Aplikácie diferenciálnych rovníc

Vysokoškolská učebnica
z projektu KEGA 035–TUKE–4/2017.

Blanka Baculíková
Jozef Džurina

Equilibria, s.r.o. 2019

Recenzovali: doc. RNDr. Ján Buša, CSc.,
prof. RNDr. Vincent Šoltés, CSc.

Vydanie: prvé
Vydavateľ: Technická Univerzita

ISBN:

Za odbornú a jazykovú stránku tejto vysokoškolskej učebnice zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

Obsah

1 OBYČAJNÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE

1.1 Úvod

Problematika obyčajných diferenciálnych rovníc sa začala rozvíjať už v 17. storočí. Už v tomto období Isaac Newton (1643-1727) sformuloval svoj druhý pohybový zákon v tvare

$$f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv),$$

t.j. sila spôsobujúca pohyb telesa sa rovná časovej zmene hybnosti. Pomocou tohto zákona sa podarilo opísať pohyb planét okolo Slnka pomocou diferenciálnych rovníc, na základe ktorých je možné predpovedať ich polohu vo vesmíre.

Od tých čias diferenciálnym rovniciam bola venovaná veľká pozornosť, lebo prostredníctvom nich bolo možné vytvárať a analyzovať matematické modely reálneho sveta.

1.2 Základné pojmy

V tejto kapitole sa oboznámime so základnými pojmami z teórie obyčajných diferenciálnych rovníc, ako je pojem diferenciálnej rovnice, riešenie, rád diferenciálnej rovnice. Obyčajnú diferenciálnu rovnicu môžeme zapísať vo všeobecnom tvare

$$F(t, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

kde F je daná funkcia $n+2$ premenných definovaná na istej otvorenej množine $G = I \times \Omega$, I je číselný interval, $\Omega \subset R^{n+1}$, t je nezávislá premenná, $y = y(t)$ je neznáma funkcia a y',... $y^{(n)}$ sú derivácie neznámej funkcie. Predpokladáme, že aspoň jedna z derivácií je obsiahnutá v rovnici (1).

Rovnica (1) vyjadruje vzťah medzi neznámou funkciou a jej deriváciami, čo je vlastne vzťah medzi neznámou funkciou a jej vlastnosťami, keďže vlastnosti funkcie sa v mnohých prípadoch dajú vyjadriť pomocou jej derivácií. Práve táto skutočnosť nám umožňuje použiť diferenciálne rovnice ako nástroj popisujúci javy pozorované v rôznych oblastiach vedy.

Rád najvyššej derivácie vyskytujúcej sa v rovnici (1) nazývame rád diferenciálnej rovnice. V prípade diferenciálnej rovnice prvého rádu sa v rovnici (1) vyskytuje derivácia neznámej funkcie iba prvého rádu. Uvedieme príklad najjednoduchšej diferenciálnej rovnice 1. rádu, ktorú vo všeobecnosti môžeme zapísať v tvare $y' = f(t)$.

Príklad 1 *Riešme diferenciálnu rovnicu*

$$y' = t^2 + 1$$

Riešenie Neznámu funkciu x určíme priamym integrovaním, teda

$$y = \int (t^2 + 1)\mathrm{d}t,$$

$$y = \frac{t^3}{3} + t + c, \quad c \in R.$$

Teda riešením danej diferenciálnej rovnice sú všetky funkcie tvaru $y = \frac{t^3}{3} + t + c$.

Riešením diferenciálnej rovnice, ako sme videli v príklade je množina funkcií. Pre tieto funkcie musia existovať všetky derivácie vyskytujúce sa v rovnici a musia „spĺňať“ danú diferenciálnu rovnicu, teda po ich dosadení do rovnice dostávame identitu.

Definícia 1 *Funkcia $\varphi \in C^{(n)}(I)$ je riešenie diferenciálnej rovnice* (1) *na intervale I, ak pre každé $t \in I$ platí*

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n)}(t)) \in G \;\; a \;\; F(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n)}(t)) = 0.$$

Riešenie diferenciálnej rovnice prvého rádu sa niekedy nazýva aj integrál diferenciálnej rovnice.

Funkciu $y = \varphi(t)$ nazývame explicitne určené riešenie diferenciálnej rovnice. Riešenie vyjadrené rovnicou $H(t, y) = 0$ nazývame implicitne určené riešenie diferenciálnej rovnice. Množinu všetkých riešení danej diferenciálnej rovnice n-tého rádu nazývame všeobecné riešenie. Pri riešení praktických úloh nie je potrebné poznať všetky riešenia, stačí poznať tie, ktoré spĺňajú isté začiatočné podmienky. Ak zo všeobecného riešenia vyberieme jedno, ktoré vyhovuje daným začiatočným podmienkam, tak hovoríme o partikulárnom riešení.

Veľmi dôležitou otázkou v teórii diferenciálnych rovníc, je otázka existencie a jednoznačnosti riešenia. V našich úlohách budeme predpokladať existenciu riešenia zostavených diferenciálnych rovníc, k čomu spravidla postačuje spojitosť koeficientov diferenciálnej rovnice

1.3 Elementárne metódy riešenia niektorých typov diferenciálnych rovníc prvého rádu

1.3.1 Rovnica so separovanými premennými

Diferenciálna rovnica prvého rádu, ktorú možno písať v tvare

$$g(y)y'(t) = f(t), \;\; \text{resp.} \;\; g(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t), \tag{2}$$

kde g, f sú spojité funkcie na intervale I, sa nazýva rovnica so separovanými premennými. Každú diferenciálnu rovnicu prvého rádu, ktorá sa dá po vhodných úpravách napísať v tvare (2), nazývame separovateľnou rovnicou. Takou je napr. rovnica

$$p(t)q(y)\mathrm{d}y + r(t)s(y)\mathrm{d}t = 0.$$

Prechod od rovnice so separovateľnými premennými k rovnici so separovanými premennými nazývame separáciou premenných. Rovnicu (2) riešime priamym integrovaním

$$\int g(y)y'(t)\mathrm{d}t = \int f(t)\mathrm{d}t.$$

Integrál riešime substitúciou $y(t) = u, \quad y'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$,

$$\int g(u)\mathrm{d}u = \int f(t)\mathrm{d}t.$$

Ak označíme primitívne funkcie k funkciám $g(u)$ a $f(t)$ ako $G(u)$ a $F(t)$, potom riešenie danej rovnice je vyjadrené vzťahom

$$G(u) = F(t) + c, \quad c \in R,$$

$$G(y(t)) = F(t) + c.$$

Uvedený vzťah určuje všeobecné riešenie rovnice (2) v implicitnom tvare. V prípade, ak existuje inverzná funkcia G^{-1} k funkcii G, potom vieme zapísať všeobecné riešenie v explicitnom tvare

$$y(t) = G^{-1}(F(t) + c).$$

Príklad 2 *Riešme diferenciálnu rovnicu*

$$y' = ty^2.$$

Riešenie Po separácii premenných dostávame

$$\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = t\,\mathrm{d}t, \;\; x \neq 0.$$

Integrovaním máme

$$\frac{-1}{y} = \frac{t^2}{2} + c, \quad c \in R.$$

Dostávame riešenie diferenciálnej rovnice vyjadrené v explicitnom tvare

$$y(t) = \frac{-1}{t^2 + c}.$$

V priebehu riešenia, sme vylúčili funkciu $x \equiv 0$, ktorá je tiež riešením danej diferenciálnej rovnice.

Príklad 3 *Riešme diferenciálnu rovnicu*

$$y' = 1 + y + t^2 + yt^2.$$

Riešenie Danú rovnicu vieme zapísať v tvare

$$y' = (1 + y)(1 + t^2).$$

Separáciou premenných a následnou integráciou dostávame

$$\int \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \int (1 + t^2)\,\mathrm{d}t, \;\; y \neq -1,$$

$$\ln|1 + y| = t + \frac{t^3}{3} + c, \;\; c \in R.$$

Riešenie je vyjadrené v implicitnom tvare. Pripomíname, že riešením danej diferenciálnej rovnice je aj funkcia $y \equiv -1$, presvedčíme sa o tom priamym dosadením do rovnice.

Úlohy

P1. Riešte $(1+\mathrm{e}^x)\,yy' = \mathrm{e}^x$, $\left[y^2 = 2\ln(1+\mathrm{e}^x)+c\right]$

P2. Riešte $(1+y^2)\,\mathrm{d}x + (1+x^2)\,\mathrm{d}y = 0$, $[\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = c]$

P3. Riešte $\sin x \cos y + y' \operatorname{tg} y \cos x = 0$, $\left[\cos y = \dfrac{1}{\ln|\cos x| + c}\right]$

P4. Riešte $\mathrm{e}^y\,(1+x^2)\,\mathrm{d}y + 2x\,(1+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x = 0$, $\left[y = \ln\left(\dfrac{c}{1+x^2} - 1\right)\right]$

P5. Riešte $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$, $\left[-\sqrt{1+x^2} + c = \sqrt{1+y^2}\right]$

P6. Riešte $x(y^2-1)\mathrm{d}x + y(x^2-1)\mathrm{d}y = 0$, $\left[(x^2-1)(y^2-1) = c\right]$

P7. Riešte $y' = x^2 e^x$, $\left[y = e^x(x^2-2x+2)+c\right]$

P8. Riešte $y' = e^{x-y}$, $[y = e^y - e^x = c]$

1.3.2 Homogénna rovnica

Diferenciálna rovnica prvého rádu, ktorú možno písať v tvare

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right), \tag{3}$$

kde f je spojitá funkcia na intervale I, sa nazýva homogénna diferenciálna rovnica. Pri riešení tejto rovnice použijeme substitúciu

$$z(t) = \frac{y(t)}{t}, \quad \text{a teda } \ y(t) = tz(t) \ \text{ a } \ y'(t) = z'(t)t + z(t),$$

ktorou prevedieme rovnicu (3) na rovnicu so separovateľnými premennými

$$z'(t)t + z(t) = f(z(t)).$$

Príklad 4 *Riešme diferenciálnu rovnicu*

$$(t-y)\mathrm{d}t + t\mathrm{d}y = 0.$$

Riešenie Danú diferenciálnu rovnicu vieme upraviť na tvar

$$\left(1 - \frac{y}{t}\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}y = 0,$$

$$y' = \frac{y}{t} - 1 = f\left(\frac{y}{t}\right).$$

Použitím substitúcie $z = \frac{y}{t}$ dostávame diferenciálnu rovnicu so separovateľnými premennými

$$z't = -1.$$

Separáciou premenných a následnou integráciou dostávame

$$\int \mathrm{d}z = \int \left(-\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t,$$

$$z = -\ln|t| + c, \quad c \in R.$$

Teda všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice je

$$y = -t\ln|t| + tc, \quad c \in R.$$

Úlohy

1. Riešte $y^2+x^2y'-xyy' = 0,$ $\left[y = c\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\right]$

2. Riešte $xy' = y(\ln y - \ln x),$ $\left[y = x\mathrm{e}^{cx+1}\right]$

3. Riešte $xy' - y = x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},$ $\left[\ln(cx) = \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}\right]$

4. Riešte $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},$ $\left[y^2 = 2x^2\ln(cx)\right]$

5. Riešte $xy' = \sqrt{x^2 - y^2}+y,$ $[y = x\sin(\ln(cx))]$

6. Riešte $y' = \frac{x-y}{x-2y},$ $\left[x^2 - 2xy + 2y^2 = c\right]$

7. Riešte $y' = \frac{y}{x+y},$ $\left[-\frac{y}{x} + \ln y = c, \quad (y \neq 0)\right]$

1.3.3 Lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu

Diferenciálnu rovnicu

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \tag{4}$$

kde $a(t)$, $b(t)$ sú spojité funkcie na intervale I, nazývame lineárnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu.

Ak $b(t) = 0$, potom rovnicu

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \tag{5}$$

nazývame pridruženou homogénnou rovnicou. Ak $b(t) \neq 0$, potom rovnicu (4) nazývame nehomogénnou lineárnou diferenciálnou rovnicou. Pridružená homogénna diferenciálna rovnica je diferenciálna rovnica so separovateľnými premennými, riešime ju teda separáciou premenných

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -a(t)y(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \neq 0.$$

Integrovaním dostávame

$$\ln|y| = -\int a(t)\,\mathrm{d}t + \ln c_1,$$

kde c_1 je ľubovoľná kladná konštanta. Po úprave

$$y = ce^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t},$$

pričom $c = \pm c_1$ je ľubovoľná nenulová konštanta. Pri riešení rovnice sme použili predpoklad $y \neq 0$, ale ľahko overíme, že funkcia $y \equiv 0$ je tiež riešením rovnice (5). Nazývame ho triviálnym riešením. Toto riešenie môžeme získať z posledného vzťahu, ak za konštantu c dosadíme 0. Všeobecné riešenie pridruženej homogénnej rovnice (5) je teda vyjadrené vzťahom

$$y = ce^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t}, \quad c \in R.$$

Metóda variácie konštanty

Zo všeobecnej teórie lineárnych systémov vyplýva: všeobecné riešenie nehomogénnej lineárnej rovnice sa rovná súčtu všeobecného riešenia pridruženej homogénnej rovnice a nejakého partikulárneho riešenia nehomogénnej rovnice. Potrebujeme ešte nájsť partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice (4). Použijeme metódu variácie konštanty, pri ktorej predpokladáme, že poznáme všeobecné riešenie pridruženej homogénnej rovnice, čo je v našom prípade

$$y = ce^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Pri tejto metóde hľadáme partikulárne riešenie rovnice (4) v tvare všeobecného riešenia homogénnej rovnice, iba namiesto konštanty c máme neznámu funkciu $c(t)$. Teda partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$y^* = c(t)e^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Funkciu $c(t)$ určíme tak, aby partikulárne riešenie y^* bolo riešením nehomogénnej rovnice (4). Teda funkciu y^* a jej deriváciu dosadíme do rovnice (4) a vypočítame neznámu funkciu $c(t)$. Dostávame

$$c'(t)e^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t} - c(t)a(t)e^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t} + c(t)a(t)e^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t} = b(t).$$

Po úprave

$$c'(t) = b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Integrovaním vyjadríme funkciu $c(t)$

$$c(t) = \int b(t)e^{\int a(t)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + k, \quad k \in R.$$

Položme $k = 0$, keďže hľadáme jedno partikulárne riešenie, potom máme partikulárne riešenie v tvare

$$y^* = \int b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\; e^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t}$$

a všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice dostaneme ako súčet všeobecného riešenia pridruženej homogénnej rovnice a partikulárneho riešenia nehomogénnej rovnice, teda

$$y = ce^{-\int a(t)\mathrm{d}t} + \int b(t)e^{\int a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\; e^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \quad c \in R.$$

Poznámka 1 *Pri vyjadrovaní partikulárneho riešenia môžeme ponechať integračnú konštantu k a dostaneme hneď všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice.*

Riešenie nehomogénnej rovnice pomocou intergačného faktora

Uvedieme ešte jednu metódu riešenia nehomogénnej lineárnej rovnice, ktorá je založená na vynásobení rovnice (4) vhodnou funkciou, ktorú nazývame integračný faktor (IF).

$$IF = e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Po vynásobení rovnice (4) integračným faktorom, dostávame

$$y'e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t} + a(t)ye^{\int a(t)\,\mathrm{d}t} = b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t},$$

pričom na ľavej strane rovnice sme dostali deriváciu súčinu funkcií $y(t)$ a IF, čo môžeme zapísať

$$\left[ye^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\right]' = b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Našim cieľom je vyjadriť funkciu $y(t)$, čo dosiahneme integrovaním a následnou úpravou

$$ye^{\int a(t)\,\mathrm{d}t} = \int b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + c, \quad c \in R,$$

Dostávame všeobecné riešenie nehomogénnej lineárnej rovnice v tvare

$$y = \int b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\, e^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t} + ce^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t}, \quad c \in R,$$

Poznámka 2 *Môžeme si všimnúť, že všeobecné riešenie nehomogénnej lineárnej rovnice vyjadrené pomocou integračného faktora je samozrejme v rovnakom tvare ako pri vyjadrení metódou variácie konštanty.*

Príklad 5 *Riešme diferenciálnu rovnicu*

$$y' - \frac{2}{t}y = t + 1.$$

Riešenie

Príklad vyriešime obidvoma metódami, aj metódou variácie konštanty, aj pomocou integračného faktora.

1. spôsob: Riešime najprv pridruženú homogénnu rovnicu separáciou premenných.

$$y' - \frac{2}{t}y = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t, \quad y \neq 0.$$

Integrovaním dostávame

$$\ln|y| = 2\ln|t| + \ln c_1, \quad c_1 \in R^+.$$

Po úprave dostávame všeobecné riešenie pridruženej homogénej rovnice

$$y = ct^2, \quad c \in R,$$

kde je samozrejme zahrnuté aj riešenie $y = 0$. V ďalšom kroku nájdeme partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice metódou variácie konštanty, teda riešenie hľadáme v tvare

$$y^* = c(t)t^2.$$

Derivovaním a dosadením do nehomogénnej rovnice máme

$$c'(t)t^2 + c(t)2t - 2tc(t) = t + 1.$$

Vyjadríme funkciu c(t)

$$c'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2},$$

$$c(t) = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \ln|t| - \frac{1}{t} + k, \;\; k \in R$$

Dosadením vypočítanej funkcie $c(t)$ pre $k = 0$ dostávame partikulárne riešenie v tvare

$$y^* = t^2 \ln|t| - \frac{1}{t}.$$

Všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice je vyjadrené ako súčet všeobecného riešenia pridruženej homogénej rovnice a partikulárneho riešenia nehomogénnej rovnice, teda

$$y = ct^2 + t^2 \ln|t| - \frac{1}{t}.$$

2. spôsob: Riešime danú diferenciálnu rovnicu pomocou integračného faktora, ktorý pre našu rovnicu je vyjadrený funkciou

$$IF = e^{-\int \frac{2}{t} \mathrm{d}t} = \frac{1}{t^2}.$$

Vynásobíme danú diferenciálnu rovnicu integračným faktorom

$$y' \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3} y = (t + 1)\frac{1}{t^2},$$

po úprave

$$\left[y \frac{1}{t^2}\right]' = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}.$$

Integrovaním a následnou úpravou dostávame všeobecné riešenie

$$y \frac{1}{t^2} = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \ln|t| - \frac{1}{t} + c, \;\; c \in R$$

$$y = t^2 \ln|t| - \frac{1}{t} + ct^2.$$

Úlohy

P1. Riešte $\quad y' - 5y = 2x,$ $\quad \left[y = -\frac{2x}{5} - \frac{2}{25} + ce^{5x}\right]$

P2. Riešte $\quad y' + \frac{1}{x+1} y = x^2 + 1,$ $\quad \left[y = \frac{\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x}{1+x} - \frac{c}{1+x}\right]$

P3. Riešte $\quad y'+\frac{4x}{x^2+1}\,y=\frac{1}{(x^2+1)^3},$ $\quad \left[y=\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}+\frac{c}{(1+x^2)^2}\right]$

P4. Riešte $\quad y'-y\operatorname{cotg} x=\sin x,$ $\quad [y=x\sin x+c\sin x]$

P5. Riešte $\quad y'-\frac{1}{x}y=x^2e^{-x},$ $\quad \left[y=-x^2e^{-x}-xe^{-x}+xc\right]$

P6. Riešte $\quad y'-\frac{2}{x}y=\ln x,$ $\quad \left[y=-x\ln x-x+x^2c\right]$

P7. Riešte $\quad y'+2xy=4x,$ $\quad \left[y=2+ce^{-x^2}\right]$

1.3.4 Bernoulliho diferenciálna rovnica

Diferenciálnu rovnicu v tvare

$$y'(t)+a(t)y(t)=b(t)y^{\alpha}(t),$$

kde $a(t)$, $b(t)$ sú spojité funkcie na intervale I a α je reálne číslo, nazývame Bernoulliho diferenciálna rovnica. Predpokladáme, že $\alpha\neq 0$ a $\alpha\neq 1$, lebo v týchto prípadoch dostávame lineárnu nehomogénnu rovnicu a lineárnu homogénnu rovnicu. Pre $\alpha>0$ je $y=0$ vždy jedno z riešení Bernoulliho rovnice. Všeobecné riešenie Bernoulliho rovnice nájdeme pomocou substitúcie

$$z(t)=y^{1-\alpha}(t),\;\; z'(t)=(1-\alpha)y^{-\alpha}(t)y'(t),$$

ktorou prevedieme rovnicu na lineárnu diferenciálnu rovnicu. Uvedieme príklad.

Príklad 6 *Riešme diferenciálnu rovnicu*

$$y'-\frac{y}{t}=-\frac{y^2}{t},\quad t\neq 0$$

Riešenie Keďže v tomto príklade $\alpha=2$, zavedieme substitúciu

$$z=y^{-1},\quad z'=-y^{-2}y'.$$

Pred použitím substitúcie je výhodne predeliť rovnicu funkciou y^2, pričom predpokladáme ďalej, že $y\neq 0$, ale nezabudneme, že rovnica má aj riešenie $y=0$ keďže $\alpha=2$. Predelením a použitím substitúcie dostávame

$$\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{yt}=-\frac{1}{t},$$

$$z'+\frac{z}{t}=\frac{1}{t}.$$

Dostali sme lineárnu diferenciálnu rovnicu, ktorú vyriešime pomocou integračného faktora. V našom príklade $IF=e^{\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}=t$. Rovnicu vynásobíme IF, integrujeme a vyjadríme funkciu z(t).

$$z't+z=1,$$

$$(zt)' = 1,$$
$$zt = t + c, \quad c \in R,$$
$$z = \frac{t+c}{t}.$$

Vrátime sa k pôvodnej neznámej funkcii cez substitučný vzťah $z = y^{-1}$ a vyjadríme všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice

$$y = \frac{t}{t+c}, \quad c \in R \quad \text{a} \quad x = 0.$$

Úlohy

P1. Riešte $\quad y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x,$ $\quad \left[y = \frac{2}{-x\ln^2 x + cx}, \qquad y = 0\right]$

P2. Riešte $\quad y' - 2y\mathrm{e}^x = 2\sqrt{y}\mathrm{e}^x,$ $\quad \left[\sqrt{y} = -1 + c\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}, \qquad y = 0\right]$

P3. Riešte $\quad 2y'\sin x + y\cos x = y^3 \sin^2 x,$ $\quad \left[\frac{1}{y^2} = -x\sin x + c\cos x, \qquad y = 0\right]$

P4. Riešte $\quad y' + \frac{2}{x}y = x^4 y^2,$ $\quad \left[y = \frac{3}{cx^2 - x^5}, \qquad y = 0\right]$

P5. Riešte $\quad y' + y = x\sqrt{y},$ $\quad \left[y = \left(c\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + x - c\right)^2, \qquad y = 0\right]$

P6. Riešte $\quad xy' - y = \frac{x^2}{y},$ $\quad \left[y^2 = x^2 \ln x^2 + cx^2\right]$

1.3.5 Exaktná diferenciálna rovnica

Rovnica

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0,$$

resp.

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{6}$$

sa nazýva exaktná diferenciálna rovnica, ak existuje funkcia $F(x,y)$ taká, že

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{7}$$

Exaktnú diferenciálnu rovnicu (6) vieme zapísať v tvare

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(x,y)) = 0$$

a teda riešením exaktnej rovnice je potom funkcia implicitne určená vzťahom

$$F(x,y) = c, \quad c \in R.$$

Funkcia $F(x,y)$ so spomínanými vlastnosťami existuje ak je splnená tzv. podmienka exaktnosti

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{8}$$

Teda pri riešení diferenciálnej rovnice v tvare $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ overíme či platí podmienka exaktnosti (8). Ak áno, všeobecné riešenie vyjadríme v tvare $F(x,y) = c, \quad c \in R$, pričom funkciu F vyjadríme na základe podmienok (7).

Príklad 7 *Riešme diferenciálnu rovnicu*

$$(y^2 + \cos x)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0.$$

Riešenie Najprv overíme, či daná diferenciálna rovnica je exaktná. Vypočítame parciálne derivácie funkcií M a N, pričom v našom príklade sú to funkcie $M(x,y) = y^2 + \cos x$ a $N(x,y) = 2xy$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y.$$

Keďže platí podmienka exaktnosti $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, daná diferenciálna rovnica je exaktná a má riešenie $F(x,y) = c$, kde funkciu F vyjadríme z nasledujúcich podmienok:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = y^2 + \cos x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = 2xy.$$

Integrovaním prvého vzťahu dostávame

$$F(x,y) = \int (y^2 + \cos x)\,\mathrm{d}x = y^2x + \sin x + k(y).$$

Funkcia F je čiastočne vyjadrená, potrebujeme ešte konkretizovať funkciu $k(y)$. Preto zderivujeme F podľa premennej y a využijeme informáciu a tejto parciálnej derivácii

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + k'(y) = 2xy.$$

Teda

$$k'(y) = 0,$$

$$k(y) = k, \quad k \in R.$$

Za konštantu k zvolíme napr. $k = 0$ (Stačí nám jedna konkrétna funkcia F) a dostávame predpis funkcie F

$$F(x,y) = y^2x + \sin x.$$

Všeobecné riešenie danej exaktnej rovnice máme vyjadrené implicitne vzťahom

$$F(x,y) = y^2x + \sin x = c, \quad c \in R.$$

Prirodzená otázka je, čo ak podmienka exaktnosti pri riešení diferenciálnej rovnice tvaru $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ nie je splnená? V tomto prípade je cieľom vhodnou úpravou previesť rovnicu na exaktnú. Vhodná úprava je vynásobenie rovnice samozrejme nenulovou funkciou, ktorú nazývame integračný faktor IF (s podobnou úpravou sme sa stretli pri riešení lineárnej diferenciálnej rovnici prvého rádu). V akom tvare má byť IF, aby sme dosiahli cieľ? Kvôli jednoduchosti budeme za integračný faktor uvažovať iba funkciu jednej premennej. Teda buď

$$IF = \mu(x),$$

resp.

$$IF = \mu(y).$$

Zaoberajme sa najskôr prípadom, že $IF = \mu(x)$. Vynásobíme rovnicu (6) funkciou $\mu(x)$ a dostávame

$$\mu(x)M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x)N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Z podmienky exaktnosti tejto rovnice dostávame

$$\frac{\mathrm{d}(\ln\mu(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x).$$

Kvôli jednoduchšiemu zápisu sme zaviedli pomocnú funkciu $\varphi(x)$. Integračný faktor je vyjadrený v tvare

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\mathrm{d}x}.$$

Uvažujme ďalej, že integračný faktor je funkcia premennej y, teda $IF = \mu(y)$. Opäť vynásobíme rovnicu (6) funkciou $\mu(y)$ a následnou podmienkou exaktnosti dostávame vyjadrenie pre IF

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)\mathrm{d}y}, \text{ kde } \psi(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

Poznámka 3 *Poznamenajme, že funkcie $\varphi(x)$ a $\psi(y)$ sú funkciami jednej premennej, aj keď sú vytvorené z parciálnych derivácií funkcií M a N.*

Príklad 8 *Riešme danú diferenciálnu rovnicu pomocou integračného faktora $\mu(x)$.*

$$(1 - x^2 y)\,\mathrm{d}x + x^2(y - x)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Riešenie Vypočítame parciálne derivácie funkcií $M = 1 - x^2 y$ a $N = x^2 y - x^3$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x^2 \neq 2xy - 3x^2 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

pričom vidíme samozrejme, že podmienka exaktnosti nie je splnená. Vyjadríme integračný faktor

$$\varphi(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\frac{2}{x}.$$

$$IF = \mu(x) = e^{\int \varphi(x)\mathrm{d}x} = e^{\int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2}.$$

Vynásobíme danú rovnicu funkciou $\mu(x)$ a dostávame

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)\mathrm{d}x + (y - x)\mathrm{d}y = 0.$$

Získaná rovnica je už exaktná, overíme platnosť podmienky exaktnosti

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Riešením takto upravenej už exaktnej rovnice je funkcia $F(x, y) = c$, kde

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y - x.$$

Po vyjadrení dostávame všeobecné riešenie

$$F(x, y) = -yx + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} = c, \quad c \in R.$$

Úlohy

Riešte dané exaktné diferenciálne rovnice

P1. $\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right)\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y = 0,$ $\left[x + y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} = c\right]$

P2. $\left(6xy + x^2 + 3\right)\mathrm{d}y + \left(3y^2 + 2xy + 2x\right)\mathrm{d}x = 0,$ $\left[3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y = c\right]$

P3. $\left(x^3 + 3xy^2\right)\mathrm{d}x + \left(y^3 + 3x^2y\right)\mathrm{d}y = 0,$ $\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = c\right]$

P4. $\left(2x^3 + xy^2\right)\mathrm{d}x + \left(2y^3 + x^2y\right)\mathrm{d}y = 0,$ $\left[x^4 + x^2y^2 + y^4 = c\right]$

P5. $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = 0,$
$[x\sin y - y\cos x + \ln|xy|]$

Dané diferenciálne rovnice riešte pomocou integračného faktora $\mu(x)$.

P1. $\left(x + y^2\right)\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0,$ $\left[\mu(x) = x^{-2}, \quad \ln x - \frac{y^2}{x} = c\right]$

P2. $\left(2x^2y + 2y + 5\right)\mathrm{d}x + \left(2x^3 + 2x\right)\mathrm{d}y = 0,$

$\left[\mu(x) = (x^2+1)^{-1}, \quad 2xy + 5\mathrm{arctg}x = c\right]$

P3. $\left(x^2+y\right)\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0,$ $\left[\mu(x) = x^{-2}, \quad y = x^2 - cx\right]$

P4. $(x + \sin x + \sin y)\,\mathrm{d}x + \cos y\,\mathrm{d}y = 0,$
$[\mu(x) = \mathrm{e}^x, \quad 2\mathrm{e}^x \sin y + 2\mathrm{e}^x(x-1) + \mathrm{e}^x(\sin x - \cos y) = c]$

Dané diferenciálne rovnice riešte pomocou integračného faktora $\mu(y)$.

P1. Riešte $y^2\,\mathrm{d}x + (xy-1)\,\mathrm{d}y = 0,$ $\left[\mu(x) = y^{-1}, \quad xy - \ln y = c\right]$

P2. Riešte $\left(1 + 3x^2 \sin y\right)\mathrm{d}x - x \operatorname{cotg} y\,\mathrm{d}y = 0,$ $\left[\mu(x) = (\sin y)^{-1}, \quad \dfrac{x}{\sin y} + x^3 = c\right]$

P3. Riešte $2xy\,\mathrm{d}x + \left(y^2 - 3x^2\right)\,\mathrm{d}y = 0,$ $\left[\mu(x) = y^{-4}, \quad \dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} = c\right]$

P4. Riešte $\left(xy^2 + y\right)\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0,$ $\left[\mu(x) = y^{-2}, \quad x^2y + 2x = cy\right]$

P5. Riešte $(\sin x + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x + \cos x\,\mathrm{d}y = 0,$ $[\mu(x) = \mathrm{e}^{-y}, \quad \mathrm{e}^{-y}\cos y = x + c]$

P6. Riešte $y\,(2xy-1)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0,$ $\left[\mu = y^{-2}, \quad x^2y - x + cy = 0\right]$

2 Aplikácie obyčajných diferenciálnych rovníc 1. a 2. rádu

2.1 Úvod - zostavovanie diferenciálnych rovníc

Nech je daná funkcia $y(t)$, ktorá môže vyjadrovať napr. dráhu v čase t, teplotu telesa v čase t, cenu tovaru v čase t, množstvo rádioaktívnej látky v čase t, veľkosť populácie v čase t (pri veľkej populácii môžeme funkciu považovať za spojitú). Naším cieľom je určiť vývoj zmeny funkcie $y(t)$, teda ako sa menia hodnoty funkcie v istom časovom intervale $[t, t+h]$. Podiel

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

vyjadruje túto zmenu a je to priemerná rýchlosť zmeny funkcie.

Napríklad, ak má populácia prírastok 300 jedincov za 3 mesiace, tak podiel $\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = \frac{300}{3} = 100$ vyjadruje priemerný prírastok (priemernú rýchlosť rastu) populácie za 1 mesiac. V mnohých úlohách nás nebude zaujímať priemerná rýchlosť zmeny funkcie, ale to ako sa mení funkcia v danom časovom okamžiku, teda okamžitá rýchlosť. Matematicky to vieme vyjadriť nasledovne

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h}.$$

Uvedená limita je derivácia funkcie $y(t)$ v bode t. Teda

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} = y'(t).$$

Derivácia funkcie $y(t)$ v bode t vyjadruje okamžitú rýchlosť zmeny tejto funkcie v čase t.

Tento poznatok využívame pri riešení praktických úloh pomocou diferenciálnych rovníc, keďže derivácia funkcie je výborný prostriedok na popísanie zmien funkcie. Praktické úlohy, ktoré budeme riešiť pomocou diferenciálnych rovníc, môžeme rozdeliť na 2 skupiny. Prvá pozostáva z úloh, kde informácia o zmene funkcie bude priamo v zadaní úlohy a vyplýva z opakovaných pozorovaní skúmaného javu. Druhá skupina obsahuje úlohy, v ktorých informácia o zmene funkcie bude vyplývať z fyzikálnych zákonov (napr. zákon o ochladzovaní, 2. Newtonov pohybový zákon,...).

Uvedieme niekoľko príkladov na 1. skupinu úloh.

Príklad 9 *Istý druh stromu (než dosiahne zrelosť) rastie rýchlosťou nepriamoúmernou svojej výške. Za prvé 3 roky vyrástol* $1\,m$*. Pri sadení mal* $0,5m$*. Vyjadrime diferenciálnu rovnicu popisujúcu rast stromu a vypočítajme výšku stromu na konci 4. roku.*

Riešenie Nech funkcia $y(t)$ vyjadruje výšku stromu v čase t. Vieme, že pri zasadení mal strom výšku $0,5\,m$, čo zapíšeme $y(0) = 0,5\,m$. (Čas nula je v tomto príklade zasadenie stromu). Za prvé 3 roky vyrástol $1\,m$, teda $y(3) = 1,5\,m$. Strom rastie rýchlosťou (informácia o zmene = derivácia funkcie) nepriamoúmernou svojej výške, čo vyjadríme nasledujúcou diferenciálnou rovnicou

$$y'(t) = \frac{k}{y(t)}, \quad k > 0.$$

Diferenciálnu rovnicu riešime separáciou premenných a dostávame

$$\int y \, \mathrm{d}y = \int k \, \mathrm{d}t,$$

$$y(t) = \sqrt{2kt + 2c}.$$

Konštanty k a c vypočítame zo začiatočných podmienok $y(0) = 0,5\,m$ a $y(3) = 1,5\,m$.

$$k = \frac{1}{3}, \quad c = 0,125.$$

Predpis funkcie, ktorá vyjadruje výšku stromu v čase t je

$$y(t) = \sqrt{\frac{2}{3}t + 0,25}.$$

Výšku stromu na konci 4. roku vypočítame

$$y(4) = \sqrt{\frac{2}{3}4 + 0,25} \doteq 1,71m.$$

Úlohy

P1. Liana rastie prvých 5 rokov rýchlosťou nepriamoúmernou svojej dĺžke. Po roku má dĺžku 2 metre a dvoch rokoch má dĺžku 3 metre. Ďalších 5 rokov rýchlosť jej rastu je nepriamoúmerná druhej mocnine jej dĺžky (s rovnakou konštantou úmernosti ako prvých 5 rokov). Aká dlhá bude po siedmych rokoch.

$[5,1\,m]$

P2. Strom rastie priamo úmerne súčinu *výška stromu* krát *rozdiel medzi výškou stromu v dospelosti a súčasnou výškou.* Výška stromu z dospelosti je 120 m. V čase zasadenia meral 1m a po dvoch rokoch mal výšku 3m. Vyjadrite rovnicu rastu stromu v závislosti na čase (stačí v implicitnom tvare).

$$\left[\ln \frac{119y}{120-y} = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{119}{39}\right) t\right]$$

P3. Batéria sa nabíja rýchlosťou nepriamoúmernou množstvu energie na ktorú je práve nabitá. Ak k úplnému nabitiu úplne vybitej batérie sú potrebné 2 hodiny, tak

a) ako dlho bude trvať nabitie batérie na polovičnú kapacitu.

b) ako dlho bude trvať úplné nabitie batérie, ak je batéria už nabitá na tretinu svojej kapacity.

$$\left[a)0,5hod. \;\; b)\tfrac{16}{9}hod.\right]$$

2.2 Exponenciálny pokles - úlohy na ochladzovanie

Príklad 10 *Teplota kávy je 95°C, po minúte sa ochladí na 85°C. Teplota prostredia (kaviareň je klimatizovaná, predpokladáme konštantnú teplotu) je 20°C. Vyjadrime funkciu teploty kávy z závislosti na čase. Vypočítajme teplotu kávy po 3 minútach. Vypočítajme, kedy bude mať káva 60°C, pretože takúto kávu máme najradšej.*

Riešenie V zadaní úlohy nemáme informáciu o rýchlosti zmeny funkcie (teplota kávy). Použijeme Newtonov zákon o ochladzovaní:

Teplejšie teleso sa v chladnejšom prostredí ochladzuje rýchlosťou priamoúmernou rozdielu teplota objektu a teplota prostredia.

Zavedieme označenie, nech $x(t)$ vyjadruje teplotu kávy v čase t. Nech konštanta T vyjadruje konštantnú teplotu prostredia. V súlade so zákonom o ochladzovaní, môžeme zmenu teploty kávy vyjadriť pomocou diferenciálnej rovnice

$$x'(t) = -k(x(t) - T), \quad k > 0.$$

Konštanta k zahŕňa veľa faktorov, ktoré ovplyvňujú rýchlosť ochladzovania: tvar šálky (veľkosť povrchu), materiál z ktorého je šálka vyrobená,... .

Diferenciálnu rovnicu riešime separáciou premenných a dostávame všeobecné riešenie

$$x(t) = 20 + ce^{-kt}.$$

Konštanty k a c vyjadríme na základe vstupných údajov (teplota kávy na začiatku a po 1 min), čo zapíšeme

$$x(0) = 95°C, \quad x(1) = 85°C.$$

Dosadením týchto údajov do všeobecného riešenia dostávame $c = 75$ a $k = \ln \frac{15}{13}$. Teda teplotu kávy v závislosti na čase máme vyjadrenú funkciou

$$x(t) = 20 + 75\left(\frac{65}{75}\right)^t.$$

Ďalšou úlohou bolo vyjadriť teplotu kávy po 3 min, čo vypočítame dosadením do získaného vzťahu za $t = 3$. Dostávame

$$x(3) = 20 + 75\left(\frac{65}{75}\right)^3 \doteq 68,82°C.$$

Čas t_1, kedy bude mať káva 60°C vypočítame zo vzťahu

$$x(t_1) = 60 = 20 + 75\left(\frac{65}{75}\right)^{t_1}.$$

Požadovaná teplota kávy bude približne po 4 min a 24 sek.

Príklad 11 *Telo mŕtvoly bolo objavené o 7:30 hod. O 8:20 hod. prišiel lekár, ktorý zmeral teplotu mŕtvoly: $32,6°C$. Po hodine bola teplota mŕtvoly $31,4°C$. Teplota miestnosti, v ktorej sa telo nachádza je $21,1°C$. Zistime čas vraždy, ak predpokladáme telesnú teplotu obete pred smrťou $37°C$.*

Riešenie Aj v tomto príklade budeme vychádzať z Newtonovho zákona o ochladzovaní. Ak označíme funkciou $x(t)$ telesnú teplotu obete, T teplotu miestnosti, ktorú považujeme za konštantnú, potom diferenciálna rovnica

$$x'(t) = -k(x(t) - T), \quad k > 0$$

vyjadruje zmenu teploty. Zo zadania úlohy vyplývajú nasledujúce vstupné údaje

$$x(0) = 32,6°C, \quad x(1) = 31,4°C, \quad T = 21,1°C,$$

pričom ako nulový čas sme zobrali prvé meranie teploty, teda 8:20 hod. Zostavenú diferenciálnu rovnicu riešime separáciou premenných a všeobecné riešenie je

$$x(t) = 21,1 + ce^{-kt}.$$

Konštanty k, c vypočítame pomocou začiatočných podmienok (meraní) a dostávame $c = 11,5$ a $e^{-k} = \frac{10,3}{11,5}$. Teda funkcia vyjadrujúca závislosť teploty tela obete od času je

$$x(t) = 21,1 + 11,5\left(\frac{10,3}{11,5}\right)^t.$$

Čas vraždy t_1 vypočítame z rovnice

$$37 = 21,1 + 11,5\left(\frac{10,3}{11,5}\right)^{t_1}.$$

Dostávame $t_1 = -2,951 = -2$ hod. 57 min. Po prepočte vzhľadom k našej časovej nule, čas vraždy je 5:23 hod.

Príklad 12 *Horár má podozrenie, že pytliaci zastrelili diviaka, preto kvôli alibi je potrebné zistiť čas smrti diviaka. Máme nasledovné údaje: teplota diviaka pri nájdení $30°C$, po hodine $25°C$. Teplota vzduchu sa mení tak, že každú hodinu spojite klesla o $1°C$. V momente nájdenia diviaka bola teplota vzduchu $0°C$. Nájdime čas úmrtia diviaka, ak teplota živého diviaka je $37°C$.*

Riešenie Označme $x(t)$ funkciu, ktorá bude vyjadrovať teplotu diviaka v čase t. Zo zadania máme nasledujúce vstupné údaje: $x(0) = 30$°C, $x(1) = 25$°C. V tomto príklade máme prostredie, ktorého teplota sa mení, nech preto funkcia $a(t)$ vyjadruje meniacu sa teplotu vzduchu. Zo zadanie vieme, že $a(0) = 0°\text{C}$. Ďalej vieme, že teplota vzduchu každú hodinu klesne o 1°C, čo vieme vyjadriť pomocou diferenciálnej rovnice

$$a'(t) = -1.$$

Vyriešením tejto rovnice pri danej začiatočnej podmienke dostávame predpis pre funkciu $a(t)$.

$$a(t) = -t.$$

Ochladzovanie tela diviaka sa riadi Newtonovým zákonom o ochladzovaní, čo v tomto príklade vyjadríme diferenciálnou rovnicou

$$x'(t) = -k(x(t) - a(t)), \quad k > 0.$$

Dosadením predpisu funkcie $a(t)$ a úpravou dostávame lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$x'(t) + kx(t) = -kt.$$

Rovnicu riešime pomocou integračného faktora, v tomto príklade $IF = e^{kt}$. Vynásobením rovnice integračným faktorom, dostávame

$$\left(x(t)e^{kt}\right)' = -kte^{kt}.$$

Integrovaním máme všeobecné riešenie DR

$$x(t) = -t + \frac{1}{k} + ce^{-kt}.$$

Dosadením vstupných údajov pre teplotu diviaka dostávame

$$c = 30 - \frac{1}{k}$$

$$26 = \frac{1}{k} + ce^{-kt}.$$

Dosadením vyjadrenia c dostávame rovnicu

$$26e^{kt}k - e^{kt} - 30k + 1 = 0.$$

Presné riešenie zostavenej rovnice nevieme nájsť, preto použijeme vhodnú numerickú metódu. Zvolili sme Newtonovu metódu. Využitím matematického softvéru Matlab, v ktorom sme naprogramovali spomínanú metódu dostávame $k \approx 0,17895$ a $c \approx 24,41191$. Dostávame funkciu

$$x(t) = -t + \frac{1}{0,17895} + 24,41191e^{-0,17895t},$$

ktorá vyjadruje teplotu diviaka v závislosti na čase. Pre zistenie času zabitia diviaka do získanej závislosti dosadíme teplotu 37°C. Po vyriešení, opäť použitím Newtonovej metódy dostávame

$$t \approx -1,193.$$

Teda diviak bol zastrelený 1 hodinu a 12 min pred jeho nájdením.

Úlohy

P1. Chlieb ihneď po upečení má teplotu 180°C. Po 1/2 hodine jeho teplota klesne na 100°C. Kedy ho budeme môcť jesť (20°C) ak je uložený v „klimatizovanej komore“, ktorá má teplotu 15°C.

$[t = 2,64\,\text{hod}]$

P2. S partiou kamarátov sa chystáte pozerať Ligu majstrov (začiatok 8:45 p.m.). O 7:00 p.m. dáte pivo s teplotou $20°C$ do chladničky so stálou teplotou $T = 4°C$. Po hodine sa ochladí na $14°C$. Akú teplotu bude mať pivo na začiatku futbalového stretnutia?

$[11,03°C]$

P3. Telo mŕtvoly bolo objavené o 17:00. O 17:30 prišiel obhliadajúci lekár, ktorý zistil teplotu tela 29° C. Po hodine bola teplota tela $27,5°$ C. Teplota miestnosti je 22° C. Ak predpokladáme, že smrť nastala v tejto miestnosti, zistite čas smrti.

$[t = 14:20]$

2.3 Exponenciálny pokles - rádioaktívny rozpad

Nech $Q(t)$ vyjadruje množstvo (počet atómov) rádioaktívnej látky v čase t. Rýchlosť rozpad rádioaktívnych atómov je priamoúmerná celkovému počtu atómov, čo môžeme vyjadriť diferenciálnou rovnicou

$$Q'(t) = -kQ(t), \quad k > 0.$$

Nech $Q(0) = Q_0$, potom riešením diferenciálnej rovnice a dosadením uvedenej začiatočnej podmienky dostávame rovnicu tzv. exponenciálneho poklesu

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}.$$

Pre rádioaktívne látky je charakteristická konštanta: polčas rozpadu. Je to čas, za ktorý sa rozpadne polovičné množstvo látky z pôvodného množstva. Označme T polčas rozpadu, teda môžeme písať

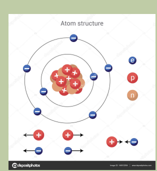
$$Q(T) = \frac{Q_0}{2} = -ke^{-kT}.$$

Z uvedeného dostávame vyjadrenie konštanty k pomocou hodnoty T, ktorú vieme pre konkrétnu látku vyhľadať v príslušných tabuľkách

$$k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Uvedieme niekoľko úloh na rádioaktívny rozpad látok, v ktorých budeme vyžívať to, že rozpad sa riadi exponenciálnym poklesom.

Príklad 13 *Aké množstvo $Ra226$ zostane zo $150mg$ vzorky po 100 rokoch?*



Riešenie Pri riešení vychádzame z odvodenej rovnice, ktorou sa riadi rádioaktívny rozpad

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t},$$

pričom v našom príklade $Q_0 = 150mg$ a hodnotu polčasu rozpadu použijeme $T = 1622$ rokov. Po dosadení

$$Q(t) = 150 e^{\frac{-\ln 2}{1622} t}.$$

Množstvo Ra po 100 rokoch je 143,7 mg.

Príklad 14 *Množstvo rádioaktívneho izotopu jódu 131 (I131) v mori pri japonskej elektrárni Fukušima I je 3355-krát vyššie ako povoľujú normy. Ak nedôjde k ďalšiemu úniku, kedy bude množstvo jódu v norme? (správa z tlače, marec 2011)*

Riešenie Polčas rozpadu I131 je 8 dní. Ak označíme normu (povolené množstvo rádioaktívnej látky) ako N, potom začiatočná hodnota v našom príklade je $Q_0 = 3355N$. Dosadením do rovnice, ktorou sa rozpad riadi, dostávame

$$Q(t) = 3355 N e^{\frac{-\ln 2}{8} t}.$$

Máme zistiť, kedy bude množstvo rádioaktívneho jódu v norme, preto do vzťahu dosadíme $Q(t) = N$ a vypočítame čas

$$N = 3355 N e^{\frac{-\ln 2}{8} t}$$

Rádioaktívny I131 bude v povolenom množstve za 94 dní.

Poznámka 4 *Rádioaktívny rozpad atómov (konkrétne C14) sa využíva aj pri známej metóde zisťovania veku organických zvyškov, teda fosílií. Princíp tejto tzv. Uhlíkovej metódy je založený na tom, že v živých organizmoch sa nachádza ako stabilný C12, tak aj nestabilný C14. Počas života organizmu je pomer týchto izotopov konštantný. Po smrti organizmu C12 ostáva, ale C14 sa rozpadá na stabilný N14 a uvoľňuje sa slabá beta častica. Teda pomer sa mení v závislosti na veku organických zvyškov a určuje vlastne vek fosílie. Pri výpočtoch budeme používať polčas rozpadu uhlíka C14* $T = 5730$ *rokov.*

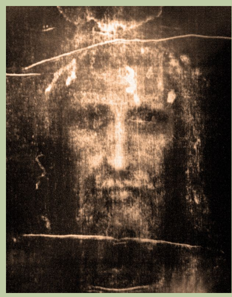
Príklad 15 *Polčas rozpadu C14 je 5730 rokov. Aká stará je kosť nájdená pri vykopávkach, ak obsahuje 9-krát menej uhlíka C14, ako je to pri žijúcich organizmoch.*

Riešenie Nech $Q(t)$ vyjadruje množstvo uhlíka C14 v čase t, nech Q_0 vyjadruje začiatočnú hodnotu, teda množstvo C14 v žijúcom organizme. Aktuálna hodnota je $Q(t) = \frac{Q_0}{9}$. Dosadením do vzťahu, ktorým sa riadi rádioaktívny rozpad, dostávame

$$\frac{Q_0}{9} = Q_0 e^{\frac{-\ln 2}{5730} t}.$$

Po úprave a vyjadrení času t dostávame, že kosť je stará 18309 rokov.

Príklad 16 *Uhlíková metóda bola použitá aj pri určovaní veku Turínskeho plátna (výskum prebiehal v r.1988). Tri laboratóriá (Zurich, Oxford, Tuscon) namerali vo vzorke plátna 93 % C14 oproti množstvu prítomnom v žijúcom organizme.*



Riešenie Nech $Q(t)$ vyjadruje množstvo uhlíka C14 v čase t, nech Q_0 vyjadruje začiatočnú hodnotu, teda množstvo C14 v plátne v čase jeho vzniku. Aktuálna hodnota, teda v roku 1988 je $0,93Q_0$. Dosadením do rovnice exponenciálneho poklesu dostávame

$$0,93Q_0 = Q_0 e^{\frac{-\ln 2}{5730}t}$$

Po vyjadrení času dostávame, že plátno je staré približne 600 rokov a teda jeho vznik podľa tohto výpočtu sa datuje okolo roku 1388.

Úlohy

P1. Krátko po vypití pohárika alkoholu stúpne hladina alkoholu v krvi na $0,3mg/l$. Po hodine kleslo množstvo na hodnotu $0,15mg/l$ Ako dlho potrvá, než budete môcť bezpečne viesť auto, ak policajnými prístrojmi sa dá zistiť alkohol od úrovne $0,08mg/l$?
Poznámka: Odbúravanie alkoholu krvi sa riadi taktiež exponenciálnym poklesom.

$[t = 1,9\,\text{hod}]$

P2. Na zistenie veku fosílií nájdených v hlbokých morských sedimentoch sa používa radioaktívne berýlium. Jeho polčas rozpadu je $4,6.10^6$ rokov. Nájdite vek fosílie, ak obsahuje 20% radioaktivity prítomnej v živých organizmoch.

$\left[10,7.10^6\text{rokov}\right]$

2.4 Exponenciálny rast

Nech $Q(t)$ predstavuje veličinu, ktorá rastie rýchlosťou úmernou samotnému $Q(t)$, čo môžeme vyjadriť diferenciálnou rovnicou

$$Q'(t) = kQ(t), k > 0.$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice a použitím začiatočnej podmienky $Q(0) = Q_0$ dostávame

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}.$$

Túto rovnicu nazývame rovnicou exponenciálneho rastu. Exponenciálnym rastom sa riadi napr. rozmnožovanie baktérií v laboratórnych podmienkach, rast populácie (ale iba isté obmedzené časové obdobie). Spomínaný model, pri ktorom rastie populácia exponenciálne sa nazýva Malthusov populačný model.

Príklad 17 *Na začiatku pokusu máme 5000 baktérií. Po 1 hodine ich je 7500. Koľko baktérií bude po 10 hodinách pokusu?*

Riešenie Nech $Q(t)$ vyjadruje počet baktérií v čase t. Keďže sa množenie baktérií riadi exponenciálnym rastom, použijeme rovnicu

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}.$$

Dosadením začiatočných podmienok $Q_0 = 5000$ a $Q(1) = 7500$ vyjadríme konštantu k. Rovnica, ktorou sa riadi rast baktérií je

$$Q(t) = 5000(1,5)^t.$$

Po 10 hodinách je počet baktérií $Q(10) = 5000(1,5)^{10} = 288325$.

Úlohy

P1. Ak prírastok populácie je 2%za rok, kedy dôjde k zdvojnásobeniu populácie?

[$t = 35$ rokov]

2.5 Verhulstov logistický model

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli základný populačný model, v ktorom populácia rastie exponenciálne. Nevýhodou tohto modelu je jeho nepoužiteľnosť pre väčšie časové obdobia (pre $t \to \infty$ $Q(t) \to \infty$). Populácia (ľudia, zvieratá) v reálnych podmienkach samozrejme nerastie exponenciálne ale jej rast ovplyvňujú aj iné faktory ako choroby, vojny, súperenie o priestor, potravu,... . Preto belgický matematik Verhulst navrhol vylepšiť populačný model pridaním kompenzačného člena, ktorý vyjadruje spomínané spomaľujúce faktory. Základný predpoklad, že rýchlosť rastu populácie je priamo úmerná veľkosti populácie zostáva a pridaný je člen vyjadrujúci spomalenie rastu. Nech $p(t)$ je veľkosť populácie v čase t, potom môžeme rast populácie vyjadriť diferenciálnou rovnicou

$$p'(t) = ap(t) - bp^2(t), a > 0, b > 0, a \gg b.$$

Vplyv kompenzačného člena $bp^2(t)$ sa prejavuje málo pri nízkych hodnotách populácie, jeho vplyv je výrazný pri vysokých hodnotách populácie $p(t)$. Skôr ako budeme riešiť zostavenú diferenciálnu rovnicu, urobíme analýzu grafu riešenia $p(t)$. Nech veľkosť populácie v čase 0 je $p(0) = p_0 > 0$. Ďalej predpokladáme rast populácie, teda $p'(t) > 0$. Položme otázku: kedy sa rast populácie zastaví? Ak $p'(t) = 0$, teda

$$p'(t) = ap(t) - bp^2(t) = p(t)(a - bp(t)) = 0 \iff p(t) = \frac{a}{b}.$$

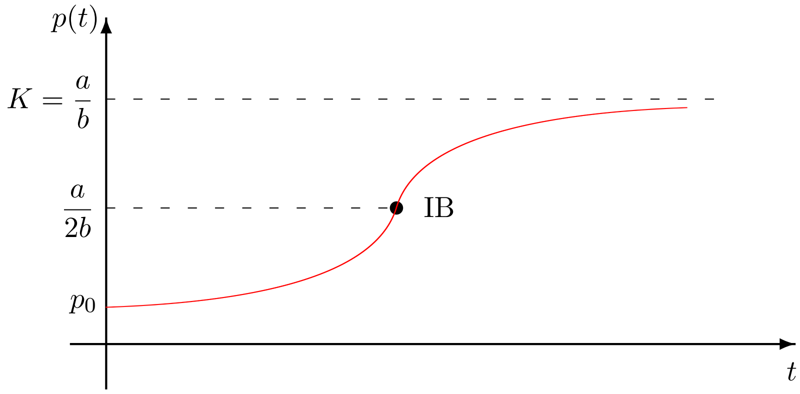
Hodnotu $\frac{a}{b}$, kedy už populácia nerastie nazývame kapacitou prostredia a označujeme $K = \frac{a}{b}$. Pre ďalšiu analýzu grafu vypočítame druhú deriváciu

$$p''(t) = ap'(t) - 2bp(t)p'(t).$$

Vypočítame nulový bod druhej derivácie

$$p''(t) = ap'(t) - 2bp(t)p'(t) = p'(t)(a - 2bp(t)) = 0 \iff p(t) = \frac{a}{2b}.$$

Navyše pre $p(t) < \frac{a}{2b}$ dostávame $p''(t) > 0$ a teda funkcia $p(t)$ je konvexná a pre $p(t) > \frac{a}{2b}$, je $p''(t) < 0$ a teda funkcia $p(t)$ je konkávna. Funkcia $p(t)$ sa v bode $\frac{a}{2b} = \frac{K}{2}$ mení z konvexnej na konkávnu, teda je to inflexný bod. Navyše v tomto bode je maximum prvej derivácie a teda dochádza k najrýchlejšiemu rastu populácie. Teda populácia rastie najrýchlejšie, ak jej veľkosť dosahuje polovicu kapacity. Zistené vlastnosti funkcie $p(t)$ zakreslíme do grafu.



Graf funkcie, ktorá popisuje rast populácie pomocou Verhulstovho logistického modelu nazývame logistická krivka. V ďalšom budeme riešiť zostavenú diferenciálnu rovnicu

$$p'(t) = ap(t) - bp^2(t),$$

pri začiatočnej podmienke $p(0) = p_0$. Separujeme premenné

$$\frac{dp}{ap - bp^2} = dt.$$

Po rozklade na parciálne zlomky a integrovaním dostávame

$$\frac{1}{a}\int \left(\frac{1}{p} + \frac{b}{a - bp}\right) \mathrm{d}p = \int 1 \, \mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{a}(\ln p - \ln(a - bp)) = t + c,$$

$$\frac{1}{a} \ln \frac{p}{a - bp} = t + c. \tag{2.1}$$

Dosadením začiatočnej podmienky $p(0) = p_0$ vypočítame integračnú konštantu

$$c = \frac{1}{a} \ln \frac{p_0}{a - bp_0}.$$

Vyjadrenú konštantu c dosadíme do riešenia 2.1 a následnými úpravami osamostatníme $p(t)$. Dostávame

$$p(t) = \frac{e^{at} a p_0}{e^{at} b p_0 + a - bp_0}.$$

Ďalšími úpravami a využitím označenia pre kapacitu prostredia $K = \frac{a}{b}$ máme predpis pre funkciu, ktorá vyjadruje veľkosť populácie v čase t

$$p(t) = \frac{K p_0}{p_0 + (K - p_0)e^{-at}}. \tag{2.2}$$

Funkciu 2.2 nazývame logistická funkcia, ktorej grafom je logistická krivka.

Pri riešení konkrétnych úloh je potrebné mať ešte 2 začiatočné podmienky (2 merania veľkosti populácie), aby sme vypočítali konštanty a, K. Kvôli jednoduchšiemu ďalšiemu výpočtu majme merania v časoch $-t_1$ a t_1. Napr. ak začiatočná hodnota p_0 bola zistená napr. v r. 1990 (naša časová nula), tak ďalšie 2 merania budú urobené napr. v r.1980 a 2000. Nech teda ďalšie začiatočné podmienky sú

$$p(-t_1) = p_{-1}, \quad p(t_1) = p_1.$$

Dosadením do logistickej funkcie 2.2 máme

$$p_{-1} = \frac{Kp_0}{p_0 + (K - p_0)e^{at_1}},$$

$$p_1 = \frac{Kp_0}{p_0 + (K - p_0)e^{-at_1}}.$$

Po úprave tých dvoch rovníc dostávame rovnice

$$p_{-1}(K - p_0)e^{at_1} = p_0K - p_{-1}p_0,$$

$$p_1(K - p_0)e^{-at_1} = p_0K - p_1p_0.$$

Vynásobíme navzájom ľavé strany týchto rovníc a takisto aj pravé strany. Využijúc pravidlo: ak $Ľ_1 = P_1$ a $Ľ_2 = P_2$, potom aj $Ľ_1Ľ_2 = P_1P_2$ máme rovnicu len s jednou neznámou K

$$(K - p_0)^2 p_{-1}p_1 = (p_0K - p_{-1}p_0)(p_0K - p_1p_0).$$

Po úprave sme dostali predpis pre výpočet konštanty K

$$K = \frac{p_0^2(p_1 + p_{-1}) - 2p_0p_{-1}p_1}{p_0^2 - p_{-1}p_1}. \tag{2.3}$$

Pre výpočet konštanty a použijeme začiatočnú hodnotu $p(-t_1) = p_{-1}$ alebo $p(t_1) = p_1$ a dosadením do predpisu 2.2, pričom budeme predpokladať, že konštantu K už máme vypočítanú. Ak napríklad použijeme podmienku $p(t_1) = p_1$ dostávame

$$p_1 = \frac{Kp_0}{p_0 + (K - p_0)e^{-at_1}},$$

$$a = \frac{1}{t_1} \ln \frac{p_1(K - p_0)}{p_0(K - p_1)}. \tag{2.4}$$

Príklad 18 *Predpokladajme, že počet obyvateľov istého mesta sa riadi logistickou formulou. Máme nasledovné údaje:*

rok	*počet obyvateľov*
1990	*600 000*
2000	*1000 000*
2010	*1500 000*

Vypočítajte kapacitu mesta a počet obyvateľov v roku 2018.

Riešenie

Nech počet obyvateľov mesta v čase t vyjadruje funkcia $p(t)$. Zo zadania dostávame, že rok 2000 bude naša časová nula a $p(0) = 1000000$. Rok 2010 je $t_1 = 10$ a $p_1 = 1500000$. Podobne rok 1990 je čas $-t_1$ a $p_{-1} = 600000$. Dosadením týchto hodnôt do vzťahu (2.3) pre výpočet kapacity dostávame

$$K = 3000000.$$

Teda kapacita mesta je 3 milión obyvateľov. Pre výpočet počtu obyvateľov v roku 2018 potrebujeme najprv zistiť konštantu a. Zo vzťahu (2.4) máme

$$a = \frac{1}{10}\ln 2.$$

Predpokladaný počet obyvateľov v roku 2018 vypočítame tak, že do predpisu logistickej funkcie (2.2) dosadíme, samozrejme vypočítané konštanty K a a a za čas t dosadíme 18. Po dosadení

$$p(18) = 1906000.$$

Teda predpokladaný počet obyvateľov v r. 2018 je 1906 000 pri využití logistického modelu rastu populácie.

Úlohy

1. Na ostrove žije 1000 kulanov (divý osol). Po 4 rokoch je ich 1400 a po 8 rokoch 1600. Aká je kapacita ostrova a koľko kulanov bude po 10 rokoch, ak predpokladáme, že populácia sa riadi Verhulstovým logistickým modelom.
[$K = 1711$, $p(6) = 1647$]

2. Na Madagaskare žije 10000 lemurov. Pred 10 rokmi ich bolo 9500 a pred 20 rokmi 8500. Aká je kapacita ostrova a koľko ich bude o 5 rokov, ak predpokladáme, že populácia sa riadi Verhulstovým logistickým modelom?
[$K = 10400$, $p(15) = 10136$]

3. Máme k dispozícii údaje zo sčítania obyvateľstva USA. Počet obyvateľov v roku 1881 je 50 156 000, v roku 1940 131 669 000 a v roku 2000 bolo 281 400 000 obyvateľov USA. Zostavte logistickú funkciu a určte kapacitu a predpokladaný počet obyvateľov USA v r. 2010.
[$K = 631000000$, $p(70) = 310600000$]

2.6 Ekonomické modely

V tejto kapitole sa budeme zaoberať vzťahom medzi cenou, dopytom a ponukou, samozrejme využitím derivácie funkcie. Nech funkcia $p(t)$ označuje cenu tovaru v čase t. Nech $d(t)$ (z ang. demand) označuje dopyt v čase t a $s(t)$ (z ang. supply) bude funkcia ponuky. Pod pojmom dopyt rozumieme množstvo tovaru, ktoré sú ochotní spotrebitelia kúpiť pri danej cene $p(t)$. Pod pojmom ponuka rozumieme množstvo tovaru, ktoré je výrobca schopný pri danej cene $p(t)$ vyrobiť. Dopyt a ponuka závisia samozrejme na aktuálnej cene tovaru. Závislosť môže byť matematicky rôzne vyjadrená (lineárna, kvadratická, exponenciálna). Použijeme najjednoduchšiu a to lineárnu závislosť. Teda nech

$$d(t) = d_1 + d_2 p(t)$$

$$s(t) = s_1 + s_2 p(t),$$

kde $d_1, d_2, s_1, s_2 \in R$, $d_2 < 0$ a $s_2 > 0$. Z vyjadrenej závislosti (dopyt je rastúca funkcia a ponuka klesajúca) vyplýva , že s rastúcou cenou dopyt po tovare klesá a ponuka samozrejme s rastúcou cenou rastie.

EKONOMICKÝ MODEL I

Našim cieľom je vyjadriť vzťah medzi funkciami $p(t)$, $d(t)$ a $s(t)$. Predpokladajme, že cena reaguje na rozdiel medzi dopytom a ponukou. Ak je dopyt väčší ako ponuka, tak cena tovaru rastie. Čím je tento rozdiel väčší, teda dopyt po tovare je veľký, ale ponuka nie je, tak táto situácia na trhu tlačí cenu hore. Matematicky to môžeme vyjadriť, že zmena ceny (rast) je priamoúmerná rozdielu dopyt - ponuka, vyjadrené diferenciálnou rovnicou

$$p'(t) = k_1(d(t) - s(t)),\ k_1 > 0.$$

Ak $d(t)-s(t) > 0$, potom $p'(t) > 0$, teda ako bolo spomínané, cena rastie. Ak $d(t)-s(t) < 0$, potom $p'(t) < 0$, cena klesá, čo je logické pri vyššej ponuke ako je dopyt. Do zostavenej diferenciálnej rovnice dosadíme vyjadrenie funkcie ponuky a dopytu

$$p'(t) = k_1(d_1 + d_2 p(t) - s_1 - s_2 p(t)).$$

Po úprave

$$p'(t) = k_1(s_2 - d_2)\left(\frac{d_1 - s_1}{s_2 - d_2} - p(t)\right)$$

Podiel

$$\frac{d_1 - s_1}{s_2 - d_2}$$

vyjadruje tzv. rovnovážnu cenu (EKVILIBRIUM), je to cena, pri ktorej sa ponuka rovná dopytu. Označíme túto hodnotu p_e. Konštantu $k_1(s_2 - d_2)$ označíme K. Diferenciálna rovnica má potom tvar

$$p'(t) = K(p_e - p(t)),$$

resp.

$$p'(t) + Kp(t) = Kp_e.$$

Dostali sme lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu, ktorú riešime pomocou integračného faktora, čo je v tomto príklade e^{Kt}.

$$\left(p(t)e^{Kt}\right)' = Kp_e e^{Kt}.$$

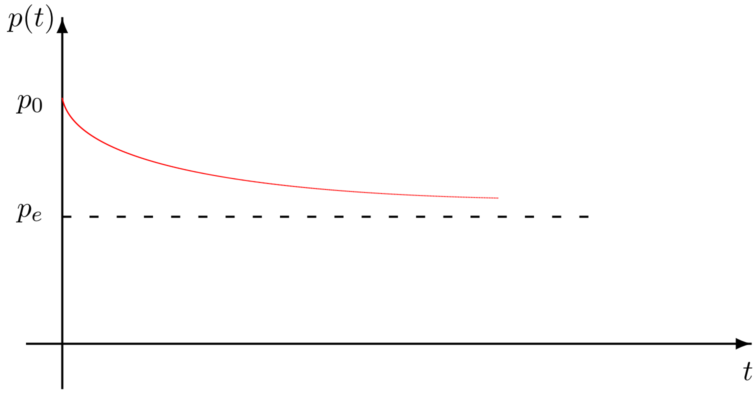
Integrovaním

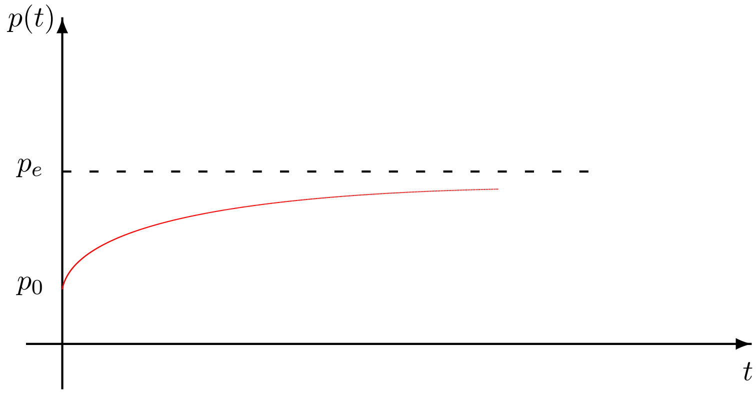
$$p(t) = p_e + ce^{-Kt}.$$

Nech cena v čase $t = 0$ je $p(0) = p_0$, teda máme danú začiatočnú podmienku. Jej dosadením dostávame partikulárne riešenie

$$p(t) = p_e + (p_0 - p_e)e^{-Kt}.$$

Funkcia ceny $p(t)$ je monotónna, v prípade ak začiatočná cena $p_0 > p_e$, tak cena klesá k rovnovážnej cene p_e. Naopak, ak začiatočná cena p_0 je menšia ako rovnovážna p_e, tak funkcia ceny rastie k hodnote rovnovážnej ceny.(viď nasledujúce grafy)





EKONOMICKÝ MODEL II - VPLYV SKLADOVÝCH ZÁSOB

Základný ekonomický model prezentovaný v predchádzajúcej kapitole rozšírime o faktor, ktorý tiež vplýva na vývoj ceny a to vzniknuté skladové zásoby. Ako matematicky vyjadriť skladové zásoby? Skladové zásoby vznikajú, ak je v istom časovom období ponuka väčšia ako dopyt. Skladové zásoby v aktuálnom čase napr. t^* teda môžeme zapísať ako rozdiel $s(t^*) - d(t^*)$. Skladové zásoby za časový interval $[0, t]$ vyjadríme ako súčet skladových zásob pre $t^* \in [0, t]$, čo zapíšeme

$$\int_0^t (s(t^*) - d(t^*))\, dt^*.$$

Vzniknuté skladové zásoby majú na cenu negatívny vplyv, znižujú ju, preto vývoj ceny vyjadríme diferenciálnou rovnicou v tvare

$$p'(t) = k_1(d(t) - s(t)) - k_2 \int_0^t (s(t^*) - d(t^*))\, dt^*, \ k_1 > 0, \, k_2 > 0,$$

kde je ponechaný základný predpoklad, že cena je priamoúmerná rozdielu $d(t) - s(t)$ a zahrnutý fakt, že skladové zásoby spôsobia pokles ceny tovaru. Zostavenú integrodiferenciálnu rovnicu riešime derivovaním

$$p''(t) = k_1(d'(t) - s'(t)) - k_2(s(t) - d(t)).$$

Dosadíme vyjadrenie dopytu a ponuky $d(t) = d_1 + d_2 p(t)$ a $s(t) = s_1 + s_2 p(t)$

$$p''(t) = k_1(d_2 p'(t) - s_2 p'(t)) - k_2(s_1 + s_2 p(t) - d_1 - d_2 p(t)).$$

Po úprave a označení $\alpha = k_1(s_2 - d_2)$, $\beta = k_2(s_2 - d_2)$ a $\gamma = k_2(d_1 - s_1)$ dostávame lineárnu diferenciálnu rovnicu 2. rádu

$$p''(t) + \alpha p'(t) + \beta p(t) = \gamma.$$

Použitím substitúcie $\beta p(t) - \gamma = z(t)$ dostaneme z nehomogénnej DR homogénnu lineárnu DR 2. rádu, čo nám zjednoduší ďalší výpočet.

$$z''(t) + \alpha z'(t) + \beta z(t) = 0.$$

Diferenciálnu rovnicu riešime pomocou charakteristickej rovnice

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0,$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$. Charakteristická rovnica môže mať reálne alebo komplexné korene. V prípade reálnych koreňov (2 rôzne alebo násobný) musia byť tieto korene záporné $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ a všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je

$$z(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \ \ c_1, c_2 \in R$$

a

$$p(t) = \frac{c_1}{\beta} e^{\lambda_1 t} + \frac{c_2}{\beta} e^{\lambda_2 t} + \frac{\gamma}{\beta}, \ \ c_1, c_2 \in R.$$

Pre $t \to \infty$ $p(t) \to \frac{\gamma}{\beta} = \frac{k_2(d_1 - s_1)}{k_2(s_2 - d_2)} = p_e$, teda cena konverguje k rovnovážnej cene a táto konvergencia je monotónna. V prípade komplexných koreňov charakteristickej rovnice

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm i \frac{\sqrt{|D|}}{2}, \ D = \alpha^2 - 4\beta < 0$$

dostávame všeobecné riešenie DR v tvare

$$z(t) = c_1 e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \frac{\sqrt{|D|}}{2} t + c_2 e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \frac{\sqrt{|D|}}{2} t, \ \ c_1, c_2 \in R$$

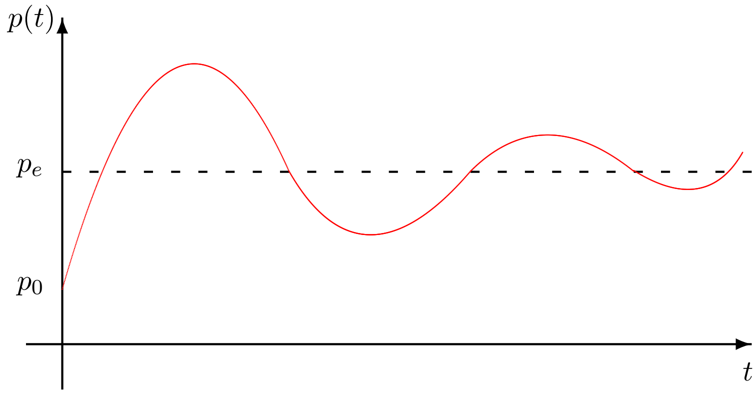
Funkcia ceny má potom predpis

$$p(t) = \frac{c_1}{\beta} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \frac{\sqrt{|D|}}{2} t + \frac{c_2}{\beta} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \frac{\sqrt{|D|}}{2} t + \frac{\gamma}{\beta}, \ c_1, c_2 \in R$$

Cena $p(t)$ aj v tomto prípade konverguje k rovnovážnej cene

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \frac{\gamma}{\beta} = p_e,$$

ale nie monotónne. Cena osciluje okolo hodnoty p_e, čo reálnejšie vystihuje správanie sa ceny tovaru. Graf funkcie ceny je na nasledujúcom obrázku.



3 Fyzikálne aplikácie diferenciálnych rovníc

3.1 Druhý Newtonov pohybový zákon

Mnohé fyzikálne aplikácie (napr. pohyb rakety, planét v gravitačnom poli Slnka) vedú na druhý Newtonov pohybový zákon (2. NPZ). Pripomenieme si jeho formuláciu:

Výsledná sila pôsobiaca na teleso je rovná derivácii hybnosti.

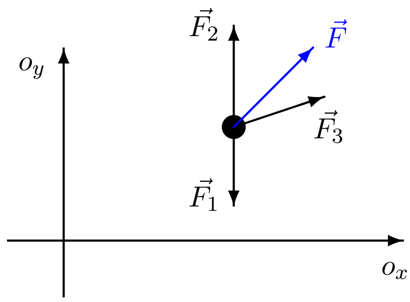
Matematický zápis je

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv).$$

Bližšie vysvetlíme nasledujúcou úvahou. Na teleso o hmotnosti $m(t)$ (hmotnosť sa môže v čase t meniť, napr. hmotnosť rakety pri spaľovaní paliva) pôsobí niekoľko síl povedzme tri F_1, F_2, F_3. Ich výslednica

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$

spôsobuje pohyb telesa určitým smerom rýchlosťou $v(t)$ so zrýchlením $a(t)$



V tomto prípade sa teleso pohybuje v smere modrého vektora pričom platí

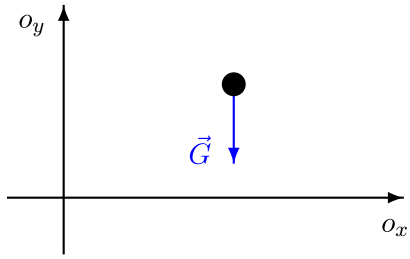
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m(t)v(t)) = F.$$

V jednoduchšom prípade, keď teleso nemení svoju hmotnosť, t.j. $m(t) = m$, tak predchádzajúci vzťah sa transformuje na

$$F = m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = ma.$$

V tomto prípade výsledná sila pôsobiaca na teleso je úmerná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia, ktoré mu pôsobiaca sila udeľuje.

Uvažujme ešte jeden príklad, keď teleso, napr. šíp, je vystrelené kolmo nahor, pričom zanedbáme odpor prostredia. V tomto prípade na teleso pôsobí jediná sila - gravitačná, ktorá brzdí jeho pohyb.



Smer kolmo nahor budeme považovať za kladný a teda na základe 2. NPZ platí

$$F = -G,$$

resp.

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -mg.$$

Ak by sme brali do úvahy aj odpor prostredia, ktoré pôsobí proti smeru pohybu silou $\mathcal{O}$, ktorej veľkosť môže byť priamo úmerná rýchlosti pohybu telesa ($\mathcal{O} = k_1 v(t)$), tak v tomto prípade platí

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -mg - k_1 v(t),$$

kde konštanta odporu

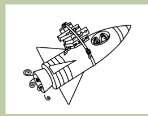
$$k_1 = \frac{1}{2}CS\rho, \tag{3.1}$$

kde C je koeficient aerodynamického odporu závislý na tvare telesa a druhu materiálu (Drag Coefficient), S je plocha prierezu telesa resp. jeho kolmý priemet a ρ je hustota vzduchu, ktorá môže zahrňovať atmosferické podmienky. Hodnota koeficientu odporu C sa určuje experimentálne v tzv. veternom tuneli. Hodnoty pre niekoľko bežných predmetov sú približne:

- dutá polguľa: $C \approx 1,4$;
- vypuklá polguľa: $C \approx 0,4$;
- štvorcová rovná doska: $C \approx 1,2$;
- bežné osobné auto: $C \approx 0,4$;
- monopost F1: $C \approx 1$;
- lietadlo: $C \approx 0,02$.
- padák pologuľovitý : $C \in \langle 0,75; 1.2\rangle$.

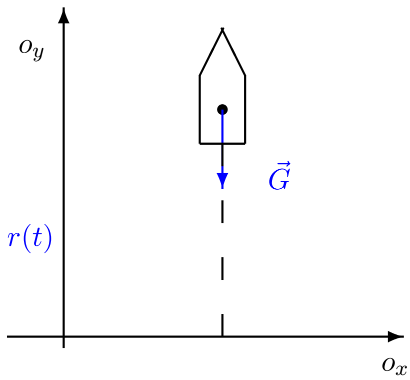
Pre praktické počítanie potrebujeme ešte poznať koeficient ρ. Jeho hodnota nad povrchom mora je je $1,29\,kg/m^3$ a vo výške 2000 metrov je približne je $1\,kg/m^3$

Príklad 19 *Akú začiatočnú rýchlosť treba udeliť telesu (rakete), aby sa trvalo vzďaľovalo od Zeme (2. kozmická rýchlosť). Odpor prostredia ani vplyv okolitých planét a Slnka neberieme do úvahy.*



Riešenie. Samozrejme raketa napr. pri ceste na Mesiac nadobúda rýchlosť potrebnú na prekonanie gravitačnej sily Zeme postupne a dosiahne ju nad povrchom Zeme vo výške, kde je už gravitačná sila slabšia a aj raketa má vplyvom spaľovania paliva menšiu hmotnosť. My ale riešime iný problém. (Jules Verne - Cesta na Mesiac).

Kvôli názornosti použijeme obrázok.



Označme v čase t výšku rakety nad povrchom Zeme (os x) $r(t)$ a jej rýchlosť $v(t)$. Vzhľadom na uvažované podmienky na raketu pôsobí len gravitačná sila, ktorej veľkosť vo výške $r(t)$ je

$$G = \varkappa \frac{mM_z}{(R_z + r)^2},$$

kde $\varkappa$ je gravitačná konštanta, R_z je polomer Zeme, M_z je hmotnosť Zeme. Keďže na povrchu Zeme ($r = 0$) je gravitačná sila $G = mg = \varkappa \frac{mM_z}{R_z^2}$, platí

$$G = \frac{mgR_z^2}{(R_z + r)^2},$$

Podľa 2. NPZ máme $F = -G$ t.j.

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{gR_z^2}{(R_z + r)^2}. \tag{3.2}$$

Vo vzťahu (3.2) spoznávame diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Problém je, že obsahuje tri premenné - čas, rýchlosť a prejdenú dráhu. Tento problém odstránime tak, že na rýchlosť sa budeme dívať ako na funkciu výšky t.j. $v = v(r)$. Podľa vzorca pre deriváciu zloženej funkcie

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}.$$

Po dosadení do (3.2) získavame separovateľnú DR

$$v\,\mathrm{d}v = -\frac{gR_z^2}{(R_z + r)^2}\,\mathrm{d}r,$$

ktorej všeobecné riešenie je

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR_z^2}{R_z + r} + c.$$

Pretože pre $t = 0$ je $r = 0$ a hľadaná začiatočná rýchlosť $v(0) = v_0$ platí

$$c = \frac{v_0^2}{2} - gR_z.$$

Preto

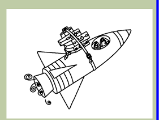
$$v^2 = \frac{2gR_z^2}{R_z + r} + \left(v_0^2 - 2gR_z\right). \tag{3.3}$$

Ako ale z odvodeného vzťahu určiť v_0? Použijeme nasledujúcu úvahu. Keďže prvý člen na pravej strane (3.3) pre $r \to \infty$ konverguje k nule, aby sa pohyb nezastavil ($v > 0$) nesmie byť člen v zátvorke záporný! To vedie k podmienke

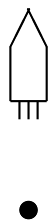
$$v_0 = \sqrt{2gR_z}.$$

Odvodený vzťah platí pre únikovú rýchlosť na akejkoľvek planéte, s polomerom R a gravitačným zrýchlením g na jej povrchu.

Príklad 20 *Ciolkovského rovnica. Raketa s hmotnosťou m_0 letí konštantnou rýchlosťou $v_0 > 0$, mimo gravitačného pôsobenia telies. Na T sekúnd sa zapne motor, pričom raketa každú sekundu vymršťuje plyny s nemennou hmotnosťou m^* a konštantnou rýchlosťou u. Určte rýchlosť rakety po T sekundách.*



Riešenie. Najprv zvolíme pevný bod, z ktorého budeme pozorovať pohyb rakety. (vhodnú vzťažnú sústavu)



Označme $m(t)$ hmotnosť rakety a $v(t)$ rýchlosť rakety v čase $t \in \langle 0, T \rangle$. Raketu poháňa hybnosť vypúšťaných plynov H. Keďže je to jediná sila, ktorá pôsobí na raketu, podľa 2. NPZ platí

$$F = -H.$$

Znamienko $-$ vyjadruje, že plyny sa pohybujú opačným smerom ako raketa. Hybnosť vypúšťaných plynov z pohľahu kozmonauta v rakete je $-m^* u$, ale z pozície pozorovateľa, ktorý vníma aj pohyb rakety (ako kladný) aj pohyb plynov (ako opačný) je to $H = m^*(v(t) - u)$. Platí

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m(t)v(t)) = m'(t)v(t) + m(t)v'(t).$$

Raketa znižuje svoju hmotnosť o spálené palivo t.j. $m'(t) = -m^*$, a preto $m(t) = m_0 - m^* t$. Po dosadení do rovnice máme

$$-m^* v(t) + (m_0 - m^* t)v'(t) = -m^*(v(t) - u).$$

Po úprave

$$v'(t) = \frac{m^* u}{m_0 - m^* t}.$$

Odtiaľ

$$v(t) = c - u \ln(m_0 - m^* t).$$

Integračnú konštantu c vypočítame z podmienky $v(0) = v_0$. Dostávame Ciolkovského rovnicu

$$v(t) = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m_0 - m^* t}, \qquad t \in \langle 0, T \rangle.$$

Preto

$$v(T) = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m_0 - m^* T}, \qquad t \in \langle 0, T \rangle.$$

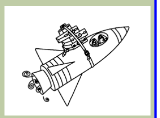
To znamená, že prírastok rýchlosti po spálení paliva je závislý len na rýchlosti vypúšťaných plynov u a pomeru

hmotnosť rakety : hmotnosť rakety po spálení plynov.

Preto žiadnymi jednoduchými konštrukčnými úpravami nemôžeme zväčšiť rýchlosť rakety.

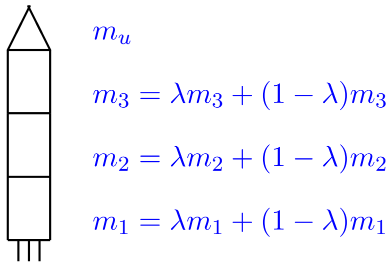
Kľúčová je teda otázka ako je možné zmeniť spomínaný pomer $\frac{m_0}{m_0 - m^* T}$. Jediná možnosť je odhodiť nepotrebnú záťaž, t. j. zbaviť sa prázdnych nádrží. To má ale praktický význam len pri viacstupňovej rakete.

Príklad 21 *Navrhnite počet stupňov rakety pre efektívne vynesenie užitočného nákladu do vesmíru.*



Riešenie.

Uvažujme na začiatok trojstupňovú raketu. Hmotnosť každého stupňa je m_i, $i = 1, 2, 3$ a m_u je užitočná hmotnosť (napr. satelit, posádka, modul...)



Celková hmotnosť rakety je teda

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_u.$$

Označme λm_i hmotnosť „železa“ pre i-ty stupeň rakety, potom $(1-\lambda)m_i$ je hmotnosť paliva v i-tom stupni rakety, kde samozrejme $\lambda \in (0,1)$. Na základe Ciolkovského rovnice po spálení paliva v prvom stupni, raketa má rýchlosť

$$v_1 = u \ln \frac{m_0}{m_u + \lambda m_1 + m_2 + m_3}.$$

Raketa odpojí prvý stupeň a ďalej letí dvojstupňová raketa s hmotnosťou $m_u + m_2 + m_3$. Po spálení paliva v druhom stupni získa raketa rýchlosť

$$v_2 = v_1 + u \ln \frac{m_u + m_2 + m_3}{m_u + \lambda m_2 + m_3}.$$

Následne sa zbaví druhého stupňa a po spálení paliva v treťom stupni sa raketa pohybuje rýchlosťou

$$v = v_2 + u \ln \frac{m_u + m_3}{m_u + \lambda m_3},$$

respektíve nadobudnutá rýchlosť

$$v = u \ln \frac{m_u + m_1 + m_2 + m_3}{m_u + \lambda m_1 + m_2 + m_3} + u \ln \frac{m_u + m_2 + m_3}{m_u + \lambda m_2 + m_3} + u \ln \frac{m_u + m_3}{m_u + \lambda m_3}.$$

Zaujímajú nás dve praktické otázky:

- ako zvoliť m_1, m_2, m_3, aby v bolo maximálne;
- aký je pomer $\frac{m_0}{m_u}$, t.j. akú musí mať raketa hmotnosť na vynesenie 1 tony nákladu.

Najprv vyriešime prvý problém. Zrejme

$$\frac{v}{u} = \ln\left(\frac{m_u + m_1 + m_2 + m_3}{m_u + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \cdot \frac{m_u + m_2 + m_3}{m_u + \lambda m_2 + m_3} \cdot \frac{m_u + m_3}{m_u + \lambda m_3} \right).$$

Hľadáme maximum funkcie v logaritme. Nasledujúce substitúcie výrazne zjednodušia našu úlohu. Označme postupne

$$\frac{m_u + m_1 + m_2 + m_3}{m_u + m_2 + m_3} = \alpha_1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + \frac{m_1}{m_u + m_2 + m_3} = \alpha_1,$$

$$\frac{m_u + m_2 + m_3}{m_u + m_3} = \alpha_2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + \frac{m_2}{m_u + m_3} = \alpha_2,$$

$$\frac{m_u + m_3}{m_u} = \alpha_3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + \frac{m_3}{m_u} = \alpha_3.$$

Potom
$$\frac{v}{u} = \ln \frac{\alpha_1}{1+\lambda(\alpha_1 - 1)} \cdot \frac{\alpha_2}{1+\lambda(\alpha_2 - 1)} \cdot \frac{\alpha_3}{1+\lambda(\alpha_3 - 1)}.$$

Zo získaného symetrického vzťahu je zrejme, že podiel v/u je maximálny pre

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha.$$

Sú to zároveň rovnice na určenie m_1, m_2 a m_3. Najprv ale vypočítame α. Platí
$$\frac{v}{u} = \ln\left(\frac{\alpha}{1+\lambda(\alpha - 1)}\right).$$

Po úprave
$$\alpha = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}, \qquad P = \mathrm{e}^{-\frac{v}{3u}}. \tag{3.4}$$

Je užitočné si všimnúť, že

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha^3 = \frac{m_0}{m_u}.$$

a získali sme aj odpoveď na druhú otázku.

$$\frac{m_0}{m_u} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^3, \qquad P = \mathrm{e}^{-\frac{v}{3u}}. \tag{3.5}$$

Predpokladajme, že chceme dosiahnuť rýchlosť $v = 10,5\,km/s$. Súčasné technológie poskytujú technické konštanty $u = 3km/s$ a $\lambda = 0,1$. Po dosadení do vzťahu (3.5) získavame pre $m_u = 1$

$$\frac{m_0}{m_u} = 77.$$

To znamená, že na vynesenie 1 tony užitočného nákladu potrebujem 77 tonovú trojstupňovú raketu. Zároveň môžeme dopočítať hmotnosť jednotlivých stupňov pre túto raketu.

$$m_1 = 58,9, \quad m_2 = 13,8, \quad m_3 = 3,3.$$

Vrátime sa k pôvodnému problému koľko stupňová raketa je najoptimálnejšia. Vzťahy (3.5) prepíšeme pre n-stupňovú raketu

$$\frac{m_0}{m_u} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^n, \qquad P = \mathrm{e}^{-\frac{v}{nu}}.$$

A pre $v = 10,5\,km/s$, $u = 3km/s$ a $\lambda = 0,1$ dostávame

počet stupňov	hmotnosť rakety
2	149
3	77
4	65
5	60
$\vdots$	$\vdots$
∞	50

Z tabuľky je zrejme, že najväčšia „úspora“ hmotnosti rakety je pri prechode od dvojstupňovej ku trojstupňovej rakete. Pri štvorstupňovej rakete je úspora hmotnosti negovaná nákladmi na konštrukciu takejto rakety. Posledný riadok tabuľky predstavuje teoretickú úvahu pre nekonečne - stupňovú raketu a zároveň poskytuje minimálnu hmotnosť rakety, pod ktorú sa nedá ísť pri súčasných technologických možnostiach.

Pre názornejšiu predstavu o požiadavkách na raketu urobíme nasledujúcu úvahu. Raketu poháňa hybnosť plynov resp. ťah motorov

$$H = -m^* u = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} u.$$

Na vzlet rakety z povrchu Zeme sa požaduje ťah motorov $H = 1,25\,G = 1,25mg$. Preto

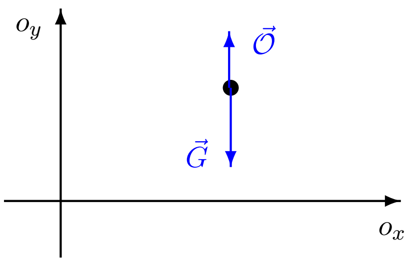
$$-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{1,25mg}{u} = 0,24m \quad \text{za minútu.}$$

T. j. trojstupňová raketa pri štarte musí za minútu spáliť štvrtinu svojej hmotnosti! Alebo inými slovami za minútu musí spáliť 19 ton paliva. Aj preto je prvý stupeň rakety najmohutnejší.

Príklad 22 *Parašutista s hmotnosťou m v okamihu otvorenia padáka má rýchlosť v_0. Predpokladajme, že odpor vzduchu je priamo úmerný jeho rýchlosti. Určte jeho rýchlosť a terminálnu rýchlosť ($t = \infty$).*

Riešenie. Na parašutistu pôsobí gravitačná sila $G = mg$ (predpokladáme rovnakú gravitačnú silu počas celého letu), ktorá pôsobí kolmo dole. Tento smer považujeme za kladný. Opačným smerom pôsobí odpor vzduchu $\mathcal{O} = Kv(t)$. Označme $x(t)$ dráhu, ktorú preletí za čas t. Podľa 2. NPZ platí $F = G - \mathcal{O}$, t.j.

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = mg - Kv(t). \tag{3.6}$$



Označme $k_1 = (gm)/K$. Po odseparovaní premenných

$$\frac{\mathrm{d}v}{v - k_1} = -\frac{K}{m}\,\mathrm{d}t.$$

Riešením tejto rovnice je

$$\ln|v - k_1| = -\frac{K}{m}\,t + c_1,$$

preto

$$v(t) - k_1 = c\,\mathrm{e}^{-\dfrac{K}{m}t},$$

pričom z podmienky $v(0) = v_0$ plynie $c = v_0 - k_1$ a preto

$$v(t) = \frac{gm}{K} + \left(v_0 - \frac{gm}{K}\right)\mathrm{e}^{-\dfrac{K}{m}t} \tag{3.7}$$

Teraz sa ľahko nahliadne, že terminálna rýchlosť

$$v_T = v(\infty) = \frac{gm}{K}.$$

Terminálna rýchlosť je teda priamo úmerná hmotnosti a je vlastne ekvilibrium rovnice (3.6). Pre $m = 90\,kg$, $g = 9{,}8\,m/s^2$ a $K = 190\,kg/s$ je $v_T \approx 4{,}6\,m/s$.

Využitím vzťahu $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$, $x(0) = 0$ dostávame

$$x(t) = \frac{gm}{K}\left(t + \left(\frac{v_0}{g} - \frac{m}{K}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{K}{m}t}\right)\right). \tag{3.8}$$

Príklad 23 *Určte minimálnu výšku nad zemou, v ktorej musí parašutista otvoriť padák, aby jeho rýchlosť dopadu bola maximálne o 0,1 % odlišná od terminálnej rýchlosti dopadu.*

Riešenie. Z rovnice (3.7) určíme čas t_1, ktorý je potrebný na spomalenie z rýchlosti v_0 na $v(t_1) = 1{,}001 v_T$. T. j.

$$1{,}001 v_T = v_T + (v_0 - v_T)\,\mathrm{e}^{-\dfrac{K}{m}t_1}.$$

Preto

$$t_1 = -\frac{m}{K}\ln\frac{0{,}001 v_T}{v_0 - v_T} = \frac{m}{K}\ln\left(1000\left(\frac{v_0}{v_T}\right) - 1\right).$$

Po dosadení do (3.8) dostávame vzťah pre minimálnu výšku h pre otvorenie padáka

$$h = x(t_1) = v_T\left(t_1 + \left(\frac{v_0}{g} - \frac{m}{K}\right)\left(1 - \frac{1}{1000\left(\frac{v_1}{v_T} - 1\right)}\right)\right).$$

Pre $v_0 = 55\,m/s$ je $h = 49\,m$. Samozrejme ide o „šibeničnú“ hodnotu, pri ktorej je posledná možnosť otvoriť padák. Nájdu sa ale aj „odvážlivci“, ktorí skáču zo sochy Krista v Riu z výšky $30\,m$.

Príklad 24 *Určte terminálnu rýchlosť dopadu ak padá parašutista bez použitia padáka. Predpokladáme, že odpor prostredia je v tomto prípade priamo úmerný druhej mocnine rýchlosti.*

Riešenie. Podľa 2-NPZ platí $F = G - \mathcal{O}$, t.j.

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2(t),$$

čo je separovateľná diferenciálna rovnica

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2 - k_2^2} = -\frac{k}{m}\,\mathrm{d}t, \qquad k_2 = \sqrt{\frac{mg}{k}},$$

ktorej riešenie je

$$\frac{1}{2k_2}\ln\left|\frac{v-k_2}{v+k_2}\right| = -\frac{k}{m}\,t + c_1,$$

respektíve

$$\frac{v-k_2}{v+k_2} = c\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}.$$

Z podmienky $v(0) = v_0$ plynie $c = \dfrac{v_0 - k_2}{v_0 + k_2}$. Preto

$$\frac{v-k_2}{v+k_2} = \frac{v_0-k_2}{v_0+k_2}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}$$

Pre $t \to \infty$ dostávame terminálnu rýchlosť

$$v_T = k_2 = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Pre naše vstupy a pre $k = 190\,kg/s$ je $v_T \approx 54.2\,m/s$.

Je teraz ľahké vyrátať čas t^* za ktorý dosiahne pri voľnom páde parašutista napr. 90% terminálnej rýchlosti. Predpokladajme, že $v_0 = 0$. Potom

$$\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t^*} = \frac{v_T - v}{v_T + v} = \frac{1}{19}.$$

A tak

$$t^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\ln 19.$$

Pripomíname (pozri (3.1)), že konštanta odporu prostredia $k = \frac{1}{2}CS\rho$ a preto vzťah pre terminálnu rýchlosť pre let s padákom (malé rýchlosti) je

$$v_T = \frac{2mg}{CS\rho}$$

a pre veľké rýchlosti

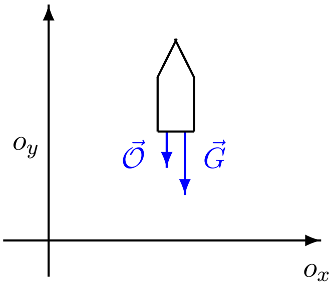
$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}}.$$

Posledný vzťah je štandartne používaný na výpočet plochy padáka, (resp. jeho kolmej projekcie) pre zbrzdenie objektov na požadovanú rýchlosť v_T.

$$S = \frac{2mg}{C\rho v_T^2}.$$

Príklad 25 *Silvestrovská raketka je vystrelená so začiatočnou rýchlosťou v_0 kolmo nahor. Jej pohyb spomaľuje gravitačná sila a odpor prostredia (táto sila je priamo úmerná druhej mocnine jej rýchlosti). Určte čas, za ktorý dosiahne raketka maximálnu výšku.*

Riešenie. Pohyb v smere osi y považujeme za kladný. Na základe daných údajov, môžeme podľa 2-NPZ zostaviť rovnicu



$F = -G - \mathcal{O}$, t.j.

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -mg - k_1 v^2(t).$$

resp. ak označíme $k = k_1/m$, tak

$$\frac{\mathrm{d}v}{g/k + v^2} = -k\,\mathrm{d}t.$$

Vyriešením tejto rovnice dostávame

$$\mathrm{arctg}\sqrt{k/g}\,v = -\sqrt{kg}\,t + c,$$

pričom $c = \mathrm{arctg}\sqrt{k/g}\,v_0$ a teda

$$\mathrm{arctg}\sqrt{k/g}\,v_0 - \mathrm{arctg}\sqrt{k/g}\,v = \sqrt{kg}\,t.$$

Pri dosiahnutí maximálnej výšky v čase T je $v(T) = 0$ a preto

$$T = \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}\,v_0}{\sqrt{kg}}.$$

Ak by sme chceli vypočítať maximálnu výšku, ktorú raketa dosiahne, tak využijeme vzťah pre dráhu rakety

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}\,v_0 - \sqrt{kg}\,t\right).$$

A preto

$$\begin{aligned} s(T) &= \sqrt{\frac{g}{k}}\int_0^T \mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}\,v_0 - \sqrt{kg}\,t\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{k}\ln|\cos\left(\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}\,v_0\right)| \end{aligned}$$

Využitím vzťahu $\quad |\cos\alpha| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$, máme

$$s(T) = \frac{1}{k}\ln\sqrt{1+\frac{k}{g}\,v_0^2}.$$

Ak by sme v našich úvahách zanedbali odpor prostredia ($k_1 = 0$), tak sila $F = -G$, t.j.

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -mg.$$

Preto

$$v(t) = v_0 - gt$$

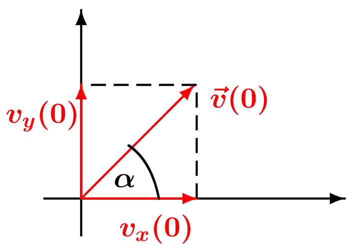
a hľadaný čas stúpania je $T = v_0/g$ a dráha stúpania $s(T) = v_0^2/(2g)$.

Pre nasledujúce vstupy použité vo vzťahu (3.1): $m = 1\,kg$, $v_0 = 30\,m/s$, $C = 0,1$, $S = 0,01\,m^2$, $\rho = 1,29\,kg/m^3$ dostávame

	čas stúpania	max. výška
model I	$2,99\,s$	$44,56\,m$
model II	$3,05\,s$	$45,87\,m$

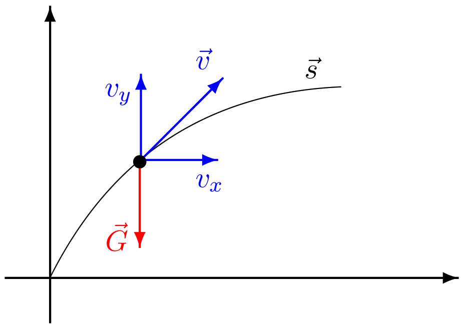
Príklad 26 *Vrh šikmý. Teleso je vymrštené so začiatočnou rýchlosťou v_0 pod uhlom α s horizontom. Určte jeho maximálnu výšku a dolet.*

Riešenie. Zanedbáme odpor prostredia, takže pohyb telesa ovplyvňuje len gravitačná sila. Pri riešení tejto úlohy je výhodné použiť parametrické rovnice, ktoré sa objavia ak uvažujeme v 2. NPZ zložky jednotlivých pôsobiacích síl $\vec{F} = (F_x, F_y)$. Gravitačná sila nad povrchom Zeme $\vec{G} = (0, mg)$, dráha $\vec{s}(t) = (s_x(t), s_y(t))$ a rýchlosť telesa $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$, pričom $\vec{v}(0) = (v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha)$.



Pohyb v smere osi x aj y považujeme za kladný. Podľa 2. NPZ rozpísaného po zložkách platí

výsledná sila v smere osi x	výsledná sila v smere osi y
$F_x = 0,$	$F_y = -mg,$
$m\dfrac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} = 0,$	$m\dfrac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} = -mg,$
$v_x(t) = v_0\cos\alpha,$	$v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt.$



Podobne

$$\begin{array}{cc} \text{dráha v smere osi } x & \text{dráha v smere osi } y \\ \dfrac{\mathrm{d}s_x(t)}{\mathrm{d}t} = v_x(t) = v_0 \cos\alpha, & \dfrac{\mathrm{d}s_y(t)}{\mathrm{d}t} = v_x(t) = v_0 \sin\alpha - gt, \\ s_x(t) = tv_0 \cos\alpha, & s_y(t) = tv_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2. \end{array}$$

Teraz vieme vypočítať čas T dopadu telesa z podmienky $s_y(T) = 0$, t.j.

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

a z podmienky $v_y(t^*) = 0$ vyrátame čas stúpania

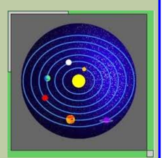
$$t^* = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

a maximálnu výšku

$$s_y(t^*) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

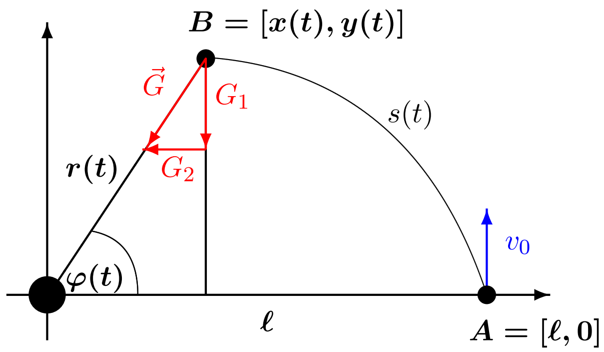
Poznámka 5 *Postup použitý v predchádzajúcom príklade (rozpis výslednej sily do zložiek) používame ak vektor rýchlosti nie je kolmý na zemský povrch.*

Príklad 27 *Keplerove zákony. Vo vzdialenosti ℓ od Slnka sa nachádza planéta, ktorej rýchlosť v čase $t = 0$ je v_0 a vektor rýchlosti $\vec{v}_0$ je kolmý na na spojnicu Slnka a planéty. Nájdite trajektóriu planéty. (Modifikácia – pohyb satelitu okolo Zeme)*



Riešenie. Označme M hmotnosť Slnka, m hmotnosť planéty, $r(t)$ vzdialenosť Slnka a planéty v čase t a $\varphi(t)$ uhol, ktorý zviera sprievodič s osou o_x. Pri riešení tejto úlohy je opäť výhodné použiť parametrické rovnice, ktoré sa objavia ak pri aplikácii 2. NPZ použijeme zložky sily $\vec{F} = (F_x, F_y)$. Potom gravitačná sila $\vec{G} = (G_1, G_2)$. Vhodné parametrické vyjadrenie trajektórie dostaneme použitím polárnych súradníc.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r(t)\cos\varphi(t),\\
y(t) &= r(t)\sin\varphi(t).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$



Nech v čase t je planéta v pozícii B, pričom sa pohybovala po trajektórii $s(t)$. Veľkosť gravitačnej sily je

$$G = \varkappa \frac{mM}{r^2(t)},$$

Použitím 2. NPZ dostávame

výsledná sila v smere osi x	výsledná sila v smere osi y
$F_x = -G_1,$	$F_y = -G_2,$
$m\dfrac{\mathrm{d}x^2(t)}{\mathrm{d}t^2} = -G\cos\varphi(t),$	$m\dfrac{\mathrm{d}y^2(t)}{\mathrm{d}t^2} = -G\sin\varphi(t),$

čo vedie na sústavu rovníc

$$
\begin{aligned}
x''(t) &= -k\,\frac{\cos\varphi(t)}{r^2(t),}\\
y''(t) &= -k\,\frac{\sin\varphi(t)}{r^2(t)},
\end{aligned}
$$

kde $k = \varkappa M$ a začiatočné podmienky sú

$$x(0) = \ell, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = v_0. \tag{3.10}$$

Dvojnásobným zderivovaním (3.9) vyjadríme $x''(t)$ a $y''(t)$ pomocou derivácií $\varphi(t)$ a $r(t)$:

$$
\begin{aligned}
\left(r'' - r\varphi'^2\right)\cos\varphi - (2r\varphi' + r\varphi'')\sin\varphi &= -k\,\frac{\cos\varphi(t)}{r^2(t)}\\
\left(r'' - r\varphi'^2\right)\sin\varphi - (2r\varphi' + r\varphi'')\cos\varphi &= -k\,\frac{\sin\varphi(t)}{r^2(t)}
\end{aligned}
$$

Vynásobíme prvú rovnicu funkciou $\cos\varphi$, druhú rovnicu funkciou $\sin\varphi$ a výsledné rovnice sčítame. Potom vynásobíme prvú rovnicu funkciou $\sin\varphi$, druhú rovnicu funkciou $\cos\varphi$ a výsledné rovnice odčítame. Dostávame

$$\begin{aligned}\left(r'' - r\varphi'^2\right) &= -\frac{k}{r^2},\\ 2r\varphi' + r\varphi'' &= 0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Začiatočné podmienky (3.10) sa transformujú na

$$r(0) = \ell, \quad r'(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \frac{v_0}{\ell}. \tag{3.12}$$

Druhú rovnicu v (3.11) po vynásobení r vieme zapísať v tvare

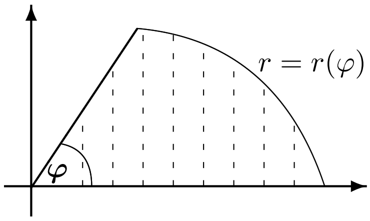
$$\left(r^2\varphi'\right)' = 0,$$

čo vedie k podmienke $r^2\varphi' = c$ a využitím hodnôt pre $t = 0$ máme

$$r^2\varphi' = \ell v_0. \tag{3.13}$$

Odvodený vzťah má zaujímavú geometrickú interpretáciu.

Je známe, že plochu ohraničenú krivkou danou



v polárnych súradniciach $r = r(\varphi)$ pre uhly 0 a φ vypočítame podľa vzorca

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

preto

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\varphi. \tag{3.14}$$

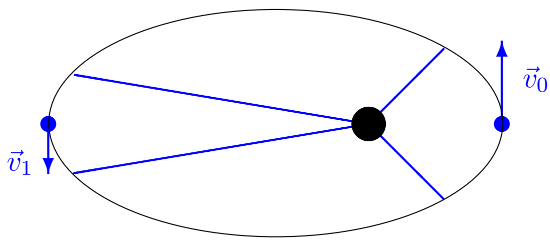
Rovnicu trajektórie planéty (3.13) môžeme zapísať v tvare

$$r^2\,\mathrm{d}\varphi = \ell v_0\,\mathrm{d}t$$

čo po dosadení do (3.14) dáva

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell v_0}{2}. \tag{3.15}$$

Odvodili sme **II. Keplerov zákon** - plocha opísaná sprievodičom za jednotku času je konštantná. T.j. planéta má v perihéliu väčšiu rýchlosť ako v aféliu.



Vrátime sa späť k riešeniu sústavy (3.11). Využitím vzťahu (3.13) získavame diferenciálnu rovnicu rovnicu druhého rádu

$$r''(t) - \frac{(\ell v_0)^2}{r^3(t)} = -\frac{k}{r^2(t)}. \tag{3.16}$$

Našim cieľom je nájsť rovnicu trajektórie v polárnych súradniciach, t.j. vyjadriť r ako funkciu premennej φ. Preto použijeme nsledujúcu transformáciu, ktorá zároveň transformuje našu rovnicu na lineárnu

$$r(t) = \frac{1}{u(\varphi)}.$$

Označme $\quad {}^{\bullet} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}$. Potom

$$r'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u(\varphi)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{u(\varphi)}\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{-u^{\bullet}}{u^2(\varphi)}\frac{\ell v_0}{r^2}.$$

T. j.

$$r'(t) = -\ell v_0\, u^{\bullet}(\varphi).$$

Preto

$$\begin{aligned} r''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\ell v_0\, u^{\bullet}(\varphi)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(-\ell v_0\, u^{\bullet}(\varphi)\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\ &= -\left(\ell v_0\right)^2 u^{\bullet\bullet}(\varphi) u^2(\varphi). \end{aligned}$$

Po dosadení do (3.16) získavame lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu.

$$u^{\bullet\bullet} + u = \frac{k}{(\ell v_0)^2}, \qquad r(0) = \ell, \quad r^{\bullet}(0) = 0,$$

ktorej všeobecné riešenie je

$$\frac{1}{r(\varphi)} = u(\varphi) = c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi + \frac{k}{(\ell v_0)^2}.$$

Tento zápis zjednodušíme nasledujúcou úvahou. Označme $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ a položme $\cos\varphi_0 = c_1/c$. Potom $\sin\varphi_0 = c_2/c$ a

$$\frac{1}{r(\varphi)} = c\big(\cos\varphi\cos\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0\big) + \frac{k}{(\ell v_0)^2},$$

respektíve

$$\frac{1}{r(\varphi)} = c\cos\left(\varphi - \varphi_0\right) + \frac{k}{(\ell v_0)^2}.$$

Využitím začiatočných podmienok overíme, že $\varphi_0 = 0$ a $c = \dfrac{1}{\ell} - \dfrac{k}{(\ell v_0)^2}$. Preto

$$r(\varphi) = \frac{1}{c\cos(\varphi) + \frac{k}{(\ell v_0)^2}}$$

Ak označíme $E = \dfrac{\ell v_0^2}{k} - 1$, tak hľadané parametrické vyjadrenie trajektórie je

$$r(\varphi) = \frac{\ell^2 v_0^2}{\varkappa M}\,\frac{1}{1 + E\cos(\varphi)}.$$

V závislosti na hodnote konštanty E sú možné nasledujúce trajektórie.

Hodnota E	Podmienka	Trajektória
$E = 0,$	$\ell v_0^2 = \varkappa M,$	kružnica,
$0 < \lvert E\rvert < 1,$	$\ell v_0^2 < 2\varkappa M,$	elipsa,
$E = 1,$	$\ell v_0^2 = 2\varkappa M,$	parabola,
$\lvert E\rvert > 1,$	$\ell v_0^2 > \varkappa M,$	hyperbola.

To znamená, že možné trajektórie sú len kužeľosečky. **(I. Keplerov zákon).** Získaný výsledok môžeme aplikovať aj na planétu a jej satelit. Ak položíme $\ell = R$ (polomer planéty), tak gravitačné zrýchlenie na povrchu planéty $g = \dfrac{\varkappa M}{R^2}$ a výsledné trajektórie pohybu satelitu sú pre

$$
\begin{aligned}
v_0 &= \sqrt{gR}, && \text{kružnica,}\\
\sqrt{gR} < v_0 &< \sqrt{2gR}, && \text{elipsa,}\\
v_0 &= \sqrt{2gR}, && \text{parabola,}\\
v_0 &> \sqrt{2gR}, && \text{hyperbola.}
\end{aligned}
$$

Zo získaných rovníc vieme odvodiť **(III. Keplerov zákon).** Predpokladajme, že planéta obieha okolo Slnka po elipse s hlavnou poloosou a a vedľajšou poloosou b. Keďže rovnica elipsy v polárnych súradniciach je

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a}\,\frac{1}{1 + E\cos(\varphi)},$$

platí, že

$$\frac{\ell^2 v_0^2}{\varkappa M} = \frac{b^2}{a}. \tag{3.17}$$

Nech doba obehu planéty okolo Slnka je T, pritom sprievodič opíše plochu $S = \pi ab$. Integrovaním rovnice (3.15) pre $t \in \langle 0, T\rangle$ dostávame

$$\pi ab = \frac{1}{2}\ell v_0 T. \tag{3.18}$$

Odtiaľ, využitím (3.17)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\varkappa M}\, a^3.$$

T. j. druhá mocnina obehu planéty okolo Slnka resp. satelitu okolo planéty je priamo úmerná tretej mocnine jej hlavnej poloosi.

Aplikácie Keplerových zákonov:

Z doby obehu satelitu okolo planéty a veľkosti hlavnej poloosi vieme určiť hmotnosť planéty.

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{\varkappa T^2},$$

Ak sa satelit pohybuje po kruhovej dráhe s polomerom a, tak jeho rýchlosť je konštantná, $v = 2\pi a/T$, čo vedie k

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}}.$$

Ak okolo planéty obiehajú dva satelity vo vzdialenostiach a_1 resp. a_2 s dobami obehu T_1 resp. T_2, tak z tretieho Keplerovho zákona plynie, že

$$T_2 = T_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{3/2}.$$

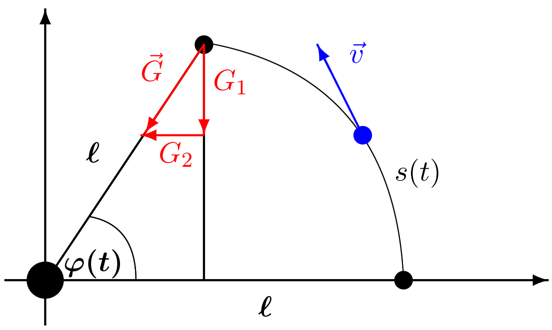
Príklad 28 *Vo vzdialenosti ℓ od stredu Zeme obieha po kruhovej dráhe satelit. Určte jeho rýchlosť.*

Riešenie. Keďže satelit sa pohybuje po kruhovej dráhe tak parametrické rovnice jeho trajektórie sú

$$\begin{aligned} x(t) &= \ell \cos \varphi(t), \\ y(t) &= \ell \sin \varphi(t), \end{aligned} \tag{3.19}$$

Z Keplerových zákonov plynie, že satelit sa pohybuje konštantnou rýchlosťou, ďalej za čas t sa otočí o uhol $\varphi(t)$ a prejde dráhu $s(t) = \ell\varphi(t)$. Preto

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \ell \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}t} = const. \tag{3.20}$$



Na druhej strane z 2. NPZ plynie

$$mx''(t) = -G_1 = -G\cos\varphi(t) = -\frac{mgR^2}{\ell^2}\cos\varphi(t). \tag{3.21}$$

Využijúc, že $\varphi'(t) = const$, z (3.19) plynie

$$x''(t) = -\ell \cos\varphi(t)\,(\varphi'(t))^2$$

a po porovnaní s (3.21) dostávame

$$(\varphi'(t))^2 = \frac{gR^2}{\ell^3},$$

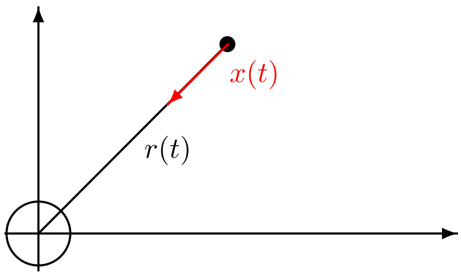
čo po dosadení do (3.20) dáva

$$v = R\sqrt{\frac{g}{\ell}} = R\sqrt{\frac{g}{R+\ell^*}},$$

kde ℓ^* je výška satelitu nad povrchom Zeme. Ak sa satelit pohybuje napr. $600\,km$ nad povrchom Zeme, tak jeho rýchlosť je $v \approx 7,6\,km/s$.

Príklad 29 *Dopad meteoru. Vo vzdialenosti h od Zemského stredu sa nachádza meteor, s nulovou začiatočnou rýchlosťou. Vplyvom gravitácie Zeme sa pohybuje priamočiaro k Zemi. Určte rýchlosť vstupu do atmosféry Zeme. (Pohyb Zeme neberieme do úvahy)*

Riešenie. Uvažujeme veľmi zjednodušenú situáciu. Označme R polomer Zeme,



$x(t)$ je dráha, ktorú prejde meteor za čas t a $r(t)$ je jeho vzdialenosť od zemského povrchu v čase t. Potom $h = R + r(t) + x(t)$. Podľa 2. NPZ platí $F = G$, kde pre gravitačnú silu vo výške r nad povrchom Zeme platí

$$G = \frac{mgR_z^2}{(R_z + r)^2}.$$

Preto pre rýchlosť meteoru platí

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{gR_z^2}{(R_z + r)^2}. \tag{3.22}$$

Pretože

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r},$$

platí

$$-v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{gR_z^2}{(R_z + r)^2}.$$

Riešením tejto separovateľnej diferenciálnej rovnice je

$$v^2 = 2gR^2\frac{h - R - r}{(R + r)h},$$

čo pre $r = 0$ dáva

$$v = \sqrt{2gR}\sqrt{1 - \frac{R}{h}}.$$

Pre $h \to \infty$ je rýchlosť nárazu $v \approx \sqrt{2gR}$, čo je druhá kozmická rýchlosť.

Príklad 30 *Loďka spomaľuje svoj pohyb vplyvom odporu vody, ktorý je priamo úmerný rýchlosti loďky. Začiatočná rýchlosť loďky je $v(0) = 1,5\,m/s$ a po $4s$ má rýchlosť $v(4) = 1\,m/s$. Kedy bude rýchlosť loďky $v(T) = 1\,cm/s$? Akú vzdialenosť urazí loďka, než sa zastaví?*

Riešenie. Označme $v(t)$ rýchlosť loďky v čase t. Podľa 2. NPZ platí

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{O} = -kv.$$

Ak označíme $k_0 = k/m$, tak riešením tejto rovnice je

$$v(t) = c\mathrm{e}^{-k_0 t}.$$

Z podmienky $v(0) = 1,5$ nájdeme $c = 1,5$ a preto

$$v(t) = 1,5\mathrm{e}^{-k_0 t}.$$

Pretože $v(4) = 1$, z rovnice $1 = 1,5\mathrm{e}^{-4k_0}$ nájdeme $\mathrm{e}^{-k_0} = (2/3)^{1/4}$ a teda

$$v(t) = 1,5\left(\frac{2}{3}\right)^{t/4}. \tag{3.23}$$

Podmienka $v(T) = 1\,cm/s$ dáva

$$T = 4\frac{\ln(1/150)}{\ln(2/3)} \approx 50\,s.$$

Ďalej, ak prejdenú dráhu označíme $s(t)$, tak $\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = v(t)$. Z (3.23) vidíme, že

$$s(t) = \frac{6}{\ln(2/3)}\left(\frac{2}{3}\right)^{t/4} + s_0.$$

Pretože $s(0) = 0$, tak $s_0 = -\dfrac{6}{\ln(2/3)}$, čo implikuje

$$s(t) = \frac{6}{\ln(3/2)} + \frac{6}{\ln(2/3)}\left(\frac{2}{3}\right)^{t/4}.$$

Prejdená dráha je potom

$$s_1 = \lim_{t\to\infty} s(t) = \frac{6}{\ln(3/2)} \approx 15\,m.$$

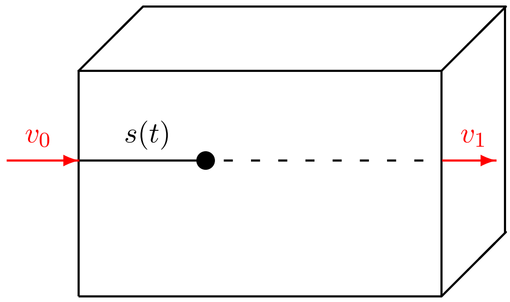
Príklad 31 *Projektil preletí cez dosku hrúbky $12\,cm$ tak, že jeho vstupná rýchlosť je $v_0 = 200\,m/s$ a výstupná rýchlosť je $v_1 = 60\,m/s$. Doska pôsobí proti pohybu projektilu silou priamo úmernou druhej mocnine rýchlosti. Nájdite predpis pre dráhu $s(t)$ projektilu v doske a čas, ktorý bol v doske.*

Riešenie. Podľa 2. NPZ platí

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{O} = -kv^2.$$

Ak označíme $k_0 = k/m$, tak riešením tejto rovnice je

$$\frac{1}{v(t)} = k_0 t + c.$$



Keďže $v(0) = 200$, tak $c = 1/200$ a

$$v(t) = \frac{200}{200k_0 t + 1}.$$

Naviac, ak označíme T čas, ktorý bol projektil v prekážke, tak

$$v(T) = \frac{200}{200k_0 T + 1} = 60. \tag{3.24}$$

Na druhej strane, $\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = v(t)$, $s(0) = 0$, a preto

$$s(t) = \frac{1}{k_0}\ln(200k_0 t + 1).$$

Pre $t = T$, máme

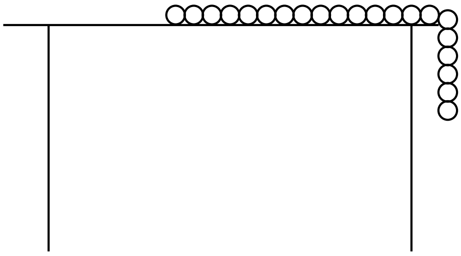
$$0,12 = \frac{1}{k_0}\ln(200k_0 T + 1) = \frac{1}{k_0}\ln\frac{10}{3}.$$

Preto $k_0 = \frac{25}{3}\ln\frac{10}{3}$. Hľadaný čas T určíme z rovnice (3.24)

$$T = \frac{7}{3}\,\frac{1}{200k_0} \approx 0,00114s.$$

Príklad 32 *Na stole je* **natiahnutá** *reťaz dĺžky $\ell = 4\,m$ tak, že časť reťaze dĺžky $a = 0,5\,m$ prečnieva cez okraj stola. Zanedbajúc trenie, nájdite rýchlosť akou opustí reťaz stôl a čas kedy to nastane. Predpokladáme, že výška stola je väčšia ako dĺžka reťaze.*

Riešenie. Označme previs reťaze v čase t cez okraj stola $x(t)$ a jej rýchlosť $v(t)$. Vstupné údaje sú $x(0) = a$ a $v(0) = x'(0) = 0$. Nech hmotnosť reťaze je m.



Potom tiaž previsu je $G(t) = \frac{mg}{\ell}\, x(t)$. Táto sila spôsobuje pohyb celej reťaze a preto na základe 2. NPZ máme diferenciálnu rovnicu druhého rádu.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = G(t) = \frac{mg}{\ell}\, x(t).$$

Ak označíme $k = \sqrt{g/\ell}$, tak jej všeobecným riešením je

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{kt} + c_2\mathrm{e}^{-kt}$$

a využitím začiatočných podmienok dostávame

$$x(t) = \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{kt} + \mathrm{e}^{-kt}\right), \qquad t \in \langle 0, T\rangle,$$

kde T je čas keď reťaz opustí stôl. Odtiaľ spätne

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right), \tag{3.25}$$

čo pre dané vstupné údaje dáva $T = 1,7679\,s$.

Vypočítame teraz rýchlosť reťaze pri opustení stola. Keďže platí

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{ak}{2}\left(\mathrm{e}^{kt} - \mathrm{e}^{-kt}\right), \qquad t \in \langle 0, T\rangle,$$

tak $v(T) = 6,2151\,m/s$.

Druhá možnosť ako vyriešiť úlohu je najprv nájsť rýchlosť a následne vypočítať hľadaný čas. Zapíšeme teda 2. NPZ v tvare

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = G(t) = \frac{mg}{\ell}\,x(t).$$

Pretože

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

tak máme

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k^2x. \tag{3.26}$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice prvého rádu (s využitím začiatočných podmienok) je

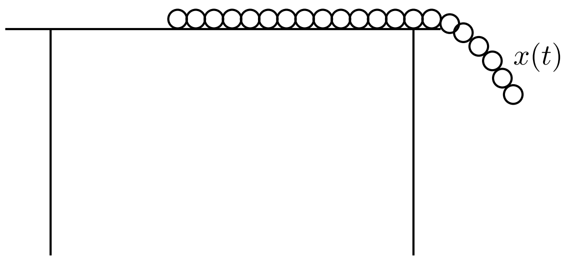
$$v(x) = k\sqrt{x^2-a^2}, \qquad x \in \langle a, \ell\rangle,$$

a preto $v(\ell) = k\sqrt{\ell^2-a^2} = 6,2151\,m/s$. Na druhej strane vychádzajúc za vzťahu $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ vidíme, že

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{v}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Riešením tejto separovanej diferenciálnej rovnice prvého rádu je opäť (3.25).

Modifikácia úlohy I. Predpokladajme, že na začiatku je previs reťaze nulový ($x(0) = 0$) a reťaz má začiatočnú rýchlosť $v(0) = v_0 > 0$.



Riešením rovnice (3.26) je teraz

$$v(x) = \sqrt{k^2x^2 + v_0^2}$$

a teda $v(\ell) = \sqrt{g\ell + v_0^2}$. Pretože

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{v}\,\mathrm{d}x = \frac{1/k}{\sqrt{x^2 + (\frac{v_0}{k})^2}}\,\mathrm{d}x,$$

tak

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}\right) + c.$$

Naviac pre $t = 0$ je $x = 0$ a teda $c = -\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{v_0}{k}\right)$. Preto

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{kx}{v_0} + \frac{k}{v_0}\sqrt{x^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}\right).$$

Pre dané vstupné údaje ($v_0 = 0.9\, m/s$) je čas opustenia stola $T = 1.6848\, s$.

Všimnime si, že pri zmenených vstupných údajoch je trajektória pohybu reťaze odlišná.

Modifikácia úlohy II. Predpokladajme v pôvodnej úlohe, keď previs reťaze je a, že pohyb reťaze brzdí trecia sila $\mathcal{O}$. Trenie sa prejavuje len na tej časti reťaze, ktorá leží na stole a preto kladieme $\mathcal{O}(t) = k_1(\ell - x(t))$. Podľa 2. NPZ platí

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = G(t) - \mathcal{O}(t) = \frac{mg}{\ell}\, x(t) - k_1(\ell - x(t)).$$

Po úprave a označení $k = k_1/m$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{g}{\ell} + k\right) x - k\ell.$$

Prechodom k $v = v(x)$ dostávame

$$v\,\mathrm{d}v = \left(\frac{g + k\ell}{\ell}\, x - k\ell\right)\mathrm{d}x, \qquad v(a) = 0.$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice je

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{g+k\ell}{\ell}\, x^2 - 2k\ell\, x - \frac{g+k\ell}{\ell}\, a^2 - 2k\ell\, a} \\ &= \sqrt{\frac{g+k\ell}{\ell}}\sqrt{\left(x - \frac{k\ell^2}{g+k\ell}\right)^2 - \left(a - \frac{k\ell^2}{g+k\ell}\right)^2}. \end{aligned}$$

Pretože $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, resp. $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{v}\,\mathrm{d}x$, tak

$$t = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{g+k\ell}{\ell}}\sqrt{\left(x - \frac{k\ell^2}{g+k\ell}\right)^2 - \left(a - \frac{k\ell^2}{g+k\ell}\right)^2}}$$

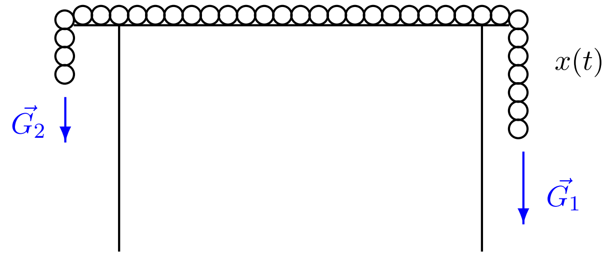
a hľadaný čas opustenia stola T je

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g+k\ell}}\ln\left(\frac{z}{b} + \sqrt{\left(\frac{z}{b}\right)^2 - 1}\right), \tag{3.27}$$

kde $z = \ell - \dfrac{k\ell^2}{g+k\ell}$ a $b = a - \dfrac{k\ell^2}{g+k\ell}$. Ak uvažujeme $k_1 = 0,01$ a $m = 1\, kg$, tak čas $T = 1.7829$. V špeciálnom prípade keď $k = 0$ sa vzťah (3.27) samozrejme redukuje na (3.25) ($x = \ell$).

Príklad 33 *Na stole je* **natiahnutá** *reťaz dĺžky $\ell = 4\, m$ tak, že na jeho pravom konci časť reťaze dĺžky $a = 0,5\, m$ prečnieva cez okraj stola a na ľavom konci časť reťaze dĺžky $b = 0,2\, m$ prečnieva tiež cez okraj stola. Nájdite rýchlosť ktorou opustí reťaz stôl a čas kedy to nastane.*

Riešenie. Nech dĺžka stola je c. Potom $\ell = a + b + c$. Označme previs reťaze v čase t cez pravý okraj stola $x(t)$ a jej rýchlosť $v(t)$. Vstupné údaje sú $x(0) = a$ a $v(0) = x'(0) = 0$. Nech hmotnosť reťaze je m. Úlohu rozdelíme na dve časti.



Časť I. Zistíme za aký čas T_1 bude mať reťaz previs len na pravej strane t. j. $x(T_1) = a + b$ a akú bude mať reťaz v tomto čase rýchlosť.

Časť II. Budeme zisťovať za aký čas T_2 sa reťaz zošmykne zo stola a akú nadobudne rýchlosť.

Časť I. Pohyb reťaze ovplyvňuje tiaž „ľavého“ aj „pravého“ previsu. Platí $G_1(t) = \frac{mg}{\ell}\, x(t)$ a $G_2(t) = \frac{mg}{\ell}\,(\ell - c - x(t))$. Pohyb teda spôsobuje sila

$$G(t) = G_1(t) - G_2(t) = \frac{mg}{\ell}\,(2x(t) - \ell + c)\,.$$

Pretože dĺžka reťaze na stole je konštantná, je trecia sila

$$\mathcal{O} = k_1 c v(t)$$

a podľa 2. NPZ platí

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = G(t) - \mathcal{O}(t) = \frac{mg}{\ell}(2x(t) - \ell + c) - k_1 c v(t). \tag{3.28}$$

Ak uvažujeme rýchlosť ako funkciu previsu x, tak

$$v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{g}{\ell}(2x - \ell + c) - kcv, \quad v(a) = 0, \quad k = k_1/m.$$

Na riešenie tejto diferenciálnej rovnice využijeme Matlab, ktorý poskytne hodnotu $v(a + b) = v_0 = 0,66094$ pre konštantu $k = 0,1$.

Teraz vyrátame čas T_1, keď je na ľavej strane nulový previs. Prepíšeme rovnicu (3.28) do tvaru

$$x''(t) = \frac{mg}{\ell}(2x(t) - \ell + c) - kcx'(t) \qquad x(0) = a, \quad x'(0) = 0.$$

Využitím podmienky $x(T_1) = a + b$, Matlab poskytne $T_1 = 1,8558$.

Časť II. Vynulujeme čas a sme v situácii, keď pohyb reťaze ovplyvňuje len tiažová sila G_1 a trecia sila $\mathcal{O} = k_1(\ell - x(t))v(t)$.

Preto z 2. NPZ vyplýva, že

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = G_1(t) - \mathcal{O}(t) = \frac{mg}{\ell}x(t) - k_1(\ell - x(t))v(t).$$

A teda

$$v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{g}{\ell}x - k(\ell - x)v, \quad v(a+b) = v_0, \quad k = k_1/m.$$

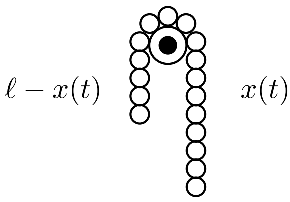
Opäť, využitím Matlabu dostávame $v(\ell) = 6,202945$. Na výpočet príslušného času T_2 použijeme rovnicu

$$x''(t) = \frac{mg}{\ell}x(t) - k_1(\ell - x(t))x'(t),$$

kde $x(0) = a + b$, $x'(0) = v_0$. Využitím Matlabu, z podmienky $x(T_2) = \ell$ nájdeme $T_2 = 1,3213$. Celkový čas potrebný na opustenie stola je $T = T_1 + T_2$.

Príklad 34 *Reťaz dĺžky ℓ je umiestnená na kotúči tak, že z jednej strany je previs dĺžky a a z druhej strany je previs dĺžky b, pričom $a > b$. Za aký čas reťaz skĺzne z kotúča?*

Riešenie. Predpokladáme, že priemer kotúča je vzľadom na dĺžku reťaze zanedbateľný t. j. $\ell = a + b$. Označme previs reťaze v čase t na „padajúcej“ strane $x(t)$ a jej rýchlosť $v(t)$. Vstupné údaje sú $x(0) = a$ a $v(0) = x'(0) = 0$. Nech hmotnosť reťaze je m.



Na reťaz pôsobia proti sebe dve sily $G_1(t) = \frac{mg}{\ell}\,x(t)$ spôsobená časťou reťaze dĺžky $x(t)$ a sila $G_2(t) = \frac{mg}{\ell}\,(\ell - x(t))$ spôsobená časťou reťaze dĺžky $\ell - x(t)$. Podľa 2. NPZ platí $F = G_1 - G_2$ a preto

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{mg}{\ell}\,(2x(t) - \ell).$$

Po substitúcii $y(t) = 2x(t) - \ell$ dostávame rovnicu

$$y''(t) - \frac{2g}{\ell}\,y(t) = 0, \qquad y(0) = \ell, \qquad y'(0) = 0.$$

Ak označíme $k = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}$, tak riešením tejto rovnice je

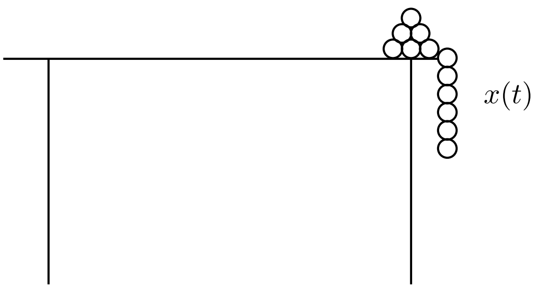
$$y(t) = \frac{a-b}{2}\left(\mathrm{e}^{kt} + \mathrm{e}^{-kt}\right), \qquad t \in \langle 0, T\rangle,$$

kde T je čas, keď reťaz skĺzne z kotúča, resp. $x(T) = \ell = y(T)$. Odtiaľ

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - (a-b)^2}}{a-b}\right).$$

Príklad 35 *Na stole je* **stočená** *reťaz dĺžky $\ell = 4\,m$ tak, že časť reťaze dĺžky $a = 0,5\,m$ prečnieva cez okraj stola. Zanedbajúc trenie, nájdite rýchlosť akou opustí reťaz stôl a čas kedy to nastane. Predpokladáme, že výška stola je väčšia ako dĺžka reťaze.*

Riešenie. Označme previs reťaze v čase t cez okraj stola $x(t)$ a jej rýchlosť $v(t)$. Vstupné údaje sú $x(0) = a$ a $v(0) = x'(0) = 0$. Nech hmotnosť reťaze je m_0.



Potom hmotnosť previsu je $m(t) = \frac{m_0}{\ell}\,x(t)$ a tiaž previsu je $G(t) = \frac{m_0 g}{\ell}\,x(t)$. Táto sila spôsobuje pohyb reťaze, ale narozdiel od natiahnutej reťaze sa pohybuje len previs. Preto na základe 2. NPZ máme diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre rýchlosť

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m(t)v(t)) = \frac{m_0 g}{\ell}\,x(t).$$

Pretože $v(t) = x'(t)$, z predchádzajúceho vzťahu dostávame

$$\frac{m_0}{\ell} v^2(t) + \frac{m_0}{\ell}\, x(t) \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{m_0 g}{\ell}\, x(t).$$

Keďže $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, dostávame Bernoulliho diferenciálnu rovnicu

$$v^2 + xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = gx, \qquad v(a) = 0.$$

Po substitúcii $v^2(x) = z(x)$ sa Bernoulliho diferenciálna rovnica transformuje na lineárnu rovnicu tvaru

$$2z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2gx, \qquad z(a) = 0.$$

Riešením tejto rovnice je

$$v^2(x) = z(x) = \frac{2g}{3}\left(x - \frac{a^3}{x^2}\right),$$

resp.

$$v(x) = \sqrt{\frac{2g}{3}}\frac{\sqrt{x^3 - a^3}}{x}, \qquad x \in \langle a, \ell\rangle$$

a hľadaná rýchlosť reťaze v okamihu opustenia stola je $v(\ell) = \sqrt{\frac{2g}{3}}\frac{\sqrt{\ell^3-a^3}}{\ell}$.

Pokúsime sa vyrátať čas T kedy reťaz opustí stôl. Vychádzame zo vzťahu

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = v(t) = \sqrt{\frac{2g}{3}}\frac{\sqrt{x^3 - a^3}}{x}, \qquad t \in \langle 0, T\rangle.$$

Po odseparovaní premenných dostávame

$$T = \sqrt{\frac{3}{2g}} \int \frac{x}{\sqrt{x^3 - a^3}}\,\mathrm{d}x.$$

Bohužiaľ daný integrál nevieme vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Pomôžeme si tak, že hľadaný čas vyjadríme pomocou určitého integrálu

$$T = \sqrt{\frac{3}{2g}} \int_a^\ell \frac{x}{\sqrt{x^3 - a^3}}\,\mathrm{d}x.$$

Na vyriešenie úlohy môžeme pre dané vstupy $a = 0,5$ a $\ell = 4$ použiť numerické metódy. Všimnime si ale, že sme dospeli k nevlastnému integrálu. Tento problém vyriešime čiastočným integrovaním metódou per partes.

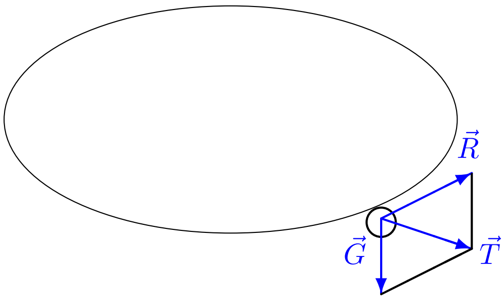
$$\begin{aligned} I &= \int_a^\ell \frac{x}{\sqrt{x^3 - a^3}}\,\mathrm{d}x = \int_a^\ell \frac{1}{\sqrt{x-a}}\frac{x}{\sqrt{x^2 + ax + a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\ell\sqrt{\ell - a}}{\sqrt{\ell^2 + a\ell + a^2}} - \int_a^\ell \frac{2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 + ax + a^2}}\left(1 - \frac{2x^2 + ax}{2\left(x^2 + ax + a^2\right)}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pre dané vstupy využitím Matlabu dostávame, že $T = 1,1509$ sekúnd.

Všimnime si, že zmenené podmienky na polohu reťaze viedli ku kvalitatívne odlišným diferenciálnym rovniciam.

Príklad 36 *Guľôčka s hmotnosťou m je zavesená na horizontálnej kruhovej slučke s polomerom r. Ak poznáme koeficient trenia k_f, určme akú začiatočnú rýchlosť v_0 treba guľôčke udeliť aby vykonala práve jeden obeh po kružnici a zastavila sa.*

Riešenie. Na guľôčku pôsobí trecia sila $\vec{\mathcal{O}}$, ktorá spomaľuje jej pohyb až ju nakoniec zastaví. Táto trecia sila je spôsobená výslednicou $\vec{T}$ pôsobenia tiaže $\vec{G}$ a odstredivej sily $\vec{R}$, pričom $G = mg$, $R = m\dfrac{v^2(t)}{r}$, kde $v(t)$ je rýchlosť guľôčky v čase t.



Sila $\vec{T}$ pritláča guľôčku ku slučke a teda $\vec{\mathcal{O}} = k_f \vec{T}$. Naviac pre jej veľkosť platí

$$T = \sqrt{G^2 + R^2} = \sqrt{m^2 g^2 + \frac{m^2 v^4}{r^2}} = \frac{m}{r}\sqrt{r^2 g^2 + v^4}.$$

Podľa 2. NPZ platí $F = -\mathcal{O}$ a teda

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_f}{r}\sqrt{r^2 g^2 + v^4}.$$

Označme $x(t)$ dráhu, ktorú prejde guľôčka za čas t. Potom vyjadrením rýchlosti ako funkcie dráhy dostávame

$$v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{k_f}{r}\sqrt{r^2 g^2 + v^4},$$

pričom na začiatku pre $x = 0$ máme $v = v_0$ a na konci pre $x = 2\pi r$ máme $v = 0$. Po odseparovaní premenných a následnom integrovaní dostávame

$$\frac{1}{2}\ln\left|v^2 + \sqrt{r^2 g^2 + v^4}\right| = -\frac{k_f}{r}\,x + c.$$

dosadením $x = 2\pi r$ vypočítame konštantu $c = (\ln(rg) + 4\pi k_f)/2$ a teda

$$\ln\frac{v^2 + \sqrt{r^2 g^2 + v^4}}{rg} = -\frac{2k_f}{r}\,x + 4\pi k_f.$$

Teraz pre $x = 0$, vidíme, že

$$\ln\frac{v_0^2 + \sqrt{r^2 g^2 + v_0^4}}{rg} = 4\pi k_f.$$

Odtiaľ

$$v_0^2 = rg\,\frac{\mathrm{e}^{4\pi k_f} - \mathrm{e}^{-4\pi k_f}}{2} = rg\sinh(4\pi k_f).$$

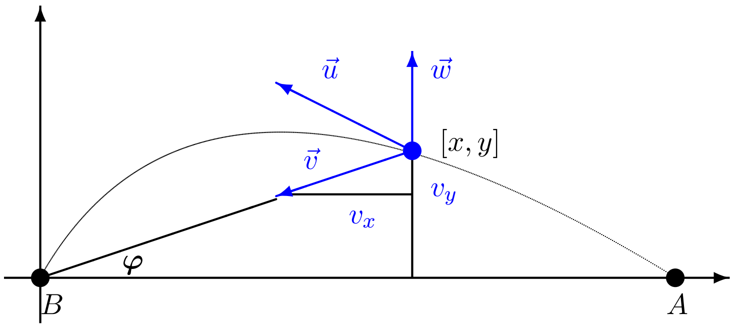
a teda guľôčke treba udeliť začiatočnú rýchlosť

$$v_0 = \sqrt{rg\sinh(4\pi k_f)}$$

na jeden obeh po kružnici. Ľahko sa overí, že na dva obehy je potrebná začiatočná rýchlosť $v_0 = \sqrt{rg\sinh(8\pi k_f)}$.

Príklad 37 *Lietadlo letí z bodu A do bodu B. $|AB| = a$ Motory lietadla udeľujú lietadlu konštantnú rýchlosť v (za bezvetria). Kolmo na spojnicu AB fúka vietor rýchlosťou w. Lietadlo letí tak, že jeho trup je stále natočený do bodu B. Nájdite trajektóriu lietadla a určte ako sa počas letu mení rýchlosť lietadla.*

Riešenie. Umiestnime body A, B na os x. Označme vektor rýchlosti lietadla $\vec{u}$. Táto rýchlosť $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, pričom $\vec{u} = (u_x, u_y)$, $\vec{v} = (v_x, v_y)$ a $\vec{w} = (0, w)$.



Keďže $v_x < 0$, $v_y < 0$, tak

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (-v\cos\varphi, -v\sin\varphi)$$

a preto

$$\vec{u} = (u_x, u_y) = (-v\cos\varphi, w - v\sin\varphi).$$

Vieme, že u_x je rýchlosť lietadla v smere osi x, takže

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_x = -v\cos\varphi$$

a analogicky

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_y = w - v\sin\varphi$$

Využijeme, že $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Ak označíme $k = \dfrac{w}{v}$, tak

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{w - v\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-v\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

T. j. dospeli sme k homogénnej diferenciálnej rovnici

$$y'(x) = \frac{y}{x} - k\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \qquad y(a) = 0.$$

ktorú substitúciou $y(x) = xz(x)$ transformujeme na separovateľnú diferenciálnu rovnicu

$$z + xz = z - k\sqrt{1 + z^2} \qquad z(a) = 0.$$

Riešením tejto rovnice je

$$\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = -k \ln x + c.$$

Využitím začiatočnej podmienky dostávame $c = k \ln a$, a preto

$$z + \sqrt{1 + z^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^{-k} \tag{3.29}$$

Na druhej strane

$$\frac{1}{z + \sqrt{1 + z^2}} = -z + \sqrt{1 + z^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^{k},$$

čo v kombinácii s (3.29) dáva

$$\frac{y}{x} = z = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-k} - \left(\frac{x}{a}\right)^{k}\right]$$

a teda hľadaná trajektória má rovnicu

$$y = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+k}\right], \tag{3.30}$$

Je logické predpokladať, že $k \in (0, 1)$. Ak by bolo $k \geq 1$, tak lietadlo do bodu B nemôže doletieť.

Teraz môžeme vyrátať ako sa mení rýchlosť lietadla. Platí

$$\begin{aligned} u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} &= \sqrt{v^2 + w^2 - 2vw \sin\varphi} = v\sqrt{1 + k^2 - 2k \sin\varphi} \\ &= v\sqrt{1 + k^2 - 2k\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}, \end{aligned}$$

kde y je dané v (3.30). Z odvodeného vzťahu plynie, že napr. najväčšia rýchlosť lietadla je $u(A) = v\sqrt{1 + k^2} = \sqrt{v^2 + w^2}$, resp. najmenšia rýchlosť je $u(B) = v(1 - k) = v - w$.

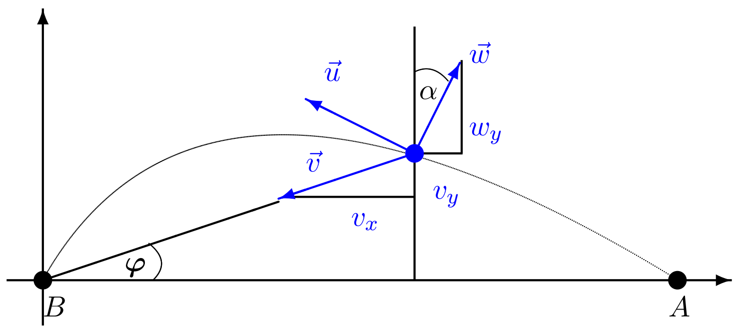
Príklad 38 *Modifikujte predchádzajúci príklad v tom, že smer vetra je taký, že zviera s kolmicou na spojnicu AB uhol α. Nájdite trajektóriu lietadla.*

Riešenie. Vektor $\vec{v}$ sa nemení, a preto

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (-v \cos\varphi, -v \sin\varphi).$$

Pre vektor $\vec{w}$ platí

$$\vec{w} = (w_x, w_y) = (w \sin\alpha, w \cos\alpha).$$



Keďže vektor rýchlosti lietadla $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, tak

$$\vec{u} = (u_x, u_y) = (-v \cos\varphi + w \sin\alpha, -v \sin\varphi + w \cos\alpha)$$

Vieme, že u_x je rýchlosť lietadla v smere osi x, takže

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_x = -v \cos\varphi + w \sin\alpha$$

a analogicky

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_y = -v \sin\varphi + w \cos\alpha.$$

Využijeme, že $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Ak označíme $k = \dfrac{w}{v}$, tak

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{-v\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + w \sin\alpha}{-v\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + w \sin\alpha}.$$

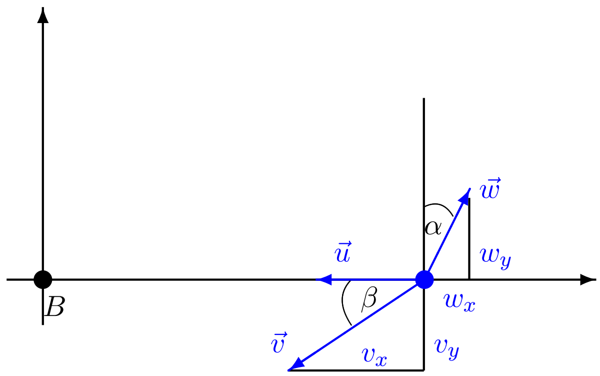
T. j. dospeli sme k homogénnej diferenciálnej rovnici

$$y'(x) = \frac{y - k \cos\alpha \sqrt{x^2+y^2}}{x - k \sin\alpha \sqrt{x^2+y^2}}, \qquad y(a) = 0.$$

Bohužiaľ, riešenie tejto diferenciálnej rovnice nevieme vyjadriť explicitne, a preto na vykreslenie grafu riešenia použijeme Matlab.

Modifikácia úlohy I. Pri danom smere vetra, pod akým uhlom treba natočiť lietadlo, aby sa pohybovalo po úsečke AB?

Označme β odklon lietadla od spojnice bodov A a B.



Keďže $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, na základe požiadaviek na vektor rýchlosti lietadla

$$\vec{u} = (-v\cos\beta + w\sin\alpha, -v\sin\beta + w\cos\alpha) = (-v\cos\beta + w\sin\alpha, 0)$$

Preto hľadaný uhol spĺňa

$$v\sin\beta = w\cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right).$$

Môžeme vypočítať rýchlosť lietadla

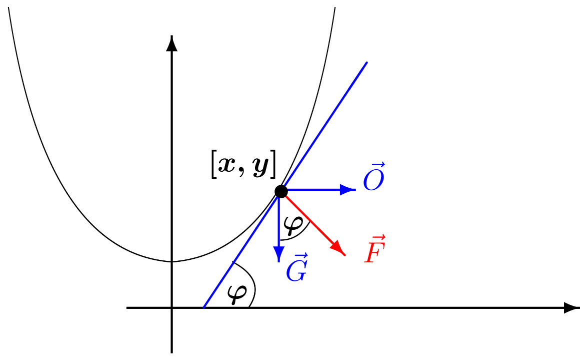
$$u = |u_x| = v\cos\beta - w\sin\alpha = v\sqrt{1 - \frac{w^2}{v^2}\cos^2\alpha} - w\sin\alpha$$
$$= \sqrt{v^2 - w^2\cos^2\alpha} - w\sin\alpha$$

Doba letu

$$T = \frac{a}{\sqrt{v^2 - w^2\cos^2\alpha} - w\sin\alpha}.$$

Príklad 39 *Pohár naplnený spolovice tekutinou položíme na podložku, ktorá rotuje konštantnou uhlovou rýchlosťou ω. Aký tvar nadobudne povrch tekutiny?*

Uvažujme bod (molekulu) so súradnicami $[x, y]$ na kolmom reze povrchu tekutiny po dosiahnutí rovnovážneho stavu (bod sa už nepohybuje smerom nahor ani nadol). Na molekulu pôsobia dve sily – gravitačná $G = mg$ a odstredivá $O = mx\omega^2$.



V rovnovážnej polohe výsledná sila $\vec{F}$ smeruje kolmo na dotyčnicu ku krivke. Z geometrickej interpretácie derivácie plynie

$$y'(x) = \operatorname{tg} \varphi = \frac{O}{G} = \frac{\omega^2}{g}\, x,$$

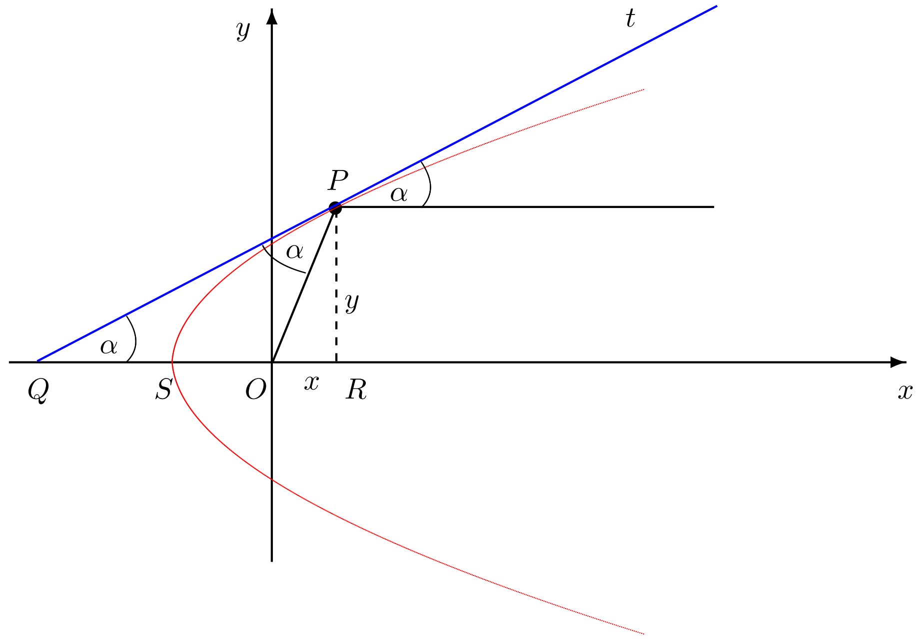
a preto

$$y(x) = \frac{\omega^2}{2g}\, x^2.$$

Keďže v kolmým rezom povrchu tekutiny je parabola, tak výsledný povrch je rotačný paraboloid s rovnicou $z = \dfrac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2\right)$.

Príklad 40 *Parabolické zrkadlo. Nech je zdroj svetla umiestnený v začiatku súradnicovej sústavy. Nájdime tvar zrkadla (predpis krivky), aby sa lúče od neho odrážali rovnobežne s osou zrkadla, v našom prípade s osou o_x.*

Riešenie Situáciu zakreslíme do pravouhlého súradnicového systému. Zdroj svetla, ako to vyplýva zo zadania, je umiestnený v začiatku súradnicového systému. Vychádzame z fyzikálneho zákona, že uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu. Pričom uhol priamky a krivky určujeme ako uhol priamky a dotyčnice ku krivke v spoločnom bode.



Trojuholník QOP je rovnoramenný, preto $|QO| = |OP|$. Navyše, z pravouhlého trojuholníka ORP dostávame

$$|QO| = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dotyčnica ku hľadanej krivke, označme jej predpis $y(x)$, v bode $P[x, y]$ má smernicu

$$k = \mathrm{tg}\alpha.$$

Z pravouhlého trojuholníka QRP dostávame

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|PR|}{|QR|} = \frac{y}{|QO| + |OR|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

Využijúc geometrický význam derivácie funkcie: derivácia funkcie v dotykovom bode je smernica dotyčnice, máme

$$y' = \mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

diferenciálnu rovnicu prvého rádu, ktorej riešením je hľadaná krivka. DR upravíme vynásobením pravej strany vhodnou jednotkou $\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}-x}$

$$y' = \frac{y(\sqrt{x^2 + y^2} - x)}{x^2 + y^2 - x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}.$$

Po ďalšej úprave

$$y'y + x = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\frac{y\acute{y} + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1.$$

Keďže výraz na ľavej strane rovnice je derivácia funkcie $\sqrt{x^2 + y^2}$ môžeme zapísať

$$\frac{d(\sqrt{x^2 + y^2})}{dx} = 1.$$

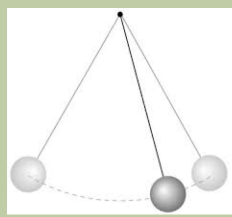
Integrovaním dostávame všeobecné riešenie

$$y^2 = 2cx + c^2, \ \ c \in R.$$

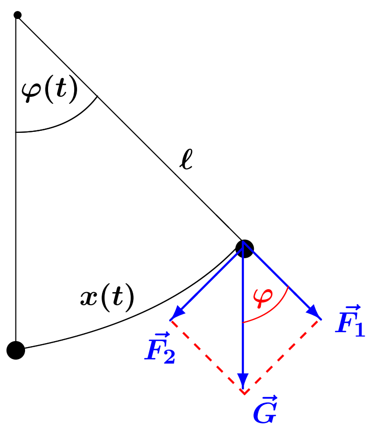
Krivka je pre rôzne hodnoty konštanty c parabola, ktorej os je o_x. Môžeme zvoliť začiatočnú podmienku, napr. nech krivka prechádza bodom $[-a, 0]$, teda $y(-a) = 0$. Dosadením tejto podmienky do všeobecného riešenia dostávame $c = 2a$ a partikulárne riešenie (konkrétna parabola, ktorá prechádza daným bodom) je $y(x) = 4a(x + a)$. Z predpisu získanej paraboly môžeme vyčítať, že jej ohnisko je začiatok súradnicovej sústavy, v našej úlohe zdroj svetla.

Poznámka 6 *S problémom riešeným v predchádzajúcom príklade sa v praxi môžeme stretnúť pri reflektoroch auta, satelitných prijímačoch, teleskopy, slnečné elektrárne, ...*

Príklad 41 *Na nehmotnej niti dĺžky l visí teleso o hmotnosti m. Niť je upevnená na voľnom konci. Vychýlením telesa z rovnovážnej polohy začne teleso kmitať. Vyjadrime predpis pre dráhu pohybu telesa (pohyb kyvadla). Predpokladáme, že na začiatku máme výchylku o uhol α a telesu neudelíme žiadnu začiatočnú rýchlosť.*



Riešenie Pohyb telesa upevneného na niti spôsobuje iba gravitačná sila. Táto sila spôsobuje jednak napnutie nite (zložka $\vec{F_1}$) a samotný pohyb spôsobuje zložka $\vec{F_2}$, ktorej smer je v smere dotyčnice ku dráhe pohybu telesa. Označme $x(t)$ ako dráhu pohybu telesa, pričom ak $x(t) = 0$, tak teleso je v rovnovážnej polohe (kyvadlo sa nehýbe). Nech $\phi(t)$ vyjadruje uhol odpovedajúci dráhe $x(t)$. (viď nasledujúci obrázok)



Z pravouhlého trojuholníka dostávame

$$\sin \phi(t) = \frac{F_2}{G}$$

a teda

$$F_2 = G.\sin\phi(t) = m.g.\sin\phi(t).$$

Na základe 2. Newtonovho pohybového zákona výsledná sila pôsobiaca na teleso je úmerná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia, ktoré mu pôsobiaca sila udeľuje. V našom príklade je to sila $\vec{F_2}$, ktorá pôsobí proti pohybu telesa a môžeme teda zapísať

$$-F_2 = m.\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Po dosadení vyjadrenia pre F_2 dostávame

$$-m.g.\sin\phi(t) = m.\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Zostavili sme diferenciálnu rovnicu 2. rádu, kde sú ale 2 neznáme funkcie $x(t)$ a $\phi(t)$, preto uhol vyjadríme pomocou dráhy

$$\phi(t) = \frac{x(t)}{l}.$$

Dosadením do DR máme

$$-g\sin\frac{x(t)}{l} = x''(t).$$

Aby sme zostavenú diferenciálnu rovnicu vedeli riešiť využijeme nasledovné zjednodušenie. Využijeme známy vzťah

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

teda pre "malé"hodnoty x môžeme hodnotu $\sin x$ aproximovať hodnotou x. V našom príklade, ak dodáme zjednodušujúci predpoklad, že budeme mať "malé odchýlky", tak funkciu $\sin\frac{x(t)}{l}$ môžeme nahradiť funkciou $\frac{x(t)}{l}$. Po zjednodušení dostávame lineárnu diferenciálnu rovnicu 2. rádu v tvare

$$x''(t) + \frac{g}{l}x(t) = 0.$$

Charakteristická rovnica odpovedajúca tejto DR je

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0,$$

jej korene sú $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$ a všeobecné riešenie DR je

$$x(t) = c_1\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right), c_1, c_2 \in R.$$

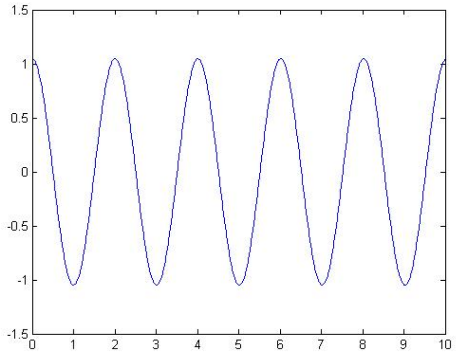
Dosadením začiatočných podmienok $x(0) = \alpha l$ (začiatočné vychýlenie telesa o uhol α) a $x'(0) = 0$ (nulová začiatočná rýchlosť) vypočítame konštanty c_1, c_2.

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \alpha l.$$

Partikulárne riešenie DR a teda predpis funkcie vyjadrujúcej dráhu pohybu telesa na kyvadle je

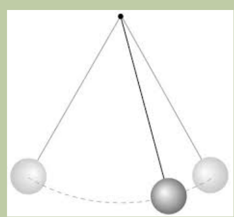
$$x(t) = \alpha l\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Graf riešenia



Poznámka 7 *V Príklade 41 sme dostali rovnicu tzv. netlmených "večných" kmitov. Takéto "večné"kyvadlo zostrojil v r.1851 francúzsky fyzik J.B. León Foucault, ktorý týmto zariadením dokázal rotáciu Zeme a jeho neustále kmitanie zabezpečil "malým úskokom" - magnetom umiestneným v základni, ktorý pôsobí na kovovú guľu na konci kyvadla. Rovnaký efekt - "večné" kmity by sme dosiahli, aj keby bolo kyvadlo umiestnené vo vákuu. Reálne na každé kyvadlo pôsobí odpor prostredia a po istom čase sa kmitanie zastaví. Tento problém budeme riešiť v nasledujúcom príklade opäť pomocou vhodne zostavenej diferenciálnej rovnice.*

Príklad 42 *Na nehmotnej niti dĺžky l visí teleso o hmotnosti m. Niť je upevnená na voľnom konci. Vychýlením telesa z rovnovážnej polohy začne teleso kmitať. Vyjadrime predpis pre dráhu pohybu telesa (pohyb kyvadla), ak na kyvadlo pôsobí odpor prostredia, ktorý je priamoúmerný rýchlosti pohybu telesa. Predpokladáme, že na začiatku máme výchylku o uhol α a telesu neudelíme žiadnu začiatočnú rýchlosť.*



Riešenie Z príkladu 41 vieme, že pohyb kyvadla spôsobuje gravitačná sila (presnejšie jej zložka $\vec{F_2}$) a teraz navyše pôsobí na kyvadlo aj odpor prostredia, ktorý na základe zadania vyjadríme nasledovne

$$O = k\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \;\; k > 0.$$

Na základe 2. Newtonovho pohybového zákona výsledná sila pôsobiaca na teleso je úmerná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia, ktoré mu pôsobiaca sila udeľuje. V našom príklade je to sila $\vec{F_2}$, a odpor O ktoré pôsobia proti pohybu telesa a môžeme teda zapísať

$$-F_2 - O = m.\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Po dosadení vyjadrenia pre $F_2 = G.\sin\phi(t) = mg\sin\phi(t) = mg\frac{x(t)}{l}$ a O dostávame lineárnu diferenciálnu rovnicu 2. rádu

$$x''(t) + \frac{k}{m}x'(t) + \frac{g}{l}x(t) = 0.$$

Kvôli jednoduchosti ďalšieho zápisu použijeme označenia $a^2 = \frac{g}{l},\ 2b = \frac{k}{m}$ a teda

$$x''(t) + 2bx'(t) + a^2x(t) = 0.$$

Charakteristická rovnica odpovedajúca DR Je

$$\lambda^2 + 2b\lambda + a^2 = 0,$$

ktorej korene sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a^2}}{2} = -b \pm i\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Pri vyjadrení koreňov sme predpokladali, že $a^2 > b^2$. Tento predpoklad je veľmi logický, vychádzame z toho, že konštanta k z vyjadrenia odporu je "malá", v prípade "veľkých" hodnôt odpor prostredia by bol tak veľký, že kyvadlo by sa po začiatočnom vychýlení hneď zastavilo. Na základe koreňov charakteristickej rovnice je všeobecné riešenie DR

$$x(t) = c_1e^{-bt}\sin(t\sqrt{a^2 - b^2}) + c_2e^{-bt}\cos(t\sqrt{a^2 - b^2}).$$

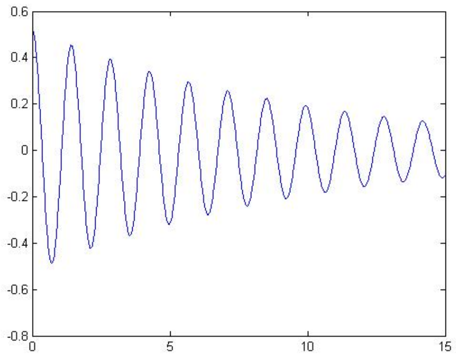
Dosadením začiatočných podmienok $x(0) = \alpha l$ (začiatočné vychýlenie telesa o uhol α) a $x'(0) = 0$ (nulová začiatočná rýchlosť) vypočítame konštanty c_1, c_2.

$$c_1 = \frac{l\alpha b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad c_2 = \alpha l.$$

Partikulárne riešenie DR a teda predpis funkcie vyjadrujúcej dráhu pohybu telesa na kyvadle pri odpore prostredia je

$$x(t) = \frac{l\alpha b}{\sqrt{a^2 - b^2}}e^{-bt}\sin(t\sqrt{a^2 - b^2}) + \alpha l\cos(t\sqrt{a^2 - b^2}).$$

Dostali sme predpis funkcie, ktorá popisuje tz. "tlmené"kmity. Graf riešenia (tlmených kmitov) je na nasledujúcom obrázku.



Literatúra

[1] M. Greguš, M. Švec, V. Šeda, *Obyčajné diferenciálne rovnice*, ALFA, Bratislava, 1985.

[2] J. Diblík, M. Ružičková, *Obyčajné diferenciálne rovnice,* IDIS ŽU, 2008.

[3] M. Braun, *Differential equation and their applications,* Springer, New York, 1983.