DERIVÁCIA FUNKCIE

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Definícia

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu, ak je definovaná v okolí bodu x_0 a existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Túto limitu nazývame deriváciou funkcie f v bode x_0 a označujeme ju $f'(x_0)$.

pre $x = x_0 + h$ dostávame zápis limity v tvare

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Iné spôsoby označenia derivácie: $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}$

Definícia

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ deriváciu zľava (sprava), ak je definovaná v istom okolí bodu x_0 a existuje limita

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\left(\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$

Túto limitu označujeme $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$).

Veta

Funkcia f má v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)$ práve vtedy, ak má v bode x_0 deriváciu zľava aj sprava a platí

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Definícia

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ deriváciu zľava (sprava), ak je definovaná v istom okolí bodu x_0 a existuje limita

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\left(\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right)$$

Túto limitu označujeme $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$).

Veta

Funkcia f má v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)$ práve vtedy, ak má v bode x_0 deriváciu zľava aj sprava a platí

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Veta

Ak funkcia f má v bode x_0 deriváciu, tak je v tomto bode spojitá.

Definícia

Hovoríme, že funkcia f má na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$ deriváciu f', ak funkcia f má na intervale (a, b) deriváciu, v bode a deriváciu sprava a v bode b deriváciu zľava.

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je hladká na intervale $\langle a, b\rangle$, ak jej derivácia f' je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$

Veta

Nech funkcie f a g majú derivácie na otvorenom intervale I, nech $c \in R$. Potom funkcie cf, $f+g$, fg majú derivácie na I a $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ majú derivácie na $I - \{x \in I : g(x) = 0\}$, pričom platí:

- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Veta

Nech funkcie f a g majú derivácie na otvorenom intervale I, nech $c \in R$. Potom funkcie cf, $f + g$, fg majú derivácie na I a $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ majú derivácie na $I - \{x \in I : g(x) = 0\}$, pričom platí:

- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Veta

Nech funkcie f a g majú derivácie na otvorenom intervale I, nech $c \in R$. Potom funkcie cf, $f+g$, fg majú derivácie na I a $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ majú derivácie na $I - \{x \in I : g(x) = 0\}$, pričom platí:

- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$
- $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Veta

Nech funkcie f a g majú derivácie na otvorenom intervale I, nech $c \in R$. Potom funkcie cf, $f + g$, fg majú derivácie na I a $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ majú derivácie na $I - \{x \in I : g(x) = 0\}$, pričom platí:

- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Veta

Nech funkcie f a g majú derivácie na otvorenom intervale I, nech $c \in R$. Potom funkcie cf, $f+g$, fg majú derivácie na I a $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ majú derivácie na $I - \{x \in I : g(x) = 0\}$, pričom platí:

- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Veta

Nech funkcie f a g majú derivácie na otvorenom intervale I, nech $c \in R$. Potom funkcie cf, $f+g$, fg majú derivácie na I a $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ majú derivácie na $I - \{x \in I : g(x) = 0\}$, pričom platí:

- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$

Veta

Nech $g : I \to J$ má deriváciu na otvorenom intervale I. Nech $f : J \to R$ má deriváciu na otvorenom intervale J. Potom funkcia $f(g(x))$ má deriváciu na I a platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

Veta

Nech $f : I \to J$ je rýdzomonotónna funkcia na otvorenom intervale I, nech f^{-1} je inverzná funkcia k funkcii f. Ak $f'(x) \neq 0$ na I, tak funkcia f^{-1} má deriváciu na J a platí

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Veta

Nech $g : I \to J$ má deriváciu na otvorenom intervale I. Nech $f : J \to R$ má deriváciu na otvorenom intervale J. Potom funkcia $f(g(x))$ má deriváciu na I a platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

Veta

Nech $f : I \to J$ je rýdzomonotónna funkcia na otvorenom intervale I, nech f^{-1} je inverzná funkcia k funkcii f. Ak $f'(x) \neq 0$ na I, tak funkcia f^{-1} má deriváciu na J a platí

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^{\alpha}]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Derivácie elementárnych funkcií

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\mathrm{tg}\, x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\mathrm{cotg}\, x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\mathrm{arctg}\, x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\mathrm{arccotg}\, x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x$
- $[\mathrm{a}^x]' = \mathrm{a}^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$