MATICE A SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Definícia

Maticou typu $m \times n$ rozumieme sústavu prvkov zapísaných do tabuľky (schémy) s m riadkami a n stĺpcami, pre $m, n \in \mathbb{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde a_{ij} sú prvky matice, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.
Skrátené označenie $A = (a_{ij})$.

- Matice rovnakého typu - matice s rovnakým počtom riadkov a stĺpcov
- Submatica matice A - matica, ktorú dostaneme z matice A vynechaním niektorých riadkov alebo stĺpcov
- Štvorcová matica stupňa n - matica typu $n \times n$ (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)
- Riadkový vektor - matica typu $1 \times n$ (matica s jedným riadkom)
- Stĺpcový vektor - matica typu $n \times 1$ (matica s jedným stĺpcom)
- Nech $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ sú vektory a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sú konštanty, potom vektor

$$\overrightarrow{x} = k_1 \overrightarrow{a_1} + k_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + k_n \overrightarrow{a_n}$$

je lineárnou kombináciou vektorov $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$

- Matice rovnakého typu - matice s rovnakým počtom riadkov a stĺpcov
- Submatica matice A - matica, ktorú dostaneme z matice A vynechaním niektorých riadkov alebo stĺpcov
- Štvorcová matica stupňa n - matica typu $n \times n$ (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)
- Riadkový vektor - matica typu $1 \times n$ (matica s jedným riadkom)
- Stĺpcový vektor - matica typu $n \times 1$ (matica s jedným stĺpcom)
- Nech $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ sú vektory a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sú konštanty, potom vektor

$$\overrightarrow{x} = k_1 \overrightarrow{a_1} + k_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + k_n \overrightarrow{a_n}$$

je lineárnou kombináciou vektorov $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$

- Matice rovnakého typu - matice s rovnakým počtom riadkov a stĺpcov
- Submatica matice A - matica, ktorú dostaneme z matice A vynechaním niektorých riadkov alebo stĺpcov
- Štvorcová matica stupňa n - matica typu $n \times n$ (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)
- Riadkový vektor - matica typu $1 \times n$ (matica s jedným riadkom)
- Stĺpcový vektor - matica typu $n \times 1$ (matica s jedným stĺpcom)
- Nech $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ sú vektory a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sú konštanty, potom vektor

$$\overrightarrow{x} = k_1 \overrightarrow{a_1} + k_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + k_n \overrightarrow{a_n}$$

je lineárnou kombináciou vektorov $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$

- Matice rovnakého typu - matice s rovnakým počtom riadkov a stĺpcov
- Submatica matice A - matica, ktorú dostaneme z matice A vynechaním niektorých riadkov alebo stĺpcov
- Štvorcová matica stupňa n - matica typu $n \times n$ (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)
- Riadkový vektor - matica typu $1 \times n$ (matica s jedným riadkom)
- Stĺpcový vektor - matica typu $n \times 1$ (matica s jedným stĺpcom)
- Nech $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ sú vektory a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sú konštanty, potom vektor

$$\overrightarrow{x} = k_1 \overrightarrow{a_1} + k_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + k_n \overrightarrow{a_n}$$

je lineárnou kombináciou vektorov $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$

- Matice rovnakého typu - matice s rovnakým počtom riadkov a stĺpcov
- Submatica matice A - matica, ktorú dostaneme z matice A vynechaním niektorých riadkov alebo stĺpcov
- Štvorcová matica stupňa n - matica typu $n \times n$ (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)
- Riadkový vektor - matica typu $1 \times n$ (matica s jedným riadkom)
- Stĺpcový vektor - matica typu $n \times 1$ (matica s jedným stĺpcom)
- Nech $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ sú vektory a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sú konštanty, potom vektor

$$\overrightarrow{x} = k_1 \overrightarrow{a_1} + k_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + k_n \overrightarrow{a_n}$$

je lineárnou kombináciou vektorov $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$

- Matice rovnakého typu - matice s rovnakým počtom riadkov a stĺpcov
- Submatica matice A - matica, ktorú dostaneme z matice A vynechaním niektorých riadkov alebo stĺpcov
- Štvorcová matica stupňa n - matica typu $n \times n$ (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)
- Riadkový vektor - matica typu $1 \times n$ (matica s jedným riadkom)
- Stĺpcový vektor - matica typu $n \times 1$ (matica s jedným stĺpcom)
- Nech $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ sú vektory a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sú konštanty, potom vektor

$$\overrightarrow{x} = k_1 \overrightarrow{a_1} + k_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + k_n \overrightarrow{a_n}$$

je lineárnou kombináciou vektorov $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$

- Nulová matica - matica, ktorá má všetky prvky rovné nule
- Diagonálna matica - štvorcová matica, ktorej prvky mimo hlavnej diagonály sú rovné nule
- Jednotková matica - štvorcová diagonálna matica, ktorej prvky na hlavnej diagonále sú jednotky, ozn. E alebo I
- Symetrická matica - štvorcová matica symetrická podľa hlavnej diagonály $(a_{ij} = a_{ji})$
- Transponovaná matica k matici $A = (a_{ij})$ - matica $A^T = (a_{ji})$
- Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule
- Lichobežníková matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly.

- Nulová matica - matica, ktorá má všetky prvky rovné nule
- Diagonálna matica - štvorcová matica, ktorej prvky mimo hlavnej diagonály sú rovné nule
- Jednotková matica - štvorcová diagonálna matica, ktorej prvky na hlavnej diagonále sú jednotky, ozn. E alebo I
- Symetrická matica - štvorcová matica symetrická podľa hlavnej diagonály $(a_{ij} = a_{ji})$
- Transponovaná matica k matici $A = (a_{ij})$ - matica $A^T = (a_{ji})$
- Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule
- Lichobežníková matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly.

- Nulová matica - matica, ktorá má všetky prvky rovné nule
- Diagonálna matica - štvorcová matica, ktorej prvky mimo hlavnej diagonály sú rovné nule
- Jednotková matica - štvorcová diagonálna matica, ktorej prvky na hlavnej diagonále sú jednotky, ozn. E alebo I
- Symetrická matica - štvorcová matica symetrická podľa hlavnej diagonály $(a_{ij} = a_{ji})$
- Transponovaná matica k matici $A = (a_{ij})$ - matica $A^T = (a_{ji})$
- Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule
- Lichobežníková matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly.

- Nulová matica - matica, ktorá má všetky prvky rovné nule
- Diagonálna matica - štvorcová matica, ktorej prvky mimo hlavnej diagonály sú rovné nule
- Jednotková matica - štvorcová diagonálna matica, ktorej prvky na hlavnej diagonále sú jednotky, ozn. E alebo I
- Symetrická matica - štvorcová matica symetrická podľa hlavnej diagonály $(a_{ij} = a_{ji})$
- Transponovaná matica k matici $A = (a_{ij})$ - matica $A^T = (a_{ji})$
- Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule
- Lichobežníková matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly.

- Nulová matica - matica, ktorá má všetky prvky rovné nule
- Diagonálna matica - štvorcová matica, ktorej prvky mimo hlavnej diagonály sú rovné nule
- Jednotková matica - štvorcová diagonálna matica, ktorej prvky na hlavnej diagonále sú jednotky, ozn. E alebo I
- Symetrická matica - štvorcová matica symetrická podľa hlavnej diagonály $(a_{ij} = a_{ji})$
- Transponovaná matica k matici $A = (a_{ij})$ - matica $A^T = (a_{ji})$
- Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule
- Lichobežníková matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly.

- Nulová matica - matica, ktorá má všetky prvky rovné nule
- Diagonálna matica - štvorcová matica, ktorej prvky mimo hlavnej diagonály sú rovné nule
- Jednotková matica - štvorcová diagonálna matica, ktorej prvky na hlavnej diagonále sú jednotky, ozn. E alebo I
- Symetrická matica - štvorcová matica symetrická podľa hlavnej diagonály $(a_{ij} = a_{ji})$
- Transponovaná matica k matici $A = (a_{ij})$ - matica $A^T = (a_{ji})$
- Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule
- Lichobežníková matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly.

- Nulová matica - matica, ktorá má všetky prvky rovné nule
- Diagonálna matica - štvorcová matica, ktorej prvky mimo hlavnej diagonály sú rovné nule
- Jednotková matica - štvorcová diagonálna matica, ktorej prvky na hlavnej diagonále sú jednotky, ozn. E alebo I
- Symetrická matica - štvorcová matica symetrická podľa hlavnej diagonály $(a_{ij} = a_{ji})$
- Transponovaná matica k matici $A = (a_{ij})$ - matica $A^T = (a_{ji})$
- Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule
- Lichobežníková matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly.

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. *Súčtom matíc* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *typu* $m \times n$ *nazývame maticu* $C = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$, *pre ktorú platí*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
Skrátené označenie $C = A + B$

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$ *a* k *je konštanta.* k*-násobkom matice* $A = (a_{ij})$ *typu* $m \times n$ *nazývame maticu* $C = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$, *pre ktorú platí*

$$c_{ij} = k\, a_{ij},$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
Skrátené označenie $C = k\,.\,A$

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$*. Súčtom matíc* $A = (a_{ij})$*,* $B = (b_{ij})$ *typu* $m \times n$ *nazývame maticu* $C = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$*, pre ktorú platí*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$*,* $j = 1, 2, \ldots, n$*.*
Skrátené označenie $C = A + B$

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$ *a* k *je konštanta.* k*-násobkom matice* $A = (a_{ij})$ *typu* $m \times n$ *nazývame maticu* $C = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$*, pre ktorú platí*

$$c_{ij} = k\, a_{ij},$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$*,* $j = 1, 2, \ldots, n$*.*
Skrátené označenie $C = k \,.\, A$

Definícia

Nech $m, n, r \in \mathbb{N}$. Súčinom matíc $A = (a_{ij})$ typu $m \times r$ a matice $B = (b_{ij})$ typu $r \times n$ nazývame maticu $C = (c_{ij})$ typu $m \times n$, pre ktorú platí

$$c_{ij} = a_{i1} \,.\, b_{1j} + a_{i2} \,.\, b_{2j} + \ldots + a_{ir} \,.\, b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \,.\, b_{kj},$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
Skrátené označenie $C = A \,.\, B$

Ekvivalentné matice

Ekvivalentné riadkové (stĺpcové) úpravy matice:

1. zmena poradia riadkov (stĺpcov),
2. vynásobenie riadku (stĺpca) nenulovou konštantou,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k niektorému riadku (stĺpcu).

Definícia

Dve matice A a B budeme nazývať riadkovo (stĺpcovo) ekvivalentné, ak sa jedna z matíc dá upraviť na druhú pomocou ekvivalentných riadkových (stĺpcových) úprav.
Označenie $A \sim B$.

Ekvivalentné riadkové (stĺpcové) úpravy matice:

1. zmena poradia riadkov (stĺpcov),
2. vynásobenie riadku (stĺpca) nenulovou konštantou,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k niektorému riadku (stĺpcu).

Definícia

Dve matice A a B budeme nazývať riadkovo (stĺpcovo) ekvivalentné, ak sa jedna z matíc dá upraviť na druhú pomocou ekvivalentných riadkových (stĺpcových) úprav.
Označenie $A \sim B$.

Definícia

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Hodnosť matice A typu $m \times n$ je počet nenulových riadkov matice A upravenej na trojuholníkový resp. lichobežníkový tvar.
Označenie $h(A)$.

Definícia

Sústavu

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned}$$

nazývame sústava lineárnych algebraických rovníc.
Čísla $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ *nazývame koeficienty sústavy,*
$x_1, \ldots, x_n$ *sú neznáme,*
$b_1, \ldots, b_m$ *sú pravé strany rovníc.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Skrátené označenie $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, kde A nazývame matica sústavy.

Maticu

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazývame rozšírená matica sústavy.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Skrátené označenie $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, kde A nazývame matica sústavy.

Maticu

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazývame rozšírená matica sústavy.

Veta (Frobeniova veta)

Sústava

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned}$$

má riešenie práve vtedy, ak $h(A) = h(A')$.

V tom prípade

a) *Ak $h(A) = n$, tak daná sústava má práve jedno riešenie.*

b) *Ak $h(A) < n$, tak daná sústava má nekonečne veľa riešení.*

Pozn: Ak $h(A) \neq h(A')$, tak daná sústava nemá riešenie.

1. Prepíšeme sústavu lineárnych rovníc do tvaru rozšírenej matice.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

2. Pomocou postupných ekvivalentných úprav tejto matice upravíme maticu na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.
3. Na základe Frobeniovej vety urobíme záver o počte riešení danej sústavy.
4. Určíme riešenie danej sústavy.

1. Prepíšeme sústavu lineárnych rovníc do tvaru rozšírenej matice.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

2. Pomocou postupných ekvivalentných úprav tejto matice upravíme maticu na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.
3. Na základe Frobeniovej vety urobíme záver o počte riešení danej sústavy.
4. Určíme riešenie danej sústavy.

1. Prepíšeme sústavu lineárnych rovníc do tvaru rozšírenej matice.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

2. Pomocou postupných ekvivalentných úprav tejto matice upravíme maticu na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.
3. Na základe Frobeniovej vety urobíme záver o počte riešení danej sústavy.
4. Určíme riešenie danej sústavy.

1. Prepíšeme sústavu lineárnych rovníc do tvaru rozšírenej matice.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

2. Pomocou postupných ekvivalentných úprav tejto matice upravíme maticu na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.
3. Na základe Frobeniovej vety urobíme záver o počte riešení danej sústavy.
4. Určíme riešenie danej sústavy.