

Matematicko počítačové modelovanie

Vysokoškolská učebnica

Jozef Džurina
Blanka Baculíková
Jana Petrillová

Equilibria, s.r.o. 2016

Recenzovali: prof. RNDr. Ján Plavka, CSc.,
prof. RNDr. Martin Bača, CSc.

Autori: © Prof. RNDr. Jozef Džurina, CSc.
© Doc. RNDr. Blanka Baculíková, PhD.
© Mgr. Jana Petrillová, PhD.

Vydanie: prvé
Vydavateľ: Equilibria, s.r.o.

ISBN: 978-80-553-2578-1

Za odbornú a jazykovú stránku tejto vysokoškolskej učebnice zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

Obsah

1	Úvod	5
2	Výpočet niektorých integrálov	6
2.1	Výpočet integrálu I_1	6
2.2	Výpočet integrálu I_2	7
2.3	Výpočet integrálu I_3	8
3	Dvojný integrál	10
3.1	Základné vlastnosti dvojného integrálu	12
3.2	Výpočet dvojného integrálu	12
3.3	Niektoré aplikácie dvojného integrálu	15
3.4	Statické momenty. Ťažisko	17
4	Trojný integrál	20
4.1	Výpočet trojného integrálu	21
4.2	Niektoré aplikácie trojného integrálu	21
4.3	Statické momenty. Ťažisko	22
4.4	Transformácia trojného integrálu	24
5	Krivky a ich parametrické vyjadrenie	27
6	Krivkový integrál II. druhu	30
6.1	Základné vlastnosti krivkového integrálu	32
6.2	Veta o výpočte krivkového integrálu	33
6.3	Greenova veta	35
6.4	Dôsledky Greenovej vety, nezávislosť od integračnej cesty . . .	40
7	Prípravné výsledky	44
7.1	Súčiny vektorov a ich aplikácie	44
7.2	Násobok vektora skalárom	44
7.3	Skalárny súčin	44
7.4	Vektorový súčin	45
7.5	Praktické použitie vektorového súčinu (príprava k plošnému integrálu)	46
7.6	Zmiešaný súčin	47
8	Plošný integrál II. druhu	48
8.1	Dotyčnica ku priestorovej krivke určenej parametrickými rovnicami	48
8.2	Dotyková rovina ku ploche určenej parametrickými rovnicami	49

8.3	Plochy a ich parametrické vyjadrenie	50
8.4	Definícia plošného integrálu II. druhu	51
8.5	Veta o výpočte plošného integrálu	54
8.6	Gauss - Ostrogradského veta	57
9	Aplikácia integrálov - výpočet objemu molekuly	60
9.1	Parametrizácia guľovej plochy (rovnosť $\frac{2}{5}$)	62
9.2	Vyjadrenie funkcie $g(t, s)$ (rovnosť $\frac{2}{5}$)	68
9.3	Voľba funkcií $P(t, s)$ a $Q(t, s)$ (rovnosť $\frac{3}{5}$)	69
9.4	Výpočet krivkových integrálov (rovnosť $\frac{5}{5}$)	70
9.5	Prípád Ω_1 je neohraničená oblasť (rovnosť $\frac{2}{5}$)	71
9.6	Sada riešených príkladov	73

Kapitola 1

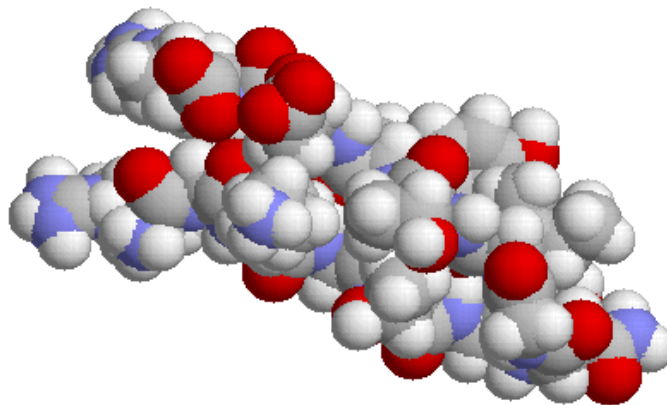
Úvod

Táto učebnica je určená predovšetkým pre študentov tretieho ročníka odboru Počítačové modelovanie a zároveň slúži ako praktická aplikácia využitia vlastností rôznych druhov integrálov pre riešenie praktického problému - vypočítať objem molekuly tvorenej zhlukom atómov guľovitého tvaru (Obr. 1.1)

Pri výpočte objemu využijeme vlastnosti určitého, dvojného, trojného, krivkového a plošného integrálu a ich vzájomnej transformácie. Takže 3-D problém výpočtu objemu v konečnom dôsledku redukuje na 1-D problém výpočtu určitých integrálov typu

$$I_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{(A + B \cos \varphi + C \sin \varphi)^i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Cesta od výpočtu objemu molekuly k jeho redukcii na výpočet integrálov I_i je ešte ďaleká. K jej prekonaniu treba odvodiť prepojenia medzi jednotlivými typmi integrálov. To je náplňou nasledujúcich kapitol. Po ich zvládnutí pristúpime k odvodeniu metódy výpočtu objemu zhluku atómov.



Obr. 1.1: Molekula zložená z guľovitých atómov

Kapitola 2

Výpočet niektorých integrálov

Pretože vlastnosti určitého integrálu a jeho výpočet pomocou štandardnej goniometrickej substitúcie sú známe, začneme naše úvahy „odzadu“ - výpočtom integrálov I_i .

2.1 Výpočet integrálu I_1

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi}, \quad A > B > 0.$$

Uvedený integrál je kľúčovým pre fungovanie metódy, všetky ďalšie určité integrály sa prevedú na integrál I_1 .

Počítajme najprv neurčitý integrál použitím vhodnej substitúcie

$$\int \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi}, \quad A > B > 0.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t \quad d\varphi = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin \varphi = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| \\ &= \int \frac{2}{(A-B)t^2 + 2Ct + A+B} dt = \frac{2}{A-B} \int \frac{1}{\left(t + \frac{C}{A-B}\right)^2 + \frac{A^2 - B^2 - C^2}{(A-B)^2}} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \operatorname{arctg} \frac{(A-B) \left(t + \frac{C}{A-B}\right)}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} + k \\ &= \frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \operatorname{arctg} \frac{(A-B) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} + k. \end{aligned}$$

Keďže sme našli primitívnu funkciu môžeme použiť Newton-Leibnitzov vzorec (N-L vzorec) pre výpočet určitého integrálu. Dostávame

1. pre $0 \leq \alpha < \beta < \pi$, resp. $\pi < \alpha < \beta \leq 2\pi$

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{(A-B) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} - \operatorname{arctg} \frac{(A-B) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \right].$$

2. ak $0 \leq \alpha < \beta = \pi$ nie je možné použiť N-L vzorec, lebo primitívna funkcia je neohraničená na okolí bodu π . Preto

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \operatorname{arctg} \frac{(A - B)\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \right]_{\alpha}^{\pi} \\ &= \frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \lim_{\beta \rightarrow \pi^-} \left[\operatorname{arctg} \frac{(A - B)\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{(A - B)\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \right]. \end{aligned}$$

3. ak $0 \leq \alpha < \pi < \beta \leq 2\pi$ je primitívna funkcia opäť neohraničená na okolí bodu π , ktorý sa nachádza vo vnútri intervalu $[\alpha, \beta]$. Preto určitý integrál vypočítame nasledovne

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\alpha}^{\pi} \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi} + \int_{\pi}^{\beta} \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \left[\pi + \operatorname{arctg} \frac{(A - B)\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} - \operatorname{arctg} \frac{(A - B)\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \right] \end{aligned}$$

4. pre $0 = \alpha < \beta = 2\pi$ (špeciálny prípad 3. možnosti) dostávame

$$I_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}}$$

5. ak $\pi = \alpha < \beta \leq 2\pi$ nie je možné použiť N-L vzorec, lebo primitívna funkcia je neohraničená na okolí bodu π . Preto

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \operatorname{arctg} \frac{(A - B)\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \right]_{\pi}^{\beta} \\ &= \frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \lim_{\alpha \rightarrow \pi^+} \left[\operatorname{arctg} \frac{(A - B)\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{(A - B)\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} + \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

2.2 Výpočet integrálu I_2

$$I_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{(A + B \cos \varphi + C \sin \varphi)^2}, \quad A > B > 0.$$

Zamerajme sa opäť najprv na výpočet neurčitého integrálu. V literatúre zameranej na integračné vzorce (napr. [3]) je možné nájsť nasledovné vzorce:

$$\int \frac{d\varphi}{(A + B \cos \varphi)^2} = \frac{1}{A^2 - B^2} \left[\frac{-B \sin \varphi}{A + B \cos \varphi} + A \int \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi} \right],$$

$$\int \frac{d\varphi}{(A + C \sin \varphi)^2} = \frac{1}{A^2 - C^2} \left[\frac{C \cos \varphi}{A + C \sin \varphi} + A \int \frac{d\varphi}{A + C \sin \varphi} \right].$$

Na základe týchto informácií urobíme hypotézu o výpočte neurčitého integrálu I_2 .

$$\int \frac{d\varphi}{(A + B \cos \varphi + C \sin \varphi)^2} = \frac{1}{A^2 - B^2 - C^2} \left[\frac{-B \sin \varphi + C \cos \varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi} + A \int \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi} \right].$$

Nie je obtiažne overiť platnosť tohto vzorca (derivovaním podľa premennej φ). A teda pre integrál I_2 dostávame

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{(A + B \cos \varphi + C \sin \varphi)^2} = \frac{1}{A^2 - B^2 - C^2} \left[\frac{-B \sin \varphi + C \cos \varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi} \right]_{\alpha}^{\beta} + A \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi}.$$

2.3 Výpočet integrálu I_3

$$I_3 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{(A + B \cos \varphi + C \sin \varphi)^3}, \quad A > B > 0.$$

Využijeme opäť známy vzorec

$$\int \frac{d\varphi}{(A + B \cos \varphi)^2} = \frac{1}{A^2 - B^2} \left[\frac{-B \sin \varphi}{A + B \cos \varphi} + A \int \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi} \right].$$

Postup použitý pri výpočte integrálu I_2 nemôžeme aplikovať, keďže podobný vzorec, kde by v menovateli bola tretia mocnina sa v tabuľkách integrálov nenachádza. Ale derivovaním podľa parametra A sa dá vzorec pre výpočet $\int \frac{d\varphi}{(A+B \cos \varphi)^2}$ transformovať na výpočet $\int \frac{d\varphi}{(A+B \cos \varphi)^3}$.

Derivovaním hore uvedeného vzťahu podľa parametra A dostávame

$$\begin{aligned} \int \frac{-2}{(A + B \cos \varphi)^3} d\varphi &= \frac{-2A}{(A^2 - B^2)^2} \left[\frac{-B \sin \varphi}{A + B \cos \varphi} + A \int \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi} \right] \\ &+ \frac{1}{A^2 - B^2} \left[\frac{B \sin \varphi}{(A + B \cos \varphi)^2} + \int \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi} \right. \\ &\left. - A \int \frac{d\varphi}{(A + B \cos \varphi)^2} \right]. \end{aligned}$$

Vyjadrením $\int \frac{d\varphi}{A+B\cos\varphi}$ pomocou $\int \frac{d\varphi}{(A+B\cos\varphi)^2}$ dostávame

$$\int \frac{d\varphi}{(A+B\cos\varphi)^3} = \frac{1}{2(A^2-B^2)} \left[\frac{-B\sin\varphi}{(A+B\cos\varphi)^2} + \frac{-\frac{B}{A}\sin\varphi}{A+B\cos\varphi} + \frac{2A^2+B^2}{A} \int \frac{d\varphi}{(A+B\cos\varphi)^2} \right].$$

Na základe takto získaného vzťahu urobíme hypotézu pre výpočet integrálu I_3 .

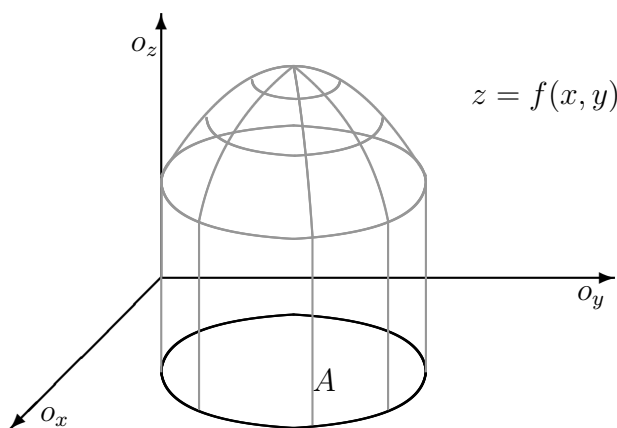
$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^3} \\ &= \frac{1}{2(A^2-B^2-C^2)} \left\{ \left[\frac{-B\sin\varphi+C\cos\varphi}{(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2} \right]_{\alpha}^{\beta} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{-\frac{B}{A}\sin\varphi+\frac{C}{A}\cos\varphi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi} \right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{2A^2+B^2+C^2}{A} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2} \right\}. \end{aligned}$$

O správnosti uvedeného vzťahu sa môžeme presvedčiť derivovaním podľa premennej φ príslušných neurčitých integrálov.

Kapitola 3

Dvojný integrál

Dvojný integrál zdefinujeme na základe jeho geometrickej interpretácie. Nech je daná funkcia $f(x, y)$ definovaná na uzavretej a ohraničenej množine $A \subset \mathbb{R}^2$. Našou úlohou je vypočítať objem valcovitého telesa T s dolnou podstavou A a zhora ohraničeného plochou, ktorá je daná predpisom $z = f(x, y)$.



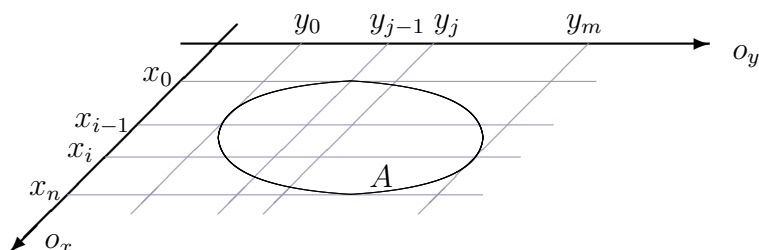
K definícii dvojného integrálu je potrebné zostrojiť delenie množiny A . Toto delenie urobíme pomocou delenia intervalu $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, pričom $A \subset I$.

1. Nech D^1 je delenie intervalu $\langle a, b \rangle$ určené deliacimi bodmi x_i , t.j.

$$a = x_0 < x_1 \dots \dots < x_n = b.$$

Nech D^2 je delenie intervalu $\langle c, d \rangle$ určené deliacimi bodmi y_j , t.j.

$$c = y_0 < y_1 \dots \dots < y_m = d.$$

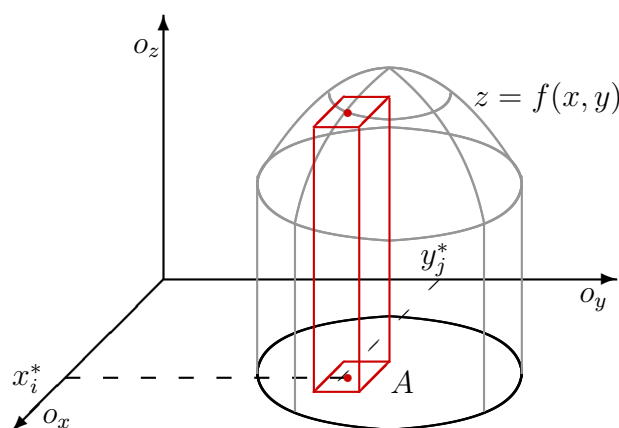


Potom delenie $D = D^1 \times D^2$ je delenie intervalu $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ a teda aj delenie množiny A . Uvažujeme normálne postupnosti delení $\{D_n^1\}$ a $\{D_n^2\}$ intervalov $\langle a, b \rangle$ a $\langle c, d \rangle$. Pričom postupnosť delení $\{D_n^1\}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ nazývame normálnou, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n^1\| = 0$, kde $\|D_n^1\| = \max \Delta x_i$. Potom $\{D_n\} = \{D_n^1 \times D_n^2\}$ je normálna postupnosť delení intervalu I , teda aj množiny A . Tie intervaly z postupností delení $\{D_n\}$, ktoré majú s množinou A neprázdny prienik, označíme A_{ij} .

- Z každého intervalu A_{ij} vyberieme ľubovoľný bod $T_{ij} = \langle x_i^*, y_j^* \rangle$, t.j.

$$\begin{aligned} x_i^* &\in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \\ y_j^* &\in \langle y_{j-1}, y_j \rangle. \end{aligned}$$

- Objem valcovitého telesa T vieme aproximovať súčtom objemov jednotlivých hranolov s podstavou A_{ij} a výškou $f(x_i^*, y_j^*)$.



Objem jedného hranola (s podstavou A_{ij}) je

$$V_{ij} = P(A_{ij})f(x_i^*, y_j^*) = f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j$$

a teda objem celého telesa je približne

$$V(T) \approx \sum_{i,j} f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j = S(f, D),$$

kde $S(f, D)$ je integrálny súčet pre funkciu f , delenie D a voľbu bodov T_{ij} .

- V prípade normálnej postupnosti delení $\{D_n\}$ dostávame vzťah pre výpočet objemu telesa T .

$$V(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) = \iint_A f(x, y) dx dy.$$

Uvedené informácie zhrnieme do nasledujúcej definície.

Definícia 3.1 *Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá na uzavretej a ohraničenej množine A . Ak pre každú normálnu postupnosť delení $\{D_n\}$ množiny A a pre ľubovoľnú voľbu bodov T_{ij} existuje*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j} f(T_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j,$$

tak túto limitu nazývame dvojným integrálom z funkcie f na množine A . Zapisujeme

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy.$$

Tento integrál vyjadruje objem príslušného valcovitého telesa.

Poznámka 3.1 *Podmienku na spojitosť funkcie môžeme nahradiť podmienkou ohraničenosti. Spojitosť nám ale zabezpečí existenciu dvojného integrálu.*

3.1 Základné vlastnosti dvojného integrálu

- *lineárnosť*

Nech funkcie f a g sú spojité na A , $a, b \in \mathbb{R}$. Potom

$$\iint_A a f(x, y) + b g(x, y) \, dx dy = a \iint_A f(x, y) \, dx dy + b \iint_A g(x, y) \, dx dy.$$

- *delenie*

Nech množiny B a D tvoria delenie A , potom

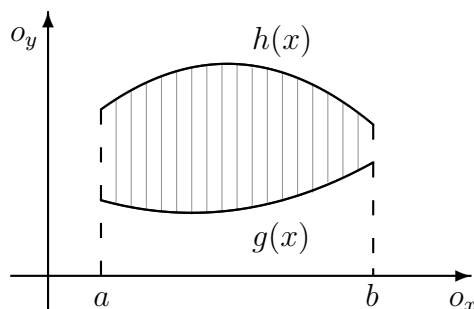
$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \iint_B f(x, y) \, dx dy + \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

3.2 Výpočet dvojného integrálu

Ukážeme ako vypočítať dvojný integrál prevodom na dvojnásobný. Ak množina A je elementárna oblasť typu $[x, y]$, t.j.

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

kde g, h sú spojité na intervale $\langle a, b \rangle$,



potom

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right] dx.$$

Ak množina A je elementárna oblasť typu $[y, x]$, t.j.

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\},$$

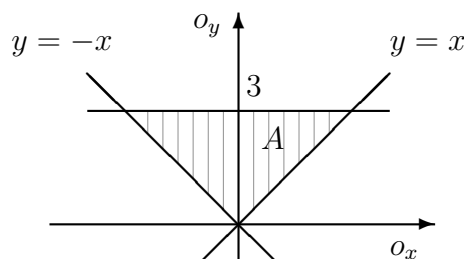
kde α, β sú spojité na intervale $\langle c, d \rangle$, potom

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx \right] dy.$$

Príklad 3.1 *Vypočítajme integrál*

$$\iint_A (x^2 + y^2) \, dx dy,$$

kde množina A je ohraničená priamkami $y = x, y = -x, y = 3$.



Riešenie: Množina A je elementárna oblasť $[y, x]$ a môžeme ju zapísať nasledujúcimi nerovnosťami

$$A: \quad 0 \leq y \leq 3 \\ -y \leq x \leq y.$$

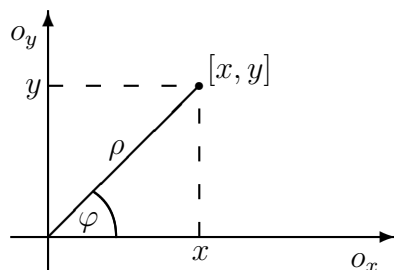
Teda

$$\begin{aligned} \iint_A (x^2 + y^2) \, dx dy &= \int_0^3 \left[\int_{-y}^y (x^2 + y^2) \, dx \right] dy \\ &= \int_0^3 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{-y}^y dy = \frac{8}{3} \int_0^3 y^3 \, dy = 54. \end{aligned}$$

Poznámka 3.2 *Vypočítali sme vlastne objem valcovitého telesa zdola ohraničeného množinou A a zhora časťou paraboloidu $z = x^2 + y^2$.*

Niektoré typy príkladov je výhodnejšie počítať pomocou transformácie súradníc. Ak napr. počítame integrál na množine, ktorej hranicu tvorí kružnica alebo jej časť, je vhodné použiť na popis oblasti polárne súradnice.

Vzťah medzi polárnymi a pravouhlými súradnicami je vyjadrený rovnicami



$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi, \quad \text{kde } \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \rho \geq 0. \end{aligned}$$

Dvojný integrál potom počítame

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \iint_B f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho \, d\rho d\varphi,$$

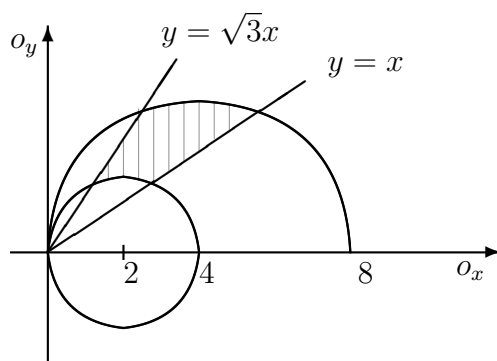
kde množina B vznikne transformáciou množiny A do polárnych súradníc.

Príklad 3.2 *Vypočítajme integrál*

$$\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \, dx dy,$$

ak A je ohraničená krivkami $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$.

Riešenie: *Načrtneme si hranice množiny A .*



Ak by sme vyjadrili množinu A pomocou pravouhlých súradníc bol by výpočet veľmi komplikovaný, preto použijeme polárne súradnice a využijeme jednoduchšie vyjadrenie kružníc v polárnych súradniciach.

$$A: \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \\ 4 \cos \varphi \leq \rho \leq 8 \cos \varphi.$$

Preto

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} \frac{1}{(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2} \rho d\rho \right] d\varphi \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[-\frac{1}{2\rho^2} \right]_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} d\varphi = \frac{3}{128} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= \frac{3}{128} (\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

3.3 Niektoré aplikácie dvojného integrálu

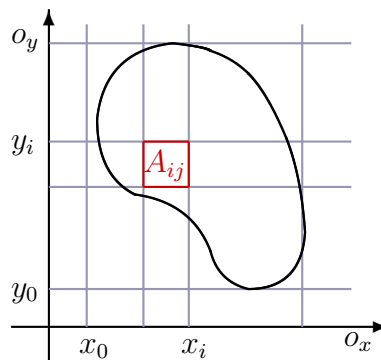
Hmotnosť telesa

Uvažujme priestorové teleso A , ktorého jeden rozmer môžeme zanedbať (napr. kus plechu). A teda v podstate skúmame rovinné teleso.

Na úvod uvažujme jednoduchší prípad a to, že teleso A je homogénne s hmotnosťou m a plochou S . Plošná hustota tohto telesa je $\sigma = \frac{m}{S}$ (t.j. hmotnosť jednotkovej plochy).

Teraz uvažujme všeobecnejší prípad. Teleso A nie je homogénne, pričom plošná hustota v jeho ľubovoľnom bode $[x, y]$ je určená funkciou $\sigma(x, y)$. Zaujímá nás, aká je teraz hmotnosť tohto nehomogénneho telesa A .

Hmotnosť telesa vyjadríme pomocou dvojného integrálu. Začneme delením rovinného telesa A , rovnako ako pri definícii dvojného integrálu.



Predpokladáme, že segment delenia A_{ij} je tak malý, že plošnú hustotu na tomto segmente môžeme považovať za konštantnú, teda

$$\sigma(x, y) = \sigma(x_i^*, y_i^*),$$

kde $[x_i^*, y_i^*]$ je ľubovoľný bod obdĺžníka A_{ij} , taký, že zároveň $[x_i^*, y_i^*] \in A$. Označme $m(A_{ij})$ hmotnosť homogénneho segmentu A_{ij} . Potom platí

$$m(A_{ij}) \approx \sigma(x_i^*, y_i^*)P(A_{ij}) = \sigma(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i \Delta y_j.$$

Hmotnosť celého telesa A aproximujeme súčtom hmotností homogénnych segmentov A_{ij} , preto

$$m(A) \approx \sum_{i,j} m(A_{ij}) \approx \sum_{i,j} \sigma(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i \Delta y_j.$$

Keďže uvažujeme normálnu postupnosť delení množiny A , limitným prechodom dostávame

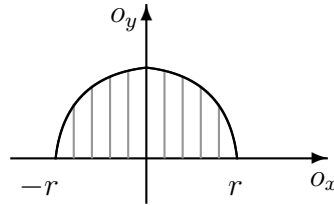
$$m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j} \sigma(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i \Delta y_j = \iint_A \sigma(x, y) \, dx dy.$$

Odvodili sme vzorec pre výpočet hmotnosti rovinného nehomogénneho telesa

$$m(A) = \iint_A \sigma(x, y) \, dx dy.$$

Príklad 3.3 Polkruh $x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0$ má hustotu v každom bode priamo úmernú vzdialenosti bodu od osi o_x . Vypočítajme jeho hmotnosť.

Riešenie: Načrtneme si množinu A .



Využitím vzťahov pre výpočet hmotnosti rovinného telesa dostávame

$$m(A) = \iint_A \sigma(x, y) \, dx dy = \iint_A ky \, dx dy.$$

Polkruh A môžeme popísať aj pomocou pravouhlých súradníc aj polárnych súradníc.

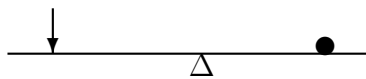
$$A: \quad \begin{aligned} -r \leq x \leq r, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}, \end{aligned} \quad A: \quad \begin{aligned} 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 \leq \rho \leq r. \end{aligned}$$

Výpočet integrálu urobíme v pravouhlých súradniciach

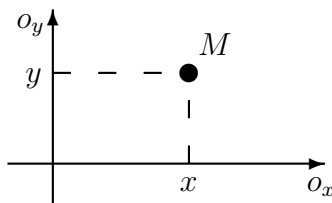
$$\begin{aligned} m(A) &= \iint_A ky \, dx dy = \int_{-r}^r \left[\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} ky \, dy \right] dx = \frac{k}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) \, dx \\ &= \frac{k}{2} \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{2}{3} kr^3. \end{aligned}$$

3.4 Statické momenty. Ťažisko

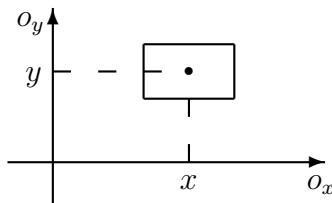
Motivácia: Statický moment chápeme ako silu potrebnú na udržanie hmotného bodu (telesa) v rovnováhe.



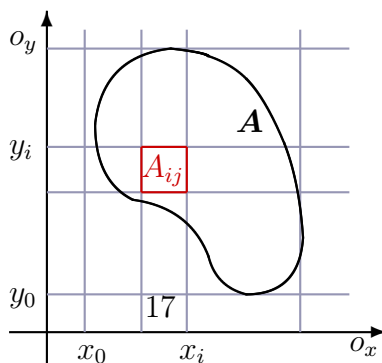
Statický moment S_x hmotného bodu M vzhľadom na os o_x definujeme ako súčin jeho hmotnosti m a jeho vzdialenosti od osi o_x . Teda $S_x = my$. Podobne pre statický moment S_y hmotného bodu M vzhľadom na os o_y definujeme $S_y = mx$.



Uvažujme trošku zložitejší prípad. Pre homogénny obdĺžnik so stredom $S = [x, y]$ a hmotnosťou m sú statické momenty vzhľadom na jednotlivé osi $S_x = my$, $S_y = mx$.



Pozrieme sa teraz na všeobecnejšiu úlohu a to ako vypočítať statické momenty vzhľadom na osi o_x , o_y nehomogénneho rovinného telesa A (plech) o hmotnosti m s hustotou $\sigma(x, y)$. Použije nasledujúcu aproximáciu, pri ktorej urobíme delenie telesa A rovnaké, aké sme použili pri definícii dvojného integrálu.



Platí, že

$$S_x(A) = \sum_{ij} S_x(A_{ij}),$$

kde $S_x(A_{ij})$ je statický moment obdĺžnikového segmentu A_{ij} , ktorý vznikol delením množiny A . Keďže segment môže byť ľubovoľne malý, môžeme ho považovať za homogénny, pričom jeho hustota je $\sigma(x_i^*, y_j^*)$, kde $[x_i^*, y_j^*]$ je stred obdĺžnika A_{ij} . Preto platí

$$S_x(A_{ij}) \approx m(A_{ij})y_j^* \approx \sigma(x_i^*, y_j^*) y_j^* \Delta A_{ij}.$$

Teda pre statický moment vzhľadom na os o_x telesa A máme

$$S_x \approx \sum_{ij} \sigma(x_i^*, y_j^*) y_j^* \Delta A_{ij}.$$

Limitným prechodom pre normálnu postupnosť delení množiny A dostávame

$$S_x = \iint_A \sigma(x, y) y \, dx dy.$$

Analogicky odvodíme vzťah pre výpočet statického momentu telesa A vzhľadom na os o_y

$$S_y = \iint_A \sigma(x, y) x \, dx dy.$$

Nech teraz $T = [x_T, y_T]$ je taký bod roviny ρ_{xy} o hmotnosti m , že

$$\begin{aligned} S_x &= y_T m, \\ S_y &= x_T m. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Voľne povedané, hmotnosť celého telesa sústredíme do jediného bodu tak, aby sa zachovali statické momenty. Takýto bod $T = [x_T, y_T]$ nazývame ťažisko. Na základe (3.1) dostávame vzťahy pre výpočet súradníc ťažiska telesa A o hmotnosti m

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{m} \iint_A \sigma(x, y) x \, dx dy, \\ y_T &= \frac{1}{m} \iint_A \sigma(x, y) y \, dx dy. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Využitie ťažiska pri výpočte integrálov

Dvojný integrál má rozmanité geometrické a fyzikálne aplikácie, napríklad v predchádzajúcej časti spomínané ťažisko. Ale aj naopak, pomocou súradníc ťažiska vieme šikovne vypočítať isté typy dvojných integrálov, konkrétne integrál z lineárnej funkcie. Vyplýva to z nasledujúcich úvah.

Vieme, že

$$x_T = \frac{1}{m} \iint_A \sigma(x, y) x \, dx dy.$$

Predpokladajme, že teleso A je homogénne s hustotou $\sigma(x, y) = 1$ a plochou $P(A)$. Potom $m = P(A)$ a teda

$$\iint_A x \, dx dy = x_T P(A).$$

Analogicky

$$\iint_A y \, dx dy = y_T P(A).$$

Preto

$$\begin{aligned} \iint_A (ax + by + c) \, dx dy &= \\ &\{ \text{využitím lineárnosti pre dvojný integrál} \} \\ &= a \iint_A x \, dx dy + b \iint_A y \, dx dy + c \iint_A dx dy \\ &= (ax_T + by_T + c) P(A). \end{aligned}$$

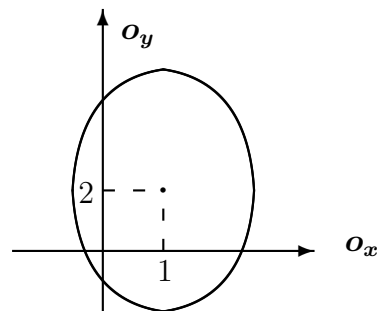
V nasledujúcom príklade ukážeme použitie tohto výpočtu.

Príklad 3.4 *Vypočítajme*

$$\iint_A (2x + 3y - 5) \, dx dy,$$

kde množina A je ohraničená krivkou $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

Riešenie: *Načrtneme si množinu A .*



Ak sa na množinu A pozrieme ako na homogénne rovinné teleso, tak potom súradnice jeho ťažiska sú $T = [1, 2]$. Obsah množiny A je $P(A) = 6\pi$. Preto

$$\iint_A (2x + 3y - 5) \, dx dy = (2x_T + 3y_T - 5) P(A) = 18\pi.$$

Kapitola 4

Trojný integrál

Trojný integrál definujeme analogicky ako dvojný integrál. Nech funkcia $f(x, y, z)$ je ohraničená na uzavretej a ohraničenej množine $A \subset \mathbb{R}^3$.

Nech je $A \subset I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, \ell \rangle$.

1. Nech D^1 je delenie intervalu $\langle a, b \rangle$ určené deliacimi bodmi x_i , t.j.

$$a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b.$$

Nech D^2 je delenie intervalu $\langle c, d \rangle$ určené deliacimi bodmi y_i , t.j.

$$c = y_0 < y_1 \cdots < y_m = d.$$

Nech D^3 je delenie intervalu $\langle e, \ell \rangle$ určené deliacimi bodmi z_i , t.j.

$$e = z_0 < z_1 \cdots < z_p = \ell.$$

Potom delenie $D = D^1 \times D^2 \times D^3$ je delenie intervalu I a teda aj delenie množiny $A \subset I$. Tie intervaly z delenia D , ktoré majú s množinou A neprázdny prienik, označíme A_{ijk} .

2. Z každého intervalu A_{ijk} vyberieme ľubovoľný bod $T_{ijk} = \langle x_i^*, y_j^*, z_k^* \rangle$, t.j.

$$x_i^* \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$$

$$y_j^* \in \langle y_{j-1}, y_j \rangle$$

$$z_k^* \in \langle z_{k-1}, z_k \rangle$$

3. Integrálny súčet pre funkciu f , delenie D a voľbu bodov T_{ijk} je definovaný nasledovne

$$S(f, D) = \sum_{i,j,k} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

V prípade, že $\{D_n\}$ je normálna postupnosť delení intervalu I , dostávame postupnosť integrálnych súčtov $\{S(f, D_n)\}$.

4. Limitným prechodom dostávame

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) = \iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Uvedené informácie zhrnieme do nasledujúcej definície.

Definícia 4.1 *Nech funkcia $f(x, y, z)$ je spojitá na uzavretej a ohraničenej množine A . Ak pre každú normálnu postupnosť delení množiny A a pre ľubovoľnú voľbu bodov T_{ijk} existuje*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j,k} f(T_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

tak túto limitu nazývame trojným integrálom funkcie f na množine A . Zapišujeme

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Poznámka 4.1 *Podmienku na spojitosť funkcie môžeme nahradiť podmienkou ohraničenosti.*

4.1 Výpočet trojného integrálu

V prípade, že množina A je priestorová oblasť typu $[x, y, z]$, t.j. vieme ju popísať nerovnosťami

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},$$

potom trojný integrál počítame prevodom na trojnásobný

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right] dx.$$

Podobne postupujeme pri výpočte trojného integrálu na elementárnych oblastiach typu $[x, z, y]$, $[y, x, z]$, $[y, z, x]$, $[z, x, y]$ a $[z, y, x]$.

4.2 Niektoré aplikácie trojného integrálu

Objem telesa

Priamo z definície trojného integrálu, že

$$V(A) = \iiint_A 1 \, dx dy dz.$$

Hmotnosť telesa

Uvažujme priestorové teleso A , s hmotnosťou m a objemom V . V prípade, že teleso je homogénne, tak jeho hustotu vieme vyjadriť $\sigma = \frac{m}{V}$.

Predpokladajme, že teleso A nie je homogénne a jeho hustota v bode $[x, y, z]$ je daná funkciou $\sigma(x, y, z)$. Otázka znie, ako vypočítať hmotnosť takéhoto telesa A .

Pomocou delenia (ako pri definícii trojného integrálu) rozdelíme teleso A na hranolčeky A_{ijk} . Segment A_{ijk} môžeme vďaka použitiu normálnej postupnosti delení A považovať za tak malý, že jeho hustota je konštantná a je reprezentovaná hustotou vo zvolenom bode $T_{ijk} = [x_i^*, y_j^*, z_k^*] \in A_{ijk}$ a teda na A_{ijk} je

$$\sigma(x, y, z) \approx \sigma(x_i^*, y_j^*, z_k^*).$$

Preto hmotnosť segmentu A_{ijk} môžeme vyjadriť

$$m(A_{ijk}) \approx \sigma(x_i^*, y_j^*, z_k^*)V(A_{ijk}) = \sigma(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Hmotnosť celého telesa A aproximujeme súčtom hmotností homogénnych segmentov A_{ij} , preto

$$m(A) = \sum_{i,j,k} m(A_{ijk}) \approx \sum_{i,j,k} \sigma(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Keďže uvažujeme normálnu postupnosť delení množiny A , limitným prechodom dostávame

$$m(A) = \iiint_A \sigma(x, y, z) \, dx dy dz.$$

4.3 Statické momenty. Ťažisko

Statické momenty priestorového telesa A s hustotou $\sigma(x, y, z)$ vzhľadom na roviny ρ_{xz} , ρ_{xy} , ρ_{yz} počítame analogicky ako pri rovinnej oblasti

$$\begin{aligned} S_{xz} &= \iiint_A \sigma(x, y, z) y \, dx dy dz, \\ S_{xy} &= \iiint_A \sigma(x, y, z) z \, dx dy dz, \\ S_{yz} &= \iiint_A \sigma(x, y, z) x \, dx dy dz. \end{aligned}$$

Pre súradnice ťažiska $T = [x_T, y_T, z_T]$ platia nasledovné vzťahy

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{m} \iiint_A x \sigma(x, y, z) \, dx dy dz, \\ y_T &= \frac{1}{m} \iiint_A y \sigma(x, y, z) \, dx dy dz, \\ z_T &= \frac{1}{m} \iiint_A z \sigma(x, y, z) \, dx dy dz. \end{aligned}$$

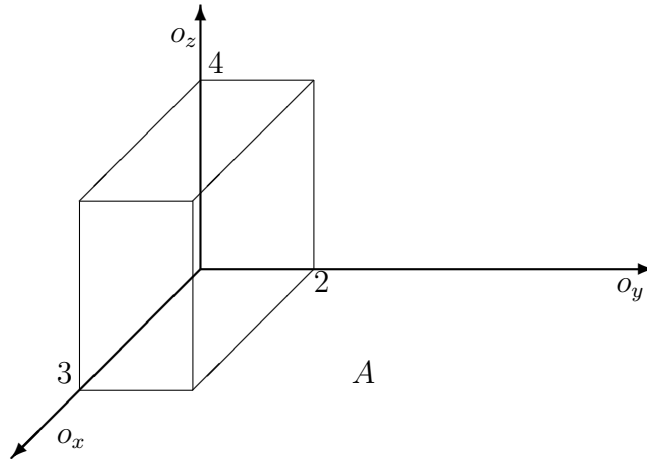
Rovnako ako pri dvojnóm integráli, aj pri trojnóm integráli vieme súradnice ťažiska využiť pri výpočte trojných integrálov z lineárnej funkcie

$$\iiint_A (ax + by + cz + d) \, dx dy dz = (ax_T + by_T + cz_T + d)V(A),$$

pričom $V(A)$ je objem homogenného telesa A s hustotou $\sigma(x, y, z) = 1$ a $T = (x_T, y_T, z_T)$ sú súradnice jeho ťažiska. V nasledujúcom príklade ukážeme použitie tohto výpočtu.

Príklad 4.1 Vypočítajme hmotnosť telesa $A = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 4 \rangle$, ktorého hustota je $\sigma(x, y, z) = 3x - 2y + z + 5$.

Riešenie: Načrtneme množinu A .



$$m = \iiint_A \sigma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_A (3x - 2y + z + 5) \, dx \, dy \, dz$$

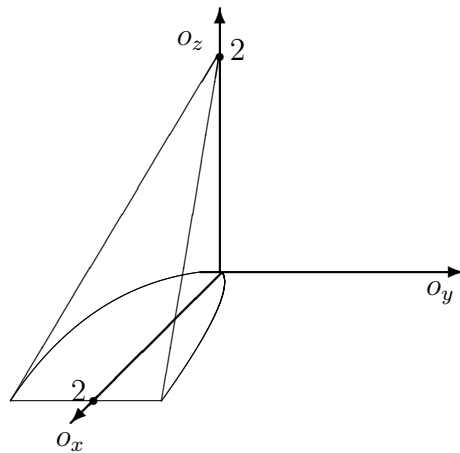
{ tento integrál môžeme rátať pomocou súradníc ťažiska

$T = [1.5; 1; 2]$, teraz už homogénneho hranola A }

$$= (3x_T - 2y_T + z_T + 5)V(A) = 228.$$

Príklad 4.2 Vypočítajme súradnice ťažiska homogénneho telesa ohraničeného plochami $y^2 = x$, $z = 0$, $x + z = 2$.

Riešenie:



Zo symetrie telesa plynie, že pre ťažisko platí $T = [x_T, 0, z_T]$. Náčrtok nám pomôže popísať množinu A ako oblasť typu $[x, y, z]$, t. j.

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2, \\ -\sqrt{x} &\leq y \leq \sqrt{x}, \\ 0 &\leq z \leq 2 - x. \end{aligned}$$

Môžeme položiť $\sigma(x, y, z) = 1$, a preto

$$\begin{aligned} m &= \iiint_A dx dy dz = \int_0^2 \left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{2-x} dz \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^2 [2y - xy]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 2(2\sqrt{x} - x^{3/2}) dx = \frac{32\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

Pre statické momenty platí

$$\begin{aligned} S_{yz} &= \iiint_A x dx dy dz = \int_0^2 \left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{2-x} x dz \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^2 [(2x - x^2)y]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 2(2x^{3/2} - x^{5/2}) dx = \frac{64\sqrt{2}}{35}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \iiint_A z dx dy dz = \int_0^2 \left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{2-x} z dz \right) dy \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 [(4 - 4x + x^2)y]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 ((4 - 4x + x^2)\sqrt{x}) dx = \frac{128\sqrt{2}}{105}. \end{aligned}$$

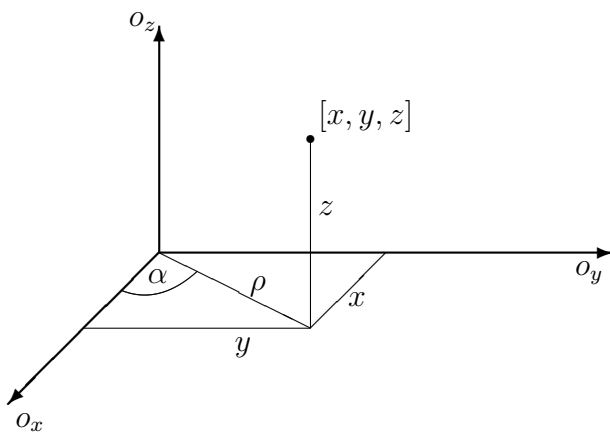
Preto $T = [\frac{6}{7}, 0, \frac{4}{7}]$.

4.4 Transformácia trojného integrálu

V niektorých prípadoch je výhodnejšie trojný integrál počítat pomocou transformácie do cylindrických alebo sférických súradníc.

Transformačné vzťahy pre cylindrické súradnice sú

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \alpha \\ y &= \rho \sin \alpha \\ z &= z \quad \alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \rho \geq 0, \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Pomocou tejto transformácie bodu $[x, y, z]$ priradíme bod $[\alpha, \rho, z]$ a platí

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_B \rho f(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha, z) \, d\alpha d\rho dz$$

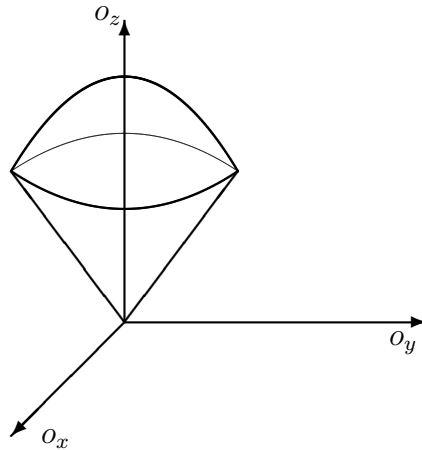
kde f je spojitá funkcia na A , množina B vznikne transformáciou množiny A do cylindrických súradníc. Cylindrické súradnice používame spravidla pri valcovitých telesách.

Príklad 4.3 *Vypočítajme trojný integrál telesa*

$$\iiint_A z \, dx dy dz,$$

kde A je ohraničená plochami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2 - x^2 - y^2$.

Riešenie: *Načrtneme množinu A .*



Teleso A je výhodné popísať cylindrickými súradnicami, pričom využijeme, že priemet telesa do roviny ρ_{xy} je kruh s polomerom 1,

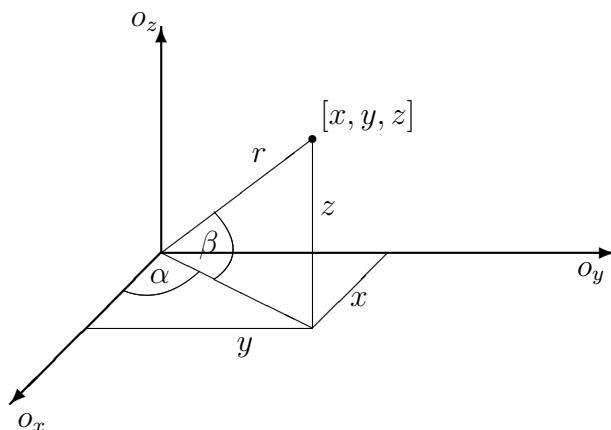
$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \rho \leq 1, \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} &\leq z \leq 2 - x^2 - y^2 = 2 - \rho^2. \end{aligned}$$

Preto

$$\begin{aligned} \iiint_A z \, dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(\int_{\rho}^{2-\rho^2} \rho z \, dz \right) d\rho \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^6}{6} - \frac{5\rho^4}{4} + \frac{4\rho^2}{2} \right]_0^1 d\alpha = \frac{11\pi}{12}. \end{aligned}$$

Transformačné vzťahy pre sférické súradnice sú

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \cos \beta, \\ y &= r \sin \alpha \cos \beta, \\ z &= r \sin \beta, \end{aligned} \quad \alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \beta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad r \geq 0.$$



Pomocou tejto transformácie bodu $[x, y, z]$ priradíme bod $[\alpha, \beta, r]$ a platí

$$\begin{aligned} & \iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_B r^2 \cos \beta \, f(r \cos \alpha \cos \beta, r \sin \alpha \cos \beta, r \sin \beta) \, d\alpha \, d\beta \, dr, \end{aligned}$$

kde f je spojitá funkcia na A , množina B vznikne transformáciou množiny A do sférických súradníc.

Príklad 4.4 *Odvodíme vzorec pre objem gule s polomerom r_1 .*

Riešenie: *Gulu $A : x^2 + y^2 + z^2 \leq r_1^2$ je výhodné popísať sférickými súradnicami pričom*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \leq 2\pi, \\ -\pi/2 &\leq \beta \leq \pi/2, \\ 0 &\leq r \leq r_1. \end{aligned}$$

Preto

$$\begin{aligned} V &= \iiint_A dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{r_1} r^2 \cos \beta \, dr \right) d\beta \right] d\alpha \\ &= 2\pi \frac{r_1^3}{3} \int_0^{2\pi} \left[\sin \beta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha = \frac{4\pi r_1^3}{3}. \end{aligned}$$

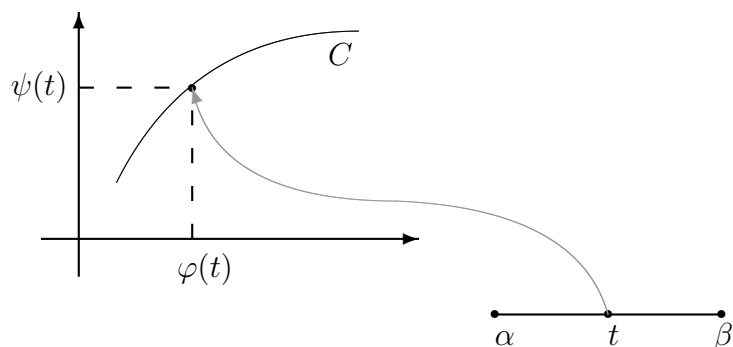
Kapitola 5

Krivky a ich parametrické vyjadrenie

Pred definíciou krivkového integrálu II. druhu sa budeme zaoberať pojmom krivka. Rovnica

$$C : \quad \vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

predstavuje parametrické vyjadrenie krivky v rovine.



Podobne rovnica

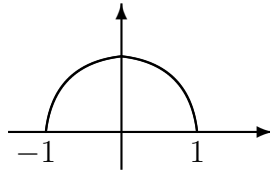
$$C : \quad \vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \chi(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

resp.

$$\begin{aligned} C : \quad x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \\ z &= \chi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{aligned}$$

predstavuje parametrické vyjadrenie priestorovej krivky.

Špeciálne krivky tvoria grafy funkcií $y = f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Napríklad graf funkcie $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ predstavuje oblúk kružnice.



Vyjadříme túto krivku parametricky. Jedno z možných vyjadrení je

$$C : \begin{aligned} x &= t \\ y &= \sqrt{1 - t^2}, \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Ďalšie je napríklad

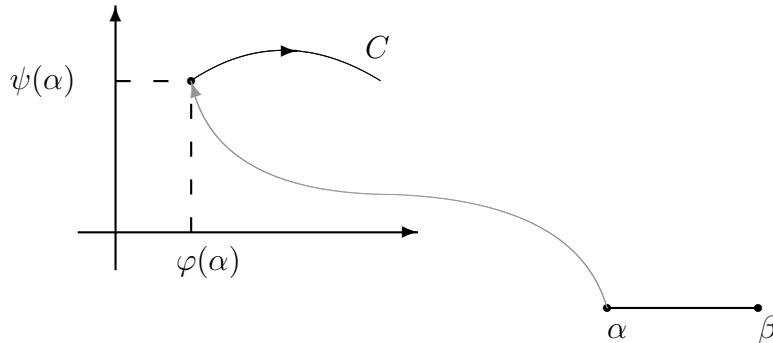
$$C : \begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t, \quad t \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Teda jedna krivka môže mať rôzne parametrické vyjadrenia.

Uvažujme rovinnú krivku C danú parametrickými rovnicami

$$C : \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

Ak pre $t = \alpha$ dostaneme prvý bod krivky, tak hovoríme, že krivka je orientovaná súhlasne so svojim parametrickým vyjadrením.



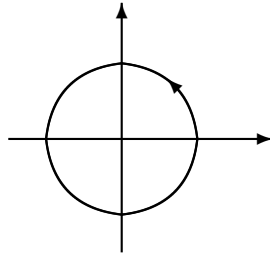
V opačnom prípade hovoríme, že krivka je orientovaná nesúhlasne so svojim parametrickým vyjadrením.

Krivku C nazývame hladkou, ak funkcie $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ majú spojité derivácie na $[a, b]$.

Ak krivka nepretína sama seba, tak ju nazývame jednoduchou. Krivku $C : \vec{r}(t) \in [\alpha, \beta]$ nazveme uzavretou, ak $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$ (teda prvý a posledný bod krivky sú totožné).

Príkladom uzavretej krivky je napr. kružnica

$$C : \begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$



Uzavretú krivku nazveme kladne orientovanou, ak jej orientácia je proti smeru pohybu hodinových ručičiek (viď obrázok). V opačnom prípade uzavretú krivku nazývame záporne orientovanou.

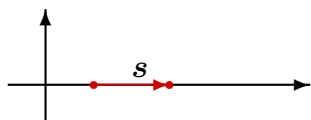
Kapitola 6

Krivkový integrál II. druhu

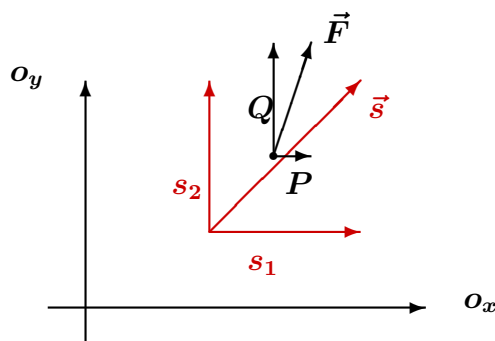
V tejto kapitole zdefinujeme krivkový integrál pomocou jeho praktickej aplikácie. Budeme vyšetrovať akú prácu vykoná sila určená funkciou $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ pri pohybe hmotného bodu po orientovanej rovinatej krivke C .

Uvažujme na začiatok jednorozmerný prípad, keď sa hmotný bod pohybuje po osi o_x pôsobením konštantnej sily F a prejde dráhu dĺžky s , t.j. krivka C je úsečka ležiaca na osi o_x . Vykonaná práca je určená vzťahom

$$A = F \cdot s.$$



Ďalej uvažujme prípad, keď sa hmotný bod pohybuje v smere vektora $\vec{s} = (s_1, s_2)$ a prejde dráhu $|\vec{s}|$, pričom na neho pôsobí konštantná sila $\vec{F} = (P, Q)$



Pohyb hmotného bodu rozložíme na dva pohyby. Prvý pohyb je v smere osi o_x , t.j. po úsečke s_1 pôsobením sily P . Druhý pohyb je v smere osi o_y , t.j. po úsečke s_2 pôsobením sily Q . Práca vykonaná v smere osi o_x je

$$A_x = P \cdot s_1.$$

Práca vykonaná v smere osi o_y je

$$A_y = Q \cdot s_2.$$

Celková práca, ktorú vykoná sila $\vec{F} = (P, Q)$ pri pohybe pozdĺž vektora \vec{s} je teda

$$A = A_x + A_y = P \cdot s_1 + Q \cdot s_2 = \vec{F} \circ \vec{s} = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \alpha,$$

kde α je uhol vektorov \vec{F}, \vec{s} . Je užitočné si všimnúť, že $|\vec{F}| \cos \alpha$ je kolmý priemet vektora \vec{F} na vektor \vec{s} .

Uvažujme ďalej najvšeobecnejší prípad. Počítajme prácu, ktorú vykoná sila $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ pri pohybe hmotného bodu po krivke C (jednoduchá, po častiach hladká, orientovaná). Krivka C nech je určená parametrickým vyjadrením

$$C : \quad \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Keďže úlohu máme vyriešenú pre jednoduchší prípad (t.j. konštantná sila a krivka C je úsečka), prevedieme túto všeobecnejšiu úlohu na jednoduchší prípad a zároveň zdefinujeme v štyroch krokoch krivkový integrál.

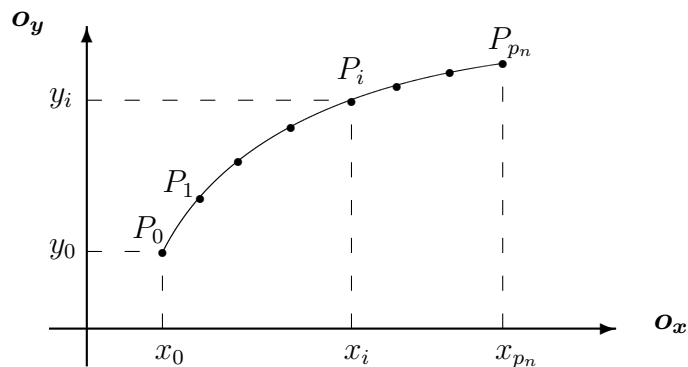
1. Rozdelíme krivku C pomocou deliacich bodov $P_i = [x_i, y_i]$, na menšie oblúky

$$C_i = \widehat{P_{i-1}P_i}, \quad \text{kde } i = 1, 2, \dots, p_n.$$

Uvažujeme postupnosti delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, pričom táto postupnosť sa nazýva normálna, ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0,$$

kde $\|D_n\| = \max\{d(C_i)\}$, pričom $d(C_i)$ je priemer krivky C_i , ktorý chápeme ako vzdialenosť dvoch "najvzdialenejších" bodov C_i (t.j. $d(C_i) = \sup \rho(A, B)$, kde $A, B \in C_i$).



Predpokladáme, že delenie je tak jemné, že zakrivenie oblúkov C_i je minimálne, t.j. oblúky sú "blízke" úsečkám.

2. Urobíme dve aproximácie, ktoré sú založené na tom, že máme normálnu postupnosť delení, teda krivka C_i sa "málo" odlišuje od úsečky $\overline{P_{i-1}P_i}$.

Prvá aproximácia je nahradenie pohybu po krivke C_i pohybom po úsečke $\vec{s}_i = (x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}) = (\Delta x_i, \Delta y_i)$. Druhá aproximácia je nasledovná: na krivke C_i zvolíme bod $T_i = [x_i^*, y_i^*]$ a silu v každom bode $[x, y]$ krivky C_i môžeme aproximovať $\vec{F}(x, y) \approx \vec{F}(x_i^*, y_i^*)$.

3. Celkovú prácu A môžeme vyjadriť nasledovne

$$A = \sum_{i=1}^{p_n} A_i,$$

kde A_i je práca pri pohybe hmotného bodu po oblúku C_i , ktorú vzhľadom na použité aproximácie môžeme vyjadriť ako prácu pri pohybe hmotného bodu pozdĺž úsečky $\overline{P_{i-1}P_i}$ vplyvom konštantnej sily $\vec{F}(x_i^*, y_i^*)$. Teda

$$A_i \approx \vec{F}(x_i^*, y_i^*) \circ \vec{s}_i = P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i,$$

preto

$$A \approx \sum_{i=1}^{p_n} P(\sigma_{ij})P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i = S(D_n),$$

čo je postupnosť integrálnych súčtov odpovedajúca postupnosti delení $\{D_n\}$ a voľbe bodov T_i .

4. Krivkový integrál je limita tejto postupnosti integrálnych súčtov.

Zhrnieme uvedené informácie do nasledujúcej definície.

Definícia 6.1 *Nech C je jednoduchá, po častiach hladká, orientovaná krivka, nech \vec{F} je spojitá na C . Ak pre každú normálnu postupnosť delení krivky C a pre ľubovoľnú voľbu bodov $T_i = [x_i^*, y_i^*]$ existuje*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} (P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i),$$

tak túto limitu nazývame krivkovým integrálom II. druhu funkcie \vec{F} na krivke C . Zapisujeme

$$\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{s} = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Tento integrál vyjadruje veľkosť práce, ktorú vykoná sila \vec{F} pri pohybe hmotného bodu po krivke C .

6.1 Základné vlastnosti krivkového integrálu

V ďalšom budeme predpokladať o všetkých integráloch, že existujú a krivky, po ktorých integrujeme sú jednoduché, orientované a hladké.

- $$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy,$$

t.j. celkovú prácu je možné rozložiť na prácu v smere osi o_x a prácu v smere osi o_y .

- nech krivky C_1, C_2 tvoria delenie krivky C , potom

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{C_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{C_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

- nech $-C$ je krivka, ktorá vznikne z krivky C zmenou orientácie, potom

$$\int_{-C} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

6.2 Veta o výpočte krivkového integrálu

Ukážeme ako vypočítať plošný integrál prevodom na určitý integrál. Majme krivku C určenú parametrickým vyjadrením

$$C : \quad \vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b].$$

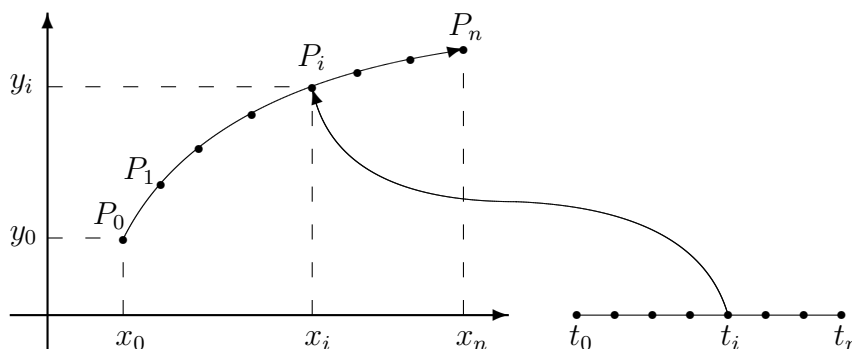
K odvodeniu vety o výpočte využijeme nasledujúcu vlastnosť

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy.$$

Nezávisle budeme počítat integrály $\int_C P(x, y) dx$ a $\int_C Q(x, y) dy$ pomocou definície krivkového integrálu. Delenie D_n krivky C urobíme pomocou delenia intervalu $[a, b]$ nasledovne. Uvažujme delenie

$$a = t_0 < t_1 \cdots < t_{p_n} = b.$$

Bodu t_i z intervalu $[a, b]$ odpovedá bod $P_i = [x_i, y_i] = [\varphi(t_i), \psi(t_i)]$ na rovinnej krivke C



Takto pomocou delenia intervalu $[a, b]$ vytvoríme delenie krivky C . Analogicky z každého podintervalu (t_{i-1}, t_i) vyberieme bod t_i^* a tomuto bodu odpovedá výberový bod $T_i = [x_i^*, y_i^*] = [\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)]$ na rovinnej krivke C . Využitím týchto skutočností priamo z definície krivkového integrálu dostávame

$$\begin{aligned}
\int_C P(x, y) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} P(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} P(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)) (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} P(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)) \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) \\
&\quad \left\{ \text{Lagrangeova veta pre funkciu } \varphi(t) \text{ na intervale } [t_{i-1}, t_i] \right. \\
&\quad \left. \text{dáva bod } t_i^*, \text{ taký, že } \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \varphi'(t_i^*). \text{ Tento bod} \right. \\
&\quad \left. \text{je zároveň výberový bod z intervalu } [t_{i-1}, t_i] \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} P(\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)) \varphi'(t_i^*) \Delta t_i \\
&\quad \{ \text{v tomto vzťahu spoznáваме limitu postupnosti} \\
&\quad \text{integrálnych súčtov pre dvojný integrál a preto} \} \\
&= \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.
\end{aligned}$$

Odvodili sme nasledujúci vzťah

$$\int_C P(x, y) dx = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Analogickým postupom dostávame

$$\int_C Q(x, y) dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt.$$

Na základe uvedeného môžeme sformulovať vetu o výpočte krivkového integrálu.

Veta 6.1 *Nech $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ je spojitá vektorová funkcia definovaná na orientovanej jednoduchej hladkej krivke C , ktorej parametrické vyjadrenie je*

$$C : \quad \vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b].$$

Potom

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \pm \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt,$$

kde znamienko $+$ resp. $-$ platí ak C je orientovaná súhlasne resp. nesúhlasne so svojim parametrickým vyjadrením.

Príklad 6.1 Vypočítajme krivkový integrál

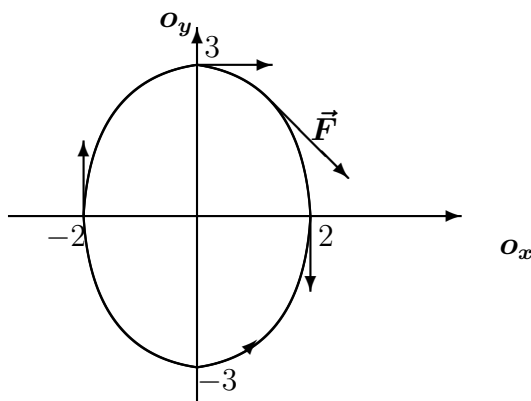
$$\int_C y \, dx - x \, dy,$$

ak krivka C je elipsa

$$C : \quad \vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

orientovaná súhlasne so svojim parametrickým vyjadrením.

Riešenie: Zakreslíme elipsu a v niekoľkých vybraných bodoch znázorníme aj vektor sily $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$.



Keďže sila pôsobí stále proti pohybu hmotného bodu bude výsledná práca záporná. Znamienko mínus vyjadruje, že silové pole prácu nekoná, ale na prekonanie silového poľa treba prácu dodať. Teda dostávame

$$\int_C y \, dx - x \, dy = \int_0^{2\pi} (3 \sin t (-2 \sin t) - 2 \cos t (3 \cos t)) \, dt = -12\pi.$$

Ak by sa hmotný bod pohyboval po elipse opačným smerom, silové pole by prácu konalo a výsledok by bol 12π .

6.3 Greenova veta

V prípade, ak je krivka C uzavretá, kladne orientovaná, môžeme krivkový integrál počítať prevodom na dvojný integrál, o čom hovorí nasledujúca veta.

Veta 6.2 Nech C je uzavretá, jednoduchá, hladká, kladne orientovaná krivka. Nech D je rovinná oblasť ohraničená krivkou C . Nech $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ sú spojité na D . Potom

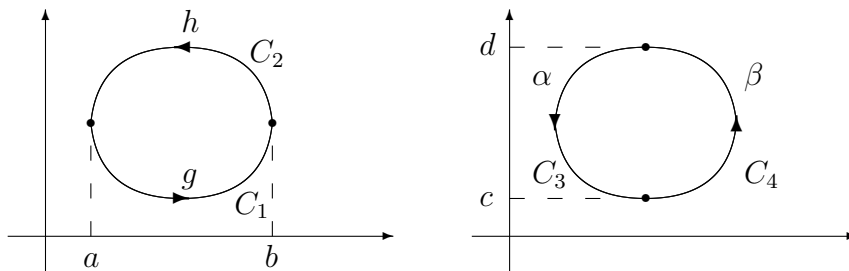
$$\int_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

Dôkaz. Ukážeme, že platia nasledujúce rovnosti.

$$\int_C P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy$$

$$\int_C Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy$$

Predpokladáme, že D je elementárna oblasť typu $[x, y]$ aj $[y, x]$ (ak nie, tak oblasť D vyjadríme ako zjednotenie viacerých elementárnych oblastí).



$$D : \quad a \leq x \leq b$$

$$g(x) \leq y \leq h(x)$$

$$D : \quad c \leq y \leq d$$

$$\alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$$

Krivku C rozdelíme na dve krivky $C = C_1 \cup C_2$, kde

$$C_1 : \quad x = t,$$

$$y = g(t), \quad t \in [a, b],$$

$$C_2 : \quad x = t,$$

$$y = h(t), \quad t \in [a, b],$$

pričom krivka C_1 je orientovaná súhlasne s týmto parametrickým vyjadrením a krivka C_2 nesúhlasne. Počítajme krivkový integrál

$$\int_C P(x, y) dx = \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx$$

$$= \int_a^b P(t, g(t)) dt - \int_a^b P(t, h(t)) dt.$$

Ďalej počítajme dvojný integrál

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{keďže} \quad D : \quad a \leq x \leq b \\ \quad \quad \quad g(x) \leq y \leq h(x) \end{array} \right\}$$

$$= \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right) dx$$

$$= \int_a^b P(x, h(x)) - P(x, g(x)) dx.$$

Tým sme dokázali požadovanú rovnosť. Analogicky sa overí, že

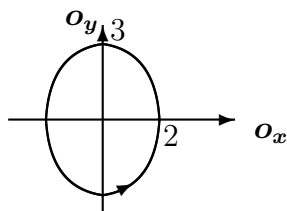
$$\int_C Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy.$$

Príklad 6.2 *Vypočítajte krivkový integrál*

$$\int_C (x + y) dx - (x - y) dy,$$

ak krivka C je kladne orientovaná elipsa $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Riešenie:



Použitím Greenovej vety dostávame

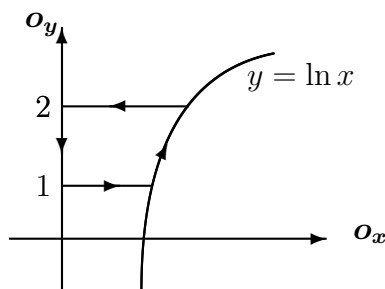
$$\int_C (x + y) dx - (x - y) dy = -2 \iint_D 1 dx dy = -2P(D) = -12\pi.$$

Príklad 6.3 *Vypočítajte krivkový integrál*

$$\int_C \frac{y^2}{2} dx + \frac{x^2}{2} dy,$$

ak C je kladne orientovaná hranica oblasti ohraničenej krivkami $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$.

Riešenie: Načrtne si hranicu oblasti ohraničenej krivkou C .



Množinu D vyjadríme nasledovne

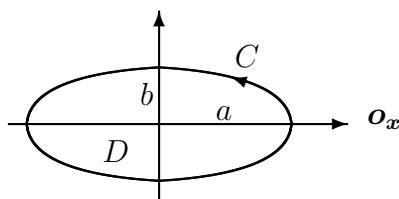
$$D : \quad \begin{aligned} 1 &\leq y \leq 2, \\ 0 &\leq x \leq e^y. \end{aligned}$$

Použitím Greenovej vety dostávame

$$\begin{aligned} \int_C \frac{y^2}{2} dx + \frac{x^2}{2} dy &= \iint_D (x - y) dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^{e^y} (x - y) dx \right) dy \\ &= \left[\frac{e^{2y}}{4} - ye^y + e^y \right]_1^2 = \frac{e^4}{4} - \frac{5e^2}{4}. \end{aligned}$$

Príklad 6.4 Pomocou krivkového integrálu odvodíme vzorec pre výpočet obsahu elipsy danej: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Riešenie: Vieme, že plochu vieme vyjadriť pomocou dvojného integrálu, na ktorý aplikujeme Greenovu vetu:



Teda pre danú plochu máme

$$\begin{aligned} \iint_D 1 dx dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

Potrebujeme nájsť také funkcie P , Q , aby platilo

$$1 = \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right).$$

Možnosti na zvolenie funkcií P , Q je samozrejme viacej. My použijeme

$$P(x, y) = -\frac{y}{2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{2}.$$

Teda sme odvodili všeobecný vzorec pre výpočet obsahu rovinného telesa

$$P(D) = \int_C -\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy,$$

kde C je kladne orientovaná hranica D . Aplikáciou tohto vzorca na náš príklad použitím nasledujúcich parametrických rovníc pre elipsu

$$C : \begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

dostávame

$$P(D) = \int_C -\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy = \int_0^{2\pi} (-b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(b \cos t) dt = \pi ab.$$

Príklad 6.5 Nech C je uzavretá, jednoduchá hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá tvorí hranicu oblasti Ω . Vyjadrieme dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} ts \, dt ds$$

pomocou krivkového integrálu.

Riešenie: Greenova veta vyžaduje funkcie $P(t, s)$, $Q(t, s)$, také, že

$$ts = \left(\frac{\partial Q(t, s)}{\partial t} - \frac{\partial P(t, s)}{\partial s} \right).$$

Existuje nekonečne veľa variant pre ich výber. My urobíme jeden konkrétny založený na zameniteľnosti premenných t a s vo funkcii ts . Teda

$$ts = \frac{ts}{2} - \frac{-ts}{2} = \left(\frac{\partial Q(t, s)}{\partial t} - \frac{\partial P(t, s)}{\partial s} \right).$$

Funkciu $Q(t, s)$ nájdeme z podmienky $\frac{\partial Q(t, s)}{\partial t} = \frac{ts}{2}$ a využitím symetrie medzi t a s . Potom stačí položiť $P(t, s) = -Q(s, t)$. V našom prípade dostávame

$$Q(t, s) = \frac{t^2 s}{4} \quad \text{a následne} \quad P(t, s) = -\frac{ts^2}{4}.$$

Preto

$$\iint_{\Omega} ts \, dt ds = \int_C -\frac{ts^2}{4} dt + \frac{t^2 s}{4} ds.$$

Nasledujúci príklad využijeme ako referenčný pri odvodzovaní metódy výpočtu objemu molekuly.

Príklad 6.6 Nech C je uzavretá, jednoduchá hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá tvorí hranicu oblasti Ω . Vyjadrieme dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{(t^2 + s^2 + r^2)^2} dt ds$$

pomocou krivkového integrálu.

Riešenie: Aby sme mohli aplikovať Greenovu vetu potrebujeme zvoliť funkcie P, Q tak, aby

$$\frac{1}{(t^2 + s^2 + r^2)^2} = \left(\frac{\partial Q(t, s)}{\partial t} - \frac{\partial P(t, s)}{\partial s} \right).$$

Existuje nekonečne veľa možností ako vybrať tieto funkcie. Problém je ako ich nájsť v čo najjednoduchšom tvare. Keďže ľavá strana je vlastne podiel dvoch polynómov, budeme aj funkcie P, Q hľadať v tvare racionálnej funkcie. Využitím symetrie medzi premennými t, s v predpise funkcie a faktu, že derivácia racionálnej funkcie zvyšuje stupeň mocniny v menovateli, skúsime P, Q hľadať v nasledujúcom tvare

$$\frac{1}{(t^2 + s^2 + r^2)^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{At}{t^2 + s^2 + r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{-As}{t^2 + s^2 + r^2} \right),$$

kde A je konštanta. Vypočítaním parciálnych derivácií na pravej strane, dostávame

$$\frac{1}{(t^2 + s^2 + r^2)^2} = \frac{2Ar^2t}{t^2 + s^2 + r^2}.$$

Teda pre $A = \frac{1}{2r^2}$ vieme funkciu napísať ako rozdiel požadovaných parciálnych derivácií. Aplikácia Greenovej vety dáva požadovanú transformáciu na krivkový integrál:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{1}{(t^2 + s^2 + r^2)^2} dt ds &= \frac{1}{2r^2} \int_C \frac{-s}{t^2 + s^2 + r^2} dt + \frac{t}{t^2 + s^2 + r^2} ds \\ &= \frac{1}{2r^2} \int_C \frac{-s dt + t ds}{t^2 + s^2 + r^2}. \end{aligned}$$

6.4 Dôsledky Greenovej vety, nezávislosť od integračnej cesty

Nech C je uzavretá, jednoduchá hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá tvorí hranicu oblasti D . Ak na oblasti D platí,

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y},$$

potom

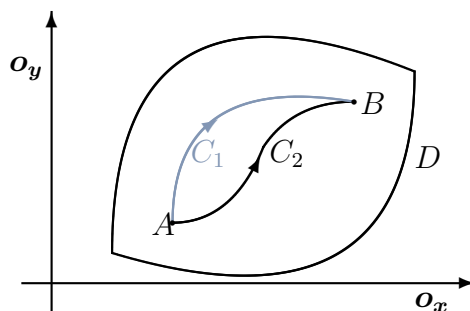
$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Táto vlastnosť je bezprostredným dôsledkom Greenovej vety a využijeme ho pri nasledujúcich úvahách.

Nech na oblasti D platí,

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}.$$

Nech jednoduché krivky C_1 a C_2 ležia v oblasti D a majú spoločný začiatkový aj koncový bod.



Potom

$$\int_{C_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{C_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

To znamená, že uvedený krivkový integrál nezávisí od integračnej cesty (od tvaru krivky), ale len od začiatočného a koncového bodu. Uvedené tvrdenie vyplýva z nasledujúcich úvah. Uvažujme uzavretú krivku $C = C_2 \cup (-C_1)$, ktorá je kladne orientovaná. Použitím prvého dôsledku pre krivku C máme

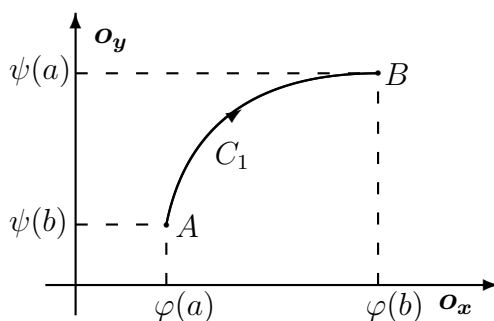
$$0 = \int_C P dx + Q dy = \int_{C_2} P dx + Q dy - \int_{C_1} P dx + Q dy,$$

odkiaľ vyplýva naše tvrdenie.

Ďalej zdefinujeme potenciál silového poľa a ukážeme jeho použitie pri výpočte krivkového integrálu. Majme jednoduchú hladkú krivku C určenú parametrickým vyjadrením

$$C : \quad \vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b],$$

pričom jej orientácia je súhlasná s daným parametrickým vyjadrením, t. j. $A = [\varphi(a), \psi(a)]$ je jej začiatočný bod a $B = [\varphi(b), \psi(b)]$ je jej koncový bod. Krivka leží v oblasti D .



Uvažujme integrál

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Predpokladajme, že existuje skalárna funkcia $V(x, y)$, pre ktorú na D platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} &= P(x, y), \\ \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

Takúto funkciu nazývame potenciál silového poľa $\vec{F} = (P, Q)$. Ak zmiešané parciálne derivácie funkcie $V(x, y)$ sú spojité na D , potom z ich rovnosti vyplýva

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

a teda integrál

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

spĺňa podmienku nezávislosti na integračnej ceste. Môžeme zhrnúť nasledovne:

Krivkový integrál nezávisí od integračnej cesty práve vtedy, ak existuje potenciál jeho silového poľa.

Ukážeme, že pomocou potenciálu silového poľa môžeme jednoducho vypočítať krivkový integrál.

$$\begin{aligned}\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &\{ \text{použitím vety o výpočte} \} \\ &= \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) dt = \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{keďže} \\ \frac{dV(\varphi(t), \psi(t))}{dt} = \frac{\partial V(\varphi(t), \psi(t))}{\partial x} \frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{\partial V(\varphi(t), \psi(t))}{\partial y} \frac{d\psi(t)}{dt} \\ = P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \end{array} \right\} \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (V(\varphi(t), \psi(t))) dt = [V(\varphi(t), \psi(t))]_a^b = V(B) - V(A).\end{aligned}$$

Uvedené možno zhrnúť do nasledujúceho tvrdenia

Ak existuje potenciál silového poľa V (krivkový integrál nezávisí od integračnej cesty), potom

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = V(B) - V(A),$$

kde A a B sú prvý a posledný bod krivky.

Príklad 6.7 *Vypočítajte krivkový integrál*

$$\int_C y \, dx + x \, dy,$$

ak $A = [1, 1]$ a $B = [2, 4]$ sú prvý a posledný bod krivky.

Riešenie: Keďže

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y},$$

uvedený integrál nezávisí od integračnej cesty a môžeme ho rátať pomocou potenciálu $V(x, y)$, kde

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} &= P(x, y) = y, \\ \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} &= Q(x, y) = x.\end{aligned}$$

Očividne $V(x, y) = xy$ vyhovuje týmto podmienkam, a preto

$$\int_C y \, dx + x \, dy = \left[xy \right]_{A=[1,1]}^{B=[2,4]} = 8 - 1 = 7.$$

Kapitola 7

Prípravné výsledky

7.1 Súčiny vektorov a ich aplikácie

V tejto kapitole zdefinujeme niekoľko operácií s vektormi a ukážeme ich použitie.

7.2 Násobok vektora skalárom

Nech $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je daný vektor a $c \in \mathbb{R}$, potom veľkosť vektora je

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

a násobok

$$c \cdot \vec{v} = (cv_1, cv_2, cv_3).$$

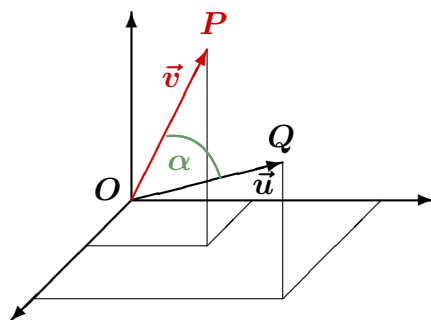
Pri násobení vektora skalárom sa mení veľkosť vektora, zatiaľ čo smer a orientácia (ak $c > 0$) zostávajú. Vektory \vec{v} a $c \cdot \vec{v}$ sú teda rovnobežné.

7.3 Skalárny súčin

Nech $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ sú dané vektory. Skalárny súčin vektorov \vec{v} , \vec{u} označujeme $\vec{v} \circ \vec{u}$ a definujeme nasledovne

$$\vec{v} \circ \vec{u} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Pomocou skalárneho súčinu vieme vyjadriť uhol dvoch vektorov.



Uvažujme vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ body $P = [v_1, v_2, v_3]$ a $Q = [u_1, u_2, u_3]$ počítajme štvorec veľkosti vektora $P\vec{Q}$

$$\begin{aligned} |P\vec{Q}|^2 &= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 \\ &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \circ \vec{v} \end{aligned}$$

Na trojuholník PQO aplikujeme kosínusovú vetu

$$|P\vec{Q}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha,$$

kde α je uhol vektorov \vec{u} , \vec{v} . Spojením oboch rovností dostávame

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha. \quad (\heartsuit)$$

Poznámka 7.1 Niektorí autori práve týmto vzťahom definujú skalárny súčin.

Vlastnosti skalárneho súčinu:

Nech \vec{u} , \vec{v} sú vektory a α je uhol týchto vektorov. Zo vzťahu (\heartsuit) máme

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\pi}{2} &\iff \vec{u} \circ \vec{v} = 0 \\ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) &\iff \vec{u} \circ \vec{v} > 0 \\ \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] &\iff \vec{u} \circ \vec{v} < 0 \end{aligned}$$

priamo z definície plynie

$$\begin{aligned} \vec{u} \circ \vec{v} &= \vec{u} \circ \vec{v} \\ (c\vec{u}) \circ \vec{v} &= c(\vec{u} \circ \vec{v}) \\ \vec{u} \circ \vec{u} &= |\vec{u}|^2 \end{aligned}$$

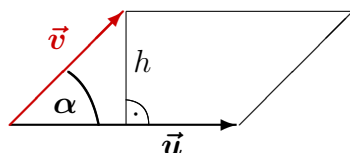
7.4 Vektorový súčin

Nech $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ sú dané vektory. Vektorový súčin vektorov \vec{v} , \vec{u} je vektor \vec{w} (zapisujeme $\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}$), ktorý definujeme nasledovne

$$\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - v_2u_3, v_1u_3 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Vlastnosti vektorového súčinu:

- Nech $\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}$, potom $\vec{w} \perp \vec{v}$ a $\vec{w} \perp \vec{u}$, t. j. vektorový súčin je kolmý na rovinu určenú vektormi \vec{v} a \vec{u} .
- Pomocou vektorového súčinu vieme vypočítať obsah rovnobežníka tvoreného nezávislými vektormi \vec{v} a \vec{u} .



Nech $w = \vec{v} \times \vec{u}$. Počítajme štvorec veľkosti vektora \vec{w}

$$\begin{aligned} |\vec{w}|^2 &= (u_2v_3 - v_2u_3)^2 + (v_1u_3 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\ &= u_2^2v_3^2 + v_2^2u_3^2 + v_1^2u_3^2 + u_1^2v_3^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 \\ &\quad - 2(u_2v_3v_2u_3 + v_1u_3u_1v_3 + u_1v_2u_2v_1) \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\ &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \circ \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \cos^2 \alpha \\ &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Keďže $\alpha \in [0, \pi]$, dostávame

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin \alpha.$$

Na druhej strane obsah rovnobežníka na horeuvedenom obrázku je

$$P_{\square} = |\vec{u}|h = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin \alpha.$$

A teda obsah rovnobežníka určeného vektormi \vec{v} a \vec{u} môžeme vyjadriť ako veľkosť ich vektorového súčinu

$$P_{\square} = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

c) Pre vektory \vec{v} , \vec{u} , \vec{w} platí

$$\begin{aligned} \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}, \\ (c\vec{u}) \times \vec{v} &= c(\vec{u} \times \vec{v}). \end{aligned}$$

7.5 Praktické použitie vektorového súčinu (príprava k plošnému integrálu)

Rovina ρ daná bodom P a dvojicou nezávislých vektorov \vec{u} , \vec{v} má štandardné parametrické vyjadrenie:

$$\mathcal{X} = P + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Tú istú rovinu môžeme vyjadriť samozrejme aj v tvare

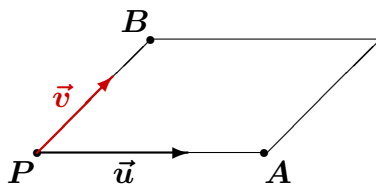
$$\mathcal{X} = P + (t - t_1)\vec{u} + (s - s_1)\vec{v}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2,$$

kde t_1, s_1 sú ľubovoľné čísla.

Ak pre parametre t, s zavedieme obmedzenia $t \in [t_1, t_2]$, $s \in [s_1, s_2]$, tak rovnica

$$\vec{r}(t, s) = \mathcal{X} = P + (t - t_1)\vec{u} + (s - s_1)\vec{v}$$

reprezentuje rovnobežník,



kde pre body P , A , B platí

$$\begin{aligned} P &= \vec{r}(t_1, s_1), \\ A &= \vec{r}(t_2, s_1) = P + (t_2 - t_1)\vec{u}, \\ B &= \vec{r}(t_1, s_2) = P + (s_2 - s_1)\vec{v}. \end{aligned}$$

Obsah uvedeného rovnobežníka vyjadrený pomocou vektorového súčinu je

$$\begin{aligned} P_{\square} &= |\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}| = |(t_2 - t_1)\vec{u} \times (s_2 - s_1)\vec{v}| \\ &= (t_2 - t_1)(s_2 - s_1)|\vec{u} \times \vec{v}|. \end{aligned}$$

Odvođený vzťah použijeme neskôr pri odvádzaní vety o výpočte plošného integrálu.

7.6 Zmiešaný súčin

Nech $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ sú dané vektory. Zmiešaný súčin definujeme nasledovne

$$\vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w}) = (u_1, u_2, u_3) \circ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Kapitola 8

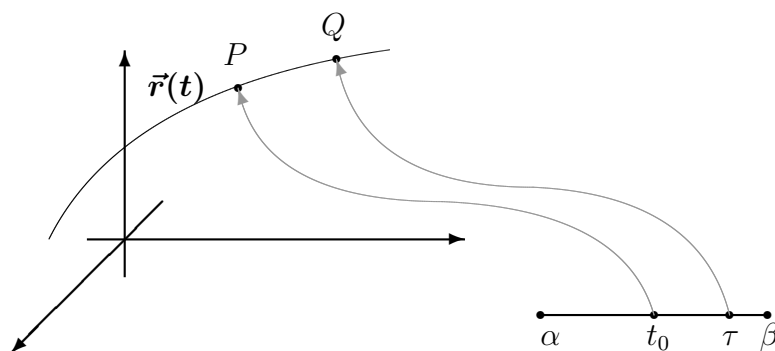
Plošný integrál II. druhu

8.1 Dotyčnica ku priestorovej krivke určenej parametrickými rovnicami

Nech

$$C: \quad \vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \chi(t)\vec{k}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

je parametrické vyjadrenie jednoduchkej, hladkej krivky. Zvoľme na krivke dva body $P = [p_1, p_2, p_3] = \vec{r}(t_0)$ a $Q = \vec{r}(\tau)$, pričom teda $t_0, \tau \in (\alpha, \beta)$.



Naším cieľom je napísať rovnicu dotyčnice ku krivke C v bode P . Najprv napíšeme rovnicu sečnice, t. j. priamky prechádzajúcej bodmi P a Q . Jej parametrické vyjadrenie je

$$\mathcal{X} = P + t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Respektíve namiesto vektora \overrightarrow{PQ} môžeme v parametrickom vyjadrení použiť jeho vhodný násobok, napr. $\frac{1}{\tau - t_0}\overrightarrow{PQ}$ a teda

$$\mathcal{X} = P + t\frac{1}{\tau - t_0}\overrightarrow{PQ} = P + t\frac{\vec{r}(\tau) - \vec{r}(t_0)}{\tau - t_0}.$$

Uvedené vyjadrenie rozpísané po zložkách je

$$\begin{aligned}x &= p_1 + t \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_0)}{\tau - t_0} \\y &= p_2 + t \frac{\psi(\tau) - \psi(t_0)}{\tau - t_0} \\z &= p_3 + t \frac{\chi(\tau) - \chi(t_0)}{\tau - t_0}.\end{aligned}$$

Pre $Q \rightarrow P$, teda $\tau \rightarrow t_0$ sa sečnica stane dotyčnicou, preto limitným prechodom dostávame rovnicu dotyčnice

$$\begin{aligned}x &= p_1 + t \varphi'(t_0) \\y &= p_2 + t \psi'(t_0) \\z &= p_3 + t \chi'(t_0)\end{aligned}$$

respektíve

$$\mathcal{X} = P + t \vec{r}'(t_0).$$

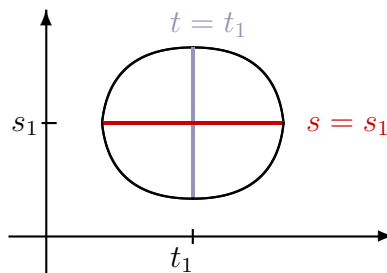
Teda $\vec{r}'(t_0)$ je smerový vektor dotyčnice ku krivke C .

8.2 Dotyková rovina ku ploche určenej parametrickými rovnicami

Nech

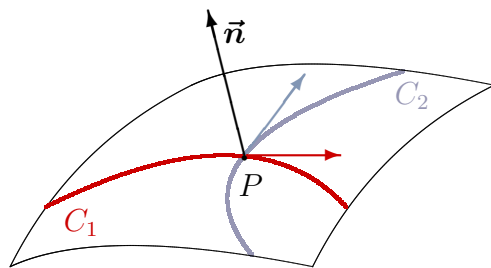
$$\sigma : \quad \vec{r}(t, s) = x(t, s)\vec{i} + y(t, s)\vec{j} + z(t, s)\vec{k}, \quad (t, s) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

je parametrické vyjadrenie hladkej plochy. Na ploche zvolíme bod $P \in \sigma$, t.j. $P[x_0, y_0, z_0] = \vec{r}(t_1, s_1)$, $(t_1, s_1) \in \Omega$. Úlohou je zostrojiť dotykovú rovinu a normálový vektor k ploche σ v bode P .



Úsečke $(t, s_1) \subset \Omega$ odpovedá priestorová krivka C_1 ležiaca na Ω s parametrickým vyjadrením $\vec{r}(t, s_1)$. Preto smerový vektor dotyčnice ku krivke C_1 v bode $P[x_0, y_0, z_0]$ je

$$\left[\frac{\partial \vec{r}(t, s_1)}{\partial t} \right]_{t=t_1} = \frac{\partial \vec{r}(t_1, s_1)}{\partial t}.$$



Analogicky úsečke $(t_1, s) \subset \Omega$ odpovedá priestorová krivka C_2 ležiaca na Ω s parametrickým vyjadrením $\vec{r}(t_1, s)$. Preto smerový vektor dotyčnice ku krivke C_1 v bode $P[x_0, y_0, z_0]$ je $\frac{\partial \vec{r}(t_1, s_1)}{\partial s}$. Rovina prechádzajúca bodom P a určená vektormi

$$\frac{\partial \vec{r}(t_1, s_1)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{r}(t_1, s_1)}{\partial s}$$

sa nazýva dotyková rovina ku ploche σ v bode P . Vektor kolmý na dotykovú rovinu sa nazýva normálový vektor a je určený

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}(t_1, s_1)}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}(t_1, s_1)}{\partial s}.$$

Poznámka 8.1 Normálový vektor ku ploche σ jednotkovej veľkosti vyjadríme ako

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s}{|\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s|}.$$

8.3 Plochy a ich parametrické vyjadrenie

Pred zavedením a štúdiom plošného integrálu II. druhu sa budeme zaoberať pojmom plocha.

Plocha vznikne deformáciou nejakej časti roviny, predstavujeme si ju ako nejaký krivý list (napr. papiera), alebo povrch telesa (prípadne časti telesa).

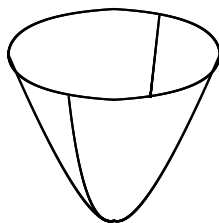
Budeme uvažovať plochy, ktoré vieme vyjadriť nasledovným parametrickým vyjadrením

$$\sigma : \quad \vec{r}(t, s) = x(t, s)\vec{i} + y(t, s)\vec{j} + z(t, s)\vec{k}, \quad (t, s) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

resp.

$$\begin{aligned} \sigma : \quad x &= x(t, s) \\ y &= y(t, s) \\ z &= z(t, s), \quad (t, s) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Uvažujme plochu σ ako časť paraboloidu $z = x^2 + y^2$ pre $z \in [0, 1]$.



Parametrickým vyjadrením tejto plochy je napríklad

$$\begin{aligned}\sigma : \quad x &= t \\ y &= s \\ z &= t^2 + s^2, \quad t^2 + s^2 \leq 1.\end{aligned}$$

Alebo parametrické vyjadrenie tejto plochy je aj

$$\begin{aligned}\sigma : \quad x &= t \cos s \\ y &= t \sin s, \quad 0 \leq s \leq 2\pi \\ z &= t^2, \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Teda istá plocha môže mať rôzne parametrické vyjadrenia.

Poznámka 8.2 *Plochu*

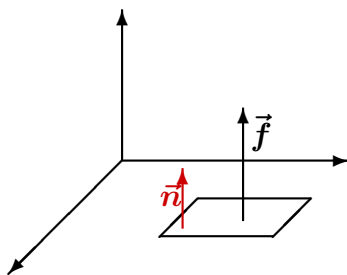
$$\sigma : \quad \vec{r}(t, s) = x(t, s)\vec{i} + y(t, s)\vec{j} + z(t, s)\vec{k}, \quad (t, s) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

nazývame hladkou, ak sú funkcie $x(t, s), y(t, s), z(t, s)$ a všetky ich parciálne derivácie spojité.

8.4 Definícia plošného integrálu II. druhu

V tejto kapitole zdefinujeme plošný integrál cez jeho praktickú aplikáciu. Budeme vyšetřovať tok tekutiny cez plochu σ , ak rýchlosť toku za jednotku času je daná funkciou $\vec{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$.

Uvažujme na začiatok najjednoduchšiu situáciu, t. j. plocha σ je obdĺžnik v rovine ρ_{xy} a rýchlosť toku tekutiny je popísaná konštantnou vektorovou funkciou $\vec{f}(x, y, z) = (0, 0, f_3)$.

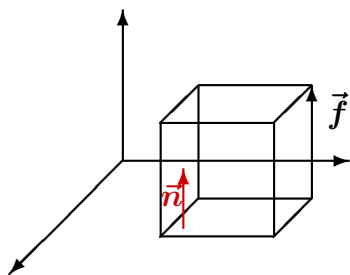


Našou úlohou je zistiť množstvo tekutiny, ktoré pretečie plochou σ za jednotku času v smere jednotkového normálového vektora \vec{n} , ktorý je v tomto prípade $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

Tekutina, ktorá pretečie plochou za jednotku času, vytvorí kváder s podstavou σ a výškou $|\vec{f}|$, a teda s objemom

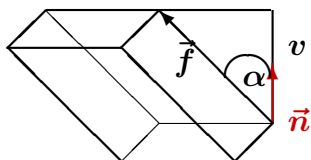
$$V = P(\sigma)|\vec{f}|,$$

kde $P(\sigma)$ je obsah obdĺžníka σ .



Uvažujme teraz situáciu, keď plocha σ je opäť obdĺžnik, rýchlosť toku tekutiny je popísaná konštantnou vektorovou funkciou $\vec{f}(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3)$, pričom teraz jednotkový normálový vektor $\vec{n} \parallel \vec{f}$ a vektory \vec{n}, \vec{f} zvierajú uhol α . Tekutina za jednotku času vytvorí šikmý kváder s výškou v a objemom

$$V = P(\sigma)v = P(\sigma)|\vec{f}| \cos \alpha.$$



Z vlastnosti skalárneho súčinu dostávame

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n} \circ \vec{f}}{|\vec{f}|}$$

a preto pre hľadaný objem platí

$$V = P(\sigma)v = P(\sigma) \cdot \vec{n} \circ \vec{f}.$$

Uvažujme ďalej najvšeobecnejší prípad. Majme zakrivenú jednoduchú, po častiach hladkú, orientovanú plochu σ určenú parametrickým vyjadrením

$$\sigma : \quad \vec{r}(t, s) = x(t, s)\vec{i} + y(t, s)\vec{j} + z(t, s)\vec{k}, \quad (t, s) \in \Omega,$$

ktorej orientáciu určuje jednotkový normálový vektor

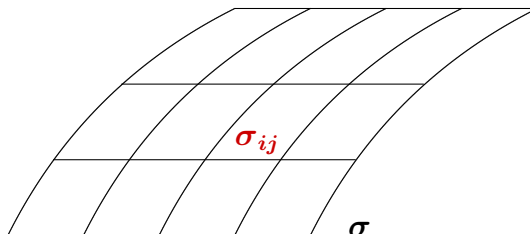
$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s}{|\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s|}.$$

Rýchlosť toku tekutiny je v každom bode plochy σ určená vektorovou funkciou $\vec{f}(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$, ktorá je ohraničená na σ . Otázka je: Aké množstvo tekutiny pretečie za jednotku času cez tú stranu plochy σ , ktorú určuje jej normálový vektor? Keďže úlohu vieme riešiť pre prípad, ak σ je obdĺžnik a vektorová funkcia \vec{f} je konštantná, prevedieme úlohu na tento jednoduchší problém a zároveň zadefinujeme v štyroch krokoch plošný integrál.

1. Rozdelíme plochu σ na malé plôšky σ_{ij} (viď obrázok) pomocou postupnosti delení $\{D_n\}_{n=1}^\infty$, pričom táto postupnosť sa nazýva normálna ak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0,$$

kde $\|D_n\| = \max\{d(\sigma_{ij})\}$, pričom $d(\sigma_{ij})$ je priemer plôšky σ_{ij} , ktorý chápeme ako vzdialenosť dvoch "najvzdialenejších" bodov σ_{ij}



Predpokladáme, že delenie je tak jemné, že zakrivenie plôšiek σ_{ij} je minimálne, t. j. plôšky sú „blízke“ obdĺžnikom.

2. Z každej plôšky $d(\sigma_{ij})$ vyberieme bod Q_{ij} a na celej plôške σ_{ij} aproximujeme vektorovú funkciu

$$\vec{f}(x, y, z) = \vec{f}(Q_{ij}), \quad (x, y, z) \in \sigma_{ij}.$$

3. Na základe úvah s obdĺžnikovou plochou je objem tekutiny, ktorá pretečie cez plôšku σ_{ij} približne rovný

$$P(\sigma_{ij}) \cdot \vec{n} \circ \vec{f}(Q_{ij}).$$

A celkový objem tekutiny, ktorý pretečie cez celú plochu σ

$$V \approx \sum_{i,j} P(\sigma_{ij}) \cdot \vec{n} \circ \vec{f}(Q_{ij}) = S(D_n),$$

čo je postupnosť integrálnych súčtov pre delenia $\{D_n\}$ a voľbu bodov Q_{ij} , pričom sumácia vzhľadom na i aj j sa robí podľa počtu deliacich bodov delenia D_n .

4. Plošný integrál je limita postupnosti integrálnych súčtov.

Zhrnieme uvedené informácie do nasledujúcej definície.

Definícia 8.1 *Nech σ je jednoduchá, po častiach hladká, orientovaná plocha, nech \vec{f} je spojitá na σ . Ak pre každú normálnu postupnosť delení plochy σ a pre ľubovoľnú voľbu bodov Q_{ij} existuje*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j} P(\sigma_{ij}) \cdot \vec{n} \circ \vec{f}(Q_{ij}),$$

tak túto limitu nazývame plošným integrálom II. druhu funkcie \vec{f} na ploche σ . Zapisujeme

$$\iint_{\sigma} \vec{f}(x, y, z) d\vec{\sigma} = \iint_{\sigma} f_1 dydz + f_2 dx dz + f_3 dx dy.$$

Tento integrál reprezentuje množstvo tekutiny, ktoré pretečie za jednotku času plochou σ , ak rýchlosť toku je daná funkciou \vec{f} .

Nasledujúca vlastnosť plošného integrálu je zrejmá z definície plošného integrálu. Ak σ_1 a σ_2 tvoria delenie plochy σ , tak platí

$$\iint_{\sigma} \vec{f}(x, y, z) d\vec{\sigma} = \iint_{\sigma_1} \vec{f}(x, y, z) d\vec{\sigma} + \iint_{\sigma_2} \vec{f}(x, y, z) d\vec{\sigma}.$$

8.5 Veta o výpočte plošného integrálu

Ukážeme, ako vypočítať plošný integrál prevodom na dvojný integrál. Majme plochu σ určenú parametrickým vyjadrením

$$\sigma : \quad \vec{r}(t, s) = x(t, s)\vec{i} + y(t, s)\vec{j} + z(t, s)\vec{k}, \quad (t, s) \in \Omega.$$

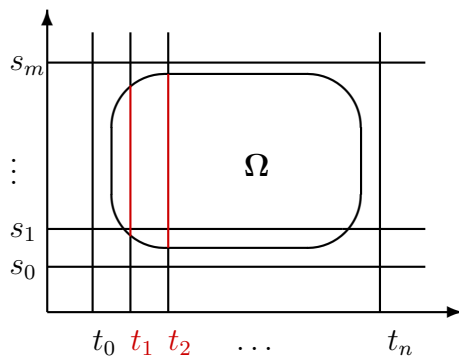
K odvodeniu vety o výpočte využijeme definíciu plošného integrálu. Delenie D_n plochy σ urobíme pomocou delenia množiny Ω nasledovne. Nech Ω je časťou intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$. Urobíme delenie intervalu $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

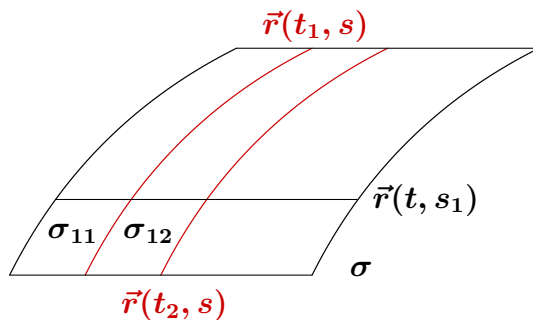
a delenie intervalu $[c, d]$:

$$c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$$

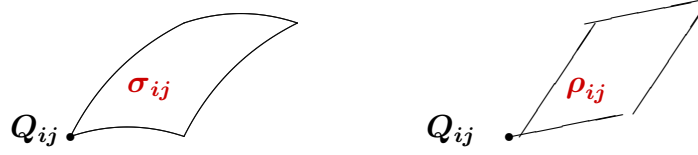
(viď obrázok). Úsečky $[t_1, s] \subset \Omega$ odpovedá krivka $\vec{r}(t_1, s)$ na ploche σ , úsečky $[t_2, s] \subset \Omega$ odpovedá krivka $\vec{r}(t_2, s) \subset \sigma$ a podobne úsečky $[t, s_1] \subset \Omega$ odpovedá krivka $\vec{r}(t, s_1)$ na ploche σ .



Takýmto spôsobom pomocou delenia rovinatej množiny Ω vyrobíme delenie priestorovej plochy σ .



Jednotlivé plôšky σ_{ij} vytvárajúce delenie D majú teda hranice tvorené oblúkmi kriviek $\vec{r}(t_i, s)$, $\vec{r}(t_{i+1}, s)$, $\vec{r}(t, s_j)$, $\vec{r}(t, s_{j+1})$. Priesečníky kriviek $\vec{r}(t_i, s)$ a $\vec{r}(t, s_j)$ označíme $Q_{ij} = \vec{r}(t_i, s_j)$.



Pre malú plôšku σ_{ij} zostrojíme dotykovú rovinu (konkrétne rovnobežník) v bode Q_{ij} , krory má predpis

$$\rho_{ij} : X = Q_{ij} + (t - t_i)\vec{r}'_t(t, s) + (s - s_j)\vec{r}'_s(t, s).$$

Zostrojený dotykový rovnobežník ρ_{ij} aproximuje plôšku σ_{ij} a pri dostatočne jemnom delení zároveň pre ich obsahy platí

$$P(\sigma_{ij}) \approx P(\rho_{ij}).$$

Z podkapitoly 7.5 vieme, že

$$P(\rho_{ij}) = (t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j)|\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s| = |\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s|\Delta t_i \Delta s_j$$

a pre ednotkový normálový vektor v bode Q_{ij} platí

$$\vec{n}(Q_{ij}) = \left[\frac{\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s}{|\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s|} \right]_{Q_{ij}}.$$

Vzťah pre výpočet plošného integrálu dostaneme priamo z jeho definície

$$\iint_{\sigma} \vec{f}(x, y, z) d\vec{\sigma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j} P(\sigma_{ij}) \cdot \vec{n} \circ \vec{f}(Q_{ij}) = (\Delta)$$

využitím normálnej postupnosti delení sa aproximácia $P(\sigma_{ij}) \approx P(\rho_{ij})$ pre $n \rightarrow \infty$ mení na rovnosť a teda

$$\begin{aligned} (\Delta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j} \vec{f}(Q_{ij}) \circ \vec{n} \cdot P(\rho_{ij}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j} \vec{f}(Q_{ij}) \circ \left[\frac{\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s}{|\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s|} \right]_{Q_{ij}} \cdot |\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s| \Delta t_i \Delta s_j \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j} \vec{f}(\vec{r}(t_i, s_j)) \circ (\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s)_{Q_{ij}} \Delta t_i \Delta s_j \end{aligned}$$

{v tomto vzťahu spoznáваме limitu postupnosti integrálnych súčtov pre dvojný integrál a preto}

$$= \iint_{\Omega} \vec{f}(\vec{r}(t, s)) \circ (\vec{r}'_t \times \vec{r}'_s) dt ds$$

{využitím vlastností zmiešaného súčinu vektorov}

$$= \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} \vec{f}_1(\vec{r}(t, s)) & \vec{f}_2(\vec{r}(t, s)) & \vec{f}_3(\vec{r}(t, s)) \\ x'_t(t, s) & y'_t(t, s) & z'_t(t, s) \\ x'_s(t, s) & y'_s(t, s) & z'_s(t, s) \end{vmatrix} dt ds.$$

Na základe uvedeného môžeme sformulovať vetu o výpočte plošného integrálu.

Veta 8.1 *Nech $\vec{f}(x, y, z)$ je spojitá vektorová funkcia definovaná na orientovanej jednoduchéj hladkej ploche σ , ktorej parametrické vyjadrenie je*

$$\vec{r}(t, s) = x(t, s)\vec{i} + y(t, s)\vec{j} + z(t, s)\vec{k}, \quad (t, s) \in \Omega.$$

Potom

$$\iint_{\sigma} \vec{f}(x, y, z) d\vec{\sigma} = \pm \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} \vec{f}_1(\vec{r}(t, s)) & \vec{f}_2(\vec{r}(t, s)) & \vec{f}_3(\vec{r}(t, s)) \\ x'_t(t, s) & y'_t(t, s) & z'_t(t, s) \\ x'_s(t, s) & y'_s(t, s) & z'_s(t, s) \end{vmatrix} dt ds,$$

kde znamienko $+$ resp. $-$ platí, ak σ je orientovaná súhlasne resp. nesúhlasne s parametrizáciou plochy.

Poznámka 8.3 *Znamienko $+$ (teda plocha je orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením) platí, ak*

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_t(t, s) & y'_t(t, s) & z'_t(t, s) \\ x'_s(t, s) & y'_s(t, s) & z'_s(t, s) \end{vmatrix}.$$

Príklad 8.1 *Vypočítajme plošný integrál*

$$\iint_{\sigma} x dydz + y dx dz + z dx dy,$$

ak

$$\sigma : \quad \vec{r}(t, s) = t\vec{i} + s\vec{j} + (ts + 1)\vec{k}, \quad (t, s) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1].$$

Plocha je orientovaná tak, že normálový vektor v každom bode plochy zvierá s vektorom \vec{k} ostrý uhol.

Riešenie: Použitím vety o výpočte dostávame

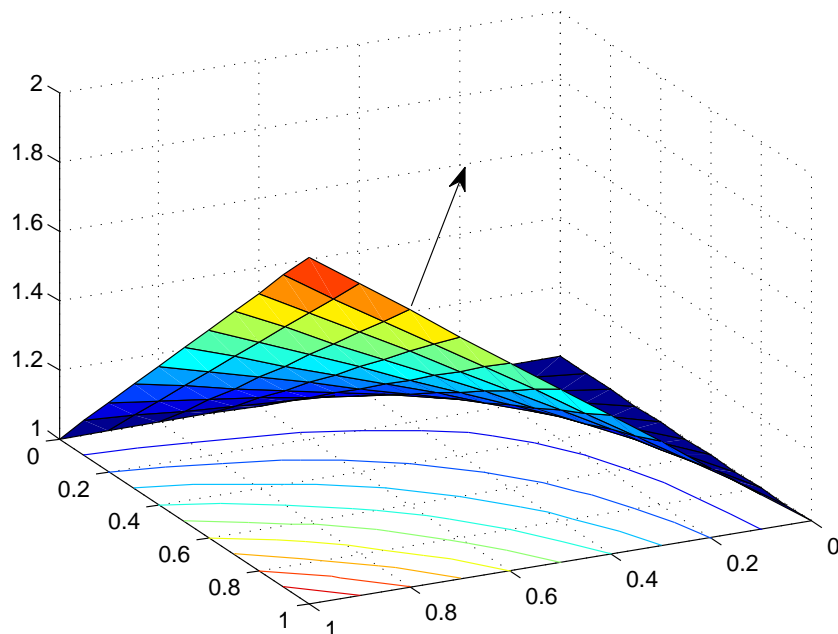
$$\iint_{\sigma} x dydz + y dx dz + z dx dy = \pm \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} t & s & (ts + 1) \\ 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & s \end{vmatrix} dt ds = (\spadesuit).$$

Použili sme normálový vektor

$$\vec{n} = \vec{r}'_t \times \vec{r}'_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & s \end{vmatrix} = (-t, -s, 1).$$

Keďže $\vec{n} \circ \vec{k} = 1 > 0$, zvierá náš normálový vektor s vektorom \vec{k} ostrý uhol a teda použijeme znamienko $+$. Preto

$$(\spadesuit) = \int_0^1 \int_0^1 (ts + 1) dt ds = \frac{5}{4}.$$



Obr. 8.1: Graf plochy σ

8.6 Gauss - Ostrogradského veta

Veta 8.2 *Nech σ je uzavretá, jednoduchá, hladká plocha, orientovanej normálovým vektorom smerom von. Nech $A \subset \mathbb{R}^3$ je množina skladajúca sa zo všetkých bodov plochy σ aj jej vnútra. Nech $\vec{f}(x, y, z)$ aj $\text{div} \vec{f}(x, y, z)$ sú spojité na A . Potom platí*

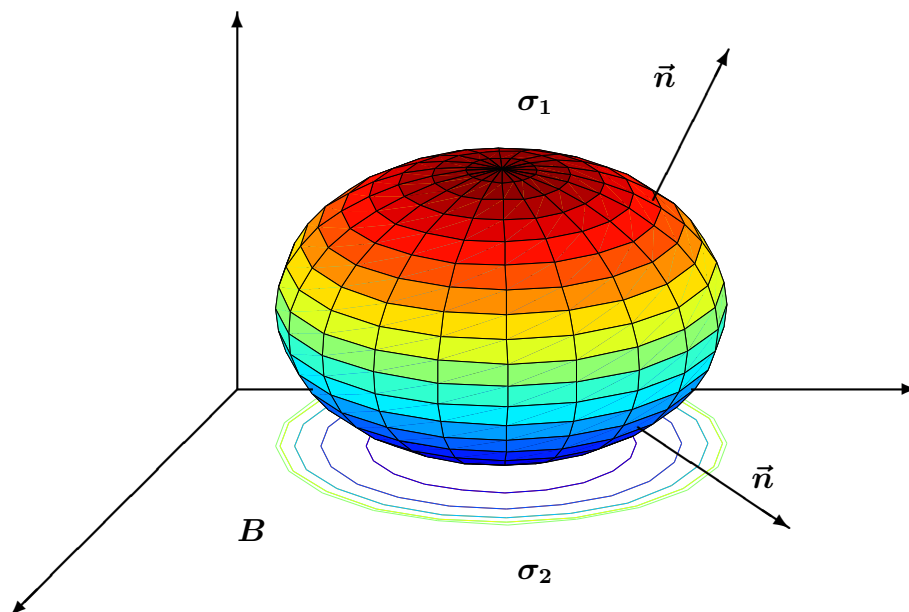
$$\vec{r}(t, s) = x(t, s)\vec{i} + y(t, s)\vec{j} + z(t, s)\vec{k}, \quad (t, s) \in \Omega.$$

Potom

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \vec{f}(x, y, z) \, d\vec{\sigma} &= \iiint_A \text{div} \vec{f}(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \iiint_A \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Dôkaz. Overíme platnosť nasledujúcich troch rovností

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} f_1(x, y, z) \, dy dz &= \iiint_A (f_1)'_x \, dx dy dz, \\ \iint_{\sigma} f_2(x, y, z) \, dx dz &= \iiint_A (f_2)'_y \, dx dy dz, \\ \iint_{\sigma} f_3(x, y, z) \, dx dy &= \iiint_A (f_3)'_z \, dx dy dz. \end{aligned}$$



Obr. 8.2: Graf plochy $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$

Plochu σ rozdelíme na dve plochy, $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ (viď obrázok), kde

$$\sigma_1 : z = \psi(x, y), \quad (x, y) \in B$$

a normálový vektor tejto plochy zvierá s vektorom \vec{k} ostrý uhol a

$$\sigma_2 : z = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in B.$$

Počítajme plošný integrál

$$\iint_{\sigma} f_3(x, y, z) \, dx dy = \iint_{\sigma_1} f_3(x, y, z) \, dx dy + \iint_{\sigma_2} f_3(x, y, z) \, dx dy = (\Delta).$$

Využitím nasledujúcej parametrizácie

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 : & x = x \\ & y = y \\ & z = \psi(x, y) \end{array} \quad (x, y) \in B, \quad \begin{array}{ll} \sigma_2 : & x = x \\ & y = y \\ & z = \varphi(x, y) \end{array} \quad (x, y) \in B$$

a vety o výpočte plošného integrálu dostávame

$$(\Delta) = \iint_B \begin{vmatrix} 0 & 0 & f_3(x, y, \psi(x, y)) \\ 1 & 0 & \psi'_x \\ 0 & 1 & \psi'_y \end{vmatrix} dx dy - \iint_B \begin{vmatrix} 0 & 0 & f_3(x, y, \varphi(x, y)) \\ 1 & 0 & \varphi'_x \\ 0 & 1 & \varphi'_y \end{vmatrix} dx dy$$

a teda

$$(\Delta) = \iint_B f_3(x, y, \psi(x, y)) \, dx dy - \iint_B f_3(x, y, \varphi(x, y)) \, dx dy.$$

Ďalej počítajme trojný integrál

$$\iiint_A \frac{\partial f_3}{\partial z} dx dy dz = (\circ)$$

po množine A danej

$$A: \quad \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \\ (x, y) \in B,$$

preto

$$(\circ) = \iint_B \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial f_3}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_B f_3(x, y, \psi(x, y)) dx dy \\ - \iint_B f_3(x, y, \varphi(x, y)) dx dy = (\Delta).$$

Tým sme dokázali požadovanú rovnosť.

Príklad 8.2 Vypočítajme plošný integrál

$$\iint_{\sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy$$

ak σ je povrch guľovej plochy $A: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \leq 1$ orientovanej normálou von.

Riešenie: Použitím G.-O. vety dostávame

$$\iint_{\sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy = 3 \iiint_A 1 dx dy dz = 3V(A) = 4\pi.$$

Príklad 8.3 Vypočítajme plošný integrál

$$\iint_{\sigma} x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy,$$

ak σ je povrch kocky $A = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ orientovaný normálou von.

Riešenie: Použitím G.-O. vety dostávame

$$\iint_{\sigma} x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy = 2 \iiint_A (x + y + z) dx dy dz \\ \{ \text{trojný integrál je výhodné riešiť pomocou súradníc ťažiska} \} \\ = 2(x_T + y_T + z_T)V(A) = 3.$$

Kapitola 9

Aplikácia integrálov - výpočet objemu molekuly

Úloha (riešime problém) – Pre molekulu M skladajúcu sa z atómov G_i tvaru guľičiek (pozri obrázok 9.1)

$$M = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$

je treba vypočítať objem, pričom

$$G_i : \quad (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = r_i^2.$$

Z teórie trojného integrálu vieme, že

$$V(M) = \iiint_M 1 \, dx dy dz.$$

Pre praktický výpočet tohto integrálu je už pre $n = 3$ nemožné na popis molekuly M použiť sférické súradnice (nie je totiž možné zistiť potrebné uhly súvisiace s prienikmi jednotlivých guľí). Tieto problémy je možné odstrániť prevodom trojného integrálu na plošný použitím Gauss - Ostrogradského vety (podkapitola 8.6). A teda pre výpočet objemu máme

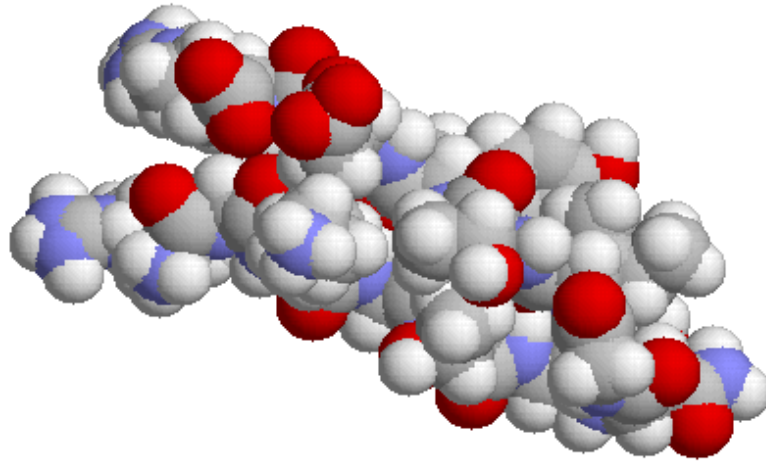
$$V(M) = \iiint_M 1 \, dx dy dz = \iint_{P(M)} z \, dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{P(G_i)} z \, dx dy,$$

kde $P(M)$ je povrch molekuly M orientovaný normálou von, $P(G_i)$ je prístupný povrch guľičky G_i (takisto orientovaný normálou von), t. j. ide o tú časť povrchu G_i , ktorá leží zvonku všetkých susedov G_i t. j. je prístupná, narozdiel od časti povrchu, ktorý je „pohltený“ susedmi a je teda neprístupný.

Gauss - Ostrogradského veta poskytuje nekonečne veľa možností na vyjadrenie trojného integrálu pomocou plošného integrálu. Mohli sme napríklad použiť nasledujúce vyjadrenie

$$\iiint_M dx dy dz \stackrel{G.O.}{=} \frac{1}{3} \iint_{P(M)} x \, dy dz + y \, dx dz + z \, dx dy.$$

Použijeme samozrejme jednoduchšie vyjadrenie uvedené neskôr vo vzťahu (S).



Obr. 9.1: Molekula zložená z n atómov

Stačí ukázať ako vypočítať jeden z plošných integrálov

$$\iint_{P(G_i)} z \, dx dy, \quad i = 1, \dots, n.$$

Výpočet ostatných je analogický. Bez ujmy na všeobecnosti počítajme integrál pre $i = 1$. Na základe vety o výpočte plošného integrálu (podkapitola 8.5) je potrebné vyjadriť plochu pomocou vhodného parametrického vyjadrenia:

$$P(G_i) : \quad \vec{r}(t, s) = x(t, s)\vec{i} + y(t, s)\vec{j} + z(t, s)\vec{k}, \quad (t, s) \in \Omega_1.$$

Teda počítame plošný integrál prevodom na dvojný integrál

$$\iint_{P(G_1)} z \, dx dy = \iint_{\Omega_1} g(t, s) \, dt ds,$$

kde funkcia $g(t, s)$ závisí od parametrického vyjadrenia plochy $P(G_1)$.

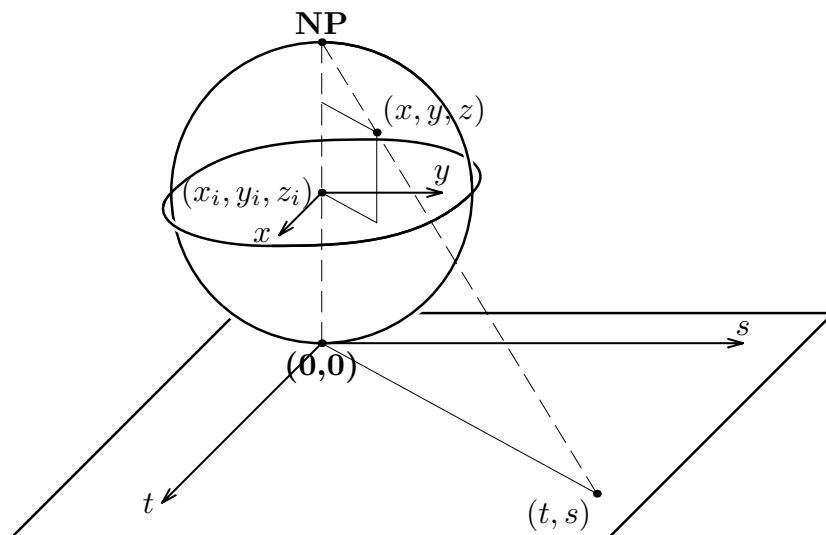
Pre jednoduchosť predpokladajme najprv, že Ω_1 je ohraničená oblasť, a preto tento dvojný integrál môžeme vypočítať prevodom na krivkový integrál využitím Greenovej vety (podkapitola 6.3). K tomu potrebujeme vyjadriť funkciu $g(t, s)$ v nasledujúcom tvare

$$g(t, s) = \frac{\partial Q(t, s)}{\partial t} - \frac{\partial P(t, s)}{\partial s}.$$

Greenova veta teda dáva

$$\iint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial Q(t, s)}{\partial t} - \frac{\partial P(t, s)}{\partial s} \right) dt ds = \int_{H(\Omega_1)} P(t, s) dt + Q(t, s) ds,$$

kde $H(\Omega_1)$ je označenie pre hranicu Ω_1 . V našom prípade, ako uvidíme neskôr, hranicu Ω_1 tvoria oblúky kružníc.



Obr. 9.2: Stereografická projekcia guľovej plochy – parametrizácia

Krivkový integrál vypočítame na základe vety o výpočte krivkového integrálu prevodom na určitý (podkapitola 6.2), čo môžeme zapísať:

$$\int_{H(\Omega_1)} P(t, s) dt + Q(t, s) ds = \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} f(\varphi) z d\varphi,$$

kde počet určitých integrálov m sa rovná počtu oblúkov kružníc tvoriacich $H(\Omega_1)$. Záverom dostávame nasledujúcu schému pre výpočet objemu molekuly M :

$$\begin{aligned} V(M) &= \iiint_M 1 dx dy dz \stackrel{1}{=} \iint_{P(M)} z dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{P(G_i)} z dx dy, \\ \iint_{P(G_1)} z dx dy &\stackrel{2}{=} \iint_{\Omega_1} g(t, s) dt ds \stackrel{3}{=} \iint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial Q(t, s)}{\partial t} - \frac{\partial P(t, s)}{\partial s} \right) dt ds \quad (S) \\ &\stackrel{4}{=} \int_{H(\Omega_1)} P(t, s) dt + Q(t, s) ds \stackrel{5}{=} \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} f(\varphi) z d\varphi. \end{aligned}$$

Poznámka 9.1 V nasledujúcich kapitolách vysvetlíme detaily jednotlivých rovností v schéme (S).

9.1 Parametrizácia guľovej plochy (rovnosť $\stackrel{2}{=}$)

V tejto kapitole odvodíme parametrické vyjadrenie guľovej plochy. Uvažujme guľovú plochu, ktorej vyjadrenie v pravouhlom súradnom systéme je nasledovné

$$G_1: \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^2.$$

Parametrizáciu guľovej plochy urobíme pomocou parametrov t, s , takým spôsobom, že každému bodu $Q = [x, y, z]$ guľovej plochy G_1 jednoznačne priradíme bod $A = [t, s]$ v rovine $\varrho_{t,s} : z = z_1 - r_1$, ktorá je dotykovou rovinou ku guľovej ploche v jej „južnom póle“, t. j. v bode $J = [x_1, y_1, z_1 - r_1]$ (pozri obrázok 9.2). V rovine $\varrho_{t,s}$ umiestnime pravouhlý súradný systém so stredom v bode J a osami $O_t \parallel O_x$ a $O_s \parallel O_y$. Priradenie $Q \mapsto A$ urobíme tak, že bod A je priesečník spojnice bodu Q a „severného pólu“ $N = [x_1, y_1, z_1 + r_1]$ s rovinou $\varrho_{t,s}$ (pozri opäť obrázok 9.2).

Takýmto spôsobom je celá guľová plocha zobrazená (transformovaná) do celej roviny $\varrho_{t,s}$. Našou úlohou je nájsť vzťah (transformačné rovnice) medzi súradnicami bodu $Q = [x, y, z]$ súradnicami bodu $A = [t, s]$. Predtým ale je zaujímavé všimnúť si nasledujúce detaily:

- južný pól sa zobrazí sám do seba t. j. $J = [x_1, y_1, z_1 - r_1] \mapsto (0, 0)$,
- „rovník“ (v geografickom význame) sa zobrazí na kružnicu so stredom v $(0, 0)$ a polomerom $2r_1$ a teda s rovnicou $t^2 + s^2 = 4r_1^2$ (pozri obrázok 9.3),
- „južná pologuľa“ (v geografickom význame) sa zobrazí na kruh daný nerovnicou $t^2 + s^2 \leq 4r_1^2$,
- jednotlivé „rovnobežky“ (v geografickom význame) sa zobrazia na sústredné kružnice so stredom v $(0, 0)$ a platí, čím je rovnobežka bližšie k severnému pólu, tým má odpovedajúca kružnica väčší polomer,
- severný pól sa zobrazí do „kružnice“ s nekonečne veľkým polomerom.

Teraz môžeme pristúpiť k odvodeniu parametrických rovníc guľovej plochy G_1 a následne aj jej prístupnému povrchu $P(G_1)$. Najprv si treba uvedomiť, že bod A má v rovine $\varrho_{t,s}$ súradnice (t, s) a v pravouhlom súradnom systéme t. j. v priestore súradnice $A = [x_1 + t, y_1 + s, z_1 - r_1]$ alebo inými slovami bod A je od bodu J „posunutý“ v smere osi O_x o hodnotu t a v smere osi O_y o hodnotu s (pozri obrázok 9.2).

Ľahko zistíme, že vektor \overrightarrow{NA} je násobkom vektora \overrightarrow{NQ} , t. j. $\overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{NQ}$, kde $k \in \mathbb{R}$, pričom

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NA} &= A - N = (t, s, -2r_1), \\ \overrightarrow{NQ} &= Q - N = (x - x_1, y - y_1, z - z_1 - r_1)\end{aligned}$$

a preto

$$\begin{aligned}t &= k(x - x_1), \\ s &= k(y - y_1), \\ -2r_1 &= k(z - z_1 - r_1).\end{aligned}$$

Naším cieľom je vyjadriť x, y, z pomocou parametrov t, s , čím získame parametrické vyjadrenie guľovej plochy. Eliminovaním konštanty k dostávame:

$$\begin{aligned}t &= \frac{-2r_1}{z - z_1 - r_1}(x - x_1), \\ s &= \frac{-2r_1}{z - z_1 - r_1}(y - y_1).\end{aligned}\tag{9.1}$$

Využitím faktu, že bod $Q = [x, y, z]$ leží na guľovej ploche

$$G_1 : (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^2$$

dostávame

$$\frac{t^2 (z - z_1 - r_1)^2}{4r_1^2} + \frac{s^2 (z - z_1 - r_1)^2}{4r_1^2} + (z - z_1)^2 = r_1^2.$$

Jednoduchou úpravou dostávame

$$(z - z_1 - r_1)^2 \left[\frac{t^2}{4r_1^2} + \frac{s^2}{4r_1^2} + 1 \right] + 2r_1 (z - z_1 - r_1) = 0$$

a preto

$$z - z_1 - r_1 = \frac{-8r_1^3}{t^2 + s^2 + 4r_1^2}.$$

Využitím vzťahov (9.1) dostávame hľadané parametrické vyjadrenie guľovej plochy G_1

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \frac{4r_1^2 t}{t^2 + s^2 + 4r_1^2}, \\ y &= y_1 + \frac{4r_1^2 s}{t^2 + s^2 + 4r_1^2}, \\ z &= z_1 + r_1 - \frac{8r_1^3}{t^2 + s^2 + 4r_1^2}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{9.2}$$

respektíve

$$\begin{aligned} \vec{r}(t, s) &= \left(x_1 + \frac{4r_1^2 t}{t^2 + s^2 + 4r_1^2} \right) \vec{i} + \left(y_1 + \frac{4r_1^2 s}{t^2 + s^2 + 4r_1^2} \right) \vec{j} \\ &+ \left(z_1 + r_1 - \frac{8r_1^3}{t^2 + s^2 + 4r_1^2} \right) \vec{k}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2*}$$

Poznámka 9.2 Spätným dosadením vzťahov (9.2) do rovnice guľovej plochy G_1 môžeme overiť správnosť odvodeného parametrického vyjadrenia.

Keďže našou úlohou je nájsť aj parametrické vyjadrenie prístupného povrchu gule G_1 , v ďalšom sa budeme zaoberať parametrizáciou prístupného povrchu $P(G_1)$ pomocou transformačných rovníc (9.2), t. j. budeme hľadať obmedzujúcu množinu Ω_1 , z ktorej sú parametre t, s .

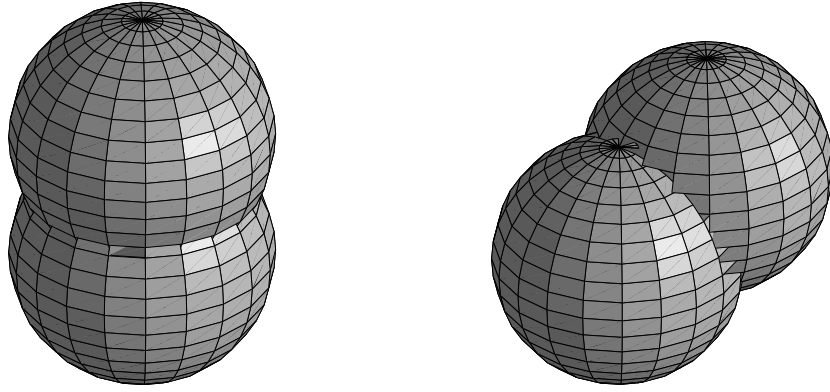
Začneme najjednoduchším prípadom, keď uvažujeme len dve pretínajúce sa gule G_1 a G_2 (pozri obrázok 9.3).

Zaujímá nás priemet tej časti guľovej plochy

$$G_1 : (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^2,$$

ktorá leží zvonku guľovej plochy G_2 t. j. spĺňa

$$G_2^V : (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 \geq r_2^2.$$



Obr. 9.3: Dve pretínajúce sa gule G_1 a G_2

Hľadaný priemet nájdeme dosadením parametrických rovníc (9.2) gule G_1 do vzťahu G_2^V

$$\left(x_1 + \frac{4r_1^2 t}{t^2 + s^2 + 4r_1^2} - x_2\right)^2 + \left(y_1 + \frac{4r_1^2 s}{t^2 + s^2 + 4r_1^2} - y_2\right)^2 + \left(z_1 + r_1 + \frac{4r_1^2 t}{t^2 + s^2 + 4r_1^2} - z_2\right)^2 \geq r_2^2.$$

Použitím označenia

$$\begin{aligned} a &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 + r_1 - z_2)^2 - r_2^2 \\ b &= 8r_1^2(x_1 - x_2) \\ c &= 8r_1^2(y_1 - y_2) \\ d &= a4r_1^2 - 16r_1^3(z_1 + r_1 - z_2) + 16r_1^4. \end{aligned} \tag{9.3}$$

dostávame

$$\Omega_1 : \quad a(t^2 + s^2) + bt + cs + d \geq 0, \tag{9.4}$$

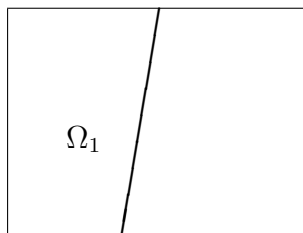
čo vyjadruje hľadaný priemet prístupnej oblasti do roviny $\varrho_{t,s}$. Urobíme analýzu hranice $H(\Omega_1)$, ktorá je teda vyjadrená príslušnou rovnicou

$$\mathcal{K}_2 : \quad a(t^2 + s^2) + bt + cs + d = 0. \tag{9.5}$$

1. Ak $a = 0$, tak rovnica (9.5) má tvar

$$bt + cs + d = 0,$$

čo je rovnica priamky a množina Ω_1 t. j. priemet prístupného povrchu je polrovina. Z geometrického hľadiska tento veľmi špecifický prípad nastáva, ak guľová plocha G_2 prechádza práve uvseverným pólom guľovej plochy G_1 .



2. Ak $a \neq 0$, tak rovnica (9.5) má tvar

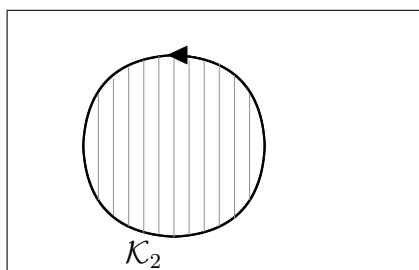
$$\mathcal{K}_2 : \left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(s + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2} - \frac{d}{a} \quad (9.6)$$

a teda \mathcal{K}_2 predstavuje rovnicu kružnice v $\varrho_{t,s}$ t. j. priemet priesečnice guľ G_1 a G_2 je kružnica. Rozlíšime dva prípady:

2a. Ak $a < 0$, tak v tomto prípade nerovnica (9.4) nadobúda tvar

$$\Omega_1 : \left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(s + \frac{c}{2a}\right)^2 \leq \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2} - \frac{d}{a}$$

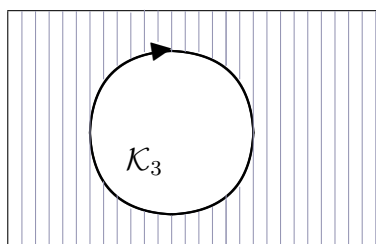
a teda prístupný povrch gule G_1 sa zobrazí do vnútra kružnice \mathcal{K}_2 . Z geometrického hľadiska tento prípad nastáva, ak „severný pól“ guľovej plochy G_1 leží vo vnútri guľovej plochy G_2 .



2b. Ak $a > 0$, v tomto prípade nerovnica (9.4) má tvar

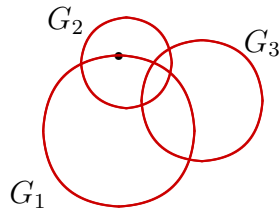
$$\Omega_1 : \left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(s + \frac{c}{2a}\right)^2 \geq \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2} - \frac{d}{a}$$

a teda prístupný povrch gule G_1 sa zobrazí do vonkajška kružnice \mathcal{K}_2 . Z geometrického hľadiska tento prípad nastáva, ak „severný pól“ guľovej plochy G_1 leží v mimoguľovej ploche G_2 .



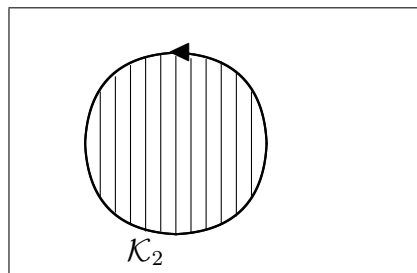
Urobili sme analýzu základného prípadu nájdenia Ω_1 pri dvoch pretínajúcich sa guľach G_1 a G_2 . V nasledujúcich príkladoch rozoberieme parametrizáciu prístupného povrchu, ak guľu G_1 pretína viac guľ.

Príklad 9.1 Zakreslíme množinu Ω_1 , ktorá je priemetom $P(G_1)$, pričom pozícia guľ G_1 , G_2 a G_3 je daná nasledujúcim obrázkom

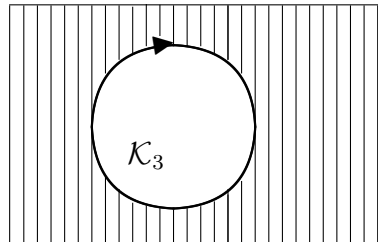


Riešenie: Úlohu budeme riešiť nasledovne: najprv vyriešime prípad $G_1 \cap G_2$, potom $G_1 \cap G_3$ a nakoniec $G_1 \cap G_2 \cap G_3$.

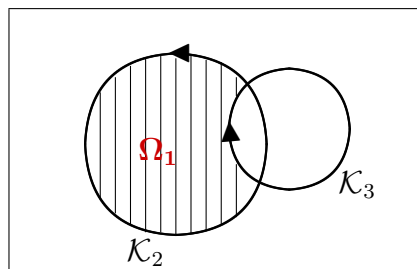
1. krok: Keďže G_2 obsahuje „severný pól“ G_1 , prístupná oblasť G_1 vzhľadom na G_2 sa transformuje do vnútra kružnice \mathcal{K}_2 . Kružnicu \mathcal{K}_2 orientujeme kladne.



2. krok: Priemet priesečnice $G_1 \cap G_3$ je kružnica \mathcal{K}_3 . Keďže G_3 neobsahuje „severný pól“ G_1 , prístupná oblasť G_1 vzhľadom na G_3 sa transformuje na vonkajšiu oblasť kružnice \mathcal{K}_3 . Kružnicu \mathcal{K}_3 orientujeme záporne.



3. krok: Nakoniec spojením kroku 1 a kroku 2 dostávame, že prístupná oblasť G_1 vzhľadom na G_2 aj G_3 sa transformuje nasledovne



Z formálneho hľadiska vieme prístupný povrch $P(G_1)$ vyjadriť parametrickými rovnicami (2*), pričom $(t, s) \in \Omega_1$. Použitím vety o výpočte plošného integrálu môžeme vyjadriť plošný integrál pomocou dvojného, k tomu ale treba vyjadriť funkciu $g(t, s)$ zo schémy (S). To je cieľom nasledujúcej kapitoly.

9.2 Vyjadrenie funkcie $g(t, s)$ (rovnosť $\stackrel{2}{=}$)

Cieľom tejto kapitoly je vypočítať

$$\iint_{P(G_1)} z \, dx dy,$$

pričom $P(G_1)$ je orientovaná normálou von. Použitím vety o výpočte plošného integrálu (podkapitola 8.5) dostávame

$$\begin{aligned} \iint_{P(G_1)} z \, dx dy &= \pm \iint_{\Omega_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & z_1 + r_1 - \frac{8r_1^3}{t^2 + s^2 + 4r_1^2} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix} dt ds \\ &= - \iint_{\Omega_1} \left(z_1 + r_1 - \frac{8r_1^3}{t^2 + s^2 + 4r_1^2} \right) J(t, s) dt ds, \end{aligned}$$

pričom použitím parametrického vyjadrenia (9.2) dostávame

$$J(t, s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = 16r_1^4 \frac{4r_1^2 - t^2 - s^2}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3}.$$

Keďže $P(G_1)$ je orientovaná normálou von, znamená to, že normálový vektor \vec{n}_p zvierá s vektorom \vec{k} na severnej pologuli ostrý uhol a na južnej pologuli tupý uhol. Pre body severnej polgule parametre (t, s) spĺňajú nerovnosť $t^2 + s^2 \geq 4r_1^2$ a teda pre nami použitý normálový vektor $\vec{n}_p = \vec{r}'_t \times \vec{r}'_s$ je skalárny súčin $\vec{n}_p \circ \vec{k} = J(t, s) < 0$, t. j. uhol \vec{n}_p, \vec{k} je tupý. Zatiaľ čo pre body južnej polgule, t. j. $t^2 + s^2 \leq 4r_1^2$ je skalárny súčin $\vec{n}_p \circ \vec{k} = J(t, s) > 0$.

A teda v oboch prípadoch je orientácia plochy nesúhlasná s použitým parametrickým vyjadrením, preto sme pri použití vety o výpočte plošného integrálu použili znamienko "-".

Použitím elementárnych úprav dostávame nasledujúci vzťah pre výpočet plošného integrálu (rovnosť $\stackrel{2}{=}$)

$$\begin{aligned} \iint_{P(G_1)} z \, dx dy &\stackrel{2}{=} \iint_{\Omega_1} g(t, s) dt ds \\ &= 128r_1^7 \iint_{\Omega_1} \frac{8r_1^2}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^4} - \frac{2 + \frac{z_1}{r_1}}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} - \frac{\frac{z_1 + r_1}{8r_1^3}}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2} dt ds. \end{aligned}$$

9.3 Voľba funkcií $P(t, s)$ a $Q(t, s)$ (rovnosť $\stackrel{3}{=}$)

Naším cieľom je pomocou Greenovej vety transformovať dvojný integrál na krivkový, t. j. potrebujeme nájsť také funkcie $P(t, s)$ a $Q(t, s)$, aby platilo

$$g(t, s) = \frac{\partial Q(t, s)}{\partial t} - \frac{\partial P(t, s)}{\partial s}. \quad (9.7)$$

Na základe istej symetrie parametrov t, s vo funkcii $g(t, s)$ a skúsenosti z podkapitoly 6.3 budeme funkcie $P(t, s)$ a $Q(t, s)$ hľadať v tvare

$$Q(t, s) = \frac{Dt}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} + \frac{Et}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2} + \frac{Ft}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)},$$

$$P(t, s) = \frac{-Ds}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} + \frac{-Es}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2} + \frac{-Fs}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)},$$

kde konštanty D, E, F vypočítame dosadením do (9.7). Upravíme pravú stranu

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q(t, s)}{\partial t} - \frac{\partial P(t, s)}{\partial s} \\ &= \frac{D}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} - \frac{6Dt^2}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^4} + \frac{E}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2} \\ & \quad - \frac{4Et^2}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} + \frac{F}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)} - \frac{2Ft^2}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2} \\ & \quad + \frac{D}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} - \frac{6Ds^2}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^4} + \frac{E}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2} \\ & \quad - \frac{4Es^2}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} + \frac{F}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)} - \frac{2Fs^2}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2}. \end{aligned}$$

Po združení členov máme

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q(t, s)}{\partial t} - \frac{\partial P(t, s)}{\partial s} \\ &= \frac{2D}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} + \frac{2E}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2} + \frac{2F}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)} \\ & \quad - \frac{6D(t^2 + s^2)}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^4} - \frac{4E(t^2 + s^2)}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} - \frac{2F(t^2 + s^2 + 4r_1^2 - 4r_1^2)}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2}. \end{aligned}$$

Po zjednodušení a dosadení do (9.7) dostávame

$$\begin{aligned} & 128r_1^7 \left(\frac{8r_1^2}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^4} - \frac{2 + \frac{z_1}{r_1}}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} - \frac{\frac{z_1 + r_1}{8r_1^3}}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2} \right) \\ &= \frac{24Dr_1^2}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^4} + \frac{16Er_1^2 - 4D}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} + \frac{8Fr_1^2 - 2E}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2}. \end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov

$$\begin{aligned} 128r_1^7 8r_1^2 &= 24Dr_1^2 & \Rightarrow & D = \frac{128}{3}r_1^7 \\ 128r_1^7 \left(-2 - \frac{z_1}{r_1}\right) &= 16Er_1^2 - 4D & \Rightarrow & E = \frac{-8r_1^4(3z_1 + 2r_1)}{3} \\ 128r_1^7 \left(-\frac{z_1 + r_1}{8r_1^3}\right) &= 8Fr_1^2 - 2E & \Rightarrow & F = \frac{2}{3}r_1^3 \end{aligned}$$

Našli sme teda konkrétne vyjadrenie funkcií $P(t, s)$ a $Q(t, s)$, ktoré potrebujeme k použitiu Greenovej vety. Teda

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1} g(t, s) dt ds &= \frac{128r_1^7}{3} \int_{H(\Omega_1)} \frac{t ds - s dt}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^3} \\ &\quad - \frac{8r_1^4(3z_1 + 2r_1)}{3} \int_{H(\Omega_1)} \frac{t ds - s dt}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^2} \\ &\quad + \frac{2r_1^3}{3} \int_{H(\Omega_1)} \frac{t ds - s dt}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

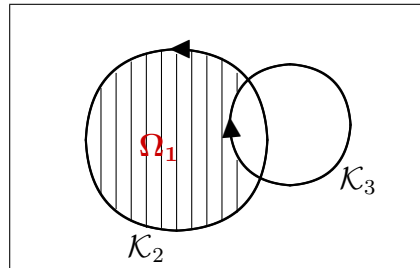
pričom predpokladáme, že Ω_1 je ohraničená množina a jej hranicu tvorí krivka $H(\Omega_1)$. Neskôr sa budeme zaoberať aj prípadom, ak oblasť Ω_1 je neohraničená.

9.4 Výpočet krivkových integrálov (rovnosť $\stackrel{5}{=}$)

V tejto kapitole budeme riešiť získané krivkové integrály. Teda počítame

$$M_i = \int_{H(\Omega_1)} \frac{t ds - s dt}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

kde $H(\Omega_1)$ je uzavretá, jednoduchá, hladká krivka. Pre názornosť uvažujeme nasledujúcu konkrétnu situáciu



kde hranicu $H(\Omega_1)$ tvoria oblúky kružníc \mathcal{K}_2 a \mathcal{K}_3 , pričom prvá je orientovaná kladne a druhá záporne. V tomto prípade dostávame

$$M_i = \int_{\mathcal{K}_2} \frac{t ds - s dt}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^i} + \int_{\mathcal{K}_3} \frac{t ds - s dt}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^i}.$$

Počítajme integrál po oblúku krivky \mathcal{K}_2 (druhý integrál sa počíta analogicky). Ako sme už skôr odvodili, krivka \mathcal{K}_2 má predpis

$$\mathcal{K}_2 : \quad \left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(s + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2} - \frac{d}{a}.$$

Označíme

$$t_0 = -\frac{b}{2a}, \quad s_0 = -\frac{c}{2a}, \quad r_0 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2} - \frac{d}{a}.$$

Parametrické vyjadrenie krivky \mathcal{K}_2 pri použitom označení je nasledujúce

$$\begin{aligned} t &= t_0 + r_0 \cos \varphi \\ s &= s_0 + r_0 \sin \varphi, \quad \varphi \in [\alpha, \beta]. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Použitím vety o výpočte krivkového integrálu (podkapitola 6.2)

$$\begin{aligned} M_i &= \int_{\mathcal{K}_2} \frac{t ds - s dt}{(t^2 + s^2 + 4r_1^2)^i} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(t_0 + r_0 \cos \varphi)r_0 \cos \varphi + (-s_0 - r_0 \sin \varphi)(-r_0 \sin \varphi)}{(t_0^2 + 2t_0r_0 \cos \varphi + r_0^2 \cos^2 \varphi + s_0^2 + 2s_0r_0 \sin \varphi + r_0^2 \sin^2 \varphi + 4r_1^2)^i} d\varphi \\ &= \frac{1}{2^i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r_0^2 + B \cos \varphi + C \sin \varphi}{(A + B \cos \varphi + C \sin \varphi)^i} d\varphi, \end{aligned}$$

pričom sme použili označenie

$$2A = t_0^2 + s_0^2 + 4r_1^2 + r_0^2, \quad B = t_0r_0, \quad C = s_0r_0$$

a využili fakt, že orientácia krivky \mathcal{K}_2 je súhlasná a použité parametrické vyjadrenie (9.9). Počítajme ďalej tieto integrály osobitne pre $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r_0^2 + B \cos \varphi + C \sin \varphi + A - A}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi} d\varphi \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{r_0^2 - A}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Analogicky vyjadríme integrály M_2 a M_3

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi} + \frac{r_0^2 - A}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{(A + B \cos \varphi + C \sin \varphi)^2}, \\ M_3 &= \frac{1}{8} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{(A + B \cos \varphi + C \sin \varphi)^2} + \frac{r_0^2 - A}{8} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{(A + B \cos \varphi + C \sin \varphi)^3} \end{aligned}$$

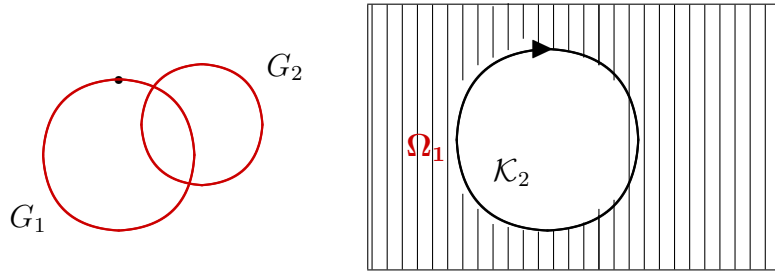
V integráloch M_i , $i = 1, 2, 3$ vystupujú integrály I_1, I_2, I_3 , ktoré sú už vyriešené v kapitole 2.

V konečnom dôsledku naša pôvodná úloha (vypočítať objem zhľuku molekúl) je vyjadrená cez určité integrály, čo je z hľadiska matematických výpočtov výrazné zjednodušenie a hlavne realizovateľné.

V predchádzajúcich úvahách sme analyzovali prípad, ak Ω_1 je ohraničená oblasť. V ďalšej kapitole vyriešime prípad, ak Ω_1 nie je ohraničená.

9.5 Prípad Ω_1 je neohraničená oblasť (rovnosť $\stackrel{2}{=}$)

Majme nasledujúcu situáciu – počítame objem molekuly M , kde pre jednoduchosť $M = G_1 \cup G_2$ a pozícia guľičiek je daná obrázkom



Počítajme objem

$$V(M) = \iiint_M 1 \, dx dy dz \stackrel{1}{=} \iint_{P(M)} z \, dx dy = \iint_{P(G_1)} z \, dx dy + \iint_{P(G_2)} z \, dx dy.$$

Ukážeme ako vypočítať plošný integrál po ploche $P(G_1)$. Ak by sme postupovali ako doteraz podľa schémy (S), teda plošný integrál po ploche $P(G_1)$ by sme počítali pomocou vety o výpočte plošného integrálu ($\stackrel{2}{=}$), narazili by sme na problém, že oblasť Ω_1 je neohraničená, čo by znemožnilo v nasledujúcom kroku ($\stackrel{4}{=}$) použiť Greenovu vetu. Tento problém obídeme nasledujúcou úvahou. Povrch gule G_1 označíme $C(G_1)$, rozdelíme na prístupný povrch $P(G_1)$ (jeho priemet do roviny parametrov $\rho_{t,s}$ je Ω_1 tak ako doteraz) a neprístupný povrch $N(G_1)$ (jeho priemet do roviny parametrov je Ω_1^C , t. j. vnútro \mathcal{K}_2). Teda $C(G_1) = P(G_1) \cup N(G_1)$ a z vlastností plošného integrálu plynie

$$\iint_{P(G_1)} z \, dx dy = \iint_{C(G_1)} z \, dx dy - \iint_{N(G_1)} z \, dx dy.$$

Pričom Gauss – Ostrogradského veta dáva

$$\iint_{C(G_1)} z \, dx dy = \iiint_{G_1} 1 \, dx dy dz = \frac{4}{3} \pi r_1^3.$$

Zostávajúci integrál vypočítame pomocou schémy (S), kde už jednotlivé kroky boli detailne vysvetlené v predchádzajúcich kapitolách. Teda

$$\iint_{N(G_1)} z \, dx dy \stackrel{3}{=} \iint_{\Omega_1^C} \left(\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,s)}{\partial s} \right) dt ds \stackrel{4}{=} \int_{H(\Omega_1^C)} P(t,s) dt + Q(t,s) ds,$$

kde $H(\Omega_1^C)$ je kladne orientovaná kružnica $-\mathcal{K}_2$. Spojením oboch výpočtov dostávame

$$\iint_{N(G_1)} z \, dx dy = \frac{4}{3} \pi r_1^3 + \int_{\mathcal{K}_2} P(t,s) dt + Q(t,s) ds.$$

Môžeme urobiť všeobecný záver platný aj pre prípad

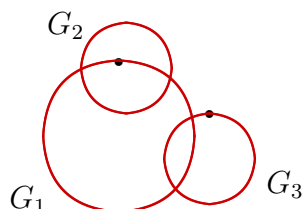
$$M = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n.$$

Ak v kroku ($\stackrel{2}{=}$) vznikne množina Ω_1 , ktorá nie je ohraničená, tak krivkový integrál ($\stackrel{4}{=}$) počítame ako súčet krivkových integrálov po oblúkoch kladne aj záporne orientovaných kriviek $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \dots$ tvoriacich hranicu Ω_1 , ku ktorým pripočítame $\frac{4}{3} \pi r_1^3$. Podrobnejšie to ukážeme v nasledujúcich príkladoch.

9.6 Sada riešených príkladov

V tejto kapitole budú analyzované niektoré ďalšie prípady rôznych pozícií guľičiek v molekule M .

Príklad 9.2 Urobme symbolický výpočet objemu molekuly $M = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, popísanej obrázkom



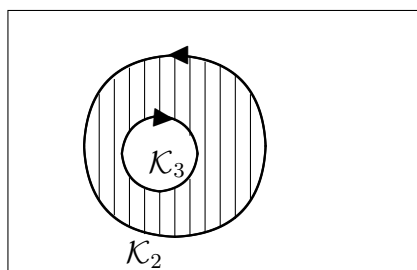
Riešenie: Použitím schémy (S) dostávame

$$\begin{aligned} V(M) &= \iiint_M 1 \, dx dy dz \stackrel{1}{=} \iint_{P(M)} z \, dx dy \\ &= \iint_{P(G_1)} z \, dx dy + \iint_{P(G_2)} z \, dx dy + \iint_{P(G_3)} z \, dx dy. \end{aligned}$$

Kde

$$\iint_{P(G_1)} z \, dx dy \stackrel{2}{=} \iint_{\Omega_1} g(t, s) \, dt ds = (\star).$$

K zisteniu oblasti Ω_1 potrebujeme zostrojiť priemet $P(G_1)$ do roviny parametrov, čo vyjadruje nasledujúci obrázok

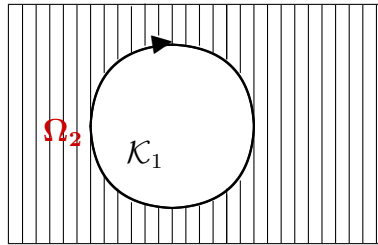


V tomto prípade množina $\Omega_1 = \mathcal{V}(K_2) - \mathcal{V}(K_3)$, kde $\mathcal{V}(K_2)$ je vnútro K_2 , t.

j . kruh a $\mathcal{V}(\mathcal{K}_3)$ je vnútro \mathcal{K}_3 . Pokračovaním výpočtu (\star) máme

$$\begin{aligned} \iint_{P(G_1)} z \, dx dy &\stackrel{2}{=} \iint_{\mathcal{V}(\mathcal{K}_2)} g(t, s) \, dt ds - \iint_{\mathcal{V}(\mathcal{K}_3)} g(t, s) \, dt ds \\ &\left\{ \text{na oba integrály použijeme Greenovu vetu, t. j. } \left(\stackrel{3}{=}\right), \left(\stackrel{4}{=}\right) \text{ schémy } (S) \right\} \\ &= \int_{\mathcal{K}_2} P(t, s) \, dt + Q(t, s) \, ds + \int_{\mathcal{K}_3} P(t, s) \, dt + Q(t, s) \, ds \\ &\left\{ \text{zmena znamienka pri druhom integráli súvisí s orientáciou krivky } \mathcal{K}_3 \right\} \\ &= \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \, d\varphi + \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \, d\varphi. \end{aligned}$$

Počítajme ďalej $\iint_{P(G_2)} z \, dx dy$. Zostrojíme oblasť Ω_2 , t. j. priemet prístupnej oblasti povrchu $P(G_2)$ do roviny parametrov.



Oblasť Ω_2 je neohraničená a takýto prípad je vyriešený v podkapitole 9.5, a preto

$$\begin{aligned} \iint_{P(G_2)} z \, dx dy &= \frac{4}{3} \pi r_2^3 + \int_{\mathcal{K}_1} P(t, s) \, dt + Q(t, s) \, ds, \\ &= \frac{4}{3} \pi r_2^3 + \int_0^{2\pi} f_3(\varphi) \, d\varphi. \end{aligned}$$

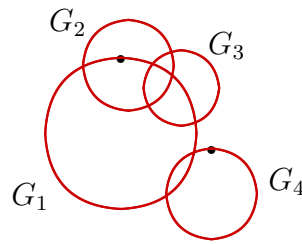
Počítajme ďalej $\iint_{P(G_3)} z \, dx dy$. Keďže priemet prístupnej oblasti $P(G_2)$ do $\rho_{t,s}$ (teda množina Ω_3) je analogický ako pre Ω_2 , máme

$$\iint_{P(G_3)} z \, dx dy = \frac{4}{3} \pi r_3^3 + \int_0^{2\pi} f_4(\varphi) \, d\varphi.$$

Zhrnutím pre náš prípad dostávame

$$\begin{aligned} V(M) &= \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \, d\varphi + \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \, d\varphi + \frac{4}{3} \pi r_2^3 + \int_0^{2\pi} f_3(\varphi) \, d\varphi \\ &\quad + \frac{4}{3} \pi r_3^3 + \int_0^{2\pi} f_4(\varphi) \, d\varphi. \end{aligned}$$

Príklad 9.3 Urobme symbolický výpočet objemu molekuly $M = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$, popísanej obrázkom



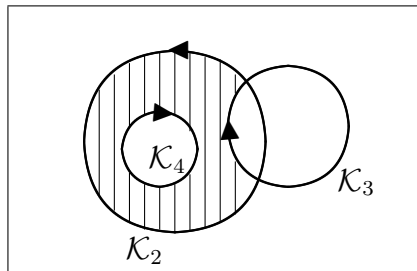
Riešenie: Použitím schémy (S) dostávame

$$V(M) = \iiint_M 1 \, dx dy dz \stackrel{1}{=} \sum_{i=1}^4 \iint_{P(G_i)} z \, dx dy.$$

Počítajme integrály pre $i = 1, 3$.

$$\iint_{P(G_1)} z \, dx dy \stackrel{2}{=} \iint_{\Omega_1} g(t, s) \, dt ds = (\clubsuit).$$

Zakreslíme oblasť Ω_1 , pričom využijeme poznatky z predchádzajúcich kapitol.



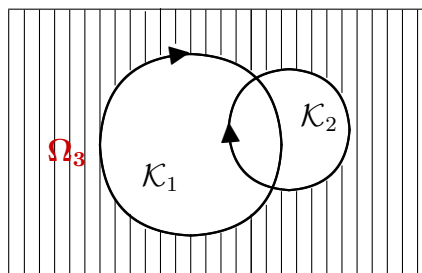
Hranicu Ω_1 tvorí oblúk kružnice \mathcal{K}_2 , oblúk kružnice \mathcal{K}_3 a kružnica \mathcal{K}_4 . Pokračovaním výpočtu (\clubsuit) máme

$$\begin{aligned} (\clubsuit) &= \int_{\mathcal{K}_2^{\text{časť}}} P(t, s) \, dt + Q(t, s) \, ds + \int_{\mathcal{K}_3^{\text{časť}}} P(t, s) \, dt + Q(t, s) \, ds \\ &+ \oint_{\mathcal{K}_4} P(t, s) \, dt + Q(t, s) \, ds \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1(\varphi) \, d\varphi - \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f_2(\varphi) \, d\varphi - \int_0^{2\pi} f_3(\varphi) \, d\varphi. \end{aligned}$$

Počítajme

$$\iint_{P(G_3)} z \, dx dy \stackrel{2}{=} \iint_{\Omega_3} g(t, s) \, dt ds.$$

Zakreslíme oblasť Ω_3 .

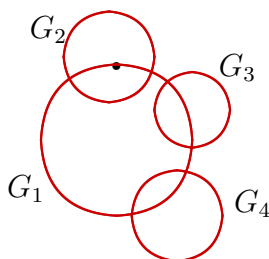


Teda na základe výsledkov z podkapitoly 9.5

$$\iint_{P(G_2)} z \, dx \, dy = \frac{4}{3} \pi r_2^3 + \int_{\mathcal{K}_1^{\text{časť}}} P(t, s) \, dt + Q(t, s) \, ds$$

$$+ \int_{\mathcal{K}_2^{\text{časť}}} P(t, s) \, dt + Q(t, s) \, ds.$$

Príklad 9.4 Urobme symbolický výpočet objemu molekuly $M = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$, danej obrázkom



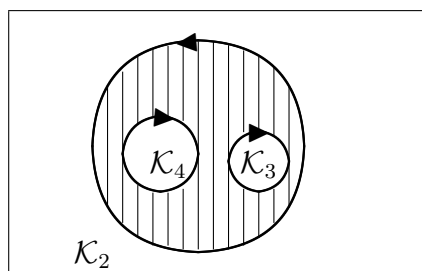
Riešenie: Použitím schémy (S) dostávame

$$V(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^4 \iint_{P(G_i)} z \, dx \, dy.$$

Pričom

$$\iint_{P(G_1)} z \, dx \, dy \stackrel{2}{=} \iint_{\Omega_1} g(t, s) \, dt \, ds = (\heartsuit).$$

Zakreslíme oblasť Ω_1 .

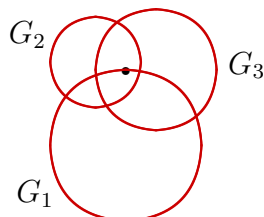


Preto

$$\begin{aligned}
 (\heartsuit) &= \int_{\mathcal{K}_2} P(t, s) dt + Q(t, s) ds + \int_{\mathcal{K}_3} P(t, s) dt + Q(t, s) ds \\
 &+ \int_{\mathcal{K}_4} P(t, s) dt + Q(t, s) ds.
 \end{aligned}$$

Zostávajúce plošné integrály vypočítame analogicky.

Príklad 9.5 Urobme symbolický výpočet objemu molekulyňň $M = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, danej obrázkom



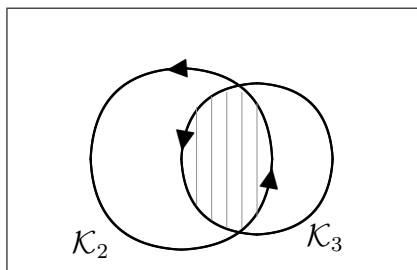
Riešenie: Použitím schémy (S) dostávame

$$V(M) = \iiint_M 1 dx dy dz \stackrel{1}{=} \sum_{i=1}^3 \iint_{P(G_i)} z dx dy.$$

Pričom

$$\iint_{P(G_1)} z dx dy \stackrel{2}{=} \iint_{\Omega_1} g(t, s) dt ds = (\heartsuit).$$

Zakreslíme oblasť Ω_1 .

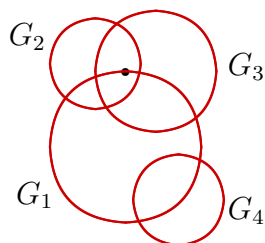


Preto

$$(\heartsuit) = \int_{\mathcal{K}_2^{\text{časť}}} P(t, s) dt + Q(t, s) ds + \int_{\mathcal{K}_3^{\text{časť}}} P(t, s) dt + Q(t, s) ds.$$

Zostávajúce plošné integrály vypočítame analogicky.

Príklad 9.6 Urobme symbolický výpočet objemu molekuly $M = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, danej obrázkom



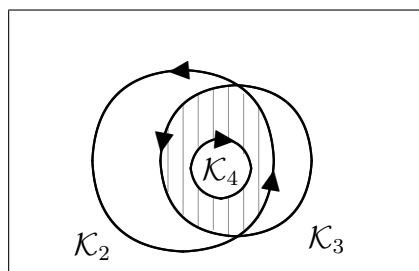
Riešenie: Použitím schémy (S) dostávame

$$V(M) = \iiint_M 1 \, dx dy dz \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^4 \iint_{P(G_i)} z \, dx dy.$$

Pričom

$$\iint_{P(G_1)} z \, dx dy \stackrel{2}{=} \iint_{\Omega_1} g(t, s) \, dt ds = (\heartsuit).$$

Zakreslíme oblasť Ω_1 .



Preto

$$\begin{aligned} (\heartsuit) &= \int_{\mathcal{K}_2^{\text{časť}}} P(t, s) \, dt + Q(t, s) \, ds + \int_{\mathcal{K}_3^{\text{časť}}} P(t, s) \, dt + Q(t, s) \, ds \\ &+ \int_{\mathcal{K}_4} P(t, s) \, dt + Q(t, s) \, ds. \end{aligned}$$

Zostávajúce plošné integrály vypočítame analogicky.

Literatúra

- [1] H. B. Dwight, *Tables of integrals*, The Macmillan Co., New York, 1961.
- [2] Buša J., Džurina J., Hayryan E., Plavka J., et al.: *ARVO: A Fortran package for computing the solvent accessible surface area and the excluded volume of overlapping spheres via analytic equations*. Comp Phys. Comm. 165 (2005), 59-96.
- [3] Džurina J., Plavka J., : *$O(N^2)$ Algorithm for computing volume of overlapping spheres* Acta Electrotechnica et Informatica, Vol. 8, No. 4, 2008, 39–42.

Názov: Matematicko počítačové modelovanie
Autori: Jozef Džurina, Blanka Baculíková, Jana Petrillová
Vydavateľ: Equilibria, s.r.o.
Rok: 2016
Vydanie: prvé
Náklad: 50 ks
Rozsah: 80 strán

ISBN 978-80-553-2578-1