ČASOVÉ RADY

Potreba prognózovania

Potreba prognózovania má logické zdôvodnenie. Rastúca zložitosť prostredia, v ktorom musí organizácia fungovať a prosperovať, vyvoláva spolu s meniacimi sa požiadavkami zákazníkov potrebu vedieť, ako sa budú vyvíjať kľúčové premenné, na ktorých závisí stratégia rozvoja a efektívnosť podnikania.

Zmyslom prognózovania je predovšetkým zníženie neurčitosti znalosti o budúcnosti. Manažéri sú presvedčení o tom, že používanie prognostických metód a techník im poskytne dodatočné informácie, ktoré im umožnia posúdiť alternatívne možnosti v kontexte s budúcimi podmienkami a vyhodnotiť budúce dôsledky súčasných rozhodnutí.

- Aké budú dôsledky toho, ak nezmení firma svoju doterajšiu, napríklad cenovú politiku?
- Čo sa stane, ak firma zvýši ceny o päť alebo desať percent?
- Bude nemocnica schopná poskytovať dostatočnú starostlivosť so súčasným personálom s ohľadom na očakávané demografické zmeny?
- Ako sa bude v najbližších rokoch vyvíjať štruktúra lekárskej starostlivosti?
- Ako sa bude v konkrétnom čase vyvíjať spotreba elektrickej energie?
- Aký bude vývoj kurzu niektorej meny?
- Aký bude prietok riek?
- Ako odhadneme práceneschopnosť zamestnancov?

Je dôležité uvedomiť si význam prognózovania v súvislosti s rozhodovacím procesom. V centre tohto procesu nájdeme rozhodnutie, ktoré musí manažér uskutočňovať. Tieto rozhodnutia sú bezprostredne ovplyvňované zvolenou stratégiou organizácie zameranou na dosiahnutie vytýčených cieľov a s ohľadom na jej celkové zameranie a priority. Rozhodnutie je transformované do plánovaného priebehu jeho realizácie zameranej na oblasti týkajúce sa produktov alebo služieb vrátane dôležitých sprievodných javov.

Na rozhodnutie majú značný vplyv aj informácie získané pomocou prognostických metód. Tieto metódy poskytujúce informácie o budúcich situáciách sú pre manažérov nevyhnutné a spolu s ďalšími faktormi významne ovplyvňujú ich rozhodovanie.

Prognózované informácie ovplyvňujú samotnú prípravu stratégie organizácie. Organizácie potrebujú mať k dispozícii účinný monitorovací systém umožňujúci sledovať skutočný priebeh realizácie rozhodnutí a porovnávať ho s plánovaným priebehom. V prípade zistenia rozdielov medzi plánovaným a skutočným priebehom realizácie rozhodnutia, je potrebné použiť spätnú informáciu pre korigovanie prognostického postupu. Bez ohľadu na to, či sú tieto rozdiely malé alebo veľké a bez ohľadu na to, čo je ich príčinou, je potrebné stanoviť nové predpovede a začať odnova celý cyklus. Ako uvidíme neskôr, neexistuje ideálny prognostický prístup použiteľný pre všetky organizácie.

Prístupy k prognózovaniu

Pre prognózovanie je možné použiť celý rad alternatívnych metód a záleží iba na manažérovi, ktorú z nich pre daný rozhodovací proces zvolí.

Alternatívne prístupy k prognózovaniu

Bude užitočné, ak si ukážeme, aké alternatívne prístupy je možné pre prognózovanie použiť. Tieto prístupy je možné rozdeľovať podľa toho, či sa jedná o kvalitatívny, či kvantitatívny prístup. Toto rozdelenie môže byť v niektorých prípadoch zavádzajúce, pretože niektoré kvalitatívne prístupy produkujú numerické výsledky a opačne, niektoré kvantitatívne prístupy vychádzajú zo subjektívnych kvalitatívnych predpokladov.

Kvalitatívne prístupy

Do tejto oblasti patrí celý rad metód. Pretože sa opierajú o subjektívne oceňovania, označujú sa často ako metódy odhadové.

Osobné hodnotenie

Tento prístup sa pravdepodobne v praxi používa najčastejšie napriek tomu, že žiadny pádny argument nepotvrdzuje jeho spoľahlivosť. Prakticky sa jedná o to, že jednotlivec manažér predvída subjektívne budúcnosť. V niektorých prípadoch môžu byť tieto prognózy pomerne spoľahlivé. To sa týka najmä prípadov, keď sa pýtame zamestnancov „z bojovej línie" na ich názor na vývoj budúcej situácie, či bude budúci mesiac potrebné opraviť výrobné zariadenie, či vystačia zásoby tovaru do konca týždňa, či súčasné vybavenie centrálneho laboratória bude dostatočné aj v budúcom mesiaci.

V dôsledku tohto prístupu ku prognózovaniu môže vzniknúť viacero problémov. Hlavný problém osobného oceňovania spočíva v tom, že závisí predovšetkým na vedomostiach a skúsenostiach jednotlivcov, ktoré môžu byť podstatne rozdielne a ktoré sú do určitej miery ovplyvňované osobnými skúsenosťami.

Panelová zhoda

Ak chceme využiť osobné vedomosti a skúsenosti a pritom znížiť vplyv osobných postojov a predsudkov, je možné pre predpoveď vývoja použiť premennú metódu panelovej zhody. Tento prístup predstavuje vytváranie kolektívu jednotlivcov, ktorí majú vedomosti a potrebné informácie o skúmanej oblasti a prostredníctvom vzájomnej výmeny názorov dospejú k určitej zhode, ktorá by mala odpovedať očakávanému vývoju. Tento prístup je vhodný predovšetkým v tých prípadoch, keď nemá organizácia k dispozícii dostatočné množstvo údajov, napríklad ak uvažuje o zavedení úplne nového výrobku na trh a nemá o ňom dostatok potrebných informácií. Problém tohto prístupu spočíva v tom, ako je usmerňovaná dynamika skupinového myslenia a ako sa dosahuje konsenzus.

Metóda Delphi

Metóda Delphi sa do značnej miery podobá predchádzajúcemu prístupu a to najmä preto, že využíva kolektívne skúsenosti a kolektívny úsudok skupiny expertov. Rozdiel je v spôsobe dosahovania zhody. Pri tejto metóde členovia expertného tímu neuvažujú spoločne a dokonca ani nevedia, kto je členom tímu. Každý expert dostane na vyplnenie dotazník, ktorý sa vzťahuje na skúmanú oblasť. Odpovede uvedené v jednotlivých dotazníkoch sú sumarizované a distribuované naspäť všetkým členom tímu. Každý člen tímu tak dostáva možnosť, aby mohol revidovať, korigovať svoje názory vzhľadom na názor skupiny. Tento postup sa opakuje tak dlho, pokiaľ sa nedosiahne konsenzus alebo pokiaľ nie je realizovaný vopred dohodnutý počet iterácii. Najčastejšie sa táto metóda používa pre stanovenie možných hraníc predpokladaného vývoja.

Historické porovnanie

Do určitej miery je možné určovať prognózu nejakej premennej pomocou priebehu vývoja podobnej veličiny v minulosti.

Výskum trhu

Posledný kvalitatívny prístup sa opiera o výskum trhu. Je potrebné však poznamenať, že tento výskum môže poskytnúť cenné informácie pre predpoveď budúceho vývoja a môžeme ich využiť prakticky v súvislosti so všetkými prognostickými metódami.

Kvantitatívne prístupy

Kvantitatívne prístupy je možné rozdeliť do dvoch základných skupín:

- Projektovanie trendov.
- Kauzálne modely.

Mnohé ekonomické informácie poznáme často vo forme chronologicky usporiadaných dát. Hovoríme, že tieto údaje sú uvedené vo forme časových radov, ak tvoria postupnosť porovnateľných pozorovaní usporiadaných vzhľadom na čas. Typickými príkladmi časových radov sú napríklad počty vyrobených výrobkov (v rovnakých dlhých časových intervaloch).

Časový rad je chronologicky usporiadaná postupnosť vecne, priestorovo a časovo porovnateľných hodnôt y_t - pozorovaní zaznamenaných v čase $t = 1, 2, \dots, N$.

Priestorové vymedzenie sa uskutočňuje stanovením územných hraníc, v rámci ktorých sa zisťujú hodnoty ukazovateľa.

Časové vymedzenie znamená, že hodnoty premennej alebo ekonomického ukazovateľa sa zisťujú za rovnako dlhé obdobie.

Vecné vymedzenie je najdôležitejšie a najkomplikovanejšie. Ide o to, aby bol ukazovateľ jednoznačne definovaný spolu s mernou jednotkou.

Delenie časových radov

Časové rady (ČR) delíme podľa:

periodicity sledovania na

- dlhodobé ČR - pozorovania sú uskutočňované za ročné alebo dlhšie obdobie (ročné hodnoty konečnej spotreby domácnosti za roky 2000 až 2008),
- krátkodobé ČR - pozorovania sú uskutočňované za obdobie kratšie ako rok, teda za štvrťroky, mesiace, týždne (hodnoty počtu evidovaných nezamestnaných k poslednému dňu mesiaca za obdobie január 2005 až december 2008),

rozhodujúceho časového hľadiska na

- okamihové ČR - sú zostavené z hodnôt, ktoré sa vzťahujú na určitý okamih (stav zásob ku koncu mesiaca),
- intervalové ČR - pozorovania sú zaznamenávané priebežne počas určitého intervalu, ich hodnota závisí od dĺžky časového intervalu (počet požiarov za rok),

druhu sledovaných ukazovateľov na

- ČR primárnych (prvotných) ukazovateľov: zisťujú, merajú sa priamo (počet dokončených bytov za rok),
- ČR sekundárnych (odvodených) ukazovateľov, ktoré môžu vznikať viacerými spôsobmi:
  - ako funkcia rôznych primárnych ukazovateľov (zisk ako rozdiel výnosov a nákladov),
  - ako funkcia rôznych hodnôt toho istého primárneho ukazovateľa (ukazovatele štruktúry),
  - ako funkcia dvoch alebo viacerých ukazovateľov (mesačná miera evidovanej nezamestnanosti),

spôsobu vyjadrenia údajov na

- ČR naturálnych ukazovateľov,
- ČR peňažných ukazovateľov.

Pod finančným časovým radom rozumieme dlhodobé časové záznamy súvisiace s najrozličnejšími cenami a transakciami na finančnom trhu. Súbor dát je chronologicky usporiadaný s časovou periódou obyčajne týždennou, mesačnou (mesačná miera nezamestnanosti za posledných 20 mesiacov), štvrťročnou alebo ročnou (údaje o spotrebe poľnohospodárskych produktov za posledných 10 rokov a pod.).

V ekonomike je analýza časových radov jednou z najdôležitejších metód pri analýze ekonomických dát.

Cieľom analýzy časových dát je konštrukcia vhodného modelu, pomocou ktorého manažment môže na základe získaných dát z minulosti robiť predpovede na určité obdobia do budúcnosti. Teda vytvorený model časového radu nám umožňuje simulovať časové rady takým spôsobom, že medzi hodnotami získanými napríklad na finančnom trhu a hodnotami nagenerovanými pomocou modelu nie je podstatný rozdiel.

Model by mal mať tieto vlastnosti:

- má byť konzistentný s minulými hodnotami,
- mal by umožniť overenie hypotéz, ktoré sú s jeho tvarom spojené,
- mal by byť čo najjednoduchší (určený čo najmenším počtom parametrov),
- mal by umožniť konštrukciu predpovedí budúcich hodnôt,
- mal by umožniť racionálne rozhodovanie v konkrétnych situáciách.

Aby sme mohli nájsť správny model časového radu, musí byť časový rad správne zostavený.

Vyžadujeme, aby:

- dáta boli zoradené chronologicky (ak dĺžka medzi jednotlivými časovými údajmi nie je konštantná, tak je potrebné časový rad pretransformovať pomocou váženého chronologického priemeru),
- dáta boli porovnateľné (dané za rovnaké časové obdobie, rovnako veľké územné celky, v rovnakých merných jednotkách, a pod.). Pre porovnanie mesačných údajov uvažujeme

napríklad štandardný 30 dňový mesiac. Súčet mesačných údajov za rok potom odpovedá 360 dňom.

Časové rady môžeme rozdeliť na

- časové rady nepretržite sa vyskytujúcich javov, t.j. takých, ktoré sa trvalo vyskytujú (čistota ovzdušia, zásoby firmy, ceny tovarov, a pod.),
- časové rady postupne vytváraných javov (tržby, produkcia, spotreba obyvateľstva a pod.),
- časové rady prechodne sa vyskytujúcich javov (úroda obilia, ročné odmeny pracovníkov a pod.),
- časové rady spojité (informácie sú zaznamenávané nepretržite),
- diskrétne (pozorovania sú známe iba v určitých bodoch):
    - pravidelné, s rovnakou frekvenciou:
        - krátkodobé (napríklad štvrťročné alebo kratšie),
        - dlhodobé (napríklad ročné a dlhodobejšie údaje),
    - nepravidelné, ak sa frekvencia pozorovaní mení,
- časové rady vytvárané podľa typu veličín (okamžité veličiny, intervalové veličiny odvodené veličiny).

Agregácia hodnôt časových radov

Mnohé ukazovatele sa sledujú denne, mesačne alebo štvrťročne. Z časových radov denných hodnôt sa vytvárajú časové rady mesačných hodnôt, z mesačných hodnôt rady štvrťročné a pod. Inak povedané, časové rady sa zhŕňajú – agregujú. Hodnoty časových radov sa agregujú za dlhšie obdobia súčtom, aritmetickým alebo chronologickým priemerom.

Agregácia intervalových radov sa uskutočňuje súčtom alebo aritmetickým priemerom.

$$\sum_{t=1}^{n} y_t = y_1 + y_2 + \ldots + y_n,$$

pričom n je počet intervalov daného časového radu, y_t sú zaznamenané hodnoty časového radu.
Priemerná hodnota za jeden časový interval je

$$y = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}$$

Agregácia okamihových radov sa vytvára chronologickým priemerom.

Ak je medzi susednými pozorovaniami okamihového časového radu rovnaká časová vzdialenosť, hovoríme o *jednoduchom chronologickom priemere*

$$\bar{y}_{CH} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n-1}$$

Ak je medzi susednými pozorovaniami okamihového časového radu rôzna časová vzdialenosť, hovoríme o *váženom chronologickom priemere*

$$\bar{y}_{CH} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2}.d_2 + \frac{y_2 + y_3}{2}d_3 + ... + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}d_n}{d_2 + d_3 + ...d_n},$$

kde $d_i\,(i = 2,3,\ldots,n)$ je vzdialenosť medzi susednými časovými intervalmi okamihového časového radu.

Kalendárna úprava

Ako už bolo uvedené, časové vymedzenie znamená, že hodnoty premennej alebo ekonomického ukazovateľa sa zisťujú za rovnako dlhé obdobie, resp. medzi skúmaním sú rovnaké časové vzdialenosti.

Niekedy sa vyskytujú prípady, kedy hodnoty časového radu nie sú porovnateľné, napr. pre rozdielny počet dní v jednotlivých mesiacoch, resp. pre rozdielny počet pracovných dní v mesiacoch s rovnakým počtom kalendárnych dní.

Aby sa zaručila porovnateľnosť údajov, je potrebné prepočítať hodnoty ukazovateľov každého zo sledovaných období na priemerný časový interval - urobiť očisťovanie časových radov od kalendárnych zmien - *kalendárna úprava*.

Kalendárnou úpravou očistenú hodnotu y_t' v čase t vypočítame takto:

$$y_t' = y_t \frac{\bar{p}_t}{p_t}$$

y_t' - očistená hodnota ukazovateľa v období *t*,

y_t - skutočná nameraná hodnota ukazovateľa v období *t*,

p_t - počet kalendárnych, pracovných dní,

$\bar{p}_t$ - priemerný počet kalendárnych, pracovných dní.

Mesačné hodnoty časového radu sa očisťujú od rôzneho počtu kalendárnych dní podľa toho, či sa za základ považuje:

- štandardný mesiac s dĺžkou 365/12=30,4167 dní, tzn. údaj každého mesiaca sa vynásobí číslom 30,4167 a vydelí sa počtom kalendárnych dní v mesiaci za predpokladu, že rok má 365 dní,
- štandardný 30-dňový mesiac, tzn. údaj každého mesiaca sa vynásobí 30 a vydelí sa počtom kalendárnych dní v mesiaci za predpokladu, že rok má 360 dní.

Analýza časových radov

Špecifické problémy analýzy časových radov

- problémy s voľbou časových bodov pozorovania (zhustený počet pozorovaní znamená väčšiu náročnosť pri výpočtoch, pri „riedkych pozorovaniach" nám naopak môžu uniknúť charakteristické znaky daného časového radu, napríklad tzv. sezónne vplyvy),
- problémy s kalendárom (rôzna dĺžka kalendárnych mesiacov, rôzny počet pracovných dní v mesiaci a pod.),
- nezrovnalosti jednotlivých pozorovaní (dáta v prvom mesiaci sú z 10 podnikov, v druhom mesiaci z 20 podnikov, atď.),

- problémy s dĺžkou časových radov (niektoré metódy analýzy časových radov vyžadujú určitú minimálnu dĺžku časového radu, na druhej strane ak uvažujeme obdobie dlhšie, môže sa stať, že sa podstatne zmení charakteristika modelu).

Čo je dôležité pri voľbe analýzy časového radu

- účel analýzy (ako využijeme získané výsledky v praxi, aký bude ekonomický prínos, aké prostriedky na spracovanie dát máme k dispozícii, predpovedanie budúceho vývoja),
- typ časového radu (neexistuje univerzálny model),
- skúsenosť spracovateľa, dostupná výpočtová technika a vhodné programové vybavenie.

Priama štatistická analýza časových radov zostavených z absolútnych veličín (intervalové, okamihové) je veľmi obtiažná, preto sa obyčajne analyzujú **časové rady z tzv. odvodených veličín** (kĺzavé priemery, koeficienty tempa rastu, diferencie, sezónne zložky a pod.).

Pri analýze získaných absolútnych veličín často využívame tzv. kumulované súčty a kĺzavé súčty.

Kĺzavé súčty nám napríklad hovoria, ako sa menila produkcia, príjmy atď. v jednotlivých mesiacoch i - tého roku v porovnaní s výsledkami v roku $i-1$.

Kumulované súčty poukazujú na rovnomernosť resp. nerovnomernosť vývoja napríklad produkcie, príjmov a pod. Čím viac sa približujú k priamke, tým skôr môžeme predpokladať, rovnomernosť prírastkov.

Charakteristiky časového radu

Na vlastnú analýzu časového radu môžeme využiť niektoré z elementárnych charakteristík časového radu. Vývoj intervalovej alebo okamihovej premennej y sa posudzuje medzi dvoma po sebe nasledujúcimi obdobiami $t-1$ a $t = 2, 3, \dots, N$.

Celkové zmeny javu v čase, za predpokladu zhodnosti dĺžky časových intervalov, sa vyjadrujú elementárnymi charakteristikami:

absolútne: absolútny prírastok, zrýchlenie.
relatívne: koeficient rastu, koeficient prírastku, tempo rastu, tempo prírastku.

- *Absolútny prírastok (úbytok)* vyjadruje o koľko sa zvýšila alebo znížila hodnota y_t časového radu v období t oproti hodnote y_{t-1} z obdobia $t-1$.

$$\Delta_t = y_t - y_{t-1} \qquad \text{absolútna diferencia prvého rádu}$$

- *Absolútna diferencia druhého radu* vyjadruje zrýchlenie alebo spomalenie prírastku.

$$\Delta_t^2 = \Delta_t - \Delta_{t-1}$$

- *Koeficient rastu (poklesu) - reťazový index* vyjadruje koľkonásobne sa hodnota y_t zvýšila $k > 1$ alebo znížila $k < 1$ oproti hodnote y_{t-1}.

$$k_t = \frac{y_t}{y_{t-1}}$$

- *Tempo rastu* je koeficient rastu vyjadrený v percentách, vyjadruje o koľko percent vzrástla poklesla hodnota y_t oproti hodnote y_{t-1}.

$$T_t = \frac{y_t}{y_{t-1}}.100\%$$

- *Koeficient prírastku (relatívny prírastok)* je definovaný ako podiel absolútneho prírastku k hodnote y_{t-1}.

$$k_{\Delta t} = \frac{\Delta_t}{y_{t-1}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = k_t - 1$$

- *Tempo prírastku* je koeficient prírastku vyjadrený v percentách, udáva o koľko percent vzrástla (poklesla) hodnota sledovanej premennej v čase *t* oproti hodnote v čase *t-1*.

$$T_{\Delta t} = k_{\Delta t}.100\% = \frac{\Delta_t}{y_{t-1}}.100\% = T_t - 100\%$$

- *Priemerný absolútny prírastok* sa vypočíta ako aritmetický priemer prírastkov v jednotlivých rokoch.

- *Priemerný koeficient rastu* sa počíta ako geometrický priemer jednotlivých koeficientov rastu.

$$k = \sqrt[n-1]{k_2 \cdot k_3 \ldots k_n}\ .$$

Bázické a reťazové indexy – charakteristiky trendu a zmien v časových radoch

Najjednoduchším spôsobom analýzy časových radov sú časové rady bázických a reťazových indexov. Majme časový rad hodnôt $y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots, y_N$ premennej Y v časových hodnotách $t = 1, 2, \ldots, t, \ldots, N$.

Bázický index v čase t vyjadruje relatívnu zmenu hodnoty y_t oproti hodnote y_0, ktorú považujeme za základ porovnávania. Časový rad bázických indexov $IB_1, IB_2, \ldots, IB_t, \ldots, IB_N$ určíme tak, že každú hodnotu časového radu $y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots, y_N$ dáme do pomeru s bázickou hodnotou y_0 a vyjadríme v percentách. Teda

$$IB_t = \frac{y_t}{y_0} \times 100\%\ ,\ t = 1,2,\ldots,t,\ldots,N\ .$$

Pretože všetky hodnoty bázického časového radu $IB_1, IB_2, \ldots, IB_t, \ldots, IB_N$ sa porovnávajú k rovnakému základu, časový rad bázických indexov charakterizuje celkový trend vývoja ekonomickej premennej vzhľadom na základné obdobie.

Postupné zmeny vo vývoji ekonomickej premennej v časovom rade $y_1, y_2, \ldots, y_N$ charakterizujeme *reťazovými indexmi*

$$IR_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} \times 100\%,\ t = 1,2,\ldots,t,\ldots,N\ ,$$

ktoré nazývame aj tempami rastu (poklesu).

Zložky časových radov

Časové rady vznikajú ako dôsledok pôsobenia tak podstatných, ako aj nepodstatných činiteľov. Údaje v časových radoch analyzujeme deskriptívne a induktívne.

Grafickým znázornením časového radu môžeme sledovať jeho tvar a rozličné výkyvy (spojnicový graf – polygón, graf sezónnych hodnôt, škatuľkový graf,…). Tieto výkyvy môžu mať dlhodobý alebo krátkodobý charakter, dlhodobé zmeny označujeme ako trendy a cykly, krátkodobé zmeny ako kolísanie, resp. fluktuácia.

Deskriptívna analýza využíva grafické techniky zobrazenia časových radov, pomocou ktorých hľadá určité pravidelnosti vo vývoji skúmaných dát. Na základe deskriptívnej analýzy časového radu ekonomickej premennej Y hľadáme odpoveď na otázky, či pozorované pravidelnosti vývoja skúmanej premennej možno modelovať pomocou matematicko-štatistických modelov a či by sa takýto model mohol použiť ako prognostický model na určenie budúceho vývoja (napríklad mier nezamestnanosti, plánovanie zásob, príprava výroby, atď.).

Prognózovanie ekonomických premenných a odhad presnosti prognóz rieši induktívna analýza časových radov.

Klasický model vychádza z dekompozície časových radov na štyri zložky, ktoré obyčajne označujeme ako:

1. ***Vývojové (trendové),*** budeme ich označovať ***Tr*** (secular trend), ktoré pôsobia neustále, dlhodobo a určujú hlavný smer vývoja - trend časového radu (dlhodobá tendencia vo vývoji hodnôt analyzovaných ukazovateľov). Hodnoty časového radu rastú, klesajú alebo stagnujú.

2. ***Periodické*** môžu striedavo pôsobiť na rast alebo pokles hodnôt v časovom rade. Uvažujeme:
   - **sezónnu zložku** (seasonal component) ***Sz***, ktorá popisuje periodicky sa opakujúce zmeny v časovom rade odohrávajúce sa v priebehu jedného kalendárneho roka alebo sezóny (sezónne výkyvy sa pravidelne opakujú v určitých mesiacoch alebo štvrťrokoch, ako dôsledok sezónnych vplyvov napríklad striedanie ročných období, počasia, prázdniny, dovolenky...),
   - **cyklickú zložku** (cyclical component) ***C***, ktorá popisuje periodické zmeny dlhšie ako jeden rok (zmena výrobného cyklu, móda, opakujúce sa obdobia v poľnohospodárstve). Táto zložka je ťažko identifikovateľná. Dĺžka jednotlivých cyklov je spravidla nekonštantná, napríklad rast a potom pokles ekonomickej aktivity sa pohybuje od 5 do 7 rokov.

3. ***Náhodné*** (reziduálne zložky), ktoré pôsobia náhodnými fluktuáciami v priebehu časového radu (povodne, štrajky, vojnové konflikty,...), ale aj chybami, ktorých sa dopustil štatistik pri spracovaní dát (chyby meraní, zaokrúhľovanie, editovanie, drobné nárazy a pod.). Túto zložku časového radu budeme označovať ***I*** (irregural component).

Box-Jenkinsova metodológia považuje za základný prvok konštrukcie modelu časového radu náhodnú zložku, ktorá môže byť tvorená korelovanými náhodnými veličinami. Predpokladom aplikácie tohto postupu je dlhší časový rad pozostávajúci z približne 40 pozorovaní. Základnými modelovými schémami sú tzv. autoregresné procesy (AR - procesy) a procesy kĺzavých súčtov (MA - procesy).

Metódy dekompozície

V časových radoch využívame predpoklad, že minulé správanie môže predpovedať budúci vývoj pozorovanej veličiny. Prognózovanie je vždy spojené s určitým stupňom chyby.

Dekompozícia časového radu znamená jeho rozklad na základné komponenty a ich následnú analýzu. Model dekompozície ČR: Tr_t - trend, trendová zložka, Sz_t - sezónnosť, sezónna zložka, Cz_t - cyklickosť, cyklická zložka, I_t - chyba, náhodná nepravidelná zložka. Výskyt všetkých štyroch zložiek v každom časovom rade nie je nutný a závisí od charakteru sledovaného javu.

Aditívny rozklad

$$y_t = Tr_t + Sz_t + Cz_t + I_t = \hat{y}_t + I_t,$$

$\hat{y}_t$ - teoretická hodnota

- predpokladáme vzájomnú nezávislosť zložiek a ich vzájomný súčet,
- jednotlivé zložky sú uvažované v skutočných absolútnych hodnotách a sú merané v jednotkách radu y_t.

Multiplikatívny rozklad

$$y_t = Tr_t \cdot Sz_t \cdot Cz_t \cdot I_t$$

- predpokladáme vzájomnú závislosť zložiek a ich vzájomný súčin,
- väčšinou je trendová zložka meraná v jednotkách radu y_t a ostatné zložky sú uvažované v relatívnych hodnotách voči trendu a sú bezrozmerné.

Multiplikatívny rozklad môžeme upraviť na aditívny rozklad zlogaritmovaním:

$$\ln y_t = \ln Tr_t + \ln Sz_t + \ln Cz_t + \ln I_t.$$

Určenie trendu spočíva v nahradení časového radu pozorovaných hodnôt radom teoretických hodnôt, bez periodického a náhodného kĺzania. Teda časový rad „očistíme“ od náhodných a periodických vplyvov. Získaný rad teoretických hodnôt nazývame vyrovnaním (vyhladením) časového radu.

Ak máme graficky zobrazené pozorované hodnoty, vyrovnanie môžeme urobiť „od oka” tak, aby „čiara“ (ktorou nahradíme pozorované hodnoty) čo najlepšie vystihovala pôvodný priebeh. Táto metóda je zrejme informatívna. Často používané metódy vyrovnávania časových radov sú: mechanická (metóda kĺzavých priemerov) a analytická (metóda najmenších štvorcov).

Pri hľadaní najvhodnejšieho typu trendu vychádzame z predpokladaných vlastností trendovej funkcie, vyplývajúcich z teoretického rozboru. Pri výbere nám môže pomôcť grafické znázornenie časového radu. Okrem toho je možné využiť vhodné testy založené na jednoduchých charakteristikách časových radov (niektoré uvedieme v ďalších častiach).

Metóda kĺzavých priemerov

Pred analýzou časového radu je nevyhnutné očistiť hodnoty od sezónnych vplyvov, jedným zo spôsobov je vyrovnávanie časového radu pomocou kĺzavých priemerov. Podstata vyrovnávania časových radov metódou kĺzavých priemerov spočíva v tom, že postupnosť empirických pozorovaní nahradíme radom priemerov vypočítaných z týchto pozorovaní. Priemery sa robia postupne – kĺzavo zo skupiny údajov určeného rozsahu m – nepárne číslo. Princíp je založený na nahrádzaní príslušnej „kĺzavej" časti jediným číslom – priemerom. Vyrovnaním hodnôt časového radu pomocou metódy kĺzavých priemerov sa postupne vylúči náhodná zložka časového radu a dostaneme tak odhad trendovej zložky časového radu. Voľba dĺžky kĺzavej časti ovplyvňuje výsledok vyrovnávania nesmie byť ani nízka, ani veľká.

$$KP_t(m) = \frac{y_{t-(m-1)/2} + \ldots + y_t + \ldots + y_{t+(m-1)/2}}{m},$$

$$t = \frac{m-1}{2}+1,\ \frac{m-1}{2}+2, \ldots, n-\frac{m-1}{2}.$$

Poznámka Pri výpočte kĺzavých priemerov budeme používať jednoduchý priemer. Na predpoveď budúcich hodnôt sa používajú tiež tzv. vážené kĺzavé priemery

$$\bar{y} = \omega_1 y_t + \omega_2 y_{t-1} + \ldots + \omega_M y_{t+1-M},$$

kde ω_i sú isté váhy a M je počet období, ktoré uvažujeme pri výpočte priemeru (súčet váh je rovný jednej).

Nevýhodou metódy kĺzavých priemerov je, že takto vyrovnaný časový rad je „kratší". Ak označíme $m = 2p+1$, potom $p = (m-1)/2$ predstavuje počet prvých a posledných kĺzavých priemerov, ktoré nemožno v časovom rade dĺžky N vypočítať.

Časový rad kĺzavých priemerov premennej Y predstavuje jej trend. Miera očistenia časového radu od náhodnej alebo periodickej zložky závisí od dĺžky kĺzavých priemerov. Nízke hodnoty dĺžky kĺzavej časti m majú za následok, že vyrovnaný časový rad je síce dlhší, ale zároveň môže mať podobné výkyvy ako pôvodný rad. Ak je m veľké, rad vyrovnaných hodnôt je kratší a zvlášť na konci časového radu sa strácajú najaktuálnejšie hodnoty trendu skúmanej premennej, ktoré majú vplyv na prípravu prognóz. Vyrovnanie na konci časového radu môžeme urobiť pomocou poslednej hodnoty získanej pomocou tejto metódy. Pre lepšie vyrovnanie časového radu niekedy zopakujeme metódu kĺzavých priemerov (znovu aplikujeme uvedený postup na už vyrovnaný časový rad, ktorý je doplnený na začiatku a na konci radu).

Niektoré typy kĺzavých priemerov

Voľba dĺžky kĺzavých priemerov

Obyčajne dávame prednosť priemerom čo najmenšej dĺžky. Dĺžku volíme podľa požadovaného stupňa vyhladenia časového radu.

V neperiodických časových radoch sa najčastejšie používajú dĺžky 3, 5, 7. V časových radoch so sezónnou alebo cyklickou zložkou je dĺžka kĺzavých priemerov rovná perióde sezónnej alebo cyklickej zložky.

Centrované kĺzavé priemery

Ak chceme z časového radu vylúčiť sezónne vplyvy, potom v štvrťročných časových radoch volíme dĺžku kĺzavej časti $m = 4$ a pri mesačných časových radoch volíme $m = 12$. Pretože dĺžka kĺzavej časti je teraz párne číslo $m = 2p$, kĺzavé priemery priraďujeme postupne bodom $t = p+1, p+2, \ldots, n-p$. Pre $m = 4$ je $p = 3/2 = 1{,}5$.

Dostávame hodnoty medzi 2. a 3. štvrťrokom, medzi 3. a 4. štvrťrokom atď. To znamená, že, najskôr vypočítame aritmetický priemer z prvých 4 hodnôt a priemernú hodnotu priradíme „prostrednému poradiu 2,5“, ďalej vypočítame priemer z ďalších 4 hodnôt a priemernú hodnotu priradíme „prostrednému poradiu 3,5“.

Takto vypočítané (necentrované KP_t) kĺzavé priemery nie sú najvhodnejšie z hľadiska porovnania skutočných hodnôt radu s hodnotami kĺzavých priemerov a preto ich centrujeme, t.j. vypočítame postupne priemer z každých dvoch po sebe idúcich hodnôt necentrovaných kĺzavých priemerov, tzn. vypočítame priemer z takto vypočítaných hodnôt a priradíme ho tretiemu riadku, ktorý leží medzi 2,5-tym a 3,5-tym riadkom.

Napríklad pre $m = 4$ dostávame centrované kĺzavé priemery

$CKP_3(4) = (KP_{2,5} + KP_{3,5})/2$,

$CKP_4(4) = (KP_{3,5} + KP_{4,5})/2$, atď.

Pri riešení úloh môžeme použiť odvodené vzťahy, napr. pre $m = 4$:

$$\bar{y}_1' = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \quad \text{a} \quad \bar{y}_2' = \frac{y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{4} \quad \text{a teda} \quad \bar{y}_1 = \frac{y_1' + y_2'}{2}$$

$$\bar{y}_1 = \frac{\dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} + \dfrac{y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{4}}{2} = \frac{1}{8}\left(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5\right)$$

V zjednodušenom zápise dostaneme pre systém váh v tvare:

pre $m = 4$: $\frac{1}{8}[1,2,2,2,1]$

pre $m = 8$: $\frac{1}{16}[1,2,2,2,2,2,2,2,1]$,

pre $m = 12$: $\frac{1}{24}[1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1]$.

V prípade, že časový rad má periódu dĺžky $2m$, kĺzavý priemer má tvar

$$\frac{1}{4m}\left(y_{t-m} + 2 \cdot y_{t-m+1} + \ldots + 2 \cdot y_{t+m-1} + y_{t+m}\right).$$

Symetrické kĺzavé priemery

Ak predpokladáme kvadratický typ trendu, tak je výhodné použiť symetrické kĺzavé priemery druhého radu. Pre najčastejšie používané dĺžky kĺzavej časti je vhodné využiť zjednodušené vzťahy pre systém váh:

- pre kĺzavý priemer rozsahu 5 : $\frac{1}{35}(-3,12,17,12,-3)$,
- pre kĺzavý priemer rozsahu 7: $\frac{1}{21}(-2,3,6,7,6,3,-2)$,

- pre kĺzavý priemer rozsahu 9 $\frac{1}{231}(-21,14,39,54,59,54,39,14,-21)$.

Koncové asymetrické priemery

Vyrovnávaním časových radov pomocou kĺzavých priemerov pre nepárne m sa stráca prvých a posledných $\frac{m-1}{2}$ vyrovnaných hodnôt časového radu, pre párne m je to $\frac{m}{2}$ hodnôt. Ak predpokladáme lineárny trend, koncové hodnoty (je v nich obsiahnutých obyčajne najviac informácií pre budúci vývoj) môžeme odhadnúť pomocou koncových asymetrických kĺzavých priemerov prvého rádu. Tieto stratené hodnoty môžeme dopočítať pomocou vzťahov:

Pre $m=5$, $\bar{y}_n = \frac{1}{5}(3y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} - y_{n-4})$.

Pre $m=7$, $\bar{y}_n = \frac{1}{28}(13y_n + 10y_{n-1} + 7y_{n-2} + 4y_{n-3} + y_{n-4} - 2y_{n-5} - 5y_{n-6})$.

Koncové kĺzavé prírastky

Po vyrovnaní časového radu pomocou kĺzavých priemerov a dopočítaní stratených hodnôt pomocou asymetrických kĺzavých priemerov je možné dopočítať koncové kĺzavé prírastky. Na odhad predpovedí na nasledujúce obdobie využívame koncové kĺzavé prírastky prvého rádu:

Pre $m=5$, $\Delta y_{n+1} = \frac{1}{10}(2y_n + y_{n-1} - y_{n-3} - 2y_{n-4})$.

Pre $m=7$, $\Delta y_{n+1} = \frac{1}{28}(3y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} - y_{n-4} - 2y_{n-5} - 3y_{n-6})$.

Po vypočítaní koncových kĺzavých prírastkov je $y_{n+1} = y_n + \Delta y_{n+1}$. Je potrebné zvážiť efektívnosť takejto predpovede vzhľadom na iné možnosti predikcie budúcich hodnôt.

Je dôležité uvedomiť si, že použitím kĺzavých priemerov nemusíme dostať veľmi presné prognózy, ale tie v niektorých prípadoch môžu byť aj napriek tomu postačujúce. V malej prevádzke, kde na základe predaja určitého tovaru za posledné dni potrebuje majiteľ zhotoviť objednávku na primeraný počet výrobkov (pečivo, mlieko,...), môže byť odhad pomocou kĺzavých priemerov postačujúci vzhľadom na jednoduchosť, rýchlosť a nenákladnosť výpočtu.

Najčastejšie trendy

Tradičným spôsobom popisu trendu časového radu je jeho vyrovnanie pomocou vhodnej matematickej funkcie. Nech vzťah medzi závisle premennou Y a nezávislými premennými t_i je vyjadrený pomocou funkcie

$$Y = Y_t + \varepsilon, \quad \text{kde} \quad Y_t = f(t_1,\dots,t_n,a_0,\dots,a_n)$$

$a_0,\dots,a_n$ sú neznáme parametre (ε je chyba). Pri riešení regresnej úlohy ide o zvolenie vhodnej regresnej funkcie a o odhad parametrov. Podľa tvaru regresnej funkcie rozlišujeme rôzne typy regresných modelov.

Medzi najčastejšie používané modely trendu patria:

- lineárny trend $Tr_t = a_0 + a_1 t$
- kvadratický trend $Tr_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
- hyperbolický trend $Tr_t = a_0 + \frac{a_1}{t}$
- exponenciálny trend $Tr_t = A.B^t$
- modifikovaný exponenciálny trend $Tr_t = k + a_0 a_1{}^t$
- logistický trend $Tr_t = \frac{k}{1 + a_0 a_1{}^t}$
- Gompertzov trend $Tr_t = k \,.\, a_0^{a_1^t}$

Niektoré nelineárne regresné modely môžeme transformovať na lineárne nasledujúcim spôsobom:

- parabolu $Tr_t = a_0 + a_1 t^2$, substitúciou $z = t^2$
- hyperbolu $Tr_t = a_0 + \frac{a_1}{t}$, substitúciou $z = \frac{1}{t}$
- exponenciálnu funkciu $Tr_t = A.B^t$ zlogaritmujeme $\ln Tr_t = \ln\left(A.B^t\right) = \ln A + t.\ln B$ substitúcia $z = \ln Tr_t$, $a_0 = \ln A$, $a_1 = \ln B$
- funkciu $Tr_t = \frac{1}{a_0 + a_1 t}$, substitúciou $w = \frac{1}{y_t}$, $Tr_t \approx y_t$
- funkciu $Tr_t = a_0 + a_1 \ln t$, substitúciou $z = \ln t$
- funkciu $Tr_t = b_0 b_1^t$, substitúciou $w = \log y_t$ a ďalej $a_0 = \log b_0$, $a_1 = \log b_1$

Zvolenie tvaru regresnej funkcie musí rešpektovať logické a vecné súvislosti javu a ich zákonitosti. Zároveň regresná funkcia má byť podľa možností čo najjednoduchšia a má zaručiť čo najlepšiu aproximáciu (tesnosť) k pozorovaným hodnotám.

Výber vhodného tvaru regresnej funkcie nám môže uľahčiť zostrojenie bodového diagramu. Po odhade parametrov regresného modelu je potrebné posúdiť vhodnosť modelu pomocou štatistických testov (t - test, F - test, analýza rezíduí).

Lineárny trend

Uvažujme **lineárnu regresnú funkciu** (regresnú priamku).
Nech $(t_1, y_1),\ldots,(t_n, y_n)$ je postupnosť bodov v rovine.

Priamku $Tr_t = a_0 + a_1 t$ nazveme regresnou priamkou (lineárnym trendom), ak pre všetky $a_0, a_1 \in R$ platí

$$\frac{\partial S(a_0, a_1)}{\partial a_0} = 0,$$
$$\frac{\partial S(a_0, a_1)}{\partial a_1} = 0,$$

kde $S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 t_i)^2$.

Konštanty a_0, a_1 sú riešením sústavy rovníc

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} y_i ,$$
$$a_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} (t_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i y_i .$$

Ak chceme získať predpoveď očakávanej hodnoty v čase t_{n+1}, dosadíme túto hodnotu do nájdenej rovnice priamky teda

$$y_p = Tr_{n+1} = a_0 + a_1 t_{n+1}.$$

Získaná predpoveď v čase je tzv. bodová predpoveď. Často sa stretávame s požiadavkou, aby výsledkom uvedenej extrapolácie (predpovede) bola vierohodnejšia hodnota, a to predpoveď intervalu, v ktorom môžeme s udanou pravdepodobnosťou očakávať vývoj budúcej hodnoty daného časového radu. V tomto prípade hovoríme o tzv. pravdepodobnostnej intervalovej predpovedi.
Pre prípad trendovej priamky, tvar intervalovej predpovede budúcej hodnoty je

$$Tr_{n+1} - t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot s \cdot g_p \quad < \quad y_p \quad < \quad Tr_{n+1} + t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot s \cdot g_p$$

Kde $t_{1-\alpha/2}(n-2)$ je $(1-\alpha/2)\cdot 100\%$ kvantil t- studentovho rozdelenia pravdepodobnosti o $n-2$ stupňoch voľnosti

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} y_t^2 - \sum_{t=1}^{n} Tr_t^2}{n-2}}, \quad g_p = \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t_{n+1} - \bar{t})^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n\cdot(\bar{t})^2}}, \quad \bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i.$$

Pri použití Excelu dostaneme na hladine významnosti α horný a dolný odhad koeficientov a_0, a_1.

Poznámka Niekedy používame váženú metódu najmenších štvorcov

$$S(A_0, A_1) = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - A_0 - A_1 t_i)^2 ,$$

kde w_i sú váhy odpovedajúce jednotlivým bodom časového radu.

Poznámka Pri aproximácii funkcie viacerých premenných zaradíme do modelu len tie, ktoré významne zlepšia regresný odhad. Počet premenných sa snažíme minimalizovať tak, aby model nebol zbytočne zložitý. Jednou z metód, ktorá nám umožní výber najlepšej podmnožiny premenných, je metóda postupnej regresie (stepwise), ktorá spočíva v postupnom pridávaní premenných do modelu dovtedy, kým nedostaneme prijateľný odhad.

Parabolický trend

Parabolický trend má tvar

$$Tr_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

kde a_0, a_1, a_2 sú neznáme parametre a $t = 1,2,\ldots,n$ je časová premenná. Pre odhad parametrov pomocou metódy najmenších štvorcov platí

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 t_i - a_2 t_i^2)^2$$

Podobne ako pri lineárnej funkcii, dostávame sústavu rovníc:

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} (t_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \,,$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} (t_i)^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} (t_i)^3 = \sum_{i=1}^{n} t_i y_i \,,$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} (t_i)^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} (t_i)^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} (t_i)^4 = \sum_{i=1}^{n} (t_i)^2 y_i \,.$$

Ak chceme získať predpoveď očakávanej hodnoty v čase t_{n+1} dosadíme túto hodnotu do nájdenej rovnice paraboly, teda

$$Tr_{n+1} = a_0 + a_1 t_{n+1} + a_2 t^2{}_{n+1}$$

Vzhľadom na rozsah tejto učebnej pomôcky sme uviedli iba intervaly spoľahlivosti pre lineárny trend. Existujú však odhady aj pre ďalšie už uvedené možnosti. Vhodnosť modelu môžeme posúdiť aj pomocou priebehu grafu rezíduí. Ak rezíduá nemajú náhodný charakter, potom je model nevhodný. Pomôcť nám môžu byť matematické softvéry s možnosťou analýzy rozptylu (ANOVA - Analysis of Variance).

Hyperbolický trend

Hyperbolický trend má tvar

$$Tr_t = a_0 + \frac{a_1}{t} \,,$$

kde a_0, a_1 sú neznáme parametre a $t = 1,2,\ldots,n$ je časová premenná. Neznáme parametre vypočítame použitím tej istej metódy ako v predchádzajúcich prípadoch, čiže metódy najmenších štvorcov, minimalizujeme vzťah

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - \frac{a_1}{t_i})^2 .$$

Konštanty a_0, a_1 sú riešením sústavy rovníc

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i ,$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{t_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{t_i} .$$

Ak chceme získať predpoveď očakávanej hodnoty v čase t_{n+1}, dosadíme túto hodnotu do nájdenej rovnice, teda

$$y_p = Tr_{n+1} = a_0 + \frac{a_1}{t_{n+1}} .$$

Exponenciálny trend

Exponenciálny trend má tvar

$$Tr_t = A . B^t ,$$

kde A, B sú neznáme parametre a $t = 1,2,\dots,n$ je časová premenná. Ak rovnicu zlogaritmujeme, dostaneme:

$$\ln Tr_t = \ln \left(A.B^t \right) = \ln A + t . \ln B$$

použitím substitúcie $z = \ln Tr_t$, $a_0 = \ln A$, $a_1 = \ln B$
ju prepíšeme na rovnicu $z = a_0 + a_1 t$, konštanty a_0, a_1 sú riešením sústavy rovníc

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i ,$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} (t_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i . \ln y_i$$

$A = e^{a_0}$, $B = e^{a_1}$.

Ak chceme získať predpoveď očakávanej hodnoty v čase t_{n+1}, dosadíme túto hodnotu do nájdenej rovnice teda

$$y_p = Tr_{n+1} = A.B^{t_{n+1}} .$$

Modifikovaný exponenciálny trend

Modifikovaný exponenciálny trend má tvar

$$Tr_t = k + a_0 a_1^{\ t} ,$$

kde a_0, a_1 sú neznáme parametre, pričom $a_1 > 0$, k je neznámy parameter ohraničenia a $t = 1,2,\dots,n$ je časová premenná. Modifikovaný exponenciálny trend patrí do skupiny trendov s asymptotickým ohraničením. Lineárnu ani linearizovanú metódu najmenších štvorcov kvôli absolútnemu členu k nemôžeme použiť na výpočet neznámych parametrov. Na ich výpočet použijeme metódu čiastočných súčtov. Jednotlivé členy radu rozdelíme na 3 rovnako veľké skupiny s rozsahom m, ak počet členov nie je deliteľný tromi bezo zvyšku, tak pri vytváraní skupín vynecháme prvú, resp. prvé dve hodnoty. Následne vyčíslime súčty týchto troch skupín:

$$S_1 = \sum_{t=n-3m+1}^{n-2m} y_t\,, \qquad S_2 = \sum_{t=n-2m+1}^{n-m} y_t\,, \qquad S_3 = \sum_{t=n-m+1}^{n} y_t\,.$$

Pre neznáme parametre a_0, a_1, k platí:

$$a_1 = \sqrt[m]{\frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}}\,, \qquad a_0 = \frac{(S_3 - S_2).(a_1 - 1)}{(a_1^n - 1)^2 . a_1^{n-2m+1}}\,, \qquad k = \frac{S_2 - a_0 . a_1^{n-2m+1} . \dfrac{a_1^m - 1}{a_1 - 1}}{m}$$

Logistický trend

Logistický trend je najčastejšie udávaný v tvare

$$Tr_t = \frac{k}{1 + a_0 a_1^t}, \quad a_0 > 1, \quad 0 < a_1 < 1, \quad k > 0.$$

Po úprave dostávame

$$Tr_t = \frac{1}{K + A_0 a_1^t}, \quad A_0 = \frac{a_0}{k}, \quad K = \frac{1}{k}.$$

- Pre odhad parametrov použijeme metódu diferenčných odhadov parametrov A_0, K, a_1. Trend Tr_t nahradíme skutočnými údajmi daného časového radu y_t. Dostávame $y_t = \dfrac{1}{K + A_0 a_1^t}$ a po derivovaní a úprave je $\dfrac{dy_t}{dt} = -\, y_t (1 - K y_t) \ln a_1$.
- Nahradením derivácie y_t' pomocou diferencií (krok $h = 1$) a po úprave dostávame
  $$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = z_t = B_0 + B_1 y_t, \quad B_0 = -\ln a_1, \quad B_1 = K \ln a_1.$$
- Použitím metódy najmenších štvorcov určíme koeficienty B_0, B_1 ako aproximáciu hodnôt $\dfrac{y_{t+1} - y_t}{y_t}$ pomocou hodnôt y_t. Takto sme približne určili hodnoty parametrov $a_1 = e^{-B_0}, K = -\dfrac{B_1}{B_0}$.
- Logaritmovaním $K + A_0 a_{1_1}^t = \dfrac{1}{y_t}$ a úpravou dostávame
  $$\ln(\frac{1}{y_t} - K) = u_t = \overline{C}_0 + \overline{C}_1 t,\ \overline{C}_0 = \ln A_0,\ \overline{C}_1 = \ln a_1.$$

Pre výpočet koeficientov $\overline{A}_0, \overline{A}_1$ použijeme metódu najmenších štvorcov, pričom položíme

$$a_0 = -\frac{B_1}{B_0} e^{\bar{A}_0}, \quad a_1 = \frac{1}{2}\left(e^{C_0} + e^{-B_0}\right), \quad k = -\frac{B_0}{B_1}.$$

Koeficient a_1 sme vypočítali dvakrát, pričom môžeme dostať dva rôzne výsledky (možná zlá podmienenosť sústavy rovníc pri metóde najmenších štvorcov), ak nie sú rozdiely „veľké“, zoberieme aritmetický priemer získaných hodnôt.

Gompertzov trend

Gompertzov trend má tvar

$$Tr_t = k a_0^{a_1^t}$$

kde a_0, a_1 sú neznáme parametre, k je neznámy parameter ohraničenia a $t = 1,2,\ldots,n$ je časová premenná.

Model reprezentuje *S-krivku*. S-*krivky* sú trendové funkcie, ktoré sa používajú na opis trendu vývoja predaja nového výrobku. Zo začiatku hodnoty rastú pomaly, pretože spotrebiteľ nemá o novom výrobku ešte informácie. Po určitom čase, napr. vplyvom reklamy, jeho predaj rastie rýchlejšie a nakoniec sa ustáli na určitej konštante.

Na uskutočnenie odhadu parametrov funkciu najskôr linearizujeme:

$$\ln Tr_t = \ln k + a_1^t \ln a_0,$$

použijeme substitúciu, ktorá zmení danú rovnicu na predpis modifikovaného exponenciálneho trendu a parametre modifikovaného exponenciálneho trendu vypočítame použitím metódy čiastočných súčtov, ktorá je vysvetlená v predchádzajúcej časti.

Viacnásobná lineárna regresia

V predchádzajúcich modeloch sme uvažovali iba jednu závislé premennú. Ukážeme si postup pre model

$$Tr_t = a_0 + a_1 t + a_2 u + a_3 v,$$

kde a_0, a_1, a_2 sú neznáme parametre a $t = 1,2,\ldots,n$ je časová premenná. Pre odhad parametrov pomocou metódy najmenších štvorcov je

$$S(a_0, a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 t_i - a_2 u_i - a_3 v_i)^2$$

Podobne ako pri lineárnej funkcii, dostávame sústavu rovníc:

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} u_i + a_3 \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$a_0\sum_{i=1}^{n}t_i + a_1\sum_{i=1}^{n}(t_i)^2 + a_2\sum_{i=1}^{n}t_i u_{i_3} + a_3\sum_{i=1}^{n}t_i v_{i_3} = \sum_{i=1}^{n}t_i y_i,$$
$$a_0\sum_{i=1}^{n}u_i + a_1\sum_{i=1}^{n}u_i t_i + a_2\sum_{i=1}^{n}(u_i)^2 + a_3\sum_{i=1}^{n}u_i v_{i_3} = \sum_{i=1}^{n}u_i y_i,$$

$$a_0\sum_{i=1}^{n}v_i + a_1\sum_{i=1}^{n}v_i t_i + a_2\sum_{i=1}^{n}v_i u_i + a_3\sum_{i=1}^{n}(v_{i_3})^2 = \sum_{i=1}^{n}v_i y_i$$

Analýza sezónnej zložky

Okrem základných činiteľov, vyznačujúcich sa stálou trvalou intenzitou a tendenciou pôsobenia, je vývoj časového radu ovplyvňovaný aj periodicky pôsobiacimi činiteľmi, ktoré obyčajne vyvolávajú striedavo rast a pokles hodnôt časového radu (dôsledok striedania sa ročných období, ale aj zvykov spoločnosti, ako napríklad každoročné sviatky, prázdniny, závodné dovolenky a podobne).

Poznať správanie sezónnej zložky je dôležité, nakoľko jej analyzovaním dostaneme informáciu o sezónnych výkyvoch v správaní sa produkcie, prípadne iných veličín v období kratšom ako jeden rok. (napr. predaj kvetín v máji kvôli Dňu matiek, predaj kaprov v decembri kvôli Vianociam).

Periodické kolísanie môže do značnej miery zakrývať dynamiku ekonomických javov, uskutočňujeme preto tzv. sezónne očisťovanie, ktorého úlohou je vylúčiť sezónnu zložku zo skúmaného radu. Ďalšou úlohou analýzy zložky je samostatné kvantifikovanie sezónnych výkyvov.

Existuje viacero prístupov k popisu sezónnej zložky.
Sezónnosť Sz_t pri dekompozičnej metóde vytvárame obyčajne modelom konštantnej sezónnosti, podľa ktorého sa predpokladá, že sezónne výkyvy Sz_t sa v jednotlivých sezónach roka medzi sebou líšia, ale v rovnakých sezónach nasledujúcich rokov sú rovnaké.

Model konštantnej sezónnosti

Predpokladajme model s multiplikatívnym rozkladom (ČR bez cykličnosti).

$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n$ – jednotlivé hodnoty časového radu
$Tr_1, Tr_2, Tr_3, Tr_4, \ldots\ldots\ldots Tr_n$ – vyrovnané trendové hodnoty časového radu

$$Y = Tr \cdot Sz \cdot I \quad \rightarrow \frac{Y}{Tr} = Sz \cdot I$$

Aby sme sezónnu zložku očistili od náhodnej zložky, počítame priemerné sezónne indexy $\bar{S}z_i$, pričom i nadobúda hodnoty od 1 po celkový počet sezón, napr. 4 pri štvrťrokoch, 12 pri mesiacoch a pod..

Ak rovnicu $\frac{Y}{Tr} = Sz \cdot I$ vydelíme hodnotou sezónnej zložky, dostávame osamostatnenie náhodnej zložky, pre ktorú platí : $\frac{Y}{Tr \cdot Sz} = I$.

Sezónne indexy $\bar{S}z_i$ vypočítame ako aritmetický priemer hodnôt $Sz \cdot I$ pripadajúcich na jednotlivé sezónny všetkých období. Hodnota sezónnej zložky určená príslušným sezónnym indexom je tak rovnaká pre každý zodpovedajúci štvrťrok, mesiac, týždeň roka daného časového radu. Súčet sezónnych indexov by mal mať hodnotu približne rovnakú, ako je počet sezón.

Model proporciálnej sezónnosti

V prípade modelu konštantnej sezónnosti predpokladáme, že sa sezónne výkyvy pravidelne opakujú v rovnakej výške. Model proporcionálnej sezónnosti je založený na predpoklade, že sezónny výkyv v konkrétnej sezóne sa mení priamoúmerne dosiahnutej hodnote trendovej zložky za dané obdobie, čo znamená, že sezónna zložka je priamoúmerná trendovej zložke.

Model skrytých periód

Tento model vychádza z vlnovej teórie, ide o vlnenie o rôznych frekvenciách a amplitúdach, ide o proces vytvorený veľkým počtom vzájomne sa prelínajúcich goniometrických kriviek.

Prognóza na nasledujúce obdobie

Cieľom dekompozície časových radov je aj prognózovanie vývoja hodnôt sledovaného javu v ďalších obdobiach. Pri dekompozícii časového radu na trendovú, sezónnu a náhodnú zložku, predpoveď na nasledujúci rok vypočítame takto

$$y_{n+1} = T_{(n+1)} \,.\, \bar{S}z_1 ,$$
$$y_{n+2} = T_{(n+2)} \,.\, \bar{S}z_2 ,$$
$$y_{n+3} = T_{(n+3)} \,.\, \bar{S}z_3 ,$$
$$y_{n+4} = T_{(n+4)} \,.\, \bar{S}z_4$$

Kritériá pre voľbu modelu trendu

Vo všeobecnosti, keď poznáme model vývoja časového radu a odhad tohto modelu, snažíme sa zistiť, ako presne tento model popisuje skutočný časový rad.

Pri vecnej ekonomickej analýze údajov v časovom rade je možné posúdiť, či ide o rastúcu alebo klesajúcu závislosť, inflexný bod a pod. Ide o prioritné posúdenie, avšak analýza bez použitia vecných ekonomických kritérií niekedy umožní zistiť iba základné tendencie vo vývoji analyzovaného časového radu.

Nebezpečie pri vizuálnej analýze grafu spočíva v jeho subjektivite. Na základe grafického rozboru jedného časového radu môžu rôzni posudzovatelia dôjsť k rôznym záverom o voľbe adekvátneho modelu.

Z hľadiska modelovania časového radu je nutné brať do úvahy účel modelovania radu (či ide o popis minulosti alebo skôr o konštrukciu predpovedí ďalšieho vývoja).

Pri posudzovaní vhodnosti modelu by za prioritné mali byť považované vecné hľadiská doplnené štatistickými kritériami. Skúmame obyčajne veľkosť rozdielov y_t (skutočných hodnôt premennej Y v čase t) a $\hat{y}_t$ (vyrovnaných hodnôt premennej Y v čase t), t.j. rezíduí $y_t - \hat{y}_t$ v čase $t = 1,2,\ldots,N$. Čím sú hodnoty rezíduí bližšie k nule, tým sme získali lepšie vyrovnanie daného časového radu a vybraný model vyrovnávania považujeme za dobrý.

Pre voľbu modelu trendu môžeme použiť tieto jednoduché kritéria:

Kritérium	Vhodný typ trendu
$\overline{\Delta}_t$ - približne konštantný	lineárny
$\overline{\Delta}_t^2$ - približne konštantný	parabolický
$\dfrac{\overline{\Delta}_t}{\overline{y}_t}$ - približne konštantný	exponenciálny
$\ln \overline{\Delta}_t$ - lineárne klesá	modifikovaný exponenciálny
$\ln \dfrac{\overline{\Delta}_t}{\overline{y}_t}$ - lineárne klesá	Gompertzov
$\ln \dfrac{\overline{\Delta}_t}{\overline{y}_t^{\,2}}$ - lineárne klesá	logistický

$\overline{\Delta}_t = \overline{y}_t - \overline{y}_{t-1}$ je rozdiel dvoch po sebe idúcich vyrovnaných hodnôt.

Presnosť vyrovnávania časového radu y_t, $t = 1,2,\ldots,N$ možno merať absolútne alebo relatívne pomocou nasledujúcich charakteristík:

Absolútne miery presnosti:

- $M.E. = \dfrac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t - \hat{y}_t)$ - priemerná chyba rezíduí (mean error). Ak je ME kladná, model systematicky podhodnocuje skutočnosť.
- $M.S.E. = \dfrac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t - \hat{y}_t)^2$ - priemerná kvadratická chyba rozptylu rezíduí (mean absolute error),
- $RMSE = Root\ M.S.E. = \sqrt{M.S.E.}$ - štandardná odchýlka rezíduí (root mean square error),
- $M.A.E. = \dfrac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}|y_t - \hat{y}_t|$ - priemerná absolútna chyba rezíduí.

Relatívne miery presnosti:

- $M.A.P.E. = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right| \times 100\%$ - relatívna absolútna chyba rezíduí (mean absolut percentage error),
- $M.P.E. = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \times 100\%$ - relatívna chyba rezíduí.

Durbin – Watsonova charakteristika

Pri vyrovnávaní časových radov regresnými modelmi (napríklad lineárnym modelom trendu v tvare $y_t = B_0 + B_1 t + \varepsilon_t$, pre $t = 1,2,\ldots,N$) sa po odhade parametrov modelu musíme (okrem skúmania štandardnej odchýlky rezíduí a testovania štatistickej významnosti parametrov modelu) zaoberať hlavne skúmaním nezávislosti rezíduí, pretože v časových radoch sa tento predpoklad veľmi často porušuje.

Nekorelovanosť testujeme pomocou prvého koeficientu autokorelácie
$H_0 : \rho_1 = 0$ autokorelácia nie je, t.j. $\operatorname{cov}(e_t, e_{t-1}) = 0$,
$H_1 : \rho_1 \neq 0$ autokorelácia.

Testovanie nezávislostí rezíduí pomocou Durbin – Watsonovej charakteristiky chápeme preto ako ďalšiu dôležitú charakteristiku modelu. Durbin – Watsonova charakteristika rezíduí je daná vzťahom

$$D - W = \frac{\sum_{t=2}^{N}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{N} e_t^2},$$

kde $e_t = y_t - \hat{y}_t$, pre $t = 1,2,\ldots,N$.

Hodnoty testovacej charakteristiky sú z intervalu $\langle 0,4 \rangle$. V praxi sa pri interpretácii používajú tieto zjednodušené kritériá:

- Ak $D - W = 2$, rezíduá modelu sú nezávislé a model ktorým sa vyrovnával časový rad považujeme za dobrý (zložky sú nezávislé, nie je autokorelácia).
- Ak sa $D - W$ približuje k nule, medzi náhodnými zložkami existuje pozitívna autokorelácia, rezíduá modelu sú kladne autokorelované a model je nevyhovujúci.
- Ak sa $D - W$ približuje k hodnote 4, medzi zložkami existuje negatívna autokorelácia, rezíduá modelu sú záporne autokorelované a model je nevyhovujúci.

Poznámka Vzhľadom na to, že ide o test, hodnotu testovacej charakteristiky $D - W$ porovnávame s odpovedajúcimi kritickými hodnotami, pre ktoré existujú tabuľky. Hodnoty $D - W$ porovnávame na danej hladine významnosti s kritickými hodnotami $d_{L,\alpha}$ (dolné ohraničenie – lower limit) a $d_{U,\alpha}$ (horné ohraničenie – upper limit), ktoré sú uvedené pre rôzne hodnoty hladiny významnosti α , rôzne rozsahy výberov a počet odhadovaných parametrov.

Možnosti testovania uvedené napríklad v práci Hudec, O. – Sisáková, J. – Tartaľová, A. – Želinský, T.: Štatistické metódy v ekonomických vedách. Elfa, s.r.o., Košice 2007, 196 strán, ISBN 978-80-8086-059-2.

V prípade testu pozitívnej autokorelácie platí:

- Ak $D-W < d_{L,\alpha}$, hypotézu H_0 o neprítomnosti pozitívnej autokorelácie zamietame a prijmeme hypotézu H_1 o pozitívnej autokorelácii náhodných chýb.
- Ak $D-W > d_{U,\alpha}$, hypotézu H_0 o neprítomnosti pozitívnej autokorelácie nezamietame a prijmeme hypotézu H_1 , t.j. náhodné chyby nie sú pozitívne autokorelované.
- Ak $d_{L,\alpha} < D-W < d_{U,\alpha}$, tak výsledok testu je nejasný, nemôžeme tvrdiť, že náhodné chyby sú pozitívne autokorelované ani to, že nie sú pozitívne autokorelované.

V prípade testu negatívnej autokorelácie platí:

- Ak $[4-(D-W)] < d_{L,\alpha}$, hypotézu H_0 o neprítomnosti negatívnej autokorelácie zamietame a prijmeme hypotézu H_1 o negatívnej autokorelácii náhodných chýb.
- Ak $[4-(D-W)] > d_{U,\alpha}$, hypotézu H_0 o neprítomnosti negatívnej autokorelácie nezamietame a prijmeme hypotézu H_1, t.j. náhodné chyby nie sú negatívne autokorelované.
- Ak $d_{L,\alpha} < [4-(D-W)] < d_{U,\alpha}$, tak výsledok testu je nejasný, nemôžeme tvrdiť, že náhodné chyby sú negatívne autokorelované ani, že nie sú negatívne autokorelované.

Možnosti testovania uvedené napríklad v práci Hanke, J.E. -- Reitsch, A.G.: Understanding Business Statistics. Homewood, IL 60430, Boston, MA 02116, 1991.

- Ak $D-W < d_{L,\alpha}$ rezíduá sú pozitívne autokorelované.
- Ak $D-W > d_{U,\alpha}$ rezíduá nie sú autokorelované.
- Ak $d_{L,\alpha} < [4-(D-W)] < d_{U,\alpha}$, tak výsledok testu je nejasný.

Možnosti testovania uvedené napríklad v práci Artl,J. ...

D-W	
$4-d_{L,\alpha} < D-W < 4$	H_0 sa zamieta – autokorelácia
$4-d_{U,\alpha} < D-W < 4-d_{L,\alpha}$	nevieme rozhodnúť, je potrebné viac hodnôt
$2 < D-W < 4-d_{U,\alpha}$	prijímame H_0 - nie je autokorelácia
$d_{U,\alpha} < D-W < 2$	prijímame H_0 - nie je autokorelácia
$d_{L,\alpha} < D-W < d_{U,\alpha}$	nevieme rozhodnúť, je potrebné viac hodnôt
$0 < D-W < d_{L,\alpha}$	H_0 sa zamieta – autokorelácia

Uvedené kritériá voľby trendovej funkcie sa používajú na popis minulosti („interpolačné“ kritéria). Vhodný model v tomto prípade hľadáme analýzou minulého správania sa časového radu. Pre predpoveď budúceho vývoja sa používajú tzv. extrapolačné kritériá.

Najčastejší spôsob použitia extrapolačných kritérií je založený na simulácii. Tá spočíva v tom, že z analyzovaného časového radu vynecháme určitú časť pozorovaní a vhodnosť voľby trendovej funkcie posudzujeme podľa toho, ako dobre dokáže extrapolovať tieto pozorovania (model podrobíme skúške zo schopnosti prognózovania). Modely, ktoré boli úspešné pri popisovaní minulosti, nemusia byť vhodné na predpoveď budúceho vývoja (asi 50-60% z nich však je vhodná).

Theilov koeficient

Ako miery prognostickej kvality modelu sa často používajú koeficienty nesúladu (nesúlad medzi simulovanou predpoveďou a v tom čase už známou skutočnosťou). Často používaný je **Theilov koeficient**

$$T_H^2 = \frac{\sum_{j=1}^{D} \left(y_{N+j} - \hat{P}_j \right)^2}{\sum_{j=1}^{D} \left(y_{N+j} \right)^2},$$

kde N je dĺžka časového radu pre odhad modelu,
$D = n - N$, je skrátenie časového radu,
$\hat{P}_j$ je extrapolácia (predpoveď) na j období dopredu a to modelom odhadnutým na základe prvých N pozorovaní.

V percentuálnom vyjadrení ($T_H \times 100\%$) môžeme túto veličinu interpretovať ako chybu predpovede vyjadrenej v percentách.

- Ak sa pohybuje v hraniciach $3-5\%$, potom je chyba predpovede považovaná za „malú” a uvažovaný model môže byť vhodným nástrojom pre prognózovanie.
- Ak sa pohybuje v hraniciach $6-10\%$, potom použitie daného modelu nie je vylúčené.
- Ak je koeficient nesúladu väčší ako 10%, tak je potrebné zvážiť či nie je iný lepší model.

Závislosť v časových radoch

Uvažujme dva časové rady. Budeme sledovať, či zmena hodnôt v jednom časovom rade „nevyvolá“ zmeny hodnôt v druhom časovom rade. Závislosť medzi takýmito dvoma časovými radmi môžeme vyjadriť vzťahom

$$y_t = f(x_t) + \varepsilon_t,$$

pričom tvar funkcie f môže byť rôzny a môžeme ho určiť napríklad pomocou regresnej analýzy.

Podobný priebeh v časových radoch nemusí znamenať ich vzájomnú závislosť. Môže ísť o náhodný podobný priebeh (rovnaký trend), o zdanlivú závislosť. Ozajstný vzťah medzi časovými radmi sa musí prejaviť v paralelnom priebehu ich nepravidelných zložiek (I_t). Ak tieto, často nepatrné výkyvy, prebiehajú paralelne, dá sa očakávať, že medzi nimi je skutočná príčinná závislosť. Skutočný vzťah medzi dvoma časovými radmi je daný koreláciou nepravidelných zložiek týchto časových radov. To znamená, že je potrebné „očistiť“ časové rady od zložiek Tr_t, Sz_t, C_t.

Pred stanovením intenzity závislosti dvoch časových radov musíme overiť, do akej miery sú autokorelované. Uvažujme časový rad

t	1	2	…	N-2	N-1	N
y_t	y_1	y_2	$\cdots$	y_{N-2}	y_{N-1}	y_N

Utvorme z hodnôt pôvodného časového radu časové rady

1^*

t	1	2	…	N-2	N-1
y_t	y_1	y_2	$\cdots$	y_{N-2}	y_{N-1}

2^*

t	2	…	N-2	N-1	N
y_t	y_2	$\cdots$	y_{N-2}	y_{N-1}	y_N

Vypočítame odhad koeficienta korelácie $\rho_1 = Corr(1^*, 2^*) = Corr(y_t, y_{t+1})$ medzi radmi 1^* a 2^*

$$\rho_1 \approx \frac{\sum_{t=1}^{N-1} y_t y_{t+1} - \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N-1} y_t \sum_{t=2}^{N} y_t}{\sqrt{\left[\sum_{t=1}^{N-1} y_t^2 - \frac{1}{N-1}\left(\sum_{t=1}^{N-1} y_t\right)^2\right]\left[\sum_{t=2}^{N} y_t^2 - \frac{1}{N-1}\left(\sum_{t=2}^{N} y_t\right)^2\right]}}.$$

Analogicky je možné zisťovať stupeň autokorelácie medzi členmi časových radov s posunutím o k období. Pre väčší počet hodnôt tzv. stacionárneho časového radu ($n > 50$ a $k < \frac{n}{4}$) používame často pre odhad $\rho_k = Corr(y_t, y_{t+k})$ jednoduchší ukazovateľ

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2}.$$

Ak $|r_1|$ je „malá" hodnota, nejde o autokoreláciu daného časového radu. Ak $|r_1|$ sa „blíži" k jednej, ide o silnú autokoreláciu. Len ak nie sú hodnoty časových radov autokorelované a sú očistené od Tr_t, Sz_t, C_t, je vhodné použiť ich ako základ na stanovenie korelácie odrážajúcej intenzitu závislosti medzi skúmanými dvoma časovými radmi.

Keď zmeny v jednom časovom rade v sledovanom období sú v súlade so zmenami iného časového radu, a to v priebehu tých istých období, hovoríme o tzv. **synchrónnej korelácii** v časových radoch.

Závislosť v časových radoch sa môže prejaviť tak, že jeden časový rad môže vyvolať účinky v druhom časovom rade oneskorene, potom hovoríme o oneskorenej alebo o **asynchrónnej korelácii** v časových radoch. Postup je podobný ako pri synchrónnej korelácii, rozdiel je len v tom, že uvažujeme nový časový rad, ktorý vznikne z pôvodného, posunutím o príslušný počet období.

Pri porovnávaní viacerých časových radov a určovaní posunu je možné použiť spektrálnu analýzu časových radov (niekedy sa tiež hovorí o Fourierovej analýze).

13.1 Literatúra

[1] Anděl, J.: Statistická analýza časových řad. SNTL, Praha, 1976.

[2] Arlt, J.: Moderní metody modelování ekonomických časových řad. GRADA, Praha, 1999. ISBN 80-7169-539-4.

[3] Arlt, J. – Artlová, M. – Rublíková, E.: Analýza ekonomických časových řad s příklady. 2002

[4] Bučko, M.: Pravdepodobnosť a matematická štatistika. ALFA, Bratislava, 1990.

[5] Bakytová, H. a kolektív: Základy štatistiky. ALFA, Bratislava, 1979.

[6] Cipra, T.: Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii. SNTL/ALFA, Praha, 1986.

[7] Cipra, T.: Finanční matematika v praxi. EDICE HZ, Praha, 1993.

[8] Cottle, S. - Murray, R.F. - Block, F.E.: Analýza cenných papíru. VICTORIA PUBLISHING, Praha.

[9] Cyhelský, L.: Statistika v příkladech. SNTL/ALFA, Praha, 1985.

[10] Cyhelský, L. - Hustopecký, J. - Závodský, P.: Příklady k teorii statistiky. SNTL/ALFA,Praha, 1978.

[11] Fabozzi, F.J. - Kole, S.(editors): Selected Topic in Investment for Financial Planning. Dow Jones - Irwing, 1985.

[12] Hanke, J.E. - Reitsch, A.G.: Understanding Business Statistics. Homewood, IL 60430, Boston, MA 02116, 1991.

[13] Hanousek, J. - Charamza, P.: Moderní metody zpracovaní dat – matematická statistika pro každého. GRADA a.s., Praha 1991. ISBN 80-85623-31-5.

[14] Hátle, J. - Kahounová, J.: Úvod do teórie pravděpodobnosti. SNTL, ALFA, Praha, 1987.

[15] Heyne, P.: Ekonomický styl myšlení . VŠE, Praha, 1991.

[16] Hindls, R. - Kaňoková, J. - Novák, I.: Metody statistické analýzy pro ekonomy. MANAGEMENT PRESS, Ringier ČR, a.s. Praha,1997. ISBN 80-85943-44-1.

[17] Hudec, O. - Sisáková, J. - Tartaľová, A. - Želinský, T.: Štatistické metódy v ekonomických vedách. Elfa, s.r.o., Košice 2007, 196 strán, ISBN 978-80-8086-059-2.

[18] Huťka, V. - Insitoris, J. - Mojžišová, E.: Finančná matematika. Edičné stredisko, Ekonomická univerzita Bratislava, 1993.

[19] Chajdiak, J. - Rublíková, E. - Gudaba, M.: Štatistické metódy v praxi. STATIS Bratislava 1994, ISBN 80-85659-02-6.

[20] Chovancová, B. - Sásik, M.: Finančný trh. Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 1997, ISBN 80-225-0872-1.

[21] Isachsen,A.J. - Hamilton C.B. - Gylfason, T.: Princípy trhovej ekonomiky. OPEN WINDOWS, Bratislava 1994, ISBN 80-85741-04-0.

[22] Jarošová, E.: STATISTIKA B-Řešené příklady. Ed. odd. VŠE Praha, 1996. ISBN 80-7079-328-7.

[23] Jones, Ch.P.: Introduction to Financial Management. IRWIN. Homewood, IL 60430, Boston, MA 02116, 1992.

[24] Mason, R.D. - Lind, D.A.: Statistical Techniques in Business and Economics. IRWIN, Homewood, IL 60430, Boston, MA 02116, 1990.

[25] Meloun, M. – Militký, J.: Statistické zpracování experimentálních dat. PLUS spol.s r.o., Praha, 1994, ISBN 80-85297-56-6.

[26] Pidany, J.: Metódy porovnávania a sledovania dynamiky vývoja v ekonomike,elfa s.r.o., Košice 1996, ISBN 80-88786-37-1.

[27] Pirč, V. - Skřivánek, J.: Finančná matematika. C-PRESS, Košice 1996. ISBN 80-7166-020-5.

[28] Pirč, V. - Sedláčková, A.: Finančná matematika. Elfa s.r.o. Košice 2002, ISBN 80-89066-21-6.

[29] Pirč, V. - Buša, J.: Numerické metódy. Elfa s.r.o. Košice 1998, ISBN 80-88786-80-0.

[30] Riečan, B. - Lamoš, F. - Lenárt, C.: Pravdepodobnosť a matematická štatistika. ALFA, Bratislava, SNTL, Praha, 1984.

[31] Riečanová, Z. -- Horvath, J. -- Olejček, Vl. -- Volauf, P.: Numerické metódy a matematická štatistika. ALFA-Bratislava, SNTL-Praha 1987.

[32] Ross, S.A. - Westerfield, R.W. - Jaffe, J.F.: Corporate Finance. IRWIN, Homewood, IL 60430, Boston MA 02116, 1990.

[33] Rublíková, E.: Analýza časových radov, Lura Edition člen skupiny Wolters Kluwer, ISBN 978-80-8078-139-2.

[34] Schall, L.D. - Haley, Ch.W.: Introduction to Financial Management. McGraw-Hill, Inc., 1991.

[35] Sharpe, W.F. - Alexander, G.J.: Investice. VICTORIA PUBLISHING, Praha, 1994.

[36] Skřivánková, V. - Skřivánek, J. : Kvantitatívne metódy vo finančníctve. STATIS Bratislava, 2001, ISBN 80-85659-25-5.

[37] Szatmáry, P. - Kolcun, M.: Predikcia denných diagramov zaťaženia v ES s využitím umelých neurónových sieti. Elfa, s. r. o. Košice, 2001. ISBN 80-88964-80-6.

[38] Šlosár, R. - Šlosárová, A. - Majtán, S.: Výkladový slovník ekonomických pojmov. SPN Bratislava, 1992.

[39] Šoltés, V. - Penjak,V.: Finančná matematika. Olympia, a.s., Košice, ISBN 80-7099-409-6.

[40] Wisniewski, M.: Metódy manažerského rozhodování, Translation © Grada Publishing, 1996, Cover Design © Grada Publishing, spol. s r.o.. Praha 1,1996, ISBN: 80-7169-089-9.