Optimalizácia funkcií ekonomickej analýzy

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Výpočet globálnych extrémov funkcie

Ak má funkcia f lokálne extrémy len v bodoch $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in < a, b >$, tak

1. globálne minimum

$$\min_{x\in<a,b>} f(x) = \min\{f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(a),\ f(b)\}$$

2. globálne maximum

$$\max_{x\in<a,b>} f(x) = \max\{f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(a),\ f(b)\}$$

Vplyv marginálnych nákladov na minimalizáciu priemerných nákladov

Veta (Stacionárne body funkcie priemerných nákladov)

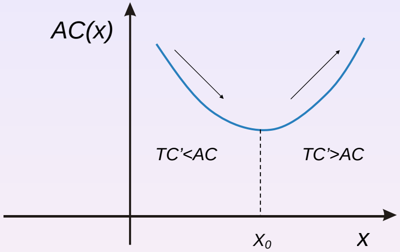
Nech $TC(x)$ je funkcia celkových nákladov a $AC(x) = \frac{TC(x)}{x}$ funkcia priemerných nákladov na výrobu x kusov tovaru. Bod x_0 je stacionárnym bodom funkcie priemerných nákladov práve vtedy, ak sa v bode x_0 priemerné náklady rovnajú marginálnym nákladom.

$$AC'(x) = \frac{TC'(x) \cdot x - TC(x)}{x^2} = 0 \iff TC'(x_0) \cdot x_0 - TC(x_0) = 0$$

$$\iff TC'(x_0) = \frac{TC(x_0)}{x_0}$$

$$\iff MC(x_0) = AC(x_0)$$

Vplyv marginálnych nákladov na minimalizáciu priemerných nákladov - ilustrácia



Obr.: Minimalizácia priemerných nákladov

Vplyv marginálnych nákladov na minimalizáciu priemerných nákladov - zhrnutie

Veta (Monotónnosť funkcie priemerných nákladov)

Nech funkcia $TC(x)$ je spojitá na intervale $I \subset < a, b >$. Nech funkcia $AC(x) = \frac{TC(x)}{x}$ je definovaná na I. Nech $x_0 \in (a, b)$. Nech funkcia $TC(x)$ má deriváciu na intervale (a, b) a nemení znamienko derivácie na intervale (a, x_0) a nemení znamienko derivácie na intervale (x_0, b). Potom

- ak $TC'(x) < AC(x)$ pre $x < x_0$, tak $AC(x)$ je klesajúca na (a, x_0),
- ak $TC'(x) > AC(x)$ pre $x > x_0$, tak $AC(x)$ je rastúca na (x_0, b),
- ak $TC'(x_0) = AC(x_0)$, pričom $TC'(x) < AC(x)$ pre $x < x_0$ a pre $x > x_0$ $TC'(x) > AC(x)$, tak $AC(x)$ má v bode x_0 lokálne minimum.

Minimalizácia celkových nákladov

$$AC'(x_0) = 0 \Longleftrightarrow TC'(x_0) = \frac{TC(x_0)}{x_0}$$

Ak $TC'(x_0) = 0$ (stacionárny bod funkcie celkových nákladov) a súčasne $AC'(x_0) = 0$ (stacionárny bod funkcie priemerných nákladov), tak $TC(x_0) = 0$.

$\Longrightarrow$

Neexistuje úroveň produkcie, pri ktorej sú minimálne celkové aj priemerné náklady.

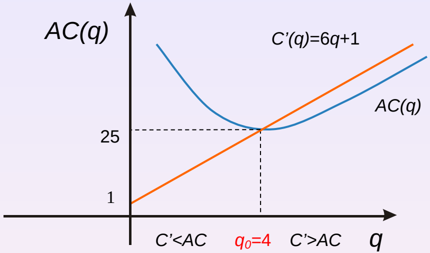
Minimalizácia priemerných nákladov - Príklad

Príklad:

Predpokladáme, že náklady na výrobu q kusov tovaru sú $C(q) = 3q^2 + q + 48$:

1. Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus minimálne?
2. Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?
3. Nakreslime grafy funkcí priemerných nákladov a marginálnych nákladov v jednom systéme súradníc.

Minimalizácia priemerných nákladov - Príklad - grafy



Obr.: Minimalizácia priemerných nákladov

Vplyv marginálnej veličiny na minimalizáciu/maximalizáciu priemernej veličiny

Veta (Monotónnosť priemernej veličiny)

Nech totálna veličina $Tf(x)$ je spojitá na intervale $I \subset < a, b >$. Nech priemerná veličina $Af(x) = \frac{Tf(x)}{x}$ je definovaná na I. Nech $x_0 \in (a, b)$. Nech funkcia $Tf(x)$ má deriváciu na intervale (a, b) a nemení znamienko derivácie na intervale (a, x_0) a nemení znamienko derivácie na intervale (x_0, b). Potom

- ak $Tf'(x) < Af(x)$ pre $x < x_0$ $(x > x_0)$, tak $Af(x)$ je klesajúca na (a, x_0) $((x_0, b))$,
- ak $Tf'(x) > Af(x)$ pre $x > x_0$ $(x < x_0)$, tak $Af(x)$ je rastúca na (x_0, b) $((a, x_0))$,
- ak $Tf'(x_0) = Af(x_0)$, pričom $Tf'(x) < Af(x)$ pre $x < x_0$ $(x > x_0)$ a $Tf'(x) > Af(x)$ pre $x > x_0$ $(x < x_0)$, tak $Af(x)$ má v bode x_0 lokálne minimum (maximum).

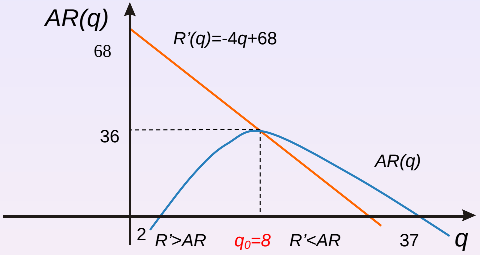
Maximalizácia priemerného príjmu - Príklad

Príklad:

Predpokladáme, že totálny príjem z predaja q kusov tovaru je $R(q) = -2q^2 + 68q - 128$:

1. Pri akej výške predaja je priemerný príjem na jeden kus tovaru rovnaký ako marginálny príjem?
2. Dokážme, že priemerný príjem rastie, ak úroveň predaja je nižšia ako úroveň z časti 1.) a klesá, ak úroveň predaja je vyššia ako úroveň z časti 1.).
3. Nakreslime grafy funkcí priemerných príjmov a marginálnych príjmov v jednom systéme súradníc.

Maximalizácia priemerného príjmu - Príklad - grafy



Obr.: Maximalizácia priemerného príjmu

Maximalizácia celkového príjmu

Podľa zadania funkcie dopytu môžu nastať dva prípady:

- Ak je funkcia dopytu daná $q = D(p)$, tak funkcia celkových príjmov je
$$TR(p) = p \cdot D(p)$$
- Ak je funkcia dopytu daná $p = d(q)$, tak funkcia celkových príjmov je
$$TR(q) = q \cdot d(q)$$

Lokálne extrémy nájdeme pomocou derivácie podľa danej premennej.

Maximalizácia celkového zisku

$$
\begin{aligned}
TP(q) &= TR(q) - TC(q) \\
TP'(q) &= TR'(q) - TC'(q) = 0 \\
\iff \quad TR'(q) &= TC'(q) \\
\iff \quad MR(q) &= MC(q)
\end{aligned}
$$

Veta (Maximalizácia celkového zisku)

Nech $TP(q)$ ($TP(p)$) je funkcia celkového zisku. Celkový zisk je maximálny práve vtedy, keď sa marginálne príjmy $MR(q)$ ($MR(p)$) rovnajú marginálnym nákladom $MC(q)$ ($MC(p)$).

Maximalizácia celkového zisku - Príklad 1

Príklad:

Celkové týždenné náklady v tisícoch eur na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 15x + 1696$. Funkcia celkových týždenných výnosov je $R(x) = 100x - 0,01x^2$. Nakreslime grafy oboch funkcií v jednom súradnicovom systéme a zistime, kedy je výroba zisková. Určme úroveň produkcie, pri ktorej firma dosahuje maximálny zisk.

Maximalizácia celkového zisku - Príklad 2

Príklad:

Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q) = 5q$. Cena, za ktorú je možné predať q kusov výrobku je určená cenou dopytu $p = 25 - 2q$.

1. Vypočítajme objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti.
2. Vypočítajme objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti, ak je každý predaný výrobok zdaňovaný extra daňou t dolárov.
3. Predpokladajme, že si spoločnosť zvolí objem produkcie, ktorá maximalizuje jej zisk. Ako by mal výberca dane stanoviť výšku dane, aby dosiahol maximálny daňový výnos?

Maximalizácia celkového zisku - Príklad 3

Príklad:

Spoločnosť má fixné mesačné náklady na výrobu q kusov výrobku 360 eur a variabilné mesačné náklady $0,2q + 10$ eur na jeden vyrobený kus. Predajná cena jedného výrobku je $p = 50 - 0,2q$. Určme

1. kedy je výroba zisková,
2. ponuku, ktorá maximalizuje mesačné príjmy,
3. úroveň produkcie, pri ktorej firma dosahuje maximálny zisk.

Maximalizácia celkového zisku - Príklad 4

Príklad:

Výrobca predáva lampy po 6 \$ a pri tejto cene predá 3 000 kusov mesačne. Výrobca chce zvýšiť cenu a očakáva zvýšenie zisku, pričom každé zvýšenie ceny o 1 \$ zníži počet predaných lámp za mesiac o 1 000 kusov. Výrobné náklady na jednu lampu sú 4 \$. Pri akej cene sa dosiahne maximálny mesačný zisk?

Maximalizácia celkového zisku - Príklad 5

Príklad:

Pestovateľ citrusov odhaduje, že ak má zasadených 60 pomarančovníkov, priemerná úroda z jedného stromu je 400 pomarančov. Každý dodatočne zasadený pomarančovník znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 4 pomaranče. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

Ďakujem za pozornosť.