Limita a spojitosť funkcie

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Hromadný bod

Definícia

Nech $\varepsilon > 0$ a nech $a \in \mathbb{R}$. $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nazývame ε-vým okolím bodu a.

Definícia

Nech $\varepsilon > 0$ a nech $a \in \mathbb{R}$. $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) - \{a\}$ nazývame prstencovým ε-vým okolím bodu a.

Definícia

Nech $A \subset \mathbb{R}$ a nech $a \in \mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Bod a nazývame hromadným bodom množiny A, keď každé prstencové okolie $\overset{\circ}{O}(a)$ obsahuje aspoň jeden bod $x \in A$. Bod $x \in A$, ktorý nie je hromadným bodom množiny A, nazývame izolovaným bodom množiny A.

Limita funkcie

Definícia

Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}^\star$ a nech a je hromadným bodom množiny A. Hovoríme, že **funkcia f má v bode a limitu b** práve vtedy, ak pre každé $O_\varepsilon(b)$ existuje také prstencové okolie $O^\circ_\delta(a)$, že $f(O^\circ_\delta(a) \cap A) \subset O_\varepsilon(b)$.

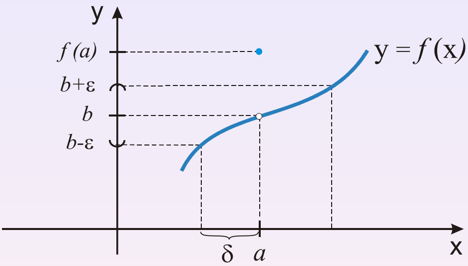
Zápis: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A,\, 0 < |x - a| < \delta) : |f(x) - b| < \varepsilon$$

Veta

Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a nech a je hromadným bodom množiny A. Ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_1$ a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_2$, tak $b_1 = b_2$.

Limita funkcie - graf



Obr.: limita funkcie

Jednostranné limity

Definícia

Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a nech a je hromadným bodom množín $C =< a, \infty) \cap A$, $D = (-\infty, a > \cap A$ a množiny A. Hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu sprava b práve vtedy, ak pre každé $O_\varepsilon(b)$ existuje také okolie $O_\delta^+(a)$, že $f(O_\delta^+(a) \cap A) \subset O_\varepsilon(b)$. Hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu zľava b práve vtedy, ak pre každé $O_\varepsilon(b)$ existuje také okolie $O_\delta^-(a)$, že $f(O_\delta^-(a) \cap A) \subset O_\varepsilon(b)$.

Zápis:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

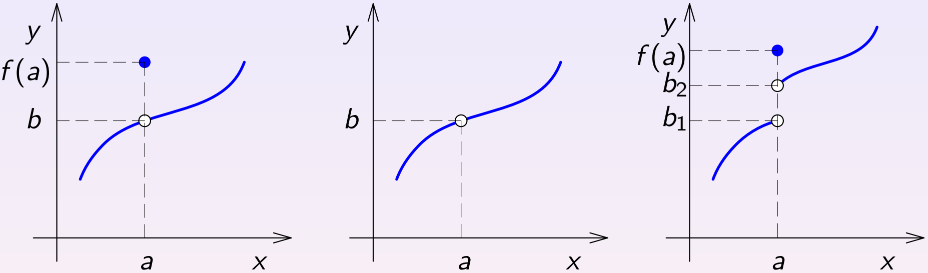
Existencia limity a jednostranné limity

Veta

Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a nech a je hromadným bodom množín C, D. Potom $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ práve vtedy, keď

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Existencia limity a jednostranné limity



Vlastné limity

Veta

Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech a je hromadným bodom množiny A a nech $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$. Potom

- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |b|$,
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$,
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c$,
- ak pre každé $x \in O(a) \cap A$ je $g(x) \neq 0$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c \neq 0$, tak $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

Nevlastné limity

Veta

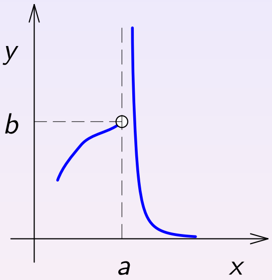
Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech a je hromadným bodom množiny A a nech $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \{\pm\infty\}$. Potom

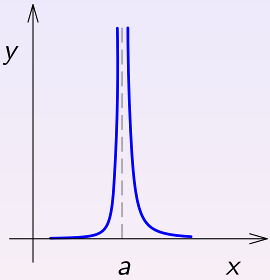
- $\lim\limits_{x \to a} [-f(x)] = -b$,
- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$,
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

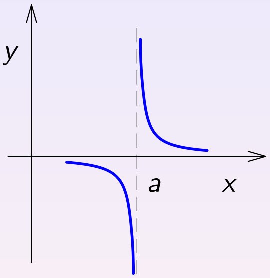
Veta

Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech a je hromadným bodom množiny A a nech pre každé $x \in A$ je $f(x) > 0$ a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, tak $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

Nevlastné limity







Neurčité výrazy

- $\frac{0}{0}$ $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6}, \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$
- $\frac{\infty}{\infty}$ $$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+3x^2-9}{3x^3-x-6}$$
- $\infty - \infty$ $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+20x} - \sqrt{x^2-10x}\right)$$
- $0 \cdot \infty$ $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-10x} \cdot (4x^2+5)$$
- $1^\infty,\ \infty^0,\ 0^\infty,\ 0^0$ $$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$

Výpočet limity

Príklad 1. $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 - 27}$$

Príklad 2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \cos^2 x}$$

Príklad 3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

Príklad 4. $$\lim_{x\to \infty} \frac{5x^2 + 3x - 4}{2x^2 - x}$$

Príklad 5. $$\lim_{x\to \infty} \frac{5x^3 + 3x - 4}{2x^2 - x}$$

Príklad 6. $$\lim_{x\to \infty} \frac{5x^2 + 3x - 4}{2x^3 - x}$$

Pojem spojitosti

Definícia

Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech f je definovaná v okolí bodu $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

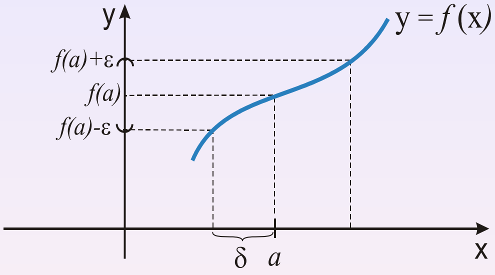
Zápis:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A, |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definícia

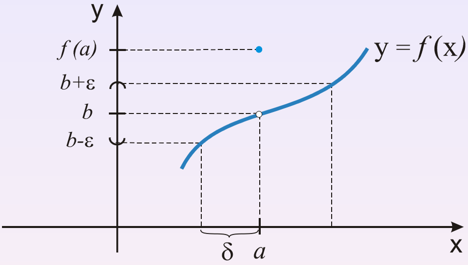
Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech f je definovaná v pravom (ľavom) okolí bodu $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a sprava (zľava), ak $\lim\limits_{x \to a^{+(-)}} f(x) = f(a)$.

Spojitosť funkcie - graf



Obr.: spojitá funkcia

Spojitosť funkcie - graf



Obr.: nespojitá funkcia

Body nespojitosti a ich klasifikácia

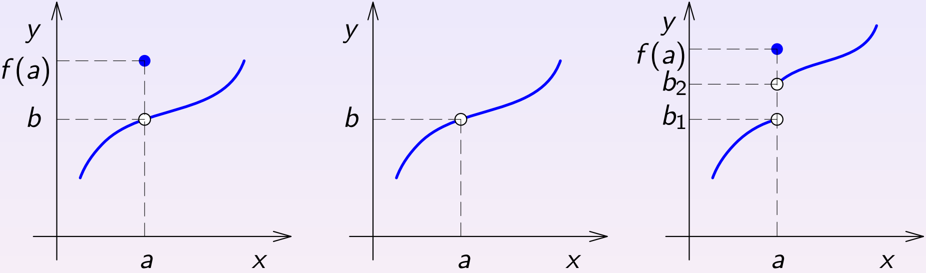
Definícia

Hromadné body definičného oboru funkcie f, v ktorých funkcia f nie je spojitá, nazývame body nespojitosti funkcie f.

Body nespojitosti a funkcie f môžeme zatriediť do dvoch skupín:

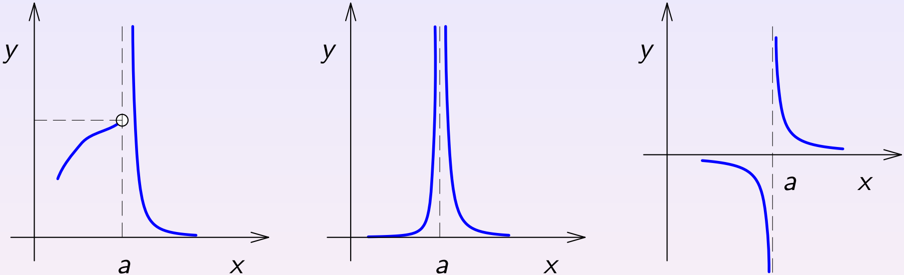
- Ak existujú vlastné jednostranné limity $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to a^-} f(x)$, tak a je bodom nespojitosti prvého druhu.
- Ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to a^-} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná tak a je bodom nespojitosti druhého druhu.

Nespojitosť prvého druhu - graf



Obr.: Nespojitosť prvého druhu

Nespojitosť druhého druhu - graf



Obr.: Nespojitosť druhého druhu

Spojitosť na intervale

Definícia

Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Hovoríme, že funkcia f je spojitá na otvorenom intervale (a, b), ak je spojitá v každom bode tohto intervalu. Hovoríme, že funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $< a, b >$, ak je spojitá v každom bode intervalu (a, b) a naviac je spojitá v bode a sprava a spojitá v bode b zľava.

Minimum a maximum

Veta

Nech $f :< a, b >\longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom funkcia $y = f(x)$ nadobúda na intervale $< a, b >$ minimum aj maximum.

Dôsledok: $y = f(x)$ je na $< a, b >$ ohraničená.

Hladinová hodnota

Veta

Nech $f :< a, b >\longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Nech c je ľubovoľné číslo z intervalu $< \min\limits_{x\in<a,b>} f(x), \max\limits_{x\in<a,b>} f(x) >$. Potom existuje aspoň jedno číslo $x_0 \in< a, b >$ také, že $f(x_0) = c$.

Nulová hodnota

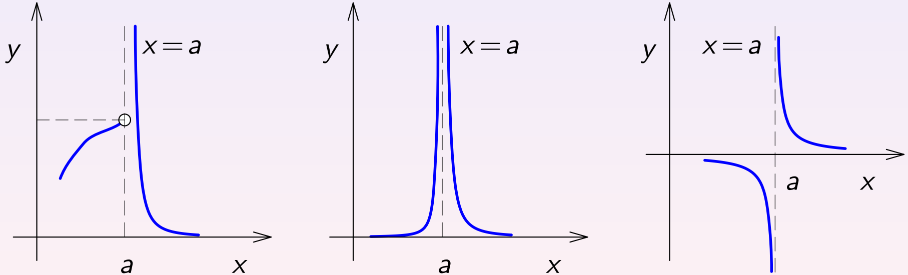
Veta

Nech $f :< a, b >\longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Nech $f(a)\cdot f(b) < 0$. Potom existuje aspoň jedno číslo $x_0 \in< a, b >$ také, že $f(x_0) = 0$.

Asymptota bez smernice

Definícia

Nech funkcia f je definovaná na istom okolí $O^{\circ}(x_0)$ bodu x_0. Priamka $x = x_0$ sa nazýva asymptota bez smernice grafu funkcie, ak funkcia f má v bode x_0 aspoň jednu nevlastnú jednostrannú limitu.



Obr.: Asymptota bez smernice

Asymptota so smernicou

Definícia

Nech funkcia f je definovaná na intervale $(-\infty, a)$, resp. (a, ∞). Ak existuje taká priamka $y = kx + q$, že $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx - q) = 0$, resp. $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx - q) = 0$, tak ju nazývame asymptotou so smernicou grafu funkcie f v nevlastnom bode $-\infty$, resp. $+\infty$.

Veta

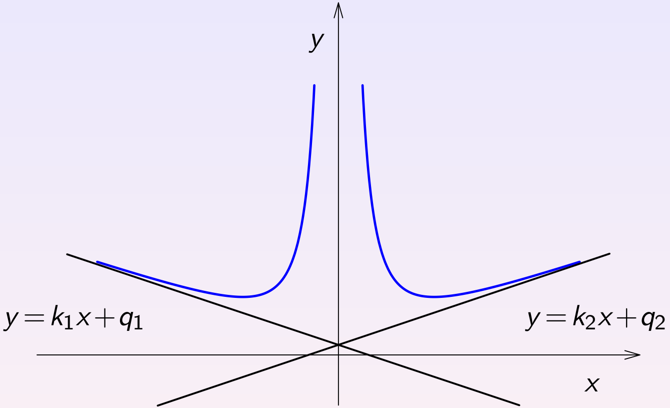
Priamka $y = k_1 x + q_1$ je asymptota grafu funkcie f pre bod $+\infty$ práve vtedy, keď

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad q_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - k_1 \cdot x) \in \mathbb{R}.$$

Priamka $y = k_2 x + q_2$ je asymptota grafu funkcie f pre bod $-\infty$ práve vtedy, keď

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad q_2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k_2 \cdot x) \in \mathbb{R}.$$

Asymptota so smernicou



Obr.: Asymptoty so smernicou

Pojem postupnosti

Definícia

Funkciu $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazývame postupnosťou reálnych čísel. Číslo $a_n = f(n)$ nazývame n-tý člen postupnosti.

Zápis:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}, \text{ resp. } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

- Geometrická postupnosť

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \\ S_n &= a_1 \cdot \tfrac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

- Aritmetická postupnosť

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_n &= a_{n-1} + d \\ S_n &= \tfrac{a_1+a_n}{2} \cdot n \end{aligned}$$

Limita postupnosti, konvergentná, resp. divergentná postupnosť

Definícia

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ práve vtedy, keď ku každému $O_\varepsilon(b)$ existuje také n_0, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, platí $a_n \in O_\varepsilon(b)$.

Zápis:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \iff (\forall O_\varepsilon(b))\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0) : a_n \in O_\varepsilon(b)$$

Definícia

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, je postupnosť reálnych čísel.
Keď $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \in \mathbb{R}$, hovoríme, že postupnosť je konvergentná.
V prípade, keď limita neexistuje alebo je rovná ∞, resp. $-\infty$, hovoríme, že postupnosť je divergentná.

Eulerovo číslo

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, je postupnosť reálnych čísel, kde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
Limita tejto postupnosti existuje, označíme ju e.

Zápis:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \div 2,718218\ldots$$

Príklad

Príklad 1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$$

Príklad 2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$$

Ďakujem za pozornosť.