Technická univerzita v Košiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky

KATEDRA MATEMATIKY A TEORETICKEJ INFORMATIKY

Aplikovaná štatistika

Vzorce

$100(1-\alpha)\%$-ný intervaly spoľahlivosti

μ (poznáme σ^2), $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

obojstranný	ľavostranný	pravostranný
$\left\langle \overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$	$\left\langle \overline{x} - u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \infty \right)$	$\left(-\infty; \overline{x} + u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$

μ (nepoznáme σ^2), $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

obojstranný	ľavostranný	pravostranný
$\left\langle \overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right\rangle$	$\left\langle \overline{x} - t_{1-\alpha}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}; \infty \right)$	$\left(-\infty; \overline{x} + t_{1-\alpha}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right\rangle$

σ^2 (poznáme μ), $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

obojstranný	ľavostranný	pravostranný
$\left\langle \frac{n\, s_0^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}; \frac{n\, s_0^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \right\rangle$	$\left\langle \frac{n\, s_0^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}; \infty \right)$	$\left(0; \frac{n\, s_0^2}{\chi^2_{\alpha}(n)} \right\rangle$

σ^2 (nepoznáme μ), $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

obojstranný	ľavostranný	pravostranný
$\left\langle \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}; \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right\rangle$	$\left\langle \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}; \infty \right)$	$\left(0; \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)} \right\rangle$

λ, $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

obojstranný	ľavostranný	pravostranný
$\left\langle \frac{2n\overline{x}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)}; \frac{2n\overline{x}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)} \right\rangle$	$\left\langle \frac{2n\overline{x}}{\chi^2_{1-\alpha}(2n)}; \infty \right)$	$\left(0; \frac{2n\overline{x}}{\chi^2_{\alpha}(2n)} \right\rangle$

Jednovýberové parametrické testy

Test μ (poznáme σ^2), $V_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$	$\left(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty\right)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$(u_{1-\alpha}; \infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

Test μ (nepoznáme σ^2), $V_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}$	$\left(-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); \infty\right)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$(t_{1-\alpha}(n-1); \infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$(-\infty; -t_{1-\alpha}(n-1))$

Test σ^2 (poznáme μ), $V_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{n\, s_0^2}{\sigma_0^2}$	$\left(0; \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right) \cup \left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n); \infty\right)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$(\chi^2_{1-\alpha}(n); \infty)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$(0; \chi^2_{\alpha}(n))$

Test σ^2 (nepoznáme μ), $V_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)\, s^2}{\sigma_0^2}$	$\left(0; \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); \infty\right)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$(\chi^2_{1-\alpha}(n-1); \infty)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$(0; \chi^2_{\alpha}(n-1))$

Test λ, $V_n \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\lambda = \lambda_0$	$\lambda \neq \lambda_0$	$\chi^2 = \frac{2n\overline{x}}{\lambda_0}$	$\left(0; \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)\right) \cup \left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n); \infty\right)$
$\lambda = \lambda_0$	$\lambda > \lambda_0$		$(\chi^2_{1-\alpha}(2n); \infty)$
$\lambda = \lambda_0$	$\lambda < \lambda_0$		$(0; \chi^2_{\alpha}(2n))$

Dvojvýberové parametrické testy, $V_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

Fisherov F–test

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$\left(0; F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right) \cup \left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1); \infty\right)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$(F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1); \infty)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$(0; F_\alpha(n_1-1, n_2-1))$

Dvojvýberový Z–test (poznáme rozptyly σ_1^2, σ_2^2)

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$Z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\left(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty\right)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$		$(u_{1-\alpha}; \infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$		$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

Dvojvýberový t–test (nepoznáme rozptyly σ_1^2, σ_2^2 a predpokladáme, že $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1\, n_2\, k}{n_1 + n_2}}$	$\left(-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(k)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(k); \infty\right)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$		$(t_{1-\alpha}(k); \infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$		$(-\infty; -t_{1-\alpha}(k))$

$k = (n_1 + n_2 - 2)$

Aspin–Welchov test (nepoznáme rozptyly σ_1^2, σ_2^2 a predpokladáme, že $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	$\left(-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m); \infty\right)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$		$(t_{1-\alpha}(m); \infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$		$(-\infty; -t_{1-\alpha}(m))$

$$m = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

Párový t–test

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$t = \frac{\overline{d}}{s_d}\sqrt{n}$, kde	$\left(-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); \infty\right)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\overline{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i})$,	$(t_{1-\alpha}(n-1); \infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$s_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2$	$(-\infty; -t_{1-\alpha}(n-1))$

Testy symetrie

Znamienkový test

V prípade malého rozsahu V_n:

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\widetilde{x} = x_0$	$\widetilde{x} \neq x_0$	$T = \min\{Z^+, Z^-\}$	$(-\infty; k_1(\alpha, n_0)) \cup (k_2(\alpha, n_0); \infty)$

Z^+ počet hodnôt $d_i = x_i - x_0$ s kladným znamienkom

Z^- počet hodnôt $d_i = x_i - x_0$ so záporným znamienkom

n_0 počet nenulových hodnôt $d_i = x_i - x_0$

$k_1(\alpha, n_0)$, $k_2(\alpha, n_0)$ sú kritické hodnoty testu

V prípade veľkého rozsahu V_n:

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\widetilde{x} = x_0$	$\widetilde{x} \neq x_0$	$Z = \dfrac{2T - n_0}{\sqrt{n_0}}$	$\left(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty\right)$
$\widetilde{x} = x_0$	$\widetilde{x} > x_0$		$(u_{1-\alpha}; \infty)$
$\widetilde{x} = x_0$	$\widetilde{x} < x_0$		$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

Wilcoxonov dvojvýberový test

V prípade malého rozsahu V_n:

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$F(x) = G(x)$	$F(x) \neq G(x)$	$U = \min\{U_1, U_2\}$, kde $U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_1$, $U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - T_2$	$(-\infty; U_\alpha)$

T_1 je súčet poradí hodnôt z výberu V_{n_1}

T_2 je súčet poradí hodnôt z výberu V_{n_2}

U_α je kritická hodnota testu

V prípade veľkého rozsahu V_n:

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$F(x) = G(x)$	$F(x) \neq G(x)$	$U_0 = \dfrac{U_1 - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}}$	$\left(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty\right)$

Testy dobrej zhody

Pearsonov test dobrej zhody

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$F(x) = G(x)$	$F(x) \neq G(x)$	$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$	$(\chi^2_{1-\alpha}(k-r-1); \infty)$

r je počet odhadovaných parametrov pri určovaní G

k je počet tried

Kolmogorovov–Smirnovov test

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$F(x) = G(x)$	$F(x) \neq G(x)$	$D = \max\{\max(d_j^-), \max(d_j^+)\}$, kde $d_i^- = \lvert F_n(x_{j-1}) - G(x_j)\rvert$, $d_i^- = \lvert F_n(x_j) - G(x_j)\rvert$	$(D_\alpha(n); \infty)$

$D_\alpha(n)$ je kritická hodnota testu, kde pre veľké rozsahy V_n $(n > 100)$ sa aproximuje vzťahom $D_\alpha(n) \doteq \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{2}{\alpha}}$

Andersonov–Darlingov test

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$F(x) = G(x)$	$F(x) \neq G(x)$	$AD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (1-2i) \left[\ln G(x_{(i)}) + \ln\left(1 - G_{(n+1-i)}\right)\right] - n$	$(AD_\alpha; \infty)$

AD_α je kritická hodnota testu

ak $G(x) \sim N(\mu, \sigma^2)$, malý rozsah výberu $AD_\alpha \approx \frac{k(\alpha)}{1 + \frac{0,75}{n} + \frac{2,25}{n^2}}$, kde

α	$0,005$	$0,01$	$0,0025$	$0,05$	$0,1$
$k(\alpha)$	$1,159$	$1,035$	$0,873$	$0,752$	$0,631$

ak $G(x) \sim Ex(\lambda)$

α	$0,005$	$0,01$	$0,0025$	$0,05$	$0,1$
AD_α	$2,244$	$1,959$	$1,591$	$1,321$	$1,162$

Shapiro–Wilkov test normality

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$F(x) = G(x)$	$F(x) \neq G(x)$	$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,n}\left(x_{(n-i+1)} - x_{(i)}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \overline{x}\right)^2}$	$(-\infty; W_\alpha(n)\rangle$

$W_\alpha(n)$ je kritická hodnota testu

Testy extrémnych hodnôt

Grubbsov test

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
hodnota $x_{(1)}$ nie je extrémna	hodnota $x_{(1)}$ je extrémna	$T(1) = \dfrac{\overline{x} - x_{(1)}}{s}\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$	$(T_\alpha(n); \infty)$
hodnota $x_{(n)}$ nie je extrémna	hodnota $x_{(n)}$ je extrémna	$T(n) = \dfrac{x_{(n)} - \overline{x}}{s}\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$	

$T_\alpha(n)$ je kritická hodnota testu

Dixonov test

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
hodnota $x_{(1)}$ nie je extrémna	hodnota $x_{(1)}$ je extrémna	$Q(1) = \dfrac{x_{(2)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$	$(Q_\alpha(n); \infty)$
hodnota $x_{(n)}$ nie je extrémna	hodnota $x_{(n)}$ je extrémna	$Q(n) = \dfrac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$	

$Q_\alpha(n)$ je kritická hodnota testu

Testy nekorelovanosti

Test nekorelovanosti

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\rho = 0$	$\rho \neq 0$	$t = \dfrac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_{xy}^2}}$	$\left(-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2); \infty\right)$
$\rho = 0$	$\rho > 0$		$(t_{1-\alpha}(n-2); \infty)$
$\rho = 0$	$\rho < 0$		$(-\infty; -t_{1-\alpha}(n-2))$

r_{xy} je Pearsonov výberový korelačný koeficient

$T_\alpha(n)$ je kritická hodnota testu

Spearmanov test nezávislosti

V prípade malého rozsahu V_n:

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$r_S = 0$	$r_S \neq 0$	r_S	$(-\infty; -r_\alpha(n)) \cup (r_\alpha(n); \infty)$

r_S je Spearmanov koeficient poradovej korelácie

$r_\alpha(n)$ je kritická hodnota testu

V prípade veľkého rozsahu V_n:

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$r_S = 0$	$r_S \neq 0$	$t = \dfrac{r_S\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_S^2}}$	$\left(-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2); \infty\right)$

Testy v regresnej analýze

Test významnosti regresného modelu

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
regresný model nie je štatisticky významný	regresný model je štatisticky významný	$F = \dfrac{(n-m)\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i - \overline{y})^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{y}_i)^2}$	$(F_{1-\alpha}(m-1, n-m); \infty)$

m je počet odhadovaných parametrov regresnej funkcie

Test zhody parametrov regresnej funkcie so známou konštantou

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\beta_i = b$	$\beta_i \neq b$	$t = \dfrac{b_i - b}{s(b_i)}$	$\left(-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2); \infty\right)$
$\beta_i = b$	$\beta_i > b$		$(t_{1-\alpha}(n-2); \infty)$
$\beta_i = b$	$\beta_i < b$		$(-\infty; -t_{1-\alpha}(n-2))$

$s(b_i)$ je výberová smerodajná odchýlka odhadnutého parametra b_i

Goldfeldov-Quandtov test

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
$\sigma_d^2 = \sigma_h^2$	$\sigma_d^2 > \sigma_h^2$	$F = \dfrac{SSE_d}{SSE_h}\,\dfrac{n_h - m}{n_d - m} = \dfrac{MSE_d}{MSE_h}$	$(F_{1-\alpha}(n_d - m, n_h - m); \infty)$

Test náhodnosti chýb

H_0	H_1	Testovacie kritérium	K_α
chyby sú náhodné	chyby nie sú náhodné	$U = \dfrac{Z - \frac{2n-4}{3}}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}}$	$\left(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty\right)$

Z celkový počet bodov zvratu v postupnosti $e_1, e_2, \ldots, e_n$