

Exponenciálne modely

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

`monika.molnarova@tuke.sk`

Obsah

- 1 Exponenciálne modely
 - Exponenciálny rast
 - Exponenciálne klesanie
 - Krivka učenia sa
 - Logistická krivka

Vlastnosti exponenciálneho rastu

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{kt} \quad k > 0, Q_0 > 0$$

① $D(Q) = \mathbb{R}$

$$H(Q) = (0, \infty)$$

② $Q(0) = Q_0$

③ $Q'(t) = k \cdot Q_0 \cdot e^{kt} = k \cdot Q(t),$

t. j. miera rastu funkcie je priamo úmerná pôvodnej funkcii a k je konštanta úmernosti

④ $k = \frac{Q'(0)}{Q_0}$

Exponenciálny rast - Príklad 1

Príklad:

V roku 2 000 bol počet obyvateľov krajiny 60 miliónov. V roku 2005 dosiahol počet 90 miliónov. Koľko obyvateľov bude v roku 2015, ak bude počet obyvateľov rásť exponenciálne?

Exponenciálny rast - Príklad 2

Príklad:

Biológovia zistili, že za ideálnych podmienok, počet baktérií rastie v kultúre exponenciálne. Predpokladajme, že na začiatku bolo 2 000 baktérií v určitej kultúre, a že po 20 minútach ich počet narástol na 6 000. Koľko baktérií bude po 1 hodine?

Pojem exponenciálneho klesania a jeho použitie

Definícia

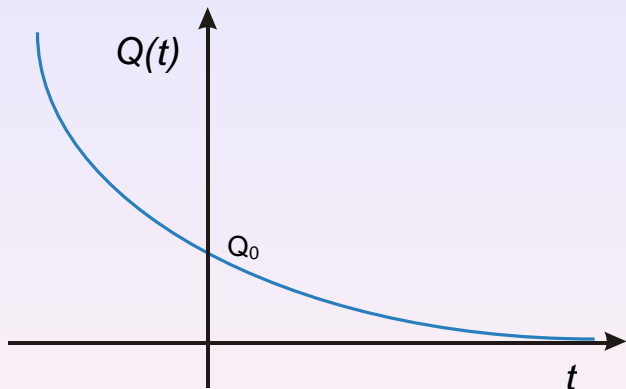
Nech $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-kt}$, kde $k, Q_0 \in (0, \infty)$. Potom hovoríme, že funkcia $Q(t)$ klesá exponenciálne.

$$Q'(t) = -k \cdot Q_0 \cdot e^{-kt} < 0 \implies Q(t) \text{ je klesajúca}$$

Použitie:

- rozpad rádioaktívnych látok
- predaj tovaru, ak sa preruší reklama

Graf exponenciálneho klesania



Obr.: Exponenciálne klesanie

Vlastnosti exponenciálneho klesania

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-kt} \quad k > 0, Q_0 > 0$$

- 1 $D(Q) = \mathbb{R}$
 $H(Q) = (0, \infty)$
- 2 $Q(0) = Q_0$
- 3 $Q'(t) = -k \cdot Q_0 \cdot e^{-kt} = -k \cdot Q(t)$,
t. j. miera klesania funkcie je priamo úmerná pôvodnej funkcii
a k je konštanta úmernosti

- 4 $k = -\frac{Q'(0)}{Q_0}$

- 5 $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0$

Exponenciálne klesanie - Príklad 1

Príklad:

Výrobný stroj stráca časom na hodnote tak, že jeho hodnota po t rokoch je daná funkciou $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0,04t}$. Po 20 rokoch je cena stroja 8 986,58 \$. Aká bola pôvodná cena stroja?

Exponenciálne klesanie - Príklad 2

Príklad:

Polčas rozpadu rádioaktívnej substancie je čas potrebný na rozpad polovice pôvodnej hmotnosti. Množstvo rádioaktívnej substancie, ktorá zostane po t rokoch, je dané funkciou $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0,003t}$.
Nájdime polčas rozpadu substancie.

Exponenciálne klesanie - Príklad 3

Príklad:

Polčas rozpadu prvku Rádium je 1690 rokov. Ako dlho potrvá, kým z 50 gramovej vzorky ostane 5 gramov?

Pojem krivky učenia sa a jej použitie

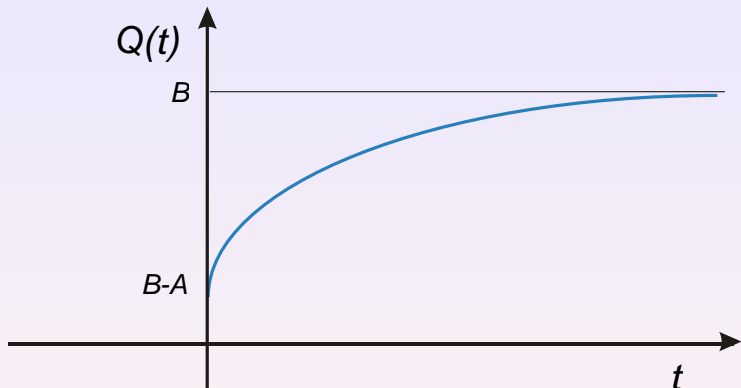
Definícia

Nech $Q(t) = B - A \cdot e^{-kt}$, kde $A, B, k \in (0, \infty)$, $B > A$. Graf funkcie $Q(t)$ nazývame **krivka učenia sa**.

Použitie:

- výkonnosť pri rôznych činnostiach (učenie sa, práca,...)

Krivka učenia sa



Obr.: Krivka učenia sa

Vlastnosti krivky učenia sa

$$Q(t) = B - A \cdot e^{-kt} \quad k > 0, B > A > 0$$

- 1 $D(Q) = \mathbb{R}$
- 2 $Q(0) = B - A$
- 3 $Q'(t) = k \cdot A \cdot e^{-kt} > 0 \implies$ funkcia je rastúca
- 4 $Q''(t) = -k^2 \cdot A \cdot e^{-kt} < 0 \implies$ funkcia je konkávna
- 5 $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = B \implies$ funkcia je zhora ohraničená

Krivka učenia sa - Príklad 1

Príklad:

Poštový úradník po t mesiacoch praxe vytriedi

$$Q(t) = 700 - 400 \cdot e^{-0,5t} \text{ listov za hodinu.}$$

- 1 Koľko listov vytriedi nový zamestnanec za hodinu?
- 2 Koľko listov vytriedi úradník po 6 mesačných skúsenostiach za hodinu?
- 3 Koľko listov bude úradník schopný vytriediť za hodinu v neohraničenej budúcnosti?

Krivka učenia sa - Príklad 2

Príklad:

Podľa štúdie efektívnosti práce vo výrobnjej firme platí pre priemerného nového pracovníka nasledujúci odhad výkonnosti:

počet mesiacov praxe	0	6
hodinová výkonnosť	300	410

Výkonnosť v závislosti podľa počtu mesiacov praxe sa riadi funkciou $Q(t) = 500 - A \cdot e^{-kt}$. Nájdime neznáme koeficienty funkcie $Q(t)$.

Pojem logistickej krivky a jej použitie

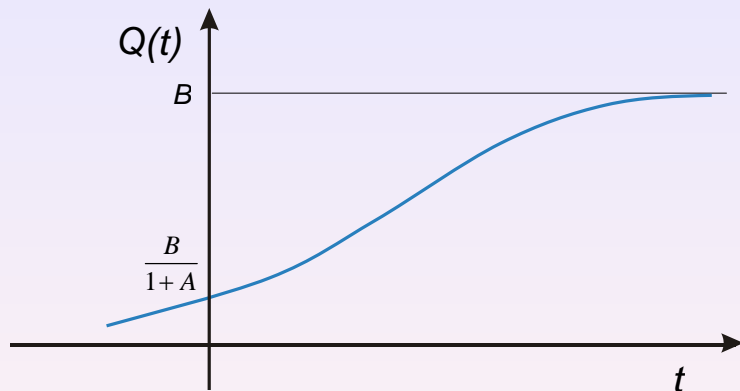
Definícia

Nech $Q(t) = \frac{B}{1 + A \cdot e^{-Bkt}}$, kde $A, B, k \in (0, \infty)$. Graf funkcie $Q(t)$ nazývame **logistická krivka** (sigmoidálna krivka).

Použitie:

- rast populácie pod vonkajšími vplyvmi
- šírenie sa epidémie

Logistická krivka



Obr.: Logistická krivka

Vlastnosti logistickej krivky

$$Q(t) = \frac{B}{1 + A \cdot e^{-Bkt}} \quad k > 0, B > 0, A > 0$$

1 $D(Q) = \mathbb{R}$

2 $Q(0) = \frac{B}{1+A}$

3 $Q'(t) = \frac{B^2 \cdot k \cdot A \cdot e^{-Bkt}}{(1+A \cdot e^{-Bkt})^2} > 0 \implies$ funkcia je rastúca

4 $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = B \implies$ funkcia je zhora ohraničená

5 $\lim_{t \rightarrow -\infty} Q(t) = 0 \implies$ funkcia je zdola ohraničená

Logistická krivka - Príklad 2

Príklad:

Odhaduje sa, že o t rokov odteraz bude počet obyvateľov krajiny

$$P(t) = \frac{20}{2 + 3 \cdot e^{-0,06t}} \quad \text{miliónov.}$$

- 1 Aký je súčasný počet obyvateľov?
- 2 Ak by trend pokračoval podľa uvedenej funkcie, k akej hranici by sa priblížil celkový počet obyvateľov?
- 3 Načrtnime graf funkcie.
- 4 Koľko obyvateľov bude mať krajina o 15 rokov?

Ďakujem za pozornosť.