Derivácia funkcie

Derivácia funkcie je jeden z najužitočnejších nástrojov, ktoré používame v matematike a jej aplikáciách v ďalších odboroch. Stručne zhrnieme základné informácie o deriváciách. Podrobnejšie informácie nájdete v rozsiahlych učebniciach [3, 4].

Definícia 1 *Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu x.* ***Deriváciou funkcie f v bode x*** *(podľa premennej x) nazývame číslo*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

za predpokladu, že limita v (1) *existuje.* ■

Poznámka 1 Ak budeme meniť bod x, získame funkciu, ktorú tiež označujeme $f'(x)$. Túto funkciu môžeme následne ďalej derivovať, čím získame 2. – $f''(x)$, ..., n-tú deriváciu – $f^{(n)}(x)$.

Poznámka 2 Počítanie derivácií na základe (1) by bolo veľmi nepraktické. V praxi sa používajú pravidlá a vzorce na derivovanie, uvedené nižšie.

Pravidlá derivovania výrazov obsahujúcich operácie

Nech funkcie f a g majú na množine M deriváciu. Potom na množine M platí:

$$(c \cdot f)' = c \cdot (f)', \quad \text{kde } c \text{ je číslo – konštanta,} \tag{2}$$

$$(f+g)' = (f)' + (g)', \tag{3}$$

$$(f-g)' = (f)' - (g)', \tag{4}$$

$$(f \cdot g)' = (f)' \cdot (g) + (f) \cdot (g)', \tag{5}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{(f)' \cdot (g) - (f) \cdot (g)'}{(g)^2}, \quad \text{kde } g \neq 0. \tag{6}$$

Derivácie elementárnych funkcií

Pre každé x z príslušného definičného oboru platia nasledujúce vzorce:

1. $(c)' = 0$, kde c je číslo – konštanta,
2. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, kde a je reálne číslo,
3. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,
4. $(a^x)' = a^x \ln a$,
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
7. $(\sin x)' = \cos x$,
8. $(\cos x)' = -\sin x$,
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
10. $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
14. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$,
15. $\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = f'_g\big(g(x)\big)g'(x)$,
16. $(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x)\ln f(x)})'$, kde $f(x) > 0$.

Poznámka 3 Namiesto funkcie premennej x by sme mohli použiť funkciu nejakej inej premennej, napríklad funkciu $g(t)$ premennej t. Potom by sme hovorili o derivovaní podľa premennej t, čo by sme mohli označiť, napríklad, $[g(t)]'_t$, $g'_t(t)$, alebo stručne g'_t. Ako vidíme vo vzorcoch vyššie, značka x sa zvykne vypustiť, keď je zrejmé, o akú deriváciu sa jedná. Derivácie sa používajú aj pre funkcie viacerých premenných, v tom prípade sa derivácie nazývajú parciálne a je potrebné ich vyznačiť (napríklad pomocou spodného indexu).

Poznámka 4 Vzorec 15 sa zvykne označovať ako „derivácia zloženej funkcie“. Ak skombinujeme tento vzorec s inými, dostaneme „všeobecnejšie“ vzorce. Pritom môžeme použiť aj iné symboly – vzorec môžeme nazvať „obrázkový“. Napríklad

$$(\sin\heartsuit)'_{\spadesuit} = \cos\heartsuit \cdot (\heartsuit)'_{\spadesuit}\,,$$

čo chápeme zhruba vo význame „derivácia sínusu je kosínus“. Na deriváciu srdiečka podľa lístočku pritom nesmieme zabúdať.

Algoritmus derivovania (nielen) zložených funkcií

Pri derivovaní zložitejších zložených výrazov môžeme použiť nasledujúci postup:

1. krok: Určíme „vonkajšiu“ operáciu alebo funkciu daného výrazu.

2. krok: Predstavíme alebo napíšeme si (obrázkový) vzorec na jej derivovanie.

3. krok: Vzorec použijeme, pričom v podstate dvakrát prekresľujeme „obrázky“ (symboly), ktoré sa vo výraze vyskytujú.

4. krok: Pri vzniku derivácií „nových“ výrazov môžeme otvárať nové „okná“ a v každom pokračovať od kroku 1.

Príklad 1 *Zderivujme funkciu* $f(x) = x\cdot\sin(x) + \sqrt[3]{x^2 - x + 5}$.

Riešenie. Pri „skenovaní“ výrazu – predpisu funkcie – si môžeme všimnúť, že je poskladaný z operácií násobenia, sčítavania, odčítavania a troch funkcií – sínusu, 3. odmocniny a 2. mocniny. Vonkajšou operáciou (ktorú by sme na kalkulačke vykonávali ako poslednú pri dosadzovaní nejakej hodnoty x) je súčet. Preto ako prvé pravidlo použijeme vzťah (3). Ďalej zapíšeme vzorce tak, ako by sa mohli vyskytovať na papieri, keby sme chceli pomaly a precízne postupovať podľa uvedeného návodu. Nižšie postup okomentujeme.

$$\left(x\cdot\sin(x) + \sqrt[3]{x^2 - x + 5}\right)' = \left(x\cdot\sin(x)\right)' + \left(\sqrt[3]{x^2 - x + 5}\right)' =$$

$$= \sin(x) + x\cdot\cos(x) + \frac{2x-1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-x+5)^2}}\,.$$

$$\left(x\cdot\sin(x)\right)' = \left(x\right)'\cdot\sin(x) + x\cdot\left(\sin(x)\right)' = 1\cdot\sin(x) + x\cdot\cos(x) = \sin(x) + x\cdot\cos(x)$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2 - x + 5}\right)' = \left((x^2 - x + 5)^{1/3}\right)' = \tfrac{1}{3}\cdot(x^2 - x + 5)^{-2/3}\cdot(x^2 - x + 5)' = \tfrac{2x-1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-x+5)^2}}$$

$$(x^2 - x + 5)' = (x^2)' - (x)' + (5)' = 2\cdot x - 1 + 0 = 2x - 1$$

Po použití pravidla „derivácia súčtu je súčet derivácií“ vznikli dve nové úlohy na derivovanie. Na každú z týchto úloh sme si otvorili nové „okno“. V hornom okne sme identifikovali **súčin ako vonkajšiu operáciu** a „prekreslili“ sme vzorec (5) s tým, že namiesto f sme nakreslili x a namiesto g sme nakreslili $\sin(x)$. Ďalej sme už priamo použili vzorce na derivovanie elementárnych funkcií. V spodnom okne sme ako **vonkajšiu funkciu** identifikovali **3. odmocninu**. Odmocniny je potrebné zapísať v tvare mocnín a na derivovanie použiť vzorec 2. Ten sme si predstavili ako obrázkový vzorec $\left(\heartsuit^{1/3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (\heartsuit)^{-2/3} \cdot (\heartsuit)'$ a následne ho „odkreslili“, pričom namiesto srdiečka $\heartsuit$ sme dvakrát namaľovali $x^2 - x + 5$. Na novú deriváciu sme si ďalšie pomocné okno a ako vonkajšie sme identifikovali operácie odčítavania a sčítavania. Po použití kombinácie pravidiel na derivovanie rozdielu a súčtu sme následne použili vzorce na derivovanie elementárnych funkcií. Následne sme **okná pozatvárali** – výsledné vzorce sme postupne prepisovali tam, odkiaľ sme príslušné úlohy na derivovanie dostali. $\square$

Poznámka 5 Po istej dobe tréningu nebude potrebné otvárať nové okná, pretože výsledky jednoduchších derivácií dokážeme „rovno vypísať“. Avšak môže byť užitočné si okná otvoriť, napríklad v tomto prípade sa hodí okno na derivovanie 3. odmocniny, avšak namiesto $(x^2-x+5)'$ by bolo možné rovno napísať $2x - 1$, čím sa jednak skráti zápis a odpadne otváranie ďalšieho okna.

Príklad 2 *Zderivujme funkciu $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)$, kde k je konštanta. Výslednú deriváciu upravme (zjednodušme).*

Riešenie. Pri riešení tejto úlohy len vypíšeme príslušné vzťahy (komentár – vysvetlenie jednotlivých krokov postupu – si skúste doplniť sami).

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+k}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}.$$

$$\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)' = (x)' + \left(\sqrt{x^2+k}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+k}} = \frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}}$$

$$\left(\sqrt{x^2+k}\right)' = \left((x^2+k)^{1/2}\right)' = \tfrac{1}{2} \cdot (x^2+k)^{-1/2} \cdot (x^2+k)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+k}}$$

$$(x^2+k)' = (x^2)' + (k)' = 2x + 0 = 2x$$

$\square$

V odporúčanej literatúre [1, 2, 5] uvedenej na konci tohto textu je možné nájsť ďalšie riešené príklady alebo neriešené úlohy.

Úlohy

V úlohách 1–30 zderivujte funkciu $f(x)$. Výsledky sa snažte upraviť, ak to pokladáte za možné.

1. $f(x) = 3x^4 - 7x^2 + 5x - 10$
2. $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-6}$
3. $f(x) = -\dfrac{3}{x^6} + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = x \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x}$
6. $f(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^x - 5 \cdot 2^x + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$
7. $f(x) = \dfrac{5^x}{2^x} + 7^x \cdot 2^x + 2^{2x}$
8. $f(x) = 2 \ln x - 3 \log x + \frac{2}{5} \log_5 x$
9. $f(x) = 2 \sin x - 4 \cos x + 3 \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$
10. $f(x) = \frac{3}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \operatorname{arccotg} x + \arcsin x + {}$ $+ \arccos x$
11. $f(x) = 2x^3 + \sqrt{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2$
12. $f(x) = \log x + 10^x - x^{10}$
13. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg} x - \sin x$
14. $f(x) = (x^2 + 4) \cdot \cos x$
15. $f(x) = (\mathrm{e}^x - 2^x) \cdot \operatorname{tg} x$
16. $f(x) = (x^5 - 4x^3 + 7x + 2)(3x^3 - 2x^2 + {}$ $+ 2x - 1)$
17. $f(x) = (1 - x) \cdot \ln x + \mathrm{e}^x \cdot \ln x$
18. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 + x + 1}$
19. $f(x) = \dfrac{3x + 5}{\operatorname{cotg} x}$
20. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\operatorname{arctg} x}$
21. $f(x) = \dfrac{\log x}{10 - 10^x}$
22. $f(x) = \mathrm{e}^{3x} + \frac{2}{5} \cos(5x) - 6 \sin \frac{x}{3}$
23. $f(x) = \operatorname{arctg} 4x - \arcsin(3x + 1)$
24. $f(x) = \ln(x^2 + x) + \log(1 - 2x)$
25. $f(x) = (x^2 + x + 4)^5 + (\mathrm{e}^x + x)^{2/5}$
26. $f(x) = \sqrt{x^3 - 1} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$
27. $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$
28. $f(x) = \ln \cos \mathrm{e}^x$
29. $f(x) = \arcsin \sqrt{2x}$
30. $f(x) = (\mathrm{e}^{2x+1})^3$

Výsledky:

1. $12x^3 - 14x + 5$
2. $2x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{3}{2}} + 18x^{-7}, \quad x > 0$
3. $\dfrac{18}{x^7} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad x > 0$
4. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1, \quad x > 0$
5. $\dfrac{3}{2} \cdot \sqrt{x} - 2x, \quad x > 0$
6. $3 \cdot \mathrm{e}^x - 5 \cdot 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \ln \frac{3}{2}$
7. $\left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot \ln \frac{5}{2} + 14^x \cdot \ln 14 + 4^x \cdot \ln 4$
8. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x \ln 10} + \dfrac{2}{5x \ln 5}$
9. $2 \cos x + 4 \sin x + \dfrac{3}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$
10. $\dfrac{1}{1 + x^2}$
11. $6x^2 + \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt{x} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

12. $\dfrac{1}{x\ln 10} + 10^x \cdot \ln 10 - 10x^9$

13. $\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{1+x^2} - \cos x$

14. $2x \cdot \cos x - (x^2+4) \cdot \sin x$

15. $(\mathrm{e}^x - 2^x \cdot \ln 2) \cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{\mathrm{e}^x - 2^x}{\cos^2 x}$

16. $24x^7 - 14x^6 - 60x^5 + 35x^4 + 52x^3 - 12x^2 + {}$
$+ 20x - 3$

17. $(\mathrm{e}^x - 1) \cdot \ln x + \dfrac{1 - x + \mathrm{e}^x}{x}$

18. $\dfrac{(x^2+x+1)\cos x - (2x+1)\sin x}{(x^2+x+1)^2}$

19. $\dfrac{3\operatorname{cotg} x + \dfrac{3x+5}{\sin^2 x}}{(\operatorname{cotg} x)^2} = \dfrac{\frac{3}{2}\sin 2x + (3x+5)}{\cos^2 x}$,
$x \neq k \cdot \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

20. $f(x) = \dfrac{2x \operatorname{arctg} x - 1}{\operatorname{arctg}^2 x}$

21. $\dfrac{\frac{10-10^x}{x \cdot \ln 10} + 10^x \ln 10 \cdot \log x}{(10-10^x)^2}$

22. $3\mathrm{e}^{3x} - 2\sin(5x) - 2\cos\frac{x}{3}$

23. $\dfrac{4}{1+16x^2} - \dfrac{3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$

24. $\dfrac{2x+1}{x^2+x} - \dfrac{2}{\ln 10 \cdot (1-2x)}$

25. $f(x) = 5(2x+1)(x^2+x+4)^4 +$
$+\frac{2}{5}(\mathrm{e}^x + x)^{-3/5} \cdot (\mathrm{e}^x + 1)$

26. $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} + \dfrac{1}{3\cos^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}$

27. $\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$

28. $\dfrac{-\sin \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^x}{\cos \mathrm{e}^x} = -\mathrm{e}^x \cdot \operatorname{tg} \mathrm{e}^x$

29. $\dfrac{x}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{1-2x}}$

30. $6(\mathrm{e}^{2x+1})^2 \cdot \mathrm{e}^{2x+1} = 6(\mathrm{e}^{2x+1})^3$

Odporúčaná literatúra

[1] Baculíková, B. – Grinčová, A.: *Matematika 1. Vzorové a neriešené úlohy*, Košice, 2013, 150 s., ISBN 978-80-553-1501-0, `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/13/Vzorove_a_neriesene_ulohy_0_0.pdf`

[2] Eliaš, J. – Horváth, J. – Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky. 2. časť*, 5. vydanie, Alfa, Bratislava, 1979, 256 s.

[3] Ivan, J.: *Matematika 1*, Alfa, SNTL, 1983, 704 s.

[4] Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M.: *Matematika I*, SVTL, 1963, Alfa, SNTL, 1971, 758 s.

[5] *Matematika I*, elektronické učebné texty projektu IT4KT, `http://it4kt.cnl.sk/c/mat/student/07.html`