad:

Napíšme racionálnu funkciu $R(x)$ v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 8x - 7}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

Rýdzoracionálna funkcia – Príklad

Príklad:

Napíšme racionálnu funkciu $R(x)$ v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 8x - 7}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

Riešenie:

$$R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 8x - 7}{x^3 + 3x^2 - 4} = x + 2 + \frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

Elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

Definícia

Každú rýdzoracionálnu funkciu $R(x) : \mathbb{R} - \{\alpha\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$R(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^k}, \qquad kde\ A,\ \alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N},$$

alebo $R(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$R(x) = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \qquad kde\ M,\ N,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$$

a polynóm $x^2 + px + q$ nemá reálne korene, nazývame reálnym elementárnym (parciálnym) zlomkom.

Jednoznačnosť rozkladu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

Veta

Každá reálna rýdzoracionálna funkcia sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare súčtu reálnych elementárnych zlomkov.

Rozklad na elementárne zlomky – typ 1

Príklad:

Bez počítania koeficientov napíšme racionálnu funkciu

$$R(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+5)(x-1)(x+2)(x-3)}$$

v tvare súčtu elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Rozklad na elementárne zlomky – typ 1

Príklad:

Bez počítania koeficientov napíšme racionálnu funkciu

$$R(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+5)(x-1)(x+2)(x-3)}$$

v tvare súčtu elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie:

$$R(x) = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-3}$$

Rozklad na elementárne zlomky – typ 2

Príklad:

Bez počítania koeficientov napíšme racionálnu funkciu

$$R(x) = \frac{x^4 - x^2 - 5}{(x-2)^4(x+1)^3}$$

v tvare súčtu elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Rozklad na elementárne zlomky – typ 2

Príklad:

Bez počítania koeficientov napíšme racionálnu funkciu

$$R(x) = \frac{x^4 - x^2 - 5}{(x-2)^4(x+1)^3}$$

v tvare súčtu elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie:

$$R(x) = \frac{A}{(x-2)^4} + \frac{B}{(x-2)^3} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x+1)^3} + \frac{F}{(x+1)^2} + \frac{G}{x+1}$$

Rozklad na elementárne zlomky – typ 3

Príklad:

Bez počítania koeficientov napíšme racionálnu funkciu

$$R(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 9}{(x^2 + 4)(x^2 + 2x + 5)}$$

v tvare súčtu elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Rozklad na elementárne zlomky – typ 3

Príklad:

Bez počítania koeficientov napíšme racionálnu funkciu

$$R(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 9}{(x^2+4)(x^2+2x+5)}$$

v tvare súčtu elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie:

$$R(x) = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5}$$

Rozklad na elementárne zlomky – typ 4

Príklad:

Bez počítania koeficientov napíšme racionálnu funkciu

$$R(x) = \frac{x^4 + x^2 - x + 9}{(x^2+4)^2(x^2+2x+5)}$$

v tvare súčtu elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Rozklad na elementárne zlomky – typ 4

Príklad:

Bez počítania koeficientov napíšme racionálnu funkciu

$$R(x) = \frac{x^4 + x^2 - x + 9}{(x^2+4)^2(x^2+2x+5)}$$

v tvare súčtu elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie:

$$R(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{x^2+2x+5}$$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

1. $R(x) = \dfrac{2x^2 + 10x - 18}{x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x}$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

1. $$R(x) = \frac{2x^2 + 10x - 18}{x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x}$$

$$R(x) = \frac{-3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

2. $R(x) = \dfrac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4}$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

2. $R(x) = \dfrac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4}$

$$R(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2}$$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

3. $R(x) = \dfrac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 8x - 7}{x^3 + 3x^2 - 4}$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

3. $$R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 8x - 7}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

$$R(x) = x + 2 + \frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

3. $$R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 8x - 7}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

$$R(x) = x + 2 + \frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

$$R(x) = x + 2 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2}$$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

4. $R(x) = \dfrac{5x^2 - 5x + 9}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

4. $$R(x) = \frac{5x^2 - 5x + 9}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}$$

$$R(x) = \frac{3}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2+4}$$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

5. $R(x) = \dfrac{5x^2 - x + 8}{x^3 + 4x}$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

5. $$R(x) = \frac{5x^2 - x + 8}{x^3 + 4x}$$

$$R(x) = \frac{2}{x} + \frac{3x - 1}{x^2 + 4}$$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

6. $R(x) = \dfrac{2x^4 + x^3 - x + 1}{x^3 + 1}$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

6. $R(x) = \dfrac{2x^4 + x^3 - x + 1}{x^3 + 1}$

$$R(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2 - x + 1}$$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

7. $R(x) = \dfrac{3x^3 - 14x^2 + 27x - 16}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 2x)}$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

7. $R(x) = \dfrac{3x^3 - 14x^2 + 27x - 16}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 2x)}$

$$R(x) = \frac{3}{(x-2)^3} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x}$$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

8. $R(x) = \dfrac{5x^2 - x + 12}{x^3 + x^2 + 3x - 5}$

Rozklad na elementárne zlomky – Príklad

Príklad:

Rozložte racionálnu funkciu na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$

8. $$R(x) = \frac{5x^2 - x + 12}{x^3 + x^2 + 3x - 5}$$

$$R(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2+2x+5}$$

Ďakujem za pozornosť.