Základy lineárnej algebry

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Pojem sústavy lineárnych rovníc

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Sústavu rovníc

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (1)$$

nazývame sústavou lineárnych algebrických rovníc. Čísla a_{ij} nazývame koeficientami sústavy, $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazývame neznámymi a $b_1, b_2, \dots, b_m$ absolútnymi členmi (pravými stranami) sústavy.

Zápis v maticovom tvare:

$$\mathbf{A} \cdot \overline{x} = \overline{b}$$

Matica sústavy a rozšírená matica sústavy

Definícia

Maticu utvorenú z koeficientov

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame maticou sústavy. Maticu utvorenú z matice sústavy $\mathbf{A}$ a vektora pravej strany $\overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)^\top$

$$\mathbf{A}^\star = (\mathbf{A} \,|\, \overline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazývame rozšírenou maticou sústavy.

Matica sústavy a rozšírená matica sústavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^\star = (\mathbf{A} \mid \overline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Sústava v maticovom tvare

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Riešenie sústavy

Definícia

Riešením sústavy lineárnych algebrických rovníc (1) nazývame taký vektor $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^\top$, ktorý vyhovuje rovnici $\mathbf{A} \cdot \overline{\alpha} = \overline{b}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sústava (1):

- má práve jedno riešenie,
- má nekonečne veľa riešení,
- nemá riešenie.

Ekvivalentné úpravy rovníc

Veta

Nech sústava S_2 vznikla zo sústavy S_1 niektorou z nasledujúcich úprav:

1. zmena poradia rovníc,
2. vynásobenie rovnice nenulovou konštantou,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie iných rovníc k niektorej rovnici.

Potom sústavy S_1 a S_2 majú rovnakú množinu riešení.

Ekvivalentné úpravy rovníc uvedené v predošlej vete sú totožné s ekvivalentnými riadkovými úpravami matíc. Z toho plynie, že stačí upravovať namiesto sústavy rovníc rozšírenú maticu sústavy.

Gaussova eliminačná metóda - algoritmus

Algoritmus

1. *Nahradíme sústavu lineárnych algebrických rovníc rozšírenou maticou sústavy.*
2. *Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme maticu na stupňovitý tvar.*
3. *Ak existuje riešenie sústavy, vyjadríme ho v tvare vektora.*

Gaussova eliminačná metóda – Príklad 1.

Príklad:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

$$\mathbf{A}^\star = (\mathbf{A} \mid \overline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminačná metóda – Príklad 1.

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{l} -R_4 \\ \\ \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +4R_1 \\ +8R_1 \\ +3R_1 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -3R_2 \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftrightarrows \\ \leftrightarrows \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ +4R_3 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminačná metóda – Príklad 1.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & & - & 2x_4 & = & 2 \end{array} \qquad \Rightarrow x_4 = -1$$

Z tretej rovnice dostávame $x_3 - x_4 = 0 \quad \Rightarrow x_3 = -1.$

Z druhej rovnice dostávame $-x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2 \quad \Rightarrow x_2 = 1.$

Z prvej rovnice dostávame $-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \quad \Rightarrow x_1 = 1.$

Riešením sústavy je vektor $\overline{x} = (1, 1, -1, -1)^\top$.

Frobeniova veta

Veta

Nech $\mathbf{A}$ je matica sústavy a $\mathbf{A}^\star$ je rozšírená matica sústavy (1). Sústava (1) má riešenie vtedy a len vtedy, ak $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star)$. Ďalej platí:

1. Sústava (1) má práve jedno riešenie vtedy a len vtedy, ak $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) = n$.
2. Sústava (1) má nekonečne veľa riešení vtedy a len vtedy, ak $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) < n$.

V prípade ak $\mathrm{h}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star)$, sústava (1) nemá riešenie.
V prípade, ak má sústava nekonečne veľa riešení, je počet voľných premenných $n - \mathrm{h}(\mathbf{A})$.

Gaussova eliminačná metóda – Príklad 1.

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \approx \dots \approx \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$h(\mathbf{A}) = 4 = h(\mathbf{A}^\star) = n \implies$ sústava má práve jedno riešenie

Gaussova eliminačná metóda – Príklad 2.

Príklad:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 8 \\
3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 7 \\
2x_1 & - & x_2 & & & + & 5x_4 & = & 6 \\
5x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 8x_4 & = & 1
\end{array}
$$

$$
\mathbf{A}^\star = (\mathbf{A}\,|\,\overline{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r}
4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\
3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\
2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\
5 & -3 & 1 & -8 & 1
\end{array}\right)
$$

Gaussova eliminačná metóda – Príklad 2.

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -2R_1 \\ -5R_1 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -18 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -2R_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 3 \neq \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) = 4 \quad \Longrightarrow$ sústava nemá riešenie

Gaussova eliminačná metóda – Príklad 3.

Príklad:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\
6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\
6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 13x_5 & = & 9 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1
\end{array}$$

$$\mathbf{A}^\star = (\mathbf{A} \,|\, \overline{b}) = \left(\begin{array}{rrrrr|r}
2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\
6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\
4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1
\end{array}\right)$$

Gaussova eliminačná metóda – Príklad 3.

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -3R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \\ -R_2 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \leftrightarrows \\ \cdot(-1) \quad \leftrightarrows \end{array} \approx$$

Gaussova eliminačná metóda – Príklad 3.

$$\approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) = 3 \quad \Longrightarrow$ sústava má riešenie

$n = 5 > \mathrm{h}(\mathbf{A}) = 3 \quad \Longrightarrow$ sústava má nekonečne veľa riešení

$n - \mathrm{h}(\mathbf{A}) = 5 - 3 = 2$ je počet voľných premenných

Gaussova eliminačná metóda – Príklad 3.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 3 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x_4 = 0$$

Nech $x_5 = t$ a $x_1 = s$, z druhej rovnice dostávame

$$x_3 + x_4 + 4x_5 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3 - 4t$$

Z prvej rovnice dostávame

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - t + 2s$$

Riešením sústavy je vektor

$$\overline{x} = (s, 1 - t + 2s, 3 - 4t, 0, t)^\top \quad \text{pre } s, t \in \mathbb{R}$$

Sústavy lineárnych rovníc so štvorcovou maticou sústavy

Definícia

Pre $n \in \mathbb{N}$ majme sústavu n algebrických rovníc o n neznámych

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\dots & & & & & & & & \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
\qquad (2)
$$

Veta

Sústava (2) má práve jedno riešenie vtedy a len vtedy, ak je matica sústavy regulárna.

Cramerovo pravidlo

Veta

Nech $D \neq 0$ je determinant matice sústavy (2). Nech D_i je determinant matice, ktorá vznikla z matice sústavy nahradením i-tého stĺpca vektorom pravej strany. Riešením sústavy (2) je vektor $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top$, kde

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad \text{pre} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Cramerovo pravidlo – Príklad 1

Príklad:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 9 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$D = 0 \implies$ matica sústavy je singulárna $\implies$ nemôžeme použiť Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo – Príklad 2

Príklad:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 9 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -35$$

$D \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ matica sústavy je regulárna

Cramerovo pravidlo – Príklad 2

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 9 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Cramerovo pravidlo – Príklad 2

Sústava má práve jedno riešenie $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, kde

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-35}{-35} = 1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-70}{-35} = 2$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-175}{-35} = 5$$

Riešenie sústavy ako maticovej rovnice

Príklad:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie sústavy ako maticovej rovnice

$$\mathbf{A} \cdot \overline{x} = \overline{b}$$

ak $\mathbf{A}$ je regulárna $\Longrightarrow \exists\ \mathbf{A}^{-1}$

$$\Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \overline{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \overline{b}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{E} \cdot \overline{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \overline{b}$$

$$\Longrightarrow \overline{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \overline{b}$$

Riešenie sústavy ako maticovej rovnice

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Príklad 1

Príklad 1:

V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu troch modelov A, B a C určitého výrobku na jednotlivých výrobných linkách:

linka	A	B	C
1.	40 min.	30 min.	25 min.
2.	25 min.	20 min.	20 min.
3.	10 min.	10 min.	5 min.

a) Vypočítajme, koľko kusov výrobkov modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď pre 1. linku máme týždenne k dispozícii 4 500 minút, pre 2. linku 3 050 minút a pre 3. linku 1 200 minút, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.

b) Ako by sa zmenila výroba, ak odstavíme 3. linku?

Príklad 1 – a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 40x & + & 30y & + & 25z & = & 4500 \\ 25x & + & 20y & + & 20z & = & 3050 \\ 10x & + & 10y & + & 5z & = & 1200 \end{array}$$

$$\mathbf{A}^{\star} = (\mathbf{A} \mid \overline{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array} \right)$$

Príklad 1 – a)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array}$$

Príklad 1 – a)

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} -2R_3 \\ \\ \\ \end{array} \approx$$

Príklad 1 – a)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2R_3 \\ \\ \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -8R_1 \\ -2R_1 \end{array}$$

Príklad 1 – a)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2R_3 \\ \\ \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -8R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \leftrightarrows \\ \leftrightarrows \end{array} \approx$$

Príklad 1 – a)

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2R_3 \\ \\ \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -8R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \leftrightarrows \\ \leftrightarrows \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -3R_2 \end{array}$$

Príklad 1 – a)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2R_3 \\ \\ \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -8R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \leftrightarrows \\ \leftrightarrows \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -3R_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & -80 \end{array}\right)$$

Príklad 1 – a)

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2R_3 \\ \\ \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -8R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftrightarrows \\ \leftrightarrows \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3R_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & -80 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 3 = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) = n \quad \Longrightarrow$$

Príklad 1 – a)

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2R_3 \\ \\ \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -8R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \leftrightarrows \\ \leftrightarrows \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 6 & -11 & -140 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -3R_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & -80 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 3 = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) = n \quad \Longrightarrow \quad \overline{x} = (50,\ 50,\ 40)^\top$$

Príklad 1 – b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 40x & + & 30y & + & 25z & = & 4500 \\ 25x & + & 20y & + & 20z & = & 3050 \end{array}$$

$$\mathbf{A}^\star = (\mathbf{A} \mid \overline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array}\right)$$

Príklad 1 – b)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{5} \\ \cdot \frac{1}{5} \end{array}$$

Príklad 1 – b)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \end{array}\right)$$

Príklad 1 – b)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot 8 - 5R_1 \end{array} \approx$$

Príklad 1 – b)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 8 - 5R_1 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 0 & 2 & 7 & 380 \end{array}\right)$$

Príklad 1 – b)

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot\frac{1}{5}\\ \cdot\frac{1}{5}\end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot 8 - 5R_1\end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 0 & 2 & 7 & 380 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2 = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) < n = 3 \quad \Longrightarrow$$

Príklad 1 – b)

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{5}\end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 8 - 5R_1\end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 0 & 2 & 7 & 380 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2 = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) < n = 3 \quad \Longrightarrow$$

$$\overline{x} = \left(-30 + 2t,\ 190 - \tfrac{7}{2}t,\ t\right)^\top \quad \text{pre } t \in < 15, 54 > \ \text{ párne} \Rightarrow$$

$$t \in \{16, 18, \dots, 54\}$$

Príklad 2

Príklad 2:

V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu, náklady na materiál a náklady na reklamu pri výrobe troch modelov hodiniek:

model	pracovná sila	materiál	reklama
A	10 €	15 €	5 €
B	8 €	6 €	2 €
C	12 €	16 €	8 €

a) Vypočítajme, koľko kusov hodiniek modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď na pracovnú silu máme týždenne k dispozícii 620 €, na materiál 750 €a na reklamu 330 €, pričom chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

b) Ako by sa zmenila výroba, ak peniaze na reklamu využijeme na iný účel?

Príklad 2 – a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 10x & + & 8y & + & 12z & = & 620 \\ 15x & + & 6y & + & 16z & = & 750 \\ 5x & + & 2y & + & 8z & = & 330 \end{array}$$

$$\mathbf{A}^\star = (\mathbf{A} \,|\, \overline{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \\ 5 & 2 & 8 & 330 \end{array} \right)$$

Príklad 2 – a)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \\ 5 & 2 & 8 & 330 \end{array} \right) \approx \ldots \approx$$

Príklad 2 – a)

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \\ 5 & 2 & 8 & 330 \end{array}\right) \approx \ldots \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 8 & 330 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

Príklad 2 – a)

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \\ 5 & 2 & 8 & 330 \end{array}\right) \approx \ldots \approx \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & 8 & 330 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 3 = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) = n \quad \Longrightarrow$$

Príklad 2 – a)

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \\ 5 & 2 & 8 & 330 \end{array}\right) \approx \ldots \approx \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & 8 & 330 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 3 = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) = n \quad \Longrightarrow \quad \overline{x} = (10,\ 20,\ 30)^\top$$

Príklad 2 – b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 10x & + & 8y & + & 12z & = & 620 \\ 15x & + & 6y & + & 16z & = & 750 \end{array}$$

$$\mathbf{A}^\star = (\mathbf{A} \,|\, \overline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \end{array} \right)$$

Príklad 2 – b)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \end{array}\right) \approx \ldots \approx$$

Príklad 2 – b)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \end{array} \right) \approx \ldots \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 310 \\ 0 & 3 & 1 & 90 \end{array} \right)$$

Príklad 2 – b)

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \end{array}\right) \approx \ldots \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 310 \\ 0 & 3 & 1 & 90 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2 = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) < n = 3 \quad \Longrightarrow$$

Príklad 2 – b)

$$\mathbf{A}^{\star} = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 12 & 620 \\ 15 & 6 & 16 & 750 \end{array} \right) \approx \ldots \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 310 \\ 0 & 3 & 1 & 90 \end{array} \right)$$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2 = \mathrm{h}(\mathbf{A}^{\star}) < n = 3 \quad \Longrightarrow$$

$\overline{x} = (-46 + \frac{14}{5}t,\ t,\ 90 - 3t)^{\top}$ pre $t \in< 17, 30 >$ deliteľné 5
$\Rightarrow t \in \{20, 25, 30\}$

Riešenie homogénnej sústavy

Definícia

Pre $n \in \mathbb{N}$ majme sústavu m algebrických rovníc o n neznámych

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

Keďže v tomto prípade $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star)$, má sústava (3) vždy aspoň jedno (triviálne) riešenie. Podľa Frobeniovej vety môžu nastať nasledujúce prípady

1. $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = n \implies \overline{x} = (0, 0, \dots, 0)^\top$ je jediné riešenie sústavy (3).
2. $\mathrm{h}(\mathbf{A}) < n \implies$ má sústava (3) nekonečne veľa riešení.

Homogénna sústava – príklad 1.

Príklad:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Homogénna sústava – príklad 1.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 \\ +R_1 \\ +2R_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3R_2 \\ +5R_2 \end{matrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 17 & -24 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ .5 - 17R_3 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 101 \end{pmatrix}$$

$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^\star) = 4 \implies$ sústava má jediné riešenie $\overline{x} = (0,0,0,0)^\top$

Homogénna sústava – príklad 2.

Príklad:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 8x_5 & = & 0 \\
9x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 9x_5 & = & 0 \\
3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\
3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 0
\end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Homogénna sústava – príklad 2.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -R_1 \\ -R_1 \end{array} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{3} \end{array} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ -R_2 \end{array} \approx$$

Homogénna sústava – príklad 2.

$$\approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n = 5 > \mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2 \quad \Longrightarrow$ sústava má nekonečne veľa riešení

$n - \mathrm{h}(\mathbf{A}) = 5 - 2 = 3$ je počet voľných premenných

Homogénna sústava – príklad 2.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 8x_5 & = & 0 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \end{array}$$

Nech $x_1 = s$, $x_3 = t$ a $x_5 = u$, z druhej rovnice dostávame

$$2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 3u - 2t$$

Z prvej rovnice dostávame

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 8x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3s - 4t + 11u$$

Riešením sústavy je vektor

$$\overline{x} = (s, 3s - 4t + 11u, t, 3u - 2t, u)^\top \quad \text{pre } s, t, u \in \mathbb{R}$$

Sústavy s parametrom v štvorcovej matici sústavy – algoritmus

Algoritmus

1. *Vypočítame determinant matice sústavy.*
2. *Položíme determinant rovný nule a vyriešime vzniknutú algebrickú rovnicu.*
3. *Korene tejto rovnice postupne dosadíme do sústavy, ktorú následne vyriešime pomocou Gaussovej eliminačnej metódy.*
4. *Pre všetky ostatné hodnoty parametra je determinant rôzny od nuly a teda sústava má práve jedno riešenie. Toto riešenie nájdeme pomocou Cramerovho pravidla.*

Sústava s parametrom – príklad 1.

Príklad:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

1.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a - 2$$

2.

$$-a^3 + 3a - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)^2(a+2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a = 1 \quad \vee \quad a = -2$$

Sústava s parametrom – príklad 1.

3. • Nech $a = 1$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \iff x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$n = 3 > \mathrm{h}(\mathbf{A}) = 1 \implies$ sústava má nekonečne veľa riešení

$n - \mathrm{h}(\mathbf{A}) = 3 - 1 = 2$ je počet voľných premenných

Nech $x_1 = s$ a $x_2 = t \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 - s - t$

Riešením sústavy je vektor

$$\overline{x} = (s, t, 1 - s - t)^\top \quad \text{pre } s, t \in \mathbb{R}$$

Sústava s parametrom – príklad 1.

- Nech $a = -2$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{A}^\star = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -R_1 \\ +2R_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2 \neq \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) = 3 \quad \Longrightarrow \quad$ sústava nemá riešenie

Sústava s parametrom – príklad 1.

4. Nech $a \neq 1$ a $a \neq -2$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sústava s parametrom – príklad 1.

Sústava má práve jedno riešenie $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, kde

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-(a-1)^2}{-a^3+3a-2} = \frac{1}{a+2}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-(a-1)^2}{-a^3+3a-2} = \frac{1}{a+2}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-(a-1)^2}{-a^3+3a-2} = \frac{1}{a+2}$$

Sústava s parametrom – príklad 2.

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešime sústavy

- parameter vystupuje len vo vektore pravej strany
- matica sústavy nie je štvorcová

Príklad:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
12x_1 & - & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 21x_4 & = & 3+a \\
11x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & + & 24x_4 & = & 1+a \\
7x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 17x_4 & = & a \\
8x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & 9
\end{array}$$

Sústava s parametrom - príklad 2.

$$\mathbf{A}^\star = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrrr|r} 12 & -6 & 9 & 21 & 3+a \\ 11 & -5 & 10 & 24 & 1+a \\ 7 & -3 & 7 & 17 & a \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 11 & -5 & 10 & 24 & 1+a \\ 7 & -3 & 7 & 17 & a \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -11R_1 \\ -7R_1 \\ -8R_1 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 21 & 57 & a-21 \\ 0 & 4 & 14 & 38 & a-14 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftrightarrows \\ \\ \leftrightarrows \end{array} \approx$$

Sústava s parametrom – príklad 2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 4 & 14 & 38 & a-14 \\ 0 & 6 & 21 & 57 & a-21 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \\ -3R_2 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right)$$

- Nech $a \neq 0$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2 \neq \mathrm{h}(\mathbf{A}^\star) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \text{sústava nemá riešenie}$$

Sústava s parametrom – príklad 2.

- Nech $a = 0$

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}^{\star}) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \text{sústava má riešenie}$$
$$n = 4 > \mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \text{sústava má nekonečne veľa riešení}$$
$$n - \mathrm{h}(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2 \quad \text{je počet voľných premenných}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 19x_4 & = & -7 \end{array}$$

Nech $x_3 = s$ a $x_4 = t$ $\quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2}(-7 - 7s - 19t)$

$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}(-3 - 5s - 13t)$

Riešením sústavy je vektor

$$\overline{x} = (\frac{1}{2}(-3 - 5s - 13t), \frac{1}{2}(-7 - 7s - 19t), s, t)^{\top} \quad \text{pre } s, t \in \mathbb{R}$$

Ďakujem za pozornosť.