TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH - VÝZVA pre tvoju BUDÚCNOSŤ

Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

LINEÁRNE A KVADRATICKÉ PROGRAMOVANIE

Vysokoškolská učebnica

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Štefan Berežný a Michal Staš

Európska únia
Európsky sociálny fond

Agentúra
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR
pre štrukturálne fondy EÚ

Operačný program
VZDELÁVANIE

Lineárne a kvadratické programovanie

Prvé vydanie

Táto publikácia vznikla za finančnej podpory

z **Európskeho sociálneho fondu** v rámci
Operačného programu **VZDELÁVANIE**.

Prioritná os 1 Reforma vzdelávania a odbornej prípravy
Opatrenie 1.2 Vysoké školy a výskum a vývoj ako motory
rozvoja vedomostnej spoločnosti.

Názov projektu: Balík doplnkov pre ďalšiu reformu vzdelávania na TUKE
ITMS 26110230093

Autori: © **RNDr. Štefan BEREŽNÝ, PhD., 2016**
© **RNDr. Michal STAŠ, PhD., 2016**

Recenzovali:	Mgr. Ján BUŠA, Ph.D. doc. RNDr. Jozef Bucko, PhD.
Vydavateľ:	Technická univerzita v Košiciach Fakulta elektrotechniky a informatiky
Rok:	2016
Rozsah:	130
Náklad:	50 ks
ISBN:	978-80-553-2625-2

Za odbornú a jazykovú stránku tejto vysokoškolskej učebnice zodpovedajú autori.

Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

Predhovor

Táto knižka je určená pre študentov inžinierskeho stupňa štúdia na Fakulte elektrotechniky a informatiky TUKE. Nadväzuje na predmety Operačná analýza z bakalárskeho stupňa štúdia a Optimalizačné metódy z inžinierskeho stupňa štúdia. V týchto predmetoch študenti získajú základné zručnosti s lineárnou optimalizáciou a simplexovým algoritmom a všeobecnými princípmi a postupmi v optimalizácii. Na to všetko nadväzuje táto učebnica, ktorá rozširuje metódy a analýzy z lineárnej optimalizácie a využitia simplexovej metódy a tiež uplatnenie všeobecných princípov hľadania optima na úlohy kvadratického programovania.

Tento učebný text je dostupný na CD a na web stránke KMTI FEI TUKE a v systéme Moodle, ktorý je spravovaný FEI TUKE.

Košice, 30. augusta 2016 Autori

Obsah

Zoznam skratiek a symbolov

LP – lineárne programovanie

$\boldsymbol{a}_i$ – i-ty riadok maticer $\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}_j$ – j-ty stĺpec matice $\boldsymbol{A}$

F – množina prípustných riešení úlohy LP

$\vec{x}^{\mathrm{opt}}$ – optimálne riešenie úlohy LP

$f^{\mathrm{opt}}(\vec{x})$ – hodnota účelovej funkcie v bode $\vec{x} = \vec{x}^{\mathrm{opt}}$, optimálna hodnota úlohy LP

$B(i)$ – stĺpcový index matice $\boldsymbol{A}$, ktorý reprezentuje i-tu zložku bázy $\boldsymbol{B}$

BR – bázické riešenie

P – primána úloha LP

D – duálna úloha LP

F_P – množina prípustných riešení primárnej úlohy LP

F_D – množina prípustných riešení duálnej úlohy LP

CLP – celočíselné lineárne programovanie

$\vec{x}_r^{\mathrm{opt}}$ – optimálne riešenie relaxácie úlohy CLP

$\{a\}$ – zlomková časť čísla a

$\lfloor a \rfloor$ – dolná celá časť čísla a

$\vec{c}$ – cenový vektor, vektor koeficientov účelovej funkcie úlohy LP

$\boldsymbol{A}$ – matica koeficientov ohraničení úlohy LP

$\vec{b}$ – vektor pravých strán ohraničení úlohy LP

f – účelová funkcia

Kapitola 1

Anticyklické pravidlá

1.1 Úvod

V prípade degenerovaných úloh lineárneho programovania sa v priebehu výpočtu môže stať, že pri výbere pivota v danom stĺpci nebude len jeden minimálny podiel. Dôsledkom takejto situácie bude, že sa v nasledujúcom kroku objaví v simplexovej tabuľke v nultom stĺpci aspoň jedna z bázických premenných s hodnotou 0. V takomto prípade nedôjde ku zmene hodnoty účelovej funkcie v ďalšom kroku prechodu od jednej bázy k druhej. Z tohto dôvodu je tu nebezpečie, že sa budeme znovu vracať k bázam, ktoré sme už predtým prechádzali (t. j. vzniká tu nebezpečie zacyklenia algoritmu). Existuje viacero spôsobov ako takejto situácii predísť. Základnou myšlienkou je upresnenie pravidiel výberu kľúčového stĺpca a riadku tak, aby bol výber vždy jednoznačný. Takýmito pravidlami sú, napr. lexikografické a Blandovo pravidlo, ktorým sa budeme bližšie venovať.

Definícia 1.1 (**Cyklus v simplexovom algoritme**) *Cyklom* v simplexovom algoritme rozumieme konečnú postupnosť krokov simplexového algoritmu, ktorý začína a končí rovnakou bázou, a teda aj rovnakou simplexovou tabuľkou.

Veta 1.1 V priebehu každého cyklu sa hodnoty pravých strán ohraničení v nultom stĺpci nemenia a v každom kroku algoritmu pre riadok i, ktorý obsahuje pivot platí, že $x_{i0} = 0$.

Dôkaz:
Ak vzniká cyklus medzi bázami $\boldsymbol{B}^1$ a $\boldsymbol{B}^2$, tak potom

$$\vec{c}^\top \cdot \vec{x}_{\boldsymbol{B}^1} \geqq \vec{c}^\top \cdot \vec{x}\,' \geqq \vec{c}^\top \cdot \vec{x}\,'' \geqq \cdots \geqq \vec{c}^\top \cdot \vec{x}_{\boldsymbol{B}^2} = \vec{c}^\top \cdot \vec{x}_{\boldsymbol{B}^1}, \tag{1.1}$$

z čoho vyplýva rovnosť vo všetkých uvedených nerovnostiach. Zo zmeny účelovej funkcie $-h = -h - \frac{x_{i0}c_j}{x_{ij}}$ musí platiť $x_{i0}c_j = 0$ a keďže $c_j < 0$, tak nutne $x_{i0} = 0$.

Následne pre všetky zvyšné $k \in \{1, \dots, m\}$ platí $x_{k0} := x_{k0} - \frac{x_{i0}x_{kj}}{x_{ij}} = x_{k0}$, a tak nultý stĺpec simplexovej tabuľky zostáva bez zmeny.

Q. E. D.

1.2 Lexikografické pravidlo

Základné fakty:

- autormi sú Dantzig, Orden a Wolfe;
- od základnej procedúry sa líši iba spresneným výberom pivotového riadku, ktorý sa určuje pomocou zložitejšieho pravidla a to v prípade, ak by mohlo dôjsť k zacykleniu algoritmu;
- túto metódu možno použiť v ľubovoľnej iterácii za predpokladu primárnej prípustnosti simplexovej tabuľky.

Definícia 1.2 (**Lexikografický väčší vektor, lexikografický kladný vektor**) Vektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ je *lexikograficky väčší* ako vektor $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$, píšeme $\vec{x} \succ \vec{y}$, ak platí

$$(\exists i)(x_i > y_i) \wedge (\forall j < i)(x_i = y_j).$$

Vektor $\vec{x}$ je *lexikograficky kladný*, ak $\vec{x} \succ \vec{0}$, t. j. ak prvá jeho nenulová zložka je kladná.

ALGORITMUS:
Predpokladajme, že všetky riadky v simplexovej tabuľke sú lexikograficky kladné (okrem nultého), t. j. úloha je primárne prípustná. Pravidlá pre výber riadkov a stĺpcov v simplexovom algoritme sú nasledovné:

P1: výber ľubovoľného stĺpca $j \in \{1, \dots, n\}$ s relatívnou cenou $c_j^r < 0$, odporúča sa výber stĺpca s najnižšou relatívnou cenou;

P2: výber riadku $i \in \{1, \dots, m\}$, v ktorom sa nadobúda lexikografické minimum z riadkov simplexovej tabuľky $\frac{1}{x_{ij}}(x_{i0}, \dots, x_{in})^\top$ pre $x_{ij} > 0$, t. j. v prípade ak výber pivota nie je jednoznačný

$$\lambda = \lambda(k) = \frac{x_{k0}}{x_{kj}} = \min_{l:\ x_{lj}>0} \left\{ \frac{x_{l0}}{x_{lj}} \right\}, \text{ pre } k \in K \subseteq \{1, \dots, m\} \tag{1.2}$$

vyberáme i-ty riadok tak, aby vektor $\frac{1}{x_{ij}}(x_{i0}, \dots, x_{in})^\top$ bol lexikograficky minimálny zo všetkých vektorov $\frac{1}{x_{kj}}(x_{k0}, \dots, x_{kn})^\top$ pre dané $k \in K$.

Základné vlastnosti algoritmu:

- na základe pravidiel výberu pivota v zmysle lexikografického usporiadania riadky zostávajú lexikograficky kladné;
- na základe pravidiel výberu pivota v zmysle lexikografického usporiadania a predchádzajúcej vlastnosti nultý riadok ostro lexikograficky rastie;
- z predchádzajúcej vlastnosti vyplýva, že simplexová metóda skončí po konečnom počte krokov.

1.3 Blandovo pravidlo

Základné fakty:

- autorom je Robert G. Bland v roku 1977, pozri [3];
- Blandovo pravidlo, nazývané aj ako pravidlo najmenších indexov, požaduje voľbu pivotovaného stĺpca s najmenším indexom (t. j. minimálne j s príslušnou zápornou relatívnou cenou) a z možných pivotovaných riadkov pre dané j ak výber pivota nie je jednoznačný kvôli viacerým rovnakým minimálnym podielom potom volíme ten, ktorého bázická premenná má minimálny index (t. j. B_k – „index bázickej premennej v k-tom riadku“ je minimálny možný pre už zvolené j). Inak povedané, medzi bázické indexy prichádza minimálny možný a odchádza tiež minimálny možný index;
- v revidovanej metóde je lexikografické pravidlo nepoužiteľné, no pravidlo najmenších indexov sa aplikuje bez problémov.

Myšlienka algoritmu:

Uvažujme základný problém

$$\min\{\vec{c}^\top x : \boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geqq \vec{0}\}, \tag{1.3}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je matica typu $m \times n$ pre $m \leqq n$ a nech $B = (B_1, \dots, B_m)$ je usporiadaná m-tica vzájomne rôznych čísel z $\{1, \dots, n\}$. Cieľom v danom kroku algoritmu je prejsť od $B = (B_1, \dots, B_{i-1}, B_i, B_{i+1}, \dots, B_m)$ k $B' = (B_1, \dots, B_{i-1}, B_j, B_{i+1}, \dots, B_m)$, t. j. v i-tom stĺpci sa má objaviť j-ty stĺpec jednotkovej matice. Inak povedané, aktuálnu simplexovú tabuľku prepivotujeme prvkom x_{ij}. Samozrejmou požiadavkou pri výbere pivota je zachovanie primárnej prípustnosti simplexovej tabuľky, zachovanie bázičnosti a klesajúcosť hodnoty účelovej funkcie, z čoho dostávame následujúce podmienky: $x_{ij} > 0$, $\frac{x_{i0}}{x_{ij}} = \min_{k:\, x_{kj}>0} \left\{\frac{x_{k0}}{x_{kj}},\right\}$ a $c_j^r < 0$.

Pravidlá výberu v Blandovom pravidle:

Predpokladajme, že v simplexovej tabuľke nie je splnená podmienka optimality a úloha nie je neohraničená.

P1: výber prvého stĺpca $j \in \{1, \dots, n\}$ zľava s relatívnou cenou $c_j^r < 0$, t. j.

$$j = \min\{s : c_s^r < 0\};$$

P2: výber riadku $i \in \{1, \dots, m\}$ s pivotom $x_{ij} > 0$ tak, aby $\frac{x_{i0}}{x_{ij}} = \min_{k:\, x_{kj}>0} \left\{\frac{x_{k0}}{x_{kj}}\right\}$. Ak výber pivota nie je jednoznačný

$$\lambda = \lambda(k) = \frac{x_{k0}}{x_{kj}} = \min_{l:\, x_{lj}>0} \left\{\frac{x_{l0}}{x_{lj}} :\right\}, \text{ pre } k \in K \subseteq \{1, \dots, m\} \tag{1.4}$$

vyberáme i-ty riadok tak, aby $i = \min\{B_k : k \in K\}$.

ALGORITMUS:

Celý proces použitia Blandovho pravidla môžeme zhrnúť nasledovným algoritmom po zostavení vstupnej simplexovej tabuľky:

opt := *false* **and** *neohr* := *false*
repeat
  if $\vec{c}^r \geqq \vec{0}$ **then** *opt* := *true*
    else
    begin
      $j := \min\{l : c_l^r < 0\}$
      if $\boldsymbol{A}_j \leqq 0$ **then** *neohr* := *true*
        else urč i podľa Blandovho pravidla, pivotovanie s x_{ij} a $B_i = j$
      endif
    end
  endif
until (*opt* **or** *neohr*)
if *opt* is *true* **then** $\vec{x}_B$ je optimálne riešenie
  else úloha je neohraničená
endif

Veta 1.2 Simplexový algoritmus s použitím Blandovho pravidla skončí po konečnom počte krokov.

Dôkaz:
Predpokladajme, že pri použití Blandovho pravidla dôjde k zacykleniu. Označme K ako

množinu všetkých indexov k, ktoré vstupovali do bázy v priebehu daného cyklu. K je konečná množina, a tak nech $q = \max K$. O danom indexe q teda vieme, že v istom kroku algoritmu musela vstúpiť premenná x_q medzi bázické premenné (nech B_0 je množina bázických indexov v danom kroku a $y_q < 0$ príslušná relatívna hodnota premennej x_q) a v nejakom ďalšom kroku z nich vystúpiť (nech v danom kroku bol vybraný pivot zo stĺpca s príslušnou hodnotou $c_s^r < 0$).

Na základe uvedených predpokladov následne definujme z predpisom: $z_B = \boldsymbol{A}_s$, (t. j. $z_{B_j} = a_{js}$ pre každé j), čiže $z_s = -1$ a $z_j = 0$ inak. Z definície dostávame vlastnosti $z_B = \boldsymbol{A}_B^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_s$ a $\boldsymbol{A}_B \cdot z_B + (-1)\boldsymbol{A}_s = \boldsymbol{A}_z = 0$, ktoré priamo využijeme pri nasledovných rovnostiach

$$y \cdot z = (\vec{c}^\top - \vec{c}_{B_0} \cdot \boldsymbol{A}_{B_0}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot z = \vec{c}^\top \cdot z = \vec{c}_B^\top \cdot z_B + c_s \cdot z_s = \vec{c}_B^\top \cdot \boldsymbol{A}_B^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_s - c_s = -c_s^r > 0.$$

To znamená, že pre nejaké k je $y_k \cdot z_k > 0$. Keďže $y_k \neq 0$ tak $k \notin B_0$. Podobne $z_k \neq 0$, a tak z definície z buď $k \in B$ alebo $k = s$, t. j. buď je v báze alebo práve vstúpi do K. Ľahko overíme, že $k \neq q$.

(1) Ak $y_k < 0$, tak k by pripadalo do úvahy pre vstup. No nakoľko nebolo vybrané, tak $q < k$.

(2) Ak $y_k > 0$ a $z_k > 0$, tak potom aj $z_k = z_{B_r} = a_{rs} > 0$ pre nejaké r. Ale ak $y_k > 0$ a navyše $k \in B \setminus B_0$, tak k muselo vystúpiť a tak $x_{r0} = 0$, t. j.

$$0 = \frac{x_{r0}}{a_{rs}} = \min \left\{ \frac{x_{j0}}{a_{js}} : a_{js} > 0 \right\}.$$

Čiže p bolo vhodné pre výber, no nebolo vybrané, a tak $q < k$.

V oboch prípadoch sme ukázali, že $q < k$, čo je spor s predpokladom výberu $q = \max K$.

Q. E. D.

1.4 Riešené príklady

Úloha 1.1 Pomocou simplexovej metódy vyriešte nasledujúci problém:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 20x_1 - 53x_2 - 41x_3 + 204x_4 &\longrightarrow \min, \\ 2x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 &\leqq 0, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 &\leqq 0, \\ -2x_1 + 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 &\leqq 1, \\ x_{1,\dots,4} &\geqq 0. \end{aligned}$$

Riešenie:
Prepíšeme danú úlohu LP do štandardného tvaru s doplnkovými premennými s_1, s_2 a s_3, ktoré budú zároveň bázicke:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 20x_1 - 53x_2 - 41x_3 + 204x_4 &\longrightarrow \text{min}, \\ 2x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 + s_1 &= 0, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 + s_2 &= 0, \\ -2x_1 + 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 + s_3 &= 1, \\ x_{1,\dots,4}, s_1, s_2, s_2, s_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Danú úlohu zapíšeme do simplexovej tabuľky

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
–	0	20	-53	-41	204	0	0	0
x_5	0	2	-11	-5	18	1	0	0
x_6	0	-1	4	2	-8	0	1	0
x_7	1	-2	11	5	-18	0	0	1

V nultom riadku sme tak získali záporné relatívne ceny pre premenné x_2 a x_3. Pri zvolení si stĺpca, ktorý je reprezentovaný premennou x_2, sa pivotom stáva číslo 4 na základe jednoznačnosti výberu t. j. min $\left\{\frac{0}{4}, \frac{1}{11}\right\} = \frac{0}{4}$. Po následnom prepivotovaní číslom 4 dostávame tabuľku

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
–	0	$\frac{27}{4}$	0	$-\frac{29}{2}$	98	0	$\frac{53}{4}$	0
x_5	0	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	-4	1	$\frac{11}{4}$	0
x_2	0	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-2	0	$\frac{1}{4}$	0
x_7	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	4	0	$-\frac{11}{4}$	1

Pri výbere stĺpca reprezentovaného premennou x_3 sa z nejednoznačnosti výberu minima, t. j. min $\left\{\frac{0}{0{,}5}, \frac{0}{0{,}5}\right\}$, podľa lexikografického pravidla stáva pivotom číslo $\frac{1}{2}$ pre riadok tabuľky, ktorý je reprezentovaný premennou s_1, pretože pri určovaní lexikografického minima platí:

$$\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} < \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}.$$

Po následnom prepivotovaní stanoveným pivotom získame tabuľku

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
$-$	0	-15	0	0	-18	29	93	0
x_3	0	$-\frac{3}{2}$	0	1	-8	2	$\frac{11}{2}$	0
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	2	-1	$-\frac{5}{2}$	0
x_7	1	0	0	0	0	1	0	1

Pri výbere stĺpca repezentovaného premennou x_1 je z jednoznačnosti pivotom číslo $\frac{1}{2}$ pre riadok premennej x_2, po prepivotovaní dostávame tabuľku

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
$-$	0	0	30	0	42	-1	18	0
x_3	0	0	3	1	-2	-1	-2	0
x_1	0	1	2	0	4	-2	-5	0
x_7	1	0	0	0	0	1	0	1

Na záver, pri výbere stĺpca repezentovaného premennou s_1 je opäť z jednoznačnosti pivotom číslo 1 pre riadok premennej s_3.

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
$-$	1	0	30	0	42	0	18	1
x_3	1	0	3	1	-2	0	-2	1
x_1	2	1	2	0	4	0	-5	2
x_5	1	0	0	0	0	1	0	1

Pomocné nebázické premenné s_2 a s_3 majú kladné relatívne ceny, preto má úloha jedno optimálne riešenie a to $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (2,0,1,0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = -1$. $\surd$

Úloha 1.2 Pomocou simplexovej metódy vyriešte nasledujúci problém:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = x_1 - x_2 &\longrightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 &= 2, \\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Riešenie:

Najprv je potrebné vyriešiť pomocnú úlohu zavedením pomocných premenných p_1 a p_2 v daných ohraničeniach:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + p_1 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + p_2 &= 2. \end{aligned}$$

Pomocná úloha má tvar:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &\longrightarrow \min, \\ 2x_1 + 3x_2 + p_1 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + p_2 &= 2, \\ x_1, x_2, p_1, p_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Pomocnú úlohu zapíšeme do simplexovej tabuľky:

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	p_1	p_2
$-$	0	0	0	1	1
p_1	3	2	3	1	0
p_2	2	1	2	0	1

Nakoľko sú premenné p_1, p_2 bázické, tak ako prvé sú potrebné príslušné prepivotovania, aby sme dosiahli nulové hodnoty v nultom riadku pre dané bázické premenné

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	p_1	p_2
$-$	-5	-3	-5	0	0
p_1	3	2	3	1	0
p_2	2	1	2	0	1

Pri riešení pomocnej úlohy pri hľadaní pivota použijeme lexikografické pravidlo. Pri výbere stĺpca reprezentovaného premennou x_2 sa z nejednoznačnosti výberu minima, t. j. $\min\left\{\frac{3}{3}, \frac{2}{2}\right\}$, podľa lexikografického pravidla stáva pivotom číslo 2 pre riadok tabuľky, ktorý je reprezentovaný premennou p_2. Po následnom prepivotovaní stanoveným pivotom získame tabuľku

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	p_1	p_2
$-$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$
p_1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{3}{2}$
x_2	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$

Pri výbere stĺpca repezentovaného premennou x_1 je z jednoznačnosti pivotom číslo $\frac{1}{2}$ pre riadok premennej p_1, po prepivotovaní dostávame tabuľku

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	p_1	p_2
$-$	0	0	0	1	1
x_1	0	1	0	2	-3
x_2	1	0	1	-1	2

Pomocná úloha týmto končí a vraciame sa k pôvodnej úlohe, kde treba poznamenať, že účelová funkcia má tvar $-x_1 + x_2 \longrightarrow \min$:

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2
$-$	0	-1	1
x_1	0	1	0
x_2	1	0	1

Nakoľko sú premenné x_1, x_2 bázické, tak ako prvé sú potrebné príslušné prepivotovania, aby sme dosiahli nulové hodnoty v nultom riadku pre dané bázické premenné

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2
$-$	-1	0	0
x_1	0	1	0
x_2	1	0	1

Pomocné nebázické premenné nie sú, preto má úloha jedno optimálne riešenie a to $\vec{x}^{\,\text{opt}} = (0, 1)^\top$ a $f^{\text{opt}}(\vec{x}) = -1$. $\surd$

Úloha 1.3 Pomocou simplexovej metódy vyriešte nasledujúci problém:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 20x_1 - 53x_2 - 41x_3 + 204x_4 &\longrightarrow \min, \\
2x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 &\leqq 0, \\
-x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 &\leqq 0, \\
-2x_1 + 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 &\leqq 1, \\
x_{1,\dots,4} &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Riešenie:
Zavedieme pomocné premenné x_5, x_6 a x_7, ktoré budú zároveň bázicke:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 20x_1 - 53x_2 - 41x_3 + 204x_4 &\longrightarrow \text{min},\\ 2x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 + x_5 &= 0,\\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 + x_6 &= 0,\\ -2x_1 + 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 + x_7 &= 1,\\ x_{1,\dots,7} &\geqq 0. \end{aligned}$$

a zapíšeme danú úlohu do simplexovej tabuľky

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
–	0	20	-53	-41	204	0	0	0
x_5	0	2	-11	-5	18	1	0	0
x_6	0	-1	4	2	-8	0	1	0
x_7	1	-2	11	5	-18	0	0	1

Na základe Blandovho pravidla pre výber stĺpcov, je prvým stĺpcom zľava so zápornou relatívnou cenou stĺpec pre premennú x_2. Z jednoznačnosti minima, t. j. $\min\left\{\frac{0}{4}, \frac{1}{11}\right\} = \frac{0}{4}$, je následne pivotom číslo 4, po príslušnom prepivotovaní dostávame tabuľku

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
–	0	$\frac{27}{4}$	0	$-\frac{29}{2}$	98	0	$\frac{53}{4}$	0
x_5	0	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	-4	1	$\frac{11}{4}$	0
x_2	0	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-2	0	$\frac{1}{4}$	0
x_7	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	4	0	$-\frac{11}{4}$	1

Pri výbere stĺpca reprezentovaného premennou x_3 podľa Blandovho pravidla je pivotom číslo $\frac{1}{2}$ pre riadok premennej x_2, pretože $B_1 = 5$, $B_2 = 2$ a $\min\{B_1, B_2\} = 2$. Po prepivotovaní pivotom $\frac{1}{2}$ dostávame tabuľku

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
–	0	$-\frac{1}{2}$	29	0	40	0	$\frac{41}{2}$	0
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	-2	1	$\frac{5}{2}$	0
x_3	0	$-\frac{1}{2}$	2	1	-4	0	$\frac{1}{2}$	0
x_7	1	$\frac{1}{2}$	1	0	2	0	$-\frac{5}{2}$	1

Nakoniec, pri výbere stĺpca reprezentovaného premennou x_1 je z jednoznačnosti pivotom číslo $\frac{1}{2}$ pre riadok premennej x_7 a dostávame nasledujúcu tabuľku

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-$	1	0	28	0	42	0	18	1
x_5	1	0	0	0	0	1	0	1
x_3	1	0	3	1	-2	0	-2	1
x_1	2	1	2	0	4	0	-5	2

Pomocné nebázické premenné x_6 a x_7 majú kladné relatívne ceny, preto má úloha jedno optimálne riešenie a to $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (2, 0, 1, 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = -1$. $\surd$

Úloha 1.4 Malý podnikateľ vo svojej dielničke vyrába dva typy výrobkov: výrobok A a výrobok B. Zamestnáva dvoch zamestnancov, ktorých produktivita je približne rovnaká. Výroba jedného výrobku A trvá 4 hodiny, jeho záverečné opracovanie trvá 1 hodinu, pri výrobku B je to 9 hodín na výrobu a 2 hodiny na záverečné opracovanie. Každý kus výrobku zaberá na sklade 1 m^3 a kapacita skladu je 12 m^3. Na výrobu výrobkov má podnikateľ maximálne 48 hodín a na záverečné opracovanie maximálne 12 hodín. Zisk z predaja jedného výrobku A je 65 € a výrobku B je 48 €. Koľko kusov a ktorého typu má podnikateľ vyrobiť, aby bol zisk maximálny? (V prípade možného zacyklenia je potrebné použiť Blandovo pravidlo.)

Riešenie:
Nech premenné x_1 a x_2 označujú počet výrobkov typu A a B.

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 65x_1 + 48x_2 &\longrightarrow \text{max},\\ 4x_1 + 9x_2 &\leqq 48,\\ x_1 + 2x_2 &\leqq 12,\\ x_1 + x_2 &\leqq 12,\\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Zavedieme pomocné premenné x_3, x_4 a x_5, ktoré budú zároveň bázické:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 65x_1 + 48x_2 &\longrightarrow \text{max},\\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 &= 48,\\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 12,\\ x_1 + x_2 + x_5 &= 12,\\ x_1, \dots, x_5 &\geqq 0. \end{aligned}$$

a zapíšeme danú úlohu do simplexovej tabuľky

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-$	0	-65	-48	0	0	0
x_3	48	4	9	1	0	0
x_4	12	1	2	0	1	0
x_5	12	1	1	0	0	1

Na základe Blandovho pravidla pre výber stĺpcov, je prvým stĺpcom zľava so zápornou relatívnou cenou stĺpec pre premennú x_1 a pivotom číslo 4 pre riadok premennej x_3, pretože $B_1 = 3$, $B_2 = 4$, $B_3 = 5$ a $\min\{B_1, B_2, B_3\} = 3$. Po príslušnom prepivotovaní dostávame tabuľku

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-$	780	0	$\frac{393}{4}$	$\frac{65}{4}$	0	0
x_1	12	1	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
x_4	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0
x_5	0	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1

Pomocná nebázická premenná x_3 má kladnú relatívnu cenu, preto má úloha jedno optimálne riešenie a to $\vec{x}^{\,\text{opt}} = (12, 0)^\top$ a $f^{\text{opt}}(\vec{x}) = 780$. $\surd$

1.5 Neriešené úlohy

1.1 Lexikografické usporiadanie vektorov. Sú dané vektory z aritmetického vektorového priestoru $\mathbb{R}^6$:

$$\vec{a} = (0, 2, 0, 3, 0, 5)^\top, \quad \vec{b} = (0, 2, -6, -6, 5, 6)^\top, \quad \vec{c} = (0, 0, 0, -5, 6, 7)^\top,$$

$$\vec{d} = (10, 0, 6, 5, 4, 3)^\top, \quad \vec{e} = (10, 7, 7, 6, 5, 4)^\top, \quad \vec{f} = (-6, 8, 2, 2, -1, 0)^\top.$$

a) Ktorý z vektorov $\vec{a}, \ldots, \vec{f}$ je lexikograficky kladný?

b) Ktorý z vektorov $\vec{a}, \ldots, \vec{f}$ je lexikograficky záporný?

c) Usporiadajte vektory $\vec{a}, \ldots, \vec{f}$ lexikograficky vzostupne (od lex. najväčšieho po lex. najmenší).

1.2 Vypočítajte všetky vhodné celočíselné ohodnotenia premenných a, b a c, pre ktoré platí $a, b, c \in \langle -5, 5\rangle$ tak, aby vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ a $\vec{z}$ boli lexikograficky usporiadané vzostupne (od lexikograficky najväčšieho po lexikograficky najmenší), ak

$$\vec{x} = (a, 3, -1)^\top, \quad \vec{y} = (0, b, 1)^\top, \quad \vec{z} = (c, 3, 0)^\top.$$

1.3 Je daná simplexová tabuľka s parametrami a, b, c, d, e, f a g.

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-$	5	0	-4	0	-3	0	1	0
x_3	2	0	a	1	b	0	2	0
x_5	4	0	c	0	d	1	3	0
x_1	4	1	e	0	4	0	-1	0
x_7	2	0	f	0	g	0	2	1

Určte všetky vhodné celočíselné ohodnotenia parametrov a, b, c, d, e, f a g tak, aby po ich dosadení do simplexovej tabuľky a následnom aplikovaní lexikografického pravidla nahradila premenná x_4 v báze premennú x_5. Pre premenné platia nasledovné podmienky: $1 \leq b \leq 5; 1 \leq d \leq 6$ a $4 \leq g$.

1.4 Vypočítajte optimálne riešenie úlohy, ktorej postupným riešením vznikla nasledovná simplexová tabuľka (nie sú tam pomocné premenné)

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
–	0	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	$-\frac{14}{3}$	5
x_5	0	$\frac{5}{3}$	0	0	0	1	$-\frac{32}{3}$	8
x_2	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	-1
x_3	0	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	0	$\frac{8}{3}$	-3
x_4	1	0	0	0	1	0	1	0

1.5 Vypočítajte optimálne riešenie úlohy zapísanej do simplexovej tabuľky, v ktorej sú pomocné premenné x_4, x_5 a x_6.

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
–	0	-5	-6	3	0	0	0
x_4	0	3	1	-3	1	0	0
x_5	0	1	2	-1	0	1	0
x_6	0	0	-4	-1	0	0	1

1.6 Riešte zadanú úlohu lexikografickým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = 2x_1+4x_2+3x_3+6x_4+5x_5 &\longrightarrow \text{min},\\ 3x_2+x_3+3x_5 &= 9,\\ x_2-x_3+x_4+2x_5 &= 8,\\ x_1+3x_2+2x_3+3x_5 &= 9,\\ x_{1,\dots,5} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.7 Riešte zadanú úlohu lexikografickým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1-4x_2-3x_3 &\longrightarrow \text{max},\\ x_1+x_2+2x_3 &\leqq 1,\\ 3x_1-x_2+x_3 &\leqq 3,\\ x_1+x_2-x_3 &\leqq 2,\\ x_{1,\dots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.8 Riešte zadanú úlohu lexikografickým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_2+x_3 &\longrightarrow \min,\\ x_1+2x_2+3x_3 &= 3,\\ -x_1+2x_2+6x_3 &= 2,\\ 4x_2+9x_3 &= 5,\\ 3x_3+x_4 &= 1,\\ x_{1,\dots,4} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.9 Riešte zadanú úlohu lexikografickým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-0{,}75x_1+20x_2-0{,}5x_3+6x_4 &\longrightarrow \min,\\ 0{,}25x_1-8x_2-x_3+9x_4 &\leqq 0,\\ 0{,}5x_1-12x_2-0,5x_3+3x_4 &\leqq 0,\\ x_3 &\leqq 1,\\ x_{1,\dots,4} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.10 Riešte zadanú úlohu lexikografickým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4)=10x_1-57x_2-9x_3-24x_4 &\longrightarrow \max,\\ 0{,}5x_1-5{,}5x_2-2{,}5x_3+9x_4 &\leqq 0,\\ 0{,}5x_1-1{,}5x_2-0{,}5x_3+x_4 &\leqq 0,\\ x_1 &\leqq 1,\\ x_{1,\dots,4} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.11 Riešte zadanú úlohu lexikografickým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)=8x_1-4x_2-5x_3 &\longrightarrow \max,\\ 2x_1-x_3 &\leqq 2,\\ x_1-x_2-x_3 &\leqq 1,\\ -2x_2 &\leqq 0,\\ x_{1,\dots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.12 Riešte zadanú úlohu lexikografickým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_2+x_3 &\longrightarrow \min,\\ x_1+2x_2+3x_3 &= 3,\\ -x_1+2x_2+6x_3 &= 2,\\ 4x_2+9x_3 &= 5,\\ 3x_3+x_4 &= 1,\\ x_{1,\dots,4} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.13 Riešte zadanú úlohu lexikografickým pravidlom:

$$\begin{array}{rcl} f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 & \longrightarrow & \min, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & \leqq & 8, \\ 2x_1 + 4x_2 & \leqq & 8, \\ 3x_1 + x_2 & \leqq & 2, \\ x_{1,\ldots,3} & \geqq & 0. \end{array}$$

1.14 Riešte zadanú úlohu lexikografickým pravidlom:

$$\begin{array}{rcl} f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 & \longrightarrow & \max, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 & \leqq & 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & \leqq & 0, \\ -4x_2 - x_3 & \leqq & 0, \\ x_{1,\ldots,3} & \geqq & 0. \end{array}$$

1.15 Čokoládovňa vyrába 3 druhy čokolád V_1, V_2 a V_3. K dispozícii sú obmedzené množstvá štyroch základných surovín: tuk 300 kg, kako 250 kg, cukor 300 kg a oriešky 150 kg. Na výrobu 1 kg čokolády V_1 je potrebných $0,2$ kg tuku, 0,5 kg kakaa, 0,2 kg cukru a 0,1 kg orieškov. Na výrobu 1 kg čokolády V_2 je potrebných 0,1 kg tuku, 0,2 kg kakaa, 0,1 kg cukru a 0,5 kg orieškov. Na výrobu 1 kg čokolády V_3 je potrebných 0,2 kg tuku, 0,1 kg kakaa, 0,3 kg cukru a 0,4 kg orieškov. 1 kg V_1 sa predáva za 1,3 €; 1 kg V_2 za 1,2 €a 1 kg V_3 za 1 €.

Určte výrobný program tak, aby bol maximálny zisk z predaja čokolády. (V prípade možného zacyklenia je potrebné použiť lexikografické pravidlo.)

1.16 Určte všetky vhodné celočíselné ohodnotenia premenných b, d a g tak, aby po ich dosadení do simplexovej tabuľky a následnom aplikovaní Blandovho pravidla nahradila premenná x_4 v báze premennú x_5. Pre premenné platí: $1 \leqq b \leqq 3$, $1 \leqq d \leqq 4$ a $6 \leqq g$.

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-$	5	0	-4	0	-3	0	1	0
x_3	2	0	-2	1	b	0	2	0
x_5	3	0	-3	0	d	1	3	0
x_1	4	1	-1	0	4	0	-1	0
x_7	6	0	0	0	g	0	2	1

1.17 Vypočítajte optimálne riešenie úlohy použitím Blandovho pravidla, ktorej postupným riešením vznikla nasledovná simplexová tabuľka (nie sú tam pomocné premenné):

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
–	0	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	$-\frac{14}{3}$	5
x_5	0	$\frac{5}{3}$	0	0	0	1	$-\frac{32}{3}$	8
x_2	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	-1
x_3	0	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	0	$\frac{8}{3}$	-3
x_4	1	0	0	0	1	0	1	0

1.18 Riešte zadanú úlohu Blandovým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) = -x_1+3x_2+3x_3-x_4 &\longrightarrow \max,\\ x_1+2x_2+x_3+x_4 &\leqq 4,\\ x_1+x_2+2x_3-x_4 &\leqq 2,\\ 3x_1-x_2+x_3+2x_4 &\leqq 1,\\ x_{1,\ldots,4} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.19 Riešte zadanú úlohu Blandovým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1-4x_2-3x_3 &\longrightarrow \max,\\ x_1+x_2+2x_3 &\leqq 1,\\ 3x_1-x_2+x_3 &\leqq 3,\\ x_1+x_2-x_3 &\leqq 2,\\ x_{1,\ldots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.20 Riešte zadanú úlohu Blandovým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 8x_1-4x_2-5x_3 &\longrightarrow \max,\\ 2x_1-x_3 &\leqq 2,\\ x_1-x_2-x_3 &\leqq 1,\\ -2x_2 &\leqq 0,\\ x_{1,\ldots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.21 Riešte zadanú úlohu Blandovým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1+3x_2+15x_3 &\longrightarrow \min,\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4 &= 8,\\ 3x_1-3x_2+2x_3+x_4 &= 12,\\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4 &= 8,\\ x_{1,\ldots,4} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.22 Riešte zadanú úlohu Blandovým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3 &\longrightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 &\leqq 10, \\ x_2 + 3x_3 &\leqq 12, \\ x_{1,\dots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.23 Riešte zadanú úlohu Blandovým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = -3x_2 - 6x_3 + 5x_4 + 9x_5 &\longrightarrow \min, \\ 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 - x_5 &= 9, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_5 &= 15, \\ x_{1,\dots,5} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.24 Riešte zadanú úlohu Blandovým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3 &\longrightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 &\leqq 10, \\ x_2 + 3x_3 &\leqq 5, \\ x_{1,\dots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.25 Riešte zadanú úlohu Blandovým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 &\longrightarrow \min, \\ 3x_2 + x_3 + 3x_5 &= 9, \\ x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 8, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_5 &= 9, \\ x_{1,\dots,5} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.26 Riešte zadanú úlohu Blandovým pravidlom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 - 3x_2 - 2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &\leqq 8, \\ 2x_1 + 4x_2 &\leqq 8, \\ 3x_1 + x_2 &\leqq 2, \\ x_{1,\dots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

1.6 Výsledky neriešených úloh

1.1 a) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$

b) $\vec{c}$, $\vec{f}$

c) $\vec{e}$, $\vec{d}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{f}$

1.2 $a \in \{4, \dots, 1\}$, $b \in \{-4, \dots, 4\}$, $c \in \{-4, \dots, -1\}$, resp. $a \in \{4, \dots, 1\}$, $b \in \{3, 4\}$, $c = 0$, resp. $a = 0$, $b \in \{-4, \dots, 2\}$, $c \in \{-4, \dots, -1\}$

1.3 nemá riešenie

1.4 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (\frac{1}{2}; 0; 0; 0; \frac{17}{2}; 1; \frac{1}{6})^\top$

1.5 neohraničená úloha $(\lambda, 0, \lambda)^\top$ pre $\lambda \geqq 0$

1.6 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (0; 0; 0; 2; 3)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 27$

1.7 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (1; 0; 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 4$

1.8 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 0; 1)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = \frac{7}{4}$

1.9 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (1; 0; 1; 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = -\frac{5}{4}$

1.10 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (1; 0; 1; 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 1$

1.11 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (1; 0; 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 8$

1.12 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = \frac{11}{6}$

1.13 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (0; 2; 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = -8$

1.14 neohraničená úloha $(\lambda, 0, \lambda)^\top$ pre $\lambda \geqq 0$

1.15 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (\frac{8500}{19}; 0; \frac{5000}{19}; 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = \frac{16050}{19}$

1.16 $g \in \{6, 7, 8\}$, $d = 4$, $b \in \{1, 2\}$, resp. $g = 6$, $d = 3$, $b = 1$

1.17 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (\frac{1}{2}; 0; 0; 0; \frac{17}{2}; 1; \frac{1}{6})^\top$

1.18 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (0; 2; 0; 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 6$

1.19 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (1; 0; 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 4$

1.20 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (1; 0; 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 8$

1.21 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (0; 2; 0; 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 6$

1.22 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (10; 0; 3,9)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 13{,}9$

1.23 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0; 3; 0; 0; 0)^\top$ a $f^{\text{opt}}(\vec{x}) = 0$

1.24 $\vec{x}^{\text{opt}} = (10; 0; \frac{5}{3})^\top$ a $f^{\text{opt}}(\vec{x}) = \frac{35}{3}$

1.25 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0; 0; 0; 2; 3)^\top$ a $f^{\text{opt}}(\vec{x}) = 27$

1.26 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0; 2; 0)^\top$ a $f^{\text{opt}}(\vec{x}) = -8$

Kapitola 2

Ďalšie spôsoby riešenia optimalizačných úloh

2.1 Revidovaná simplexová metóda

Cieľom revidovanej simplexovej metódy je urýchliť výpočet, t. j. pri výpočte vykonať menej operácií ako pri štandardnej simplexovej metóde. Myšlienka metódy spočíva v tom, že pri každej iterácii nie je potrebné prepočítavať hodnoty celkovej simplexovej tabuľky, ale postačuje nato len poznatok správania sa množiny bázických indexov B a matice $\boldsymbol{B}^{-1}$. Na začiatku je potrebné určiť vektor $\vec{u}^{\top}$ a jednotlivé kroky iterácií budú reprezentované indexom s. Celkový popis algoritmu môžeme vidieť nižšie.

ALGORITMUS:

K1: (Štartovací krok)
polož $s = 1$ a $\boldsymbol{B}_s^{-1} = \boldsymbol{I}$, kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matica a nech $\vec{u}(s)^{\top} = \vec{0}^{\top}$ je počiatočný nulový vektor.

K2: (Test optimality)
vypočítaj redukované ceny z_j^s pre $j = 1, \ldots, n$ podľa vzťahu

$$z_j^s = u(s)_j \cdot \boldsymbol{a}_j - c_j. \tag{2.1}$$

Ak $z_j^s \geqq 0$ pre každé $j = 1, \ldots, n$ a $u(s)_j \geqq 0$ pre každé $j = 1, \ldots, m$, tak riešenie je optimálne a algoritmus končí.

K3: (Voľba vstupnej premennej)
polož:

$$z_{n+j}^s = u(s)_j, \text{ pre } j = 1, \ldots, m, \tag{2.2}$$

$$z_k^s = \min_{j=1,\ldots,n+m} \{z_j^s\}. \tag{2.3}$$

Index k, pri ktorom nastáva dané minimum, nám určí novú vstupnú premennú x_k.

K4: (Voľba výstupnej premennej)
výpočet stĺpca $\boldsymbol{a}_k^s = \boldsymbol{B}_s^{-1} \cdot \boldsymbol{a}_k^1$ a výber pivota na základe štandardných predpokladov simpexovej metódy.

K5: prepočtom tabuľky podľa stanoveného pivota získavame vektor $\vec{x}^{s+1}$ s príslušnou hodnotou účelovej funkcie z^{s+1}.

K6: nárast iterácie $s \to s + 1$ a nasleduje krok K2.

Pomocou numerických experimentov je možné ukázať, že pre štandardné úlohy z praxe, t. j. keď má matica ohraničení pomerne menej riadkov ako stĺpcov, je výhodnejšie použiť revidovanú simplexovú metódu. Ďalšou výhodou jej použitia je aj fakt, že v prípade veľkej simpelxovej tabuľky, môže dôjsť k veľkému počtu chýb, čo sa prejaví po viacerých iteráciách ako priveľká zmena pôvodnej úlohy. Ak však pri použití revidovanej metódy po niekoľkých iteráciách prepočítame inverziu matice $\boldsymbol{B}$, tak sa vrátime k pôvodnej úlohe. Inverznú maticu môžeme vypočítať rôznymi numerickými metódami, no nakoľko sa inverzia matice nedá určiť ľahko, tak sa neodporúča v prípade použitia revidovanej simplexovej metódy prepočítavať inverziu matice $\boldsymbol{B}$ v každej iterácii.

2.2 Duálny simplexový algoritmus

Na úvod je potrebné si zopakovať dôležité pojmy:

- Úlohu LP nazývame prípustnou, ak má aspoň jedno prípustné riešenie. V opačnom prípade ju nazývame neprípustnou.

- Simplexová tabuľka je primárne prípustná, ak $x_{i0} \geqq 0$ pre každé $i = 1, \ldots, m$. Simplexová tabuľka je duálne prípustná, ak $x_{0j} \geqq 0$ pre každé $j = 1, \ldots, n$.

- Simplexová tabuľka úlohy LP je optimálna, ak je primárne aj duálne prípustná.

Ak úloha LP nie je primárne prípustná, tak teória duality nám umožňuje riešiť namiesto danej primárnej úlohy k nej príslušnú duálnu úlohu a následne z optimálnej tabuľky určiť výsledok aj pre pôvodnú primárnu úlohu. Carlton E. Lemke (1954) (pozri [11]) navrhol postup, pomocou ktorého môžme riešiť priamo pôvodnú primárnu úlohu bez nejakého explicitného prechodu k duálnej úlohe. Keďže v daných krokoch postupujeme po prípustných riešeniach duálnej úlohy, tak algoritmus dostal aj názov duálna simplexová metóda. Zapísaním úlohy do simplexovej tabuľky, ktorá musí byť duálne prípustná, sa snažíme dosiahnuť aj primárnu prípustnosť vhodným výberom pivota spomedzi záporných elementov podľa istého pravidla, ktoré nám zabezpečí po prepivotovaní duálnu prípustnosť.

ALGORITMUS:

Nech je úloha LP duálne prípustná, ale nie je primárne prípustná

K1: vyber i-ty riadok $i \in \{1, \ldots, m\}$, pre ktorý platí $x_{i0} < 0$,

K2: vyber j-ty stĺpec $j \in \{1, \ldots, n\}$ s pivotom $x_{ij} < 0$ tak, aby platilo

$$\lambda = \frac{x_{0i}}{x_{ij}} = \max \left\{ \frac{x_{0k}}{x_{ik}} : \text{pre} k \text{také, že} x_{ik} < 0 \right\}, \tag{2.4}$$

K3: ak v každom riadku, v ktorom je $x_{i0} < 0$ je aj $x_{ij} \geqq 0$ pre každé $j \in \{1, \ldots, n\}$, tak úloha LP je neprípustná.

Použitie duálneho algoritmu:

- nevýhodou algoritmu je, že prípustné riešenie nájdeme až vtedy, keď je zároveň optimálne, t. j. na konci výpočtov;
- významné využitie má hlavne v parametrickom a celočíselnom programovaní.

Postup pre dosiahnutie duálnej prípustnosti:

V tejto časti vysvetlíme ako postupovať resp. dosiahnuť, aby bola úloha duálne prípustná v prípade, ak nie je.

P1: (Umelé ohraničenie)
Vytvoríme umelé ohraničenie

$$\sum_{j \in N} x_j \leqq M, \tag{2.5}$$

kde M je veľké číslo. (V úlohách z praktického života vieme nájsť takéto ohraničenie s požiadavkou, aby dané obmedzenie neovplyvnilo optimálne riešenie pôvodnej úlohy.) Pridaním pomocnej premennej x_{n+1} do danej nerovnosti, rozšírime pôvodnú simplexovú tabuľku o 1 riadok a o 1 stĺpec. Ak vyberieme pivota zo stĺpca s minimálnou zápornou relatívnou cenou a z novopridaného riadku tabuľky, tak následným prepivotovaním dosiahneme duálne prípustnú úlohu.

P2: (Dvojfázová Primárno-Duálna metóda)
Nech úloha nie je primárne ani duálne prípustná t. j., ani $\vec{b} \geqq \vec{0}$ a ani $-\vec{c} \geqq \vec{0}$. Zmeníme účelovú funkciu $\vec{c} \longrightarrow \vec{c}'$ tak, aby $-\vec{c}' \geqq \vec{0}$ a riešime úlohu duálnym algoritmom. V prípade, ak skončí neprípustne, tak aj pôvodná úloha je neprípustná. Ak skončí optimálne, tak v druhej fáze zavedieme pôvodnú účelovú funkciu a riešime ju primárnym simplexovým algoritmom.

2.3 Penalizačná a bariérová metóda

Metódu penalizačnej funkcie navrhol C. W. Carrol (pozri [6]) a neskôr ju podrobnejšie spracovali Anthony V. Fiacco a Garth P. McCormick (pozri [8]). Za základnú myšlienku môžeme považovať nahradenie úlohy na viazaný extrém postupnosťou úloh na voľný extrém. Dôvodom je, že takýto prístup je menej algoritmicky náročný. V každej takejto iterácii sa bude riešiť pomocná úloha na voľný extrém, ktorá bude závislá od parametra. Postupnosť takýchto riešení bude následne konvergovať k optimálnemu riešeniu pôvodnej úlohy. Nakoľko sa účelová funkcia dvoch po sebe riešených úloh líši len minimálne, tak riešenie získané v k-tej iterácii je dobrým odhadom pre riešenie, ktoré získame v $k+1$-vej iterácii.

Penalizačná metóda je určená pre úlohy typu:

$$\min\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in M\}, \tag{2.6}$$

kde $M \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, M je uzavretá a Ω je otvorená množina. Je to všeobecnejší postup pre optimalizačné úlohy, ktorý je možné modifikovať aj pre úlohy LP.

Zavedieme penalizačnú funkciu $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$, ktorá spĺňa podmienku $\Psi(\vec{x}) = 0$ pre $\vec{x} \in M$ a rastie so vzdialenosťou od množiny M. Cieľom úlohy je stanoviť $\min\{f(\vec{x}) + \mu\Psi(\vec{x}) : \vec{x} \in \Omega\}$, t. j. k účelovej funkcii pridáme funkciu, ktorá bude penalizovať porušenie každého ohraničenia. Ak máme ohraničenie v tvare $h(\vec{x}) = 0$, tak penále by mohlo byť v tvare $\mu \cdot h^2(\vec{x})$. V prípade ohraničenia $g(\vec{x}) \leqq 0$ penále, napr. v tvare $\mu \cdot \max\{0, g(\vec{x})\}$. Teda v prípade takéhoto prístupu by bolo kritérium pre $p \in \mathbb{N}$, zvyčajne pre $p = 2$, v tvare:

$$\sigma(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} [\max\{0, g_i(\vec{x})\}]^p + \sum_{i=1}^{n} |h_k(\vec{x})|^p. \tag{2.7}$$

Myšlienku celého procesu popisuje nasledovný algoritmus:

ALGORITMUS:

K1: Zvolíme kritérium ukončenia $\varepsilon > 0$, index $k = 1$, východiskový bod $\vec{x}^k$, východiskový penalizačný parameter μ^k a koeficient zmeny penalizačného parametra b.

K2: Pre východiskový bod $\vec{x}^k$ vyriešime úlohu $F(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \mu^k.\sigma(\vec{x})$. Jej vyriešením získame bod $\vec{x}^{\mu^k}$ a položíme $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^{\mu^k}$.

K3: Ak $\mu^k\sigma(\vec{x}) < \varepsilon$, tak koniec. Inak $\mu_{k+1} = b.\mu^k$, $k = k+1$ a pokračujeme krokom K2.

Bariérová metóda je určená pre úlohy typu

$$\min\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in M\}, \tag{2.8}$$

kde $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a M je uzavretá množina, pre ktorú platí uzáver$(int(M)) = M$. Vhodnou bariérovou funkciou je $\Theta : M \to \mathbb{R}_0^+$, ktorá spĺňa podmienku $\Theta(\vec{x}) = +\infty$ pre $\vec{x} \in \sigma(M)$ a rastie tým viac, čím bližšie je k hranici množiny M. Princíp bariérových funkcií teda spočíva v tom, že sa vytvorí pomocná funkcia, ktorá má mimo oblasť a tiež na jej hranici veľmi veľké hodnoty. A tak pri približovaní sa k hranici oblasti, hodnota pomocnej funckie neohraničene narastá. Metóda si vyžaduje, aby množina prípustných riešení úlohy mala neprázdne vnútro a preto je vhodná pre nerovnosti $g_j(x) \leqq 0$ a nie pre úlohy s rovnicami. Typickým tvarom bariérovej funckie sú:

$$B(\vec{x}) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{g_j(\vec{x})}, \tag{2.9}$$

$$B(\vec{x}) = -\sum_{j=1}^{n} \log(g_j(\vec{x})). \tag{2.10}$$

Skutočné riešenia častokrát zvyknú ležať na hranici oblasti, pokiaľ je niektoré z ohraničení aktívne. Nato, aby sme sa dopracovali k riešeniu, budeme riešiť postupnosť úloh, pri ktorej sa bude bariéra postupne znižovať.

ALGORITMUS:

K1: Pre $\varepsilon > 0$, $\vec{x}^1 \in int(M)$ ľubovoľné, $0 < \beta < 1$ a $k = 1$.

K2: Vypočítame $\vec{x}^{k+1}$, ako optimálne riešenie úlohy

$$\min\{f(\vec{x}) + v_j \cdot \Theta(\vec{x}) : \vec{x} \in int(M)\}.$$

K3: Ak $v_j \cdot \Theta(\vec{x}^{k+1}) < \varepsilon$, tak koniec, inak $v_{k+1} = \beta \cdot v_j$, $k = k + 1$ a zopakuj Krok K2.

2.4 Riešené príklady

Úloha 2.1 Pomocou revidovanej simplexovej metódy vyriešte nasledujúci problém:

$$\begin{aligned} 420x_1 + 300x_2 &\longrightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqq 6000, \\ x_1 + x_2 &\leqq 2600, \\ x_1 &\leqq 1800, \\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Riešenie:
V prvom kroku zavedieme vhodným spôsobom pomocné premenné x_3, x_4 a x_5, ktoré budú zároveň bázické.

$$\begin{aligned} 420x_1 + 300x_2 &\longrightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6000, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 2600, \\ x_1 + x_5 &= 1800, \\ x_{1\ldots,5} &\geqq 0. \end{aligned}$$

Taktiež určíme maticu ohraničení $\boldsymbol{A}$ v tvare:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V kroku 1 pre $s = 1$, $\boldsymbol{B}_s^{-1} = \boldsymbol{I}$ a $\vec{u}^{s\top} = \vec{0}^\top$ prepíšeme hodnoty do tabuľky

$s = 1$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$			$\vec{b}^s$
x_3	1	0	0	6000
x_4	0	1	0	2600
x_5	0	0	1	1800
$\vec{u}^s$	0	0	0	0

V kroku 2 vykonáme *test optimality* pre $s = 1$:

$$\vec{u}^{s\top} \cdot \boldsymbol{A} - \vec{c}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 420 & 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -420 & -300 \end{pmatrix},$$

a tak podľa stanoveného kritéria $z^{s\top} = \begin{pmatrix} -420 & -300 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nie je optimálne.
V kroku 3 určíme $z_k^s = \min_j \{z_j^s\} = -420$. Minimum nastáva pre index $j = 1$, a tak $k = 1$ a vstupom je premenná x_1.
V kroku 4 vytvoríme rozšírenú tabuľku v tvare

$s = 1$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$			$\vec{b}^s$	$\boldsymbol{a}_k^1$	$\boldsymbol{a}_k^s$	$\frac{b_j}{a_{jk}}$
x_3	1	0	0	6000	3	3	2000
x_4	0	1	0	2600	1	1	2600
x_5	0	0	1	1800	1	1	1800
$\vec{u}^s$	0	0	0	0		-420	

kde hodnoty v stĺpci tabuľky pre $\boldsymbol{a}_k^s$ získame zo vzťahu:

$$\boldsymbol{a}_k^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Minimálna hodnota v poslednom stĺpci tabuľky nám pomôže pri výbere pivota, podľa ktorého bude tabuľka v ďalšom kroku algoritmu prepivotovaná. Minimálna hodnota je 1800, a tak pivotom je 1 v stĺpci reprezentovanom premennou $\boldsymbol{a}_k^s$ a riadku reprezentovanom premennou x_5.
V krokoch 5 a 6 následne dostávame pre $s \to s + 1$, t. j. pre $s = 2$.

$s=2$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$			$\vec{b}^s$
x_3	1	0	-3	600
x_4	0	1	-1	800
x_1	0	0	1	1800
$\vec{u}^s$	0	0	420	756000

Opätovne v kroku 2 pre $s=2$ vykonáme *test optimelity*:

$$\vec{u}^{s\top} \cdot \boldsymbol{A} - \vec{c}^{\top} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 420\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}420 & 300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -300\end{pmatrix},$$

a tak podľa stanoveného kritéria $z^{s\top} = \begin{pmatrix}0 & -300 & 0 & 0 & 420\end{pmatrix}$ nie je optimálne.
V kroku 3 určíme $z_k^s = \min\{z_j^s\} = -300$. Minimum nastáva pre index $j=2$, a tak $k=2$ a vstupom je premenná x_2.
V kroku 4 vytvoríme rozšírenú tabuľku v tvare

$s=2$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$			$\vec{b}^s$	$\boldsymbol{a}_k^1$	$\boldsymbol{a}_k^s$	$\frac{b_j}{a_{jk}}$
x_3	1	0	-3	600	2	2	300
x_4	0	1	-1	800	1	1	800
x_1	0	0	1	1800	0	0	–
$\vec{u}^s$				756000	–	-300	

kde hodnoty v stĺpci tabuľky pre $\boldsymbol{a}_k^s$ získame zo vzťahu:

$$\boldsymbol{a}_k^s = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Minimálna hodnota v poslednom stĺpci tabuľky nám pomôže pri výbere pivota, podľa ktorého bude tabuľka v ďalšom kroku algoritmu prepivotovaná. Minimálna hodnota je 300, a tak pivotom je 2 v riadku reprezentovanom premennou x_3.
V krokoch 5 a 6 následne dostávame pre $s \to s+1$, t. j. pre $s=3$:

$s=3$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$			$\vec{b}^s$
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	300
x_4	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	500
x_1	0	0	1	1800
$\vec{u}^s$	150	0	-30	846000

Opätovne v kroku 2 pre $s = 3$ vykonáme *test optimality*:

$$\vec{u}^{s\top} \cdot \boldsymbol{A} - \vec{c}^{\top} = \begin{pmatrix}150 & 0 & -30\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}420 & 300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix},$$

a tak podľa stanoveného kritéria $z^{s\top} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 150 & 0 & -30\end{pmatrix}$ nie je optimálne.
V kroku 3 určíme $z_k^s = \min\{z_j^s\} = -30$. Minimum nastáva pre index $j = 5$, a tak $k = 5$ a vstupom je premenná x_5.
V kroku 4 vytvoríme rozšírenú tabuľku v tvare

$s = 3$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$			$\vec{b}^s$	$\boldsymbol{a}_k^1$	$\boldsymbol{a}_k^s$	$\frac{b_j}{a_{jk}}$
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	300	0	$-\frac{3}{2}$	$-$
x_4	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	500	0	$\frac{1}{2}$	1000
x_1	0	0	1	1800	1	1	1800
$\vec{u}^s$	150	0	-30	846000	$-$	-30	$-$

kde hodnoty v stĺpci tabuľky pre $\boldsymbol{a}_k^s$ získame zo vzťahu:

$$\boldsymbol{a}_k^s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Minimálna hodnota v poslednom stĺpci tabuľky nám pomôže pri výbere pivota, podľa ktorého bude tabuľka v ďalšom kroku algoritmu prepivotovaná. Minimálna hodnota je 300, a tak pivotom je $\frac{1}{2}$ v riadku reprezentovanom premennou x_4.
V krokoch 5 a 6 následne dostávame pre $s \to s + 1$, t. j. pre $s = 4$:

$s = 4$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$			$\vec{b}^s$
x_2	-1	3	0	1800
x_5	-1	2	1	1000
x_1	1	-2	0	800
$\vec{u}^s$	120	60	0	876000

Opätovne v kroku 2 pre $s = 4$ vykonáme *test optimality*:

$$\vec{u}^{s\top} \cdot \boldsymbol{A} - \vec{c}^{\top} = \begin{pmatrix}120 & 60 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}420 & 300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix},$$

a tak podľa stanoveného kritéria je $z^{s\top} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 120 & 60 & 0\end{pmatrix}$ hľadané optimum. Hľadaným optimálnym riešením je $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (800, 1800)^{\top}$ a $f^{\mathrm{opt}} = 876\,000$. $\checkmark$

Úloha 2.2 Pomocou revidovanej simplexovej metódy vyriešte nasledujúci problém:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 12x_1 + 36x_2 + 60x_3 &\longrightarrow \text{max},\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leqq 36,\\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leqq 40,\\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Riešenie:
V prvom kroku zavedieme vhodným spôsobom pomocné premenné x_4 a x_5, ktoré budú zároveň bázické. Dostaneme úlohu v štandardnom tvare:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = -12x_1 - 36x_2 - 60x_3 &\longrightarrow \text{min},\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 36,\\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 &= 40,\\ x_1, \ldots, x_5 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Taktiež určíme maticu ohraničení $\boldsymbol{A}$ v tvare:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

V kroku 1 pre $s = 1$, $\boldsymbol{B}_s^{-1} = \boldsymbol{I}$ a $\vec{u}^{s\top} = \vec{0}^\top$ prepíšeme hodnoty do tabuľky

$s = 1$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$		$\vec{b}^s$
x_4	1	0	36
x_5	0	1	40
$\vec{u}^s$	0	0	0

V kroku 2 vykonáme *test optimality* pre $s = 1$:

$$\vec{u}^{s\top} \cdot \boldsymbol{A} - \vec{c}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 36 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -36 & -60 \end{pmatrix},$$

a tak podľa stanoveného kritéria $\vec{z}^{s\top} = \begin{pmatrix} -12 & -36 & -60 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nie je optimálne.
V kroku 3 určíme $z_k^s = \min_j\{z_j^s\} = -60$. Minimum nastáva pre index $j = 3$, a tak $k = 3$ a vstupom je premenná x_3.
V kroku 4 vytvoríme rozšírenú tabuľku v tvare

$s = 1$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$		$\vec{b}^s$	$\boldsymbol{a}_k^1$	$\boldsymbol{a}_k^s$	$\frac{b_j}{a_{jk}}$
x_4	1	0	36	2	2	18
x_5	0	1	40	4	4	10
$\vec{u}^s$	0	0	0		-60	

kde hodnoty v stĺpci tabuľky pre $\boldsymbol{a}_k^s$ získame zo vzťahu:

$$\boldsymbol{a}_k^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Minimálna hodnota v poslednom stĺpci tabuľky nám pomôže pri výbere pivota, podľa ktorého bude tabuľka v ďalšom kroku algoritmu prepivotovaná. Minimálna hodnota je 10, a tak pivotom je 4 v stĺpci reprezentovanom vektorom $\boldsymbol{a}_k^s$ a riadku reprezentovanom premennou x_5.
V krokoch 5 a 6 následne dostávame pre $s \to s+1$, t. j. pre $s = 2$ tabuľku

$s = 2$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$		$\vec{b}^s$
x_4	1	$-\frac{1}{2}$	16
x_3	0	$\frac{1}{4}$	10
u^s	0	15	600

Opätovne v kroku 2 pre $s = 2$ vykonáme *test optimality*:

$$\vec{u}^{s\top} \cdot \boldsymbol{A} - \vec{c}^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 36 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

a tak podľa stanoveného kritéria $\vec{z}^{s\top} = \begin{pmatrix} 18 & -6 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ nie je optimálne.
V kroku 3 určíme $z_k^s = \min\{z_j^s\} = -6$. Minimum nastáva pre index $j = 2$, a tak $k = 2$ a vstupom je premenná x_2.
V kroku 4 vytvoríme rozšírenú tabuľku v tvare

$s = 2$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$		$\vec{b}^s$	$\boldsymbol{a}_k^1$	$\boldsymbol{a}_k^s$	$\frac{b_j}{a_{jk}}$
x_4	1	$-\frac{1}{2}$	16	2	1	16
x_3	0	$\frac{1}{4}$	10	2	$\frac{1}{2}$	20
$\vec{u}^s$	0	15	600	-36	-6	

kde hodnoty v stĺpci tabuľky pre $\boldsymbol{a}_k^s$ získame zo vzťahu:

$$\vec{a}_k^s = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Minimálna hodnota v poslednom stĺpci tabuľky nám pomôže pri výbere pivota, podľa ktorého bude tabuľka v ďalšom kroku algoritmu prepivotovaná. Minimálna hodnota je 16, a tak pivotom je 1 v riadku reprezentovanom premennou x_4.
V krokoch 5 a 6 následne dostávame pre $s \to s+1$, t. j. pre $s = 3$ tabuľku

$s=3$	$\boldsymbol{B}_s^{-1}$		$\vec{b}^s$
x_2	1	$-\frac{1}{2}$	16
x_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$\vec{u}^s$	6	12	696

Opätovne v kroku 2 pre $s=3$ vykonáme *test optimality*:

$$\vec{u}^{s\top}\cdot\boldsymbol{A}-\vec{c}^{\top}=\begin{pmatrix}6 & 12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & 36 & 60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

a tak podľa stanoveného kritéria $\vec{z}^{s\top}=\begin{pmatrix}18 & 0 & 0 & 6 & 12\end{pmatrix}$ je optimálne. Hľadaným optimálnym riešením je vektor $\vec{x}^{\text{opt}}=(0,16,2)^{\top}$ a $f^{\text{opt}}=696$. $\surd$

Úloha 2.3 Pomocou duálneho algoritmu vyriešte nasledujúci problém:

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+3x_2+2x_4 &\quad\longrightarrow\quad \min,\\
x_2-x_3+2x_4 &\quad\geqq\quad 3,\\
2x_1+x_2-x_3+4x_4 &\quad\leqq\quad 4,\\
x_{1,\dots,4} &\quad\geqq\quad 0.
\end{aligned}$$

Riešenie:
V prvom kroku zavedieme vhodným spôsobom pomocné premenné x_5 a x_6, ktoré budú zároveň bázickými a zapíšeme danú úlohu do simplexovej tabuľky.

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=x_1+3x_2+2x_4 &\quad\longrightarrow\quad \min,\\
-x_2+x_3-2x_4+x_5 &\quad=\quad -3,\\
2x_1+x_2-x_3+4x_4+x_6 &\quad=\quad 4,\\
x_{1,\dots,6} &\quad\geqq\quad 0.
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-$	0	1	3	0	2	0	0
x_5	-3	0	-1	1	-2	1	0
x_6	4	2	1	-1	4	0	1

Pri výbere riadka reprezentovaného premennou x_5 je z jednoznačnosti pivotom -2, keďže $\max\left\{\frac{3}{-1},\frac{2}{-2}\right\}=\frac{2}{-2}=-1$. Pivotujeme a dostávame nasledujúcu tabuľku

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
–	-3	1	2	1	0	1	0
x_4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
x_6	-2	2	-1	1	0	2	1

Pri výbere riadka reprezentovaného premennou x_6 je opäť jednoznačným pivotom -1 a po prepivotovaní tabuľky dostávame:

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
–	-7	5	0	3	0	5	2
x_4	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	2	-2	1	-1	0	-2	-1

Pomocné nebázické premenné x_5 a x_6 už majú kladné relatívne ceny a preto má úloha optimálne riešenie vektor $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (0, 2, 0, \frac{1}{2})^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = 7$. $\surd$

Úloha 2.4 Výrobca čaju vyrába dva druhy čaju zo zmesi šalvie a mäty. Potrebné množstvá na výrobu jedného sáčku čaju (8 g) sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

–	šalvia	mäta
I. druh	3 g	2 g
II. druh	5 g	6 g

Na sklade majú k dispozícii nanajvýš 1 kg šalvie a aspoň 0,5 kg mäty. Jeden sáčok čaju I. druhu stojí 0,2 € a sáčok čaju II. druhu stojí 0,3 €. Koľko sáčkov z jednotlivých druhov čaju má výrobca vyrobiť, aby jeho zisk bol maximálny možný?

Riešenie:
Zostavíme príslušnú účelovú funkciu a ohraničenia našej úlohy, kde x_1 a x_2 budú predstavovať počet vyprodukovaných sáčkov čajov I. a II. druhu. Dostávame úlohu lineárneho programovania v tvare:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 &\longrightarrow \max, \\ 3x_1 + 5x_2 &\leqq 1\,000, \\ 2x_1 + 6x_2 &\geqq 500, \\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Pomocou pomocných premenných s_1 a s_2 dostávame úlohu LP do štandardného tvaru:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = -2x_1 - 3x_2 &\longrightarrow \min, \\ 3x_1 + 5x_2 + s_1 &= 1\,000, \\ -2x_1 - 6x_2 + s_2 &= -500, \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Keďže daná úloha nie je ani primárne a ani duálne prípustná, tak ju môžeme riešiť napríklad pomocou umelého ohraničenia. V našom prípade by to mohlo byť ohraničenie

$$x_1 + x_2 \leqq 10\,000,$$

ktoré určite neovplyvní optimálne riešenie pôvodnej úlohy. V ďalšom kroku je potrebné zavedenie pomocnej premennej s_3 pre nové ohraničenie, a tak následne dostávame úlohu LP v tvare:

$$\begin{aligned} f(x_+, x_2, s_1, s_2, s_3) = -2x_1 - 3x_2 &\longrightarrow \min, \\ 3x_1 + 5x_2 + s_1 &= 1\,000, \\ -2x_1 - 6x_2 + s_2 &= -500, \\ x_1 + x_2 + s_3 &= 10\,000, \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Danú úlohu môžeme zapísať do simplexovej tabuľky:

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-$	0	-2	-3	0	0	0
s_1	1 000	3	5	1	0	0
s_2	-500	-2	-6	0	1	0
s_3	10 000	1	1	0	0	1

V nultom riadku je minimálnym prvkom -3 v stĺpci reprezentovanom premennou x_2, a tak sa pivotom stáva 1 v riadku reprezentovanom premennou s_3. Po jeho následnom prepivotovaní dostávame už duálne prípustnú úlohu:

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-$	30 000	1	0	0	0	3
s_1	$-49\,000$	-2	0	1	0	-5
s_2	59 500	4	0	0	1	6
x_2	10 000	1	1	0	0	1

Pri výbere riadka reprezentovaného premennou s_1 je z jednoznačnosti pivotom -2, keďže $\max\left\{\frac{1}{-2}, \frac{3}{-5}\right\} = -\frac{1}{2}$. Dostávame tabuľku:

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-$	5 500	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_1	24 500	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
s_2	$-38\,500$	0	0	2	1	-4
x_2	$-14\,500$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$

Pri výbere riadka reprezentovaného premennou s_2 je z jednoznačnosti pivotom -4 a tabuľka má tvar:

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-$	$\frac{1\,375}{2}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
x_1	$\frac{875}{2}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	0
s_3	9 625	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1
x_2	$-\frac{125}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0

Pri výbere riadka reprezentovaného premennou x_2 je z jednoznačnosti pivotom $-\frac{3}{8}$, keďže platí: $\max\left\{\frac{0{,}75}{-0{,}25}, \frac{0{,}125}{-0{,}375}\right\} = \frac{0{,}125}{-0{,}375}$. Potom dostávame tabuľku:

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-$	$\frac{2\,000}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
x_1	$\frac{1\,000}{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
s_3	$\frac{29\,000}{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
s_2	$\frac{500}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0

Pomocná nebázická premenná s_1 má už kladnú relatívnu cenu, a preto má úloha optimálne riešenie vektor $\vec{x}^{\text{opt}} = \left(\frac{1\,000}{3}, 0\right)^\top$ a $f^{\text{opt}} = \frac{200}{3}$. Z optimálneho riešenia vidíme, že producent čaju by mal vyrábať 333 sáčkov I. druhu. $\surd$

Úloha 2.5 Pomocou duálneho algoritmu vyriešte nasledujúci problém:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 &\quad\longrightarrow\quad \min,\\
-3x_1 + x_2 + x_3 &\quad\leqq\quad -1,\\
4x_1 - 3x_2 &\quad\geqq\quad -1,\\
4x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\quad\leqq\quad -2,\\
x_{1,\dots,3} &\quad\geqq\quad 0.
\end{aligned}
$$

Riešenie:
V prvom kroku zavedieme vhodným spôsobom pomocné premenné x_4, x_5 a x_6, ktoré budú zároveň bázickými a zapíšeme danú úlohu do simplexovej tabuľky:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3 &\longrightarrow \text{min}, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -1, \\ -4x_1 + 3x_2 + x_5 &= 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_6 &= -2, \\ x_{1,\dots,6} &\geqq 0. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
–	0	1	1	1	0	0	0
x_4	-1	-3	1	1	1	0	0
x_5	1	-4	3	0	0	1	0
x_6	-2	4	-3	3	0	0	1

Daná úloha je duálne prípustná a tak môžeme použiť duálny algoritmus. Pri výbere riadka reprezentovaného premennou x_6 je z jednoznačnosti pivotom -3:

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
–	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	2	0	0	$\frac{1}{3}$
x_4	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	2	1	0	$\frac{1}{3}$
x_5	-1	0	0	3	0	1	1
x_2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	-1	0	0	$-\frac{1}{3}$

Pri výbere riadka reprezentovaného premennou x_4 je z jednoznačnosti pivotom $-\frac{5}{3}$:

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
–	-3	0	0	$\frac{24}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{4}{5}$
x_1	1	1	0	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$
x_5	-1	0	0	3	0	1	1
x_2	2	0	1	$-\frac{13}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$

Pri výbere riadka reprezentovaného premennou x_5 nie je možnosť výberu pivota a tak je úloha neprípustná. $\surd$

2.5 Neriešené úlohy

2.1 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = 12x_1 + 36x_2 + 60x_3 &\longrightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leqq 36, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leqq 40, \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.2 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_2 + x_3 &\longrightarrow \max, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leqq 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &\leqq 4, \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.3 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = 31x_1 + 36x_2 + 60x_3 &\longrightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leqq 36, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leqq 40, \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.4 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = 90x_1 + 95x_2 + 85x_3 &\longrightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqq 40, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leqq 25, \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.5 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 &\longrightarrow \min, \\ -4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &\leqq 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &\leqq 2, \\ x_{1,\dots,4} &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.6 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 10x_1 + 5x_2 &\longrightarrow \max,\\ x_1 + 2x_2 &\leqq 130,\\ 2x_1 + 2x_2 &\leqq 210,\\ x_1 &\geqq 20,\\ x_2 &\geqq 30,\\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.7 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 40x_1 + 70x_2 &\longrightarrow \max,\\ 10x_1 + 20x_2 &\leqq 360,\\ 2x_1 + 2x_2 &\leqq 48,\\ x_1 &\leqq 20,\\ x_2 &\leqq 15,\\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.8 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 15x_1 + 18x_2 + 30x_3 &\longrightarrow \max,\\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leqq 18,\\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leqq 20,\\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.9 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1 + x_2 &\longrightarrow \max,\\ x_1 - x_2 + 3x_3 &\leqq 1,\\ -x_1 + 3x_2 - 8x_3 &\leqq 1,\\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.10 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 320x_2 + 70x_3 &\longrightarrow \max,\\ 4x_2 + x_3 &\leqq 280,\\ 4x_1 + 2x_2 &\leqq 460,\\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.11 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 &\longrightarrow \text{max}, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leqq 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &\leqq 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leqq 2, \\ x_{1,\ldots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.12 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1 - 3x_2 - 8x_3 &\longrightarrow \text{max}, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leqq 4, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &\leqq 2, \\ x_{1,\ldots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.13 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3 &\longrightarrow \text{max}, \\ x_1 + 2x_2 &\leqq 10, \\ x_2 + 3x_3 &\leqq 12, \\ x_{1,\ldots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.14 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 8x_1 - 4x_2 - 5x_3 &\longrightarrow \text{max}, \\ 2x_1 - x_3 &\leqq 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leqq 1, \\ -2x_2 &\leqq 0, \\ x_{1,\ldots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.15 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = x_1 + 5x_2 &\longrightarrow \text{max}, \\ -2x_1 + x_2 &\leqq 6, \\ -x_1 + x_2 &\leqq 8, \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 20, \\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.16 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2 &\longrightarrow \text{max},\\ 2x_1 + x_2 &\leqq 18,\\ x_1 + 2x_2 &\leqq 12,\\ x_1 - x_2 &\leqq 3,\\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.17 Revidovanou simplexovou metódou vyriešte úlohu LP:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 3x_1 - 4x_2 &\longrightarrow \text{max},\\ 3x_1 - 2x_2 &\geqq 0,\\ -x_1 + 2x_2 &\leqq 4,\\ x_2 &\leqq 9,\\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.18 Máme k dispozícii 18 tyčí dĺžky 9 m. Potrebujeme narezať aspoň 8 kusov 5-metrových tyčí, najviac 7 kusov 4-metrových tyčí a najviac 20 kusov 3-metrových tyčí. Navrhnite optimálne riešenie tak, aby sme minimalizovali odpad. Je potrebné narezať všetky tyče, t. j. nenarezaná tyč je odpadom.

2.19 Máme k dispozícii 15 tyčí dĺžky 10 m. Potrebujeme narezať aspoň 10 kusov 5-metrových tyčí, aspoň 8 kusov 4-metrových tyčí a najviac 8 kusov 3-metrových tyčí. Navrhnite optimálne riešenie tak, aby sme minimalizovali odpad. Je potrebné narezať všetky tyče, t. j. nenarezaná tyč je odpadom.

2.20 Použitím metódy penalizačnej funkcie vypočítajte extrém funkcie:

a) $f(x) = 3x^2 + \frac{7}{2} \longrightarrow \min$ pri ohraničení $2x - 4 = 0$;

b) $f(\vec{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \longrightarrow \min$ pri ohraničení $-2x_1 + 2x_2 + 6 = 0$;

c) $f(x) = x^2 - 10x \longrightarrow \min$ pri ohraničení $x - 3 \leqq 0$;

d) $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 \longrightarrow \min$ pri ohraničeniach $x_1 + 2x_2 \geqq 6$ a $x_1 - x - 2 = 3$;

e) $f(\vec{x}) = x_1 + x_2 \longrightarrow \min$ pri ohraničení $x_1^2 + x_2^2 = 2$;

f) $f(\vec{x}) = -5x_1^2 + x_2^2 \longrightarrow \min$ pri ohraničení $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

2.21 Použitím metódy bariérovej funkcie vypočítajte extrém funkcie:

a) $f(\vec{x}) = 2x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - 3)^2 \longrightarrow \min$ pri ohraničení $2x_1 + 4 \leqq 0$ a $-x_2 + 3 \leqq 0$;

b) $f(\vec{x}) = 2x_1^2 + 9x_2 \longrightarrow \min$ pri ohraničení $x_1 + x_2 \geqq 4$.

2.22 Drobný podnikateľ predáva zemiakové lupienky a hranolčeky. Množstvo surovín potrebných na výrobu jednotlivých výrobkov a ceny výrobkov sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

–	lupienky [1 kg]	hranolky [1 kg]
zemiaky [kg]	2	1,5
olej [kg]	0,4	0,2
cena [€/kg]	3	2

Podnikateľ nakúpil pred začatím výroby 180 kg zemiakov a 15 kg oleja. Aké množstvo jednotlivých výrobkov má podnikateľ vyrábať, aby maximalizoval svoj zisk, ak podľa predpisov musí spotrebovať aspoň polovicu zakúpených zemiakov?

2.23 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\longrightarrow \min,\\
x_2 - x_3 + 2x_4 &\geqq 3,\\
-2x_1 + x_3 + x_4 &\leqq 2,\\
3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &\leqq 2,\\
x_{1,\dots,4} &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.24 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) = 3x_1 - 2x_2 &\longrightarrow \max,\\
x_1 + x_2 &\geqq 4,\\
x_1 - 3x_2 &\leqq 4,\\
2x_1 - 2x_2 &\leqq -3,\\
x_1, x_2 &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.25 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) = -2x_1 - 7x_2 - x_3 &\longrightarrow \max,\\
-x_1 - 2x_2 + x_3 &\leqq -3,\\
4x_1 - x_2 - 3x_3 &\leqq -2,\\
x_{1,\dots,3} &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.26 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) = -x_1 - 3x_2 - x_3 &\longrightarrow \max,\\
4x_1 - 2x_2 - 2x_3 &\geqq -5,\\
3x_1 - 2x_2 - x_3 &\leqq -3,\\
x_{1,\dots,3} &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.27 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3 &\longrightarrow \max,\\
2x_1 + x_2 &\geqq 4,\\
3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqq 8,\\
x_1 - x_2 + 2x_3 &\leqq -2,\\
x_{1,\ldots,3} &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.28 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,X_4) = 14x_1 - x_2 + 20x_3 + 34x_4 &\longrightarrow \max,\\
3x_1 - x_2 + 6x_3 + 8x_4 &\leqq 27,\\
-x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 &\leqq -5,\\
2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &\leqq 9,\\
x_{1,\ldots,4} &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.29 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) = 4x_1 - 3x_2 &\longrightarrow \max,\\
-2x_1 + 3x_2 &\geqq 1,\\
-x_1 + 2x_2 &= 1,\\
3x_1 + 4x_2 &\leqq 4,\\
x_{1,2} &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.30 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) = -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &\longrightarrow \min,\\
7x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &\leqq 1,\\
2x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2,\\
-x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2,\\
x_{1,\ldots,4} &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.31 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 &\longrightarrow \max,\\
-4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leqq -30,\\
3x_1 - x_2 - x_3 &\leqq 20,\\
x_{1,\ldots,3} &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.32 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2 &\longrightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 &\geqq -3, \\ x_1 - 2x_2 &\geqq 1, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.33 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 &\longrightarrow \max, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 &\geqq -1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= -5, \\ 2x_1 + 4x_3 + 3x_4 &= -4, \\ x_{1,2} &\geqq 0, \\ x_{3,4} &\geqq -2. \end{aligned}$$

2.34 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 2x_1 + 7x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + 3x_2 &\geqq 4, \\ x_1 + x_2 &\geqq 5, \\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.35 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 &\longrightarrow \min, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 &\geqq 0, \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 &\geqq 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &\leqq -1, \\ x_{1,\dots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.36 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 &\longrightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 &\geqq 6, \\ 4x_1 + x_2 &\geqq 8, \\ 2x_1 + 2x_2 &\geqq -1, \\ x_1 &\geqq 0, \\ x_2 &\leqq 0. \end{aligned}$$

2.37 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 &\longrightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 6, \\ x_1 &\leqq 3, \\ x_1 &\geqq 1, \\ x_{2,3} &\geq 0. \end{aligned}$$

2.38 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = 2\,500x_1 + 3\,000x_2 &\longrightarrow \max, \\ 4x_1 + 3x_2 &\leqq 2\,000, \\ x_1 + 4x_2 &\leqq 1\,000, \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 600, \\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.39 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 8x_3 &\longrightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqq 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\geqq 5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4, \\ x_{1,\ldots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.40 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = 5x_1 - x_2 &\longrightarrow \max, \\ -x_1 + 2x_2 &\leqq -2, \\ 3x_1 + x_2 &\leqq 12, \\ -x_1 - x_2 &\leqq -3, \\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.41 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 - 2x_2 + x_3 &\longrightarrow \max, \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &\geqq -1, \\ 2x_1 - x_3 &\geqq 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= -9, \\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2.42 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\longrightarrow \min, \\
-2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= 2, \\
3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 1, \\
x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 &= -6, \\
x_{1,4} &\geqq 0, \\
x_{2,3} &\leqq -1.
\end{aligned}
$$

2.43 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + x_3 &\longrightarrow \min, \\
-3x_1 + x_2 + x_3 &\leqq -1, \\
4x_1 - 3x_2 &\geqq -1, \\
4x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\leqq -2, \\
x_{1,\dots,3} &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.44 Riešte zadanú úlohu LP duálnym algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) = 80x_1 + 50x_2 &\longrightarrow \max, \\
20x_1 + 15x_2 &\leqq 1\,000, \\
4x_1 + 2x_2 &\leqq 160, \\
x_1 &\geqq 30, \\
x_1, x_2 &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.6 Výsledky neriešených úloh

2.1 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0, 16, 2)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 696$.

2.2 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0, 0, 2)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 2$

2.3 $\vec{x}^{\text{opt}} = (4, 16, 0)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 700$.

2.4 $\vec{x}^{\text{opt}} = (10, 15, 0)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 2\,325$.

2.5 $\vec{x}^{\text{opt}} = \left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda}{2}, \frac{4}{3} + \frac{\lambda}{2}, 0, \lambda\right)^\top; \quad \lambda \geqq 0$.

2.6 $\vec{x}^{\text{opt}} = (70, 30)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 850$.

2.7 $\vec{x}^{\text{opt}} = (12, 12)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 1\,320$.

2.8 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0, 8, 1)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 174$.

2.9 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0, 11, 4)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 11$.

2.10 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0, 70, 0)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 22\,400$.

2.11 $\mathbf{x}^{opt} = (1, 0, 0)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 4$.

2.12 $\vec{x}^{\text{opt}} = (16 + 2\lambda, 0, 6 + \lambda)^\top; \quad \lambda \geqq 0$ a $f^{\text{opt}} = 16$.

2.13 $\mathbf{x}^{opt} = (10, 0, 3{,}9)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 13{,}9$.

2.14 $\mathbf{x}^{opt} = (1, 0, 0)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 8$.

2.22 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0, 75)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 150$.

2.23 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0, 1, 0, 1)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 4$.

2.24 Neohraničená úloha $\{(\frac{5}{4} + \frac{\lambda}{2}, \frac{11}{4} + \frac{\lambda}{2})^\top; \quad \lambda \geqq 0\}$.

2.25 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0, \frac{11}{7}, \frac{1}{7})^\top$ a $f^{\text{opt}} = -\frac{78}{7}$.

2.26 $\vec{x}^{\text{opt}} = (0, \frac{1}{2}, 2)^\top$ a $f^{\text{opt}} = \frac{7}{2}$.

2.27 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{2}{5}, \frac{16}{5}, \frac{2}{5})^\top$ a $f^{\text{opt}} = \frac{22}{5}$.

2.28 $\vec{x}^{\text{opt}} = (2, 5, 3, 1)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 117$.

2.29 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{2}{5}, \frac{7}{10})^\top$ a $f^{\text{opt}} = -\frac{1}{2}$.

2.30 Neohraničená úloha $\{(\frac{7}{2} + \lambda, \frac{65}{2} + 8\lambda, 56 + 14\lambda, \lambda)^\top; \quad \lambda \geqq 0\}$.

2.31 $\vec{x}^{\text{opt}} = (7, 0, 1)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 13$.

2.32 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (\frac{3}{2}, 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = 3$.

2.33 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (\frac{3}{5}, 0, -\frac{8}{5}, \frac{2}{5})^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = \frac{23}{5}$.

2.34 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (5, 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = 10$.

2.35 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{3})^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = \frac{11}{3}$.

2.36 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (\frac{13}{4}, -\frac{15}{4})^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = \frac{11}{4}$.

2.37 Neprípustná úloha.

2.38 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (200, 200)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = 1\,100\,000$.

2.39 $(1 + \frac{6}{5}\lambda, 3 - 3\lambda, \frac{3}{5}\lambda)^\top \quad \lambda \in [0, 1]$ a $f^{\mathrm{opt}} = 7$.

2.40 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (4, 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = 20$.

2.41 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (1, 5, 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = -12$.

2.42 Neprípustná úloha.

2.43 Neprípustná úloha.

2.44 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (30, 20)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = 3\,400$.

Kapitola 3

Postoptimalizačná analýza

3.1 Analýza senzitivity

V tejto kapitole sa zameriame na zmeny v zadaní úlohy LP po vyriešení simplexovou metódou. Popíšeme situácie, ktoré môžu nastať po vyriešení zadania úlohy LP. Napríklad sa mmôže zmeniť skladovă politika výrobcu a zmenia sa skladové zásoby, teda ohraničujúce podmienky úlohy LP (zväčša pravá strana). Môžu sa zmeniť ceny, čo má častokrát vplyv na účelovú funkciu, a teda aj na samotné optimum, ktoré bolo dovtedy vypočítané. Pokiaľ sme danú úlohu LP vyriešili simplexovou metódou, tak potom pri niektorých typoch zmien úlohy LP môžeme využiť k nájdeniu optimálneho riešenia optimálne riešenie (aj samotné informácie v simplexovej tabuľke) pôvodnej úlohy pred zmenou.

Vhodne upravíme simplexovú tabuľku a optimálne riešenie pôvodnej úlohy použijeme ako počiatočné prípustné riešenie k naštartovaniu simplexového algoritmu alebo duálneho simplexového algoritmu pre upravenú simplexovú tabuľku a vyriešime modifikovaný optimalizačný problém.

Predpokladajme, že sme vyriešili úlohu LP (3.1) pomocou simplexovej metódy:

$$f(\vec{x}) = \min_{\vec{x}\in M}\{\vec{c}^{\top} \cdot \vec{x}\}, \text{ kde } M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}; \vec{x} \geqq \vec{0}\}. \tag{3.1}$$

Úloha LP (3.1) je v štandardnom tvare s maticou koeficientov $\boldsymbol{A}$, vektorom pravých strán $\vec{b}$ a koeficientmi účelovej funkcie $\vec{c}$. V optimálnej tabuľke máme bázu $\boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$, kde $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$, inverznú maticu $\boldsymbol{B}^{-1}$ a optimálne bázické prípustné riešenie $\vec{x}_0^{\text{opt}}$. Vieme, že sú splnené podmienky:

(1) $\vec{x}_0^{\text{opt}} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b} \geqq \vec{0}$,

(2) $\vec{c}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} - \vec{c}^{\top} \leqq \vec{0}^{\top}$,

(3) nenulové zložky optimálneho riešenia sú $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b}$,

(4) optimálna hodnota je $f^{\text{opt}} = f(\vec{x}^{\text{opt}}) = \vec{c}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b}$.

Môžu nastať takéto zmeny:

(a) zmena vektora pravých strán,

(b) zmena koeficientov účelovej funkcie,

(c) pridanie novej premennej,

(d) pridanie nového ohraničenia.

Tieto zmeny podrobnejšie poíšeme v nasledujúcich podkapitolách.

3.2 Zmena vektora pravých strán

Zmena vektora pravých strán znamená, že sa niektoré zložky vektora $\vec{b}$ zmenia o určitú hodnotu, t. j. $b \to (\vec{b} + \Delta\vec{b})$. Podmienka (2) zo strany 55 ostáva v platnosti, lebo nezávisí od vektora $\vec{b}$. Báza $\boldsymbol{B}$ po tejto zmene už nemusí byť optimálna. Vieme, že optimálna simplexová tabuľka ostáva optimálnou aj po zmene, ak podmienka (1) zo strany 55 ostáva v platnosti aj po zmene, t. j. platí:

$$\boldsymbol{B}^{-1} \cdot (\vec{b} + \Delta\vec{b}) \geqq \vec{0}. \tag{3.2}$$

Ak vzťah (3.2) platí, potom báza $\boldsymbol{B}$ je stále optimálna a nenulové zložky optimálneho riešenia sú $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot (\vec{b} + \Delta\vec{b})$ a optimálna hodnota účelovej funkcie $f(\vec{x}) = \vec{c}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot (\vec{b} + \Delta\vec{b})$.
Ak vzťah (3.2) neplatí, potom báza $\boldsymbol{B}$ je duálne prípustná a nie je primárne prípustná, t. j. $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot (\vec{b} + \Delta\vec{b}) < \vec{0}$. Prepočíame nultý stĺpec simplexovej tabuľky, ktorý zodpovedá nenulovým zložkám bázického riešenia, t. j. $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b} \to \boldsymbol{B}^{-1} \cdot (\vec{b} + \Delta\vec{b})$. Optimálne riešenie zmenenej úlohy LP nájdeme pomocou duálnej simplexovej metódy.

3.3 Zmena koeficientov účelovej funkcie

Pod zmenou koeficientov účelovej funkcie myslíme, zmenu ceny niektorých komodít, ktoré zodpovedajú koeficientom vektora $\vec{c}$, t. j. $c \to (c + \Delta c)$. Báza $\boldsymbol{B}$ je stále primárne prípustná, lebo podmienka (1) zo strany 55 nezávisí na vektore $\vec{c}$. Rovnako aj simplexová tabuľka je primárne prípustná, ale môže sa porušiť optimálnosť v tabuľke, lebo nové relatívne ceny (v nultom riadku simplexovej tabuľky) majú tvar:

$$\vec{c}^{r\top} = (\vec{c} + \Delta\vec{c})^{\top} - (\vec{c}_{\boldsymbol{B}} + \Delta\vec{c}_{\boldsymbol{B}})^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}. \tag{3.3}$$

Ak $\vec{c}^{r\top} \geqq \vec{0}$, tak vypočítané riešenie je optimálne, t. j. riešenie má tvar $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b}$ a hodnota účelovej funkcie je $(\vec{c}_{\boldsymbol{B}} + \Delta\vec{c}_{\boldsymbol{B}})^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b}$.
Ak $\vec{c}^{r\top} \geqq \vec{0}$ neplatí, tak máme v tabuľke aspoň jednu zápornú relatívnu cenu. Pokračujeme v hľadaní optimálneho riešenia simplexovým algoritmom, pričom použijeme štartovacie relatívne ceny zo vzťahu (3.3).

3.4 Pridanie novej premennej

Pridaním novej premennej do úlohy LP zmeníme rozmer úlohy. Zväčša ide o pridanie ďalšieho (nového) produktu vo výrobnom procese, nového rezného plánu a pod. Ako ovplyvní nová premenná x_{n+1} riešenie úlohy LP? Do simplexovej optimálnej tabuľky chceme pridať novú premennú x_{n+1} s cenou c_{n+1} a stĺpcom koeficientov $\boldsymbol{A}_{n+1}$. Dostávame novú maticu $\boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}_{n+1})$ a nový cenový vektor $\vec{c} \to \binom{\vec{c}}{c_{n+1}}$. Vypočítame novú relatívnu cenu novej premennej podľa vzorca:

$$c^r_{n+1} = c_{n+1} - \vec{y}^\top \cdot \boldsymbol{A}_{n+1}. \tag{3.4}$$

Ak $c^r_{n+1} < 0$, tak nová premenná môže vstúpiť do bázy. K tejto relatívnej cene vypočítame stĺpec $\boldsymbol{A}_{n+1}$ (vieme z revidovanej simplexovej metódy) a optimálna tabuľka má zložku $n+1$ v tvare $x_{n+1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_{n+1}$. Ďalej pokračujeme vo výpočte revidovanou simplexovou tabuľkou.

3.5 Pridanie nového ohraničenia

Pridanie nového ohraničenia $\boldsymbol{a}^\top_{m+1} \cdot \vec{x} \leqq b_{m+1}$ do úlohy LP znamená napr. vo výrobnom procese nové skladové obmedzenia, prípadne ďalšie výrobné postupy a pod. Predpokladajme, že máme vyriešenú úlohu LP a pridáme nové ohraničenie:

$$\boldsymbol{a}^\top_{m+1} \cdot \vec{x} \leqq b_{m+1}, \qquad \text{t.j.} \ \sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} \cdot x_j \leqq b_{m+1}. \tag{3.5}$$

Pridáme doplnkovú premennú s, aby sme dostali úlohu v štandardnom tvare:

$$\boldsymbol{a}^\top_{m+1} \cdot \vec{x} + s = b_{m+1}, \qquad \text{t.j.} \ \sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} \cdot x_j + s = b_{m+1}. \tag{3.6}$$

Do optimálnej tabuľky pribudne riadok $m+1$ a jednotkový stĺpec pre novú doplnkovú premennú s s jednotkou v riadku $m+1$. Rozšírená úloha má $m+1$ ohraničení a $n+1$ premenných a je určená pomocou nasledujúcich matíc a vektorov

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{a}^\top_{m+1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\vec{b}} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ b_{m+1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\vec{c}} = \begin{pmatrix} \vec{c} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nová báza $\tilde{\boldsymbol{B}}$ vznikla z pôvodnej bázy $\boldsymbol{B}$ tak, že sme tam pridali stĺpec $n+1$ zodpovedajúci doplnkovej premennej s, t.j. $\tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} \cup \tilde{\boldsymbol{A}}_{n+1}$. Potom $\tilde{\boldsymbol{B}}$ je bázou aj pre rozšírenú úlohu, lebo matica

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a}^\top_{\boldsymbol{B}} & 1 \end{pmatrix}$$

je regulárna. Ľahko sa ukáže, že inverzná matica k matici $\tilde{\boldsymbol{B}}$ má tvar

$$\tilde{\boldsymbol{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{a}^\top_{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Otestujeme prípustnosť riešenia, ktoré nám vzniklo pridaním ohraničenia do pôvodnej úlohy LP. Dostávame nerovnosť:

$$\tilde{\boldsymbol{B}}^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{b} \\ b_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b} \\ -\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b} + b_{m+1} \end{pmatrix} \geqq \vec{0}. \tag{3.7}$$

Časť podmienky $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b} \geqq 0$ je splnená, lebo je to optimálne riešenie pôvodnej úlohy. Podmienku:

$$-\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b} + b_{m+1} \geqq 0 \tag{3.8}$$

je možné prepísať do tvaru:

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b} \leqq b_{m+1}, \tag{3.9}$$

a optimálne riešenie spĺňa podmienku pridaného ohraničenia (3.9). Pri overení podmienky optimality dostávame:

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{c}}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}}^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{A}} - \tilde{\vec{c}}^{\top} &= \left(\vec{c}_{\boldsymbol{B}}^{\top}, 0\right) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a}_{m+1}^{\top} & 1 \end{pmatrix} - \tilde{\vec{c}}^{\top} = \\ &= \left(\vec{c}_{\boldsymbol{B}}^{\top}, 0\right) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}_{m+1}^{\top} & 1 \end{pmatrix} - \left(\vec{c}^{\top}, 0\right) = \\ &= \left(\vec{c}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} - \vec{c}^{\top}, 0\right) \leqq \vec{0}^{\top}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

kde $\boldsymbol{B}$ je optimálna báza pôvodnej úlohy. Zo vzťahu (3.10) vidíme, že báza $\tilde{\boldsymbol{B}}$ je duálne prípustná pre zmenenú (rozšírenú) úlohu LP.

Ak podmienka (3.9) je splnená, tak $\tilde{\boldsymbol{B}}$ je optimálna báza zmenenej úlohy a

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b} \\ -\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b} + b_{m+1} \end{pmatrix}$$

sú nenulové zložky príslušného optimálneho bázického riešenia. Hodnota účelovej funkcie pre optimálne riešenie je $\vec{c}_{\boldsymbol{B}}^{\top} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \vec{b}$.

Ak podmienka (3.9) nie je splnená, tak $\tilde{\boldsymbol{B}}$ nie je optimálna báza zmenenej úlohy. Vzniknutá simplexová tabuľka je primárne neprípustná a duálne prípustná, t. j. báza $\tilde{\boldsymbol{B}}$ je duálne prípustná. Úlohu riešime duálnym simplexovým algoritmom.

Ak by sme pridali ohraničenie:

$$\boldsymbol{a}_{m+1}^{\top} \cdot \vec{x} \geqq b_{m+1}, \qquad \text{t. j. } \sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} \cdot x_j \geqq b_{m+1}, \tag{3.11}$$

tak túto nerovnicu vynásobíme číslom (-1). Dostaneme nerovnosť $-\boldsymbol{a}_{m+1}^{\top} \cdot \vec{x} \leqq -b_{m+1}$ a zvolíme už vyššie popísaný postup pre podmienku (3.5).

Ak by sme pridali ohraničenie:

$$\boldsymbol{a}_{m+1}^{\top} \cdot \vec{x} = b_{m+1}, \qquad \text{t. j. } \sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} \cdot x_j = b_{m+1}, \tag{3.12}$$

tak vzťah (3.12) prepíšeme na tvar (3.5) a (3.11), t. j. $\boldsymbol{a}_{m+1}^{\top} \cdot \vec{x} \geqq b_{m+1}$ a $\boldsymbol{a}_{m+1}^{\top} \cdot \vec{x} \leqq b_{m+1}$. Tieto pridané ohraničenia už vyriešiť vieme.

3.6 Riešené príklady

Úloha 3.1 Firma PURPUR vyrába dva druhy špeciálnych farieb s vysokou odolnosťou. Sú to farby na vonkajšie a vnútorné použitie, ktoré predáva v cene 5 000,- € resp. 6 000,- € za jednu tonu. Pri výrobe využíva dve strategické suroviny A a B. Denná kapacita skladu pre surovinu A je 6 ton a pre surovinu B 8 ton. Na jednu tonu vonkajšej farby sa spotrebujú dve tony suroviny A a jedna tona suroviny B. Pre vnútorné farby je potrebná jedna tona suroviny A a pol tony suroviny B. Navyše firma musí zabezpečiť aj dostatočnú ochranu životného prostredia, preto všetok odpad prechádza cez neutralizačnú stanicu. Jej kapacita je projektovaná tak, že v prípade výroby len vonkajšej farby, by spracovala odpad z 8 ton vyrobených farieb za jeden deň. Ak by sa vyrábali len vnútorné farby, tak by to bol odpad zo štyroch ton. Ak sa v jednom dni vyrábajú oba druhy farieb, tak sa spracuje množstvo odpadu zodpovedajúce ich pomerným množstvám. Okrem toho predpokladáme, že predaj akéhokoľvek vyrobeného množstva farieb je zaručený.

Aké množstvá jednotlivých farieb má firma PURPUR denne vyrábať, ak chce maximalizovať svoju tržbu?

a) Sformulujte tento problém ako úlohu LP.

b) Vyriešte túto úlohu simplexovou metódou.

c) V nových ekonomických podmienkach sa ukazuje pôvodne dosahovaný zisk ako nedostačujúci, preto sa firma rozhodla zvýšiť svoje zásoby surovín. Ktoré suroviny sa oplatí dokúpiť a za akú cenu?

d) Vzhľadom na poruchu sa znížila kapacita neutralizačnej stanice na polovicu. Ako má firma PURPUR zmeniť svoj výrobný program?

e) Aby bola firma pripravená na neočakávané problémy s neutralizačnou stanicou, zistite, v akom rozsahu jej skutočnej kapacity nebude potrebné meniť vyrábaný sortiment.

f) S podobnou ponukou farieb prišla na trh aj firma BLUE, preto je potrebné dočasne znížiť cenu vnútornej farby na 4 000,- € za tonu. Ostane doterajší výrobný program optimálny?

g) Konkurenčná firma však onedlho skrachovala a náhle zvýšený dopyt po farbách spôsobil, že cenu vnútornej farby je možné zvýšiť až na 13 000,- € za tonu. Ako má firma teraz zmeniť svoj výrobný program?

h) V akom rozsahu zmien ceny vnútornej farby ostane pôvodný výrobný program optimálny?

i) Firma PURPUR pripravuje zavedenie novej, špeciálnej antikoróznej farby. Na výrobu jednej tony farby sa síce spotrebujú dve tony zo surovín A a B a neutralizačná stanica spracuje za deň odpad len z dvoch ton vyrobenej špeciálnej farby (za predpokladu, že sa nebude vyrábať iná farba), ale cena tejto farby je až 20 000,- € za tonu. Ako má firma upraviť svoj pôvodný výrobný plán vzhľadom na túto možnosť?

j) Nové ekologické predpisy nedovoľujú výrobu prudko jedovatej špeciálnej antikoróznej farby. Navyše stanovujú, že celkové množstvo farieb vyrobených za jeden deň nesmie prekročiť dve tony. Ako má firma upraviť pôvodný výrobný plán?

Tento príklad bol prevzatý z literatúry [7].

Riešenie:

a) *Formulácia úlohy*

Označme x_1 množstvo vyrobenej vonkajšej farby [v tonách] a x_2 množstvo vyrobenej vnútornej farby [v tonách]. Pre jednoduchosť zápisov použijeme koeficienty v účelovej funkcii vyjadrujúce tisícky eur:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 &\longrightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 6 \qquad \text{(surovina } A\text{)}, \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\leqq 8 \qquad \text{(surovina } B\text{)}, \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &\leqq 1, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

b) *Riešenie simplexovou metódou*

Po zmene znamienka účelovej funkcie, prechode k jej minimalizácii a pridaní doplnkových premenných s_1, s_2 a s_3 dostávame úlohu v štandardnom tvare:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 &\longrightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + s_1 &= 6, \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + s_2 &= 8, \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_3 &= 1, \\ x_{1-2}, s_{1-3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

V prvej simplexovej tabuľke máme hneď bázu a jednotkovú podmaticu, preto môžeme začať s výpočtom, pozri 3.1 až 3.3:

Tabuľka 3.1: Simplexová tabuľka – krok 1

$\boldsymbol{B}$	$-f$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
–	0	-5	-6	0	0	0
s_1	6	2	1	1	0	0
s_2	8	1	$\frac{1}{2}$	0	1	0
s_3	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1

Tabuľka 3.2: Simplexová tabuľka – krok 2

$\boldsymbol{B}$	$-f$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
–	15	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0
x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
s_2	5	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
s_3	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0	1

Tabuľka 3.3: Simplexová tabuľka – krok 3

$\boldsymbol{B}$	$-f$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
–	$\frac{80}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{56}{3}$
x_1	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$
s_2	5	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
x_2	$\frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{16}{3}$

Tabuľka 3.3 je optimálna. Z nej dostávame optimálny vektor

$$\vec{x}^{\text{opt}} = \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)^\top.$$

Optimálny výrobný plán predstavuje výrobu 1,33 ton vonkajšej farby a 3,33 ton vnútornej farby. Optimálna tržba je približne 26 666,67 €. V optimálnej báze je aj doplnková premenná s_2 a jej hodnota je 5. Znamená to, že pri optimálnom výrobnom pláne ostane prebytok suroviny B v množstve 5 ton. Tiež v tabuľke 3.3, v stĺpcoch 3–5 sú koeficienty matice $\boldsymbol{B}^{-1}$:

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}.$$

c) *Použitie optimálneho riešenia duálnej úlohy*

V prvej simplexovej tabuľke (Tabuľka 3.1) bola jednotková podmatica v stĺpcoch 3, 4 a 5, pričom ich relatívne ceny boli nulové. Preto relatívne ceny v týchto stĺpcoch v optimálnej tabuľke (Tabuľka 3.3) sú:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 + c^r(s_1) = \frac{4}{3}, \\ y_2 &= 0 + c^r(s_2) = 0, \\ y_3 &= 0 + c^r(s_3) = \frac{56}{3}, \end{aligned}$$

kde vektor $y = (y_1, y_2, y_3)^\top$ je optimálnym riešením duálnej úlohy LP. Z toho vyplýva, že zvýšenie zásob druhej suroviny neumožní zvýšenie zisku ($y_2 = 0$). Oplatí sa nakúpiť len prvú surovinu, ale jej cena nesmie prekročiť 1 333,33 € za tonu ($y_1 = \frac{4}{3}$).

d) *Zmena pravých strán ohraničení*

Kapacita na spracovanie odpadu sa znížila o polovicu. Táto situácia znamená, že pravá strana tretieho ohraničenia úlohy sa zmenila z 1 na $\frac{1}{2}$. Potom dostávame:

$$\tilde{\vec{x}}_0 = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \tilde{\vec{b}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 5 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Keďže $\tilde{\vec{x}}_0 \geqq \vec{0}$, preto posledná báza ostáva optimálna, ale zmení sa optimálny vektor $\vec{x}^{\,\text{opt}} = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)^\top$ a optimálny zisk poklesne na $5 \cdot \frac{8}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$, t. j. 17 333,33 €.

e) *Interval zmeny pravej strany ohraničenia*

Z matematického hľadiska ide o riešenie sústavy lineárnych nerovníc:

$$\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \left(\vec{b} + \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 + \theta \end{pmatrix} \geqq \vec{0}.$$

Túto nerovnosť môžeme prepísať ako sústavu nerovností:

$$\begin{aligned} 4-\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\cdot\theta &\geqq 0, \\ -3+8 &\geqq 0, \\ -2+\frac{16}{3}+\frac{16}{3}\cdot\theta &\geqq 0, \end{aligned}$$

odkiaľ po úprave dostávame $\theta \in \langle -\frac{5}{8}; \frac{1}{2}\rangle$. Ak kapacita neutralizačnej stanice neklesne pod hranicu $\frac{3}{8}$ pôvodnej kapacity a nezvýši sa o viac ako o polovicu, tak bude zvolený sortiment výroby (posledná báza) naďalej optimálny a zmení sa len pomer množstiev vyrábaných farieb.

f) *Zmena koeficientu účelovej funkcie (bez zmeny optima)*

Prepočítame relatívne ceny stĺpcov s novými koeficientami účelovej funkcie podľa vzorca $c_j^r = c_j - \vec{c}_{\boldsymbol{B}}^{\top}\cdot\boldsymbol{A}_j$:

$$\begin{aligned} c^r(x_1) &= 0, \quad \text{lebo } x_1 \text{ je v báze}, \\ c^r(x_2) &= 0, \quad \text{lebo } x_2 \text{ je v báze}, \\ c^r(s_1) &= 0-(-5,0,-4)\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{6}{3} = 2, \\ c^r(s_2) &= 0, \quad \text{lebo } s_2 \text{ je v báze}, \\ c^r(s_3) &= 0-(-5,0,-4)\cdot\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} = 8. \end{aligned}$$

Keďže všetky relatívne ceny sú nezáporné, riešenie úlohy LP ostáva optimálne.

g) *Zmena koeficientu účelovej funkcie (zmena optima)*

Opäť stačí prepočítať relatívne ceny len nebázických stĺpcov:

$$\begin{aligned} c^r(s_1) &= 0-(-5,0,-13)\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -1, \\ c^r(s_3) &= 0-(-5,0,-13)\cdot\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} = 56. \end{aligned}$$

Keďže relatívna cena $c^r(s_1) < 0$, riešenie nie je optimálne a musíme vykonať ďalšie kroky simplexovho algoritmu v nasledujúcich tabuľkách 3.4 a 3.5.

Tabuľka 3.4: Simplexová tabuľka – krok 4

$\boldsymbol{B}$	$-f$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
–	50	0	0	-1	0	56
x_1	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$
s_2	5	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
x_2	$\frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{16}{3}$

Tabuľka 3.5: Simplexová tabuľka – krok 5

$\boldsymbol{B}$	$-f$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
–	52	$\frac{3}{2}$	0	0	0	52
s_1	2	$\frac{3}{2}$	0	1	0	-4
s_2	6	$\frac{3}{4}$	0	0	1	-2
x_2	4	$\frac{1}{2}$	1	0	0	4

Dostali sme optimálnu tabuľku 3.5, z ktorej vyplýva, že za týchto podmienok sa má vyrábať len vnútorná farba v množstve 4 tony a táto výroba prinesie tržbu 52 000,- €.

h) *Interval zmeny koeficientu účelovej funkcie*

Riešime sústavu lineárnych nerovníc:

$$\left(\vec{c}^{\top} + \theta \cdot (0,1,0,0,0)\right) - \left(\vec{c}_{\boldsymbol{B}}^{\top} + \theta \cdot (0,0,1)\right) \cdot \boldsymbol{A} \geqq \vec{0}.$$

Pre našu úlohu LP dostávame výraz:

$$(-5,-6+\theta,0,0,0)-(-5,0,-6+\theta)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix} = \left(0, 0, \frac{4+\theta}{3}, 0, \frac{56-16\theta}{3}\right).$$

Po prepísaní na sústavu nerovníc dostávame:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} + \frac{\theta}{3} &\geqq 0, \\ \frac{56}{3} - \frac{16\theta}{3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy nerovníc je interval $\theta \in \langle -4; \frac{7}{2} \rangle$. Inými slovami, ak cena vnútornej farby neklesne pod 2 000,- € a neprekročí 9 500,- €, pôvodný výrobný plán ostane optimálny.

i) *Nová premenná*

Nová úloha pre tretí druh farby je v tvare:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 + 20x_3 &\longrightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leqq 6, \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 &\leqq 8, \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &\leqq 1, \\ x_{1,\dots,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

Vypočítame relatívnu cenu stĺpca pridaného do optimálnej tabuľky (revidovaná simplexová metóda) podľa vzorca $c^r(x_3) = c_3 - \vec{y}^\top \cdot \vec{A}_j$.

$$c^r(x_3) = -20 + \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{7}{3}\right) \cdot \left(2, 2, \frac{1}{2}\right)^\top = -8.$$

Dostali sme zápornú relatívnu cenu, preto môžeme zaviesť túto premennú do bázy. Nato použijeme transformácie revidovanej simplexovej metódy a určíme ako by vyzeral príslušný stĺpec v optimálnej tabuľke.

Tabuľka 3.6: Simplexová tabuľka – krok 6

$\boldsymbol{B}$	$-f$	y_1	y_2	y_3	x_3
$-$	$\frac{80}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{56}{3}$	-8
x_1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	0
s_2	5	$-\frac{1}{2}$	1	0	1
x_2	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{16}{3}$	2

Tabuľka 3.7: Simplexová tabuľka – krok 7

$\boldsymbol{B}$	$-f$	y_1	y_2	y_3
–	40	0	0	40
x_1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$
s_2	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{8}{3}$
x_3	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{8}{3}$

Presvedčíme sa, že táto tabuľka už zodpovedá optimálnemu riešeniu výpočtom:

$$\begin{aligned}
c^r(x_2) &= -6 + (0,0,40) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = 4, \\
c^r(s_1) &= 0 + (0,0,40) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\
c^r(s_3) &= 0 + (0,0,40) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 40.
\end{aligned}$$

Všetky relatívne ceny sú nezáporné, a tak máme optimum. Firma bude vyrábať 1,333 tony vonkajšej farby a 1,667 tony špeciálnej antikoróznej farby.

j) *Nové ohraničenie*

Do pôvodnej úlohy LP pridáme nové ohraničenie:

$$\begin{aligned}
5x_1 + 6x_2 &\longrightarrow \max, \\
2x_1 + x_2 &\leqq 6, \\
x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\leqq 8, \\
\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &\leqq 1, \\
x_1 + x_2 &\leqq 2, \\
x_{1,2} &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Môžeme pokračovať vo výpočte z optimálnej tabuľky 3.3 v časti b). Pridáme do nej riadok zodpovedajúci novému ohraničeniu a stĺpec pre novú doplnkovú premennú s_4. Dostávame simplexovú tabuľku 3.8. Bázické stĺpce x_1 a x_2 neobsahujú jednotkový

Tabuľka 3.8: Simplexová tabuľka – krok 8

$\boldsymbol{B}$	$-f$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
–	$\frac{80}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{56}{3}$	0
x_1	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	0
s_2	5	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0
x_2	$\frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{16}{3}$	0
s_4	2	1	1	0	0	0	1

Tabuľka 3.9: Simplexová tabuľka – krok 9

$\boldsymbol{B}$	$-f$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
–	$\frac{80}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{56}{3}$	0
x_1	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	0
s_2	5	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0
x_2	$\frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{16}{3}$	0
s_4	$-\frac{8}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	1

Tabuľka 3.10: Simplexová tabuľka – krok 10

$\boldsymbol{B}$	$-f$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
–	16	0	0	0	0	8	4
x_1	-4	1	0	0	0	-8	2
s_2	9	0	0	0	1	4	$-\frac{3}{2}$
x_2	6	0	1	0	0	8	-1
s_1	8	0	0	1	0	8	-3

Tabuľka 3.11: Simplexová tabuľka – krok 11

$\boldsymbol{B}$	$-f$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
–	12	1	0	0	0	0	6
s_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{4}$
s_2	7	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
x_2	2	1	1	0	0	0	1
s_1	4	1	0	1	0	0	-1

vektor, takže od štvrtého riadku odčítame prvý a tretí. Pokračujeme duálnym simplexovým algoritmom (pozri tabuľky 3.9 až 3.11):

Po zavedení nových ekologických predpisov je optimálne vyrábať dve tony vnútornej farby. Optimálny zisk klesne na 12 000,- €.

$\surd$

3.7 Neriešené úlohy

3.1 Lodenica vyrába dva typy lodí: $L1$ a $L2$. Loď typu $L1$ prinesie lodenici zisk 15 miliónov €. Konštrukcia tejto lode trvá 2 mesiace a je schopná prepraviť 400 kontajnerov. Loď typu $L2$ prinesie lodenici zisk 10 miliónov €. Konštrukcia tejto lode trvá 4 mesiace a je schopná prepraviť 200 kontajnerov. Podľa prieskumu trhu lodenica zistila, že sa jej podarí predať lode schopné prepraviť najviac 1600 kontajnerov. Navyše lode $L2$ sú dosť atypické a preto ich nepredá viac ako 2. Navrhnite výrobný plán na najbližších 12 mesiacov tak, aby boli zachované všetky požiadavky a zisk z predaja lodí bol maximálny. Určte prípustné intervaly zmien pre prepravnú kapacitu kontajnerov a ceny lode typu $L2$.

3.2 Farmár chová na farme dobytok. Pre jeho výkrm potrebuje nakúpiť potrebné množstvo z troch ponúkaných polotovarov $P1$, $P2$ a $P3$, ktoré nakoniec zmieša a pripraví výslednú dávku kŕmnej zmesi. Tá by mala obsahovať aspoň 5 kg bielkovín, 7 kg sacharidov a 3,5 kg tukov. V jednom kilograme polotovaru $P1$ sa nachádza 380 g bielkovín, 240 g sacharidov a 200 g tukov. Jeden kilogram polotovaru $P2$ obsahuje 180 g bielkovín, 320 g sacharidov a 150 g tukov. Polotovar $P3$ v jednom kilograme obsahuje 110 g bielkovín, 220 g sacharidov a 400 g tukov. Ceny za jeden kilogram polotovarov $P1$, $P2$ a $P3$ sú 4,30 €, 3,20 € a 3,70 €. Úlohou je zistiť, aké množstvá jednotlivých polotovarov má farmár zmiešať, aby dosiahol zmes s požadovanými parametrami a zároveň, aby boli náklady čo najnižšie. Určte prípustné intervaly zmien pre množstvo bielkovín a ceny polotovaru $P2$.

3.3 Firma produkuje náhradné autodiely a to dvere, kapoty a blatníky. Všetky diely sa najprv lisujú a potom lakujú. Doby v minútach potrebné k výrobe jednotlivých dielov a jednotkový zisk sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

–	dvere [1 ks]	kapoty [1 ks]	blatníky [1 ks]
lisovňa [min/ks]	2	2	2,5
lakovňa [min/ks]	1,5	3	2
zisk [€/ks]	9	15	12

Sformulujte matematický model úlohy maximalizujúci zisk za predpokladu, že firma vyrobí minimálne 300 kusov výrobkov, pričom lisovňa je k dispozícii 8 h a lakovňa 6 h. Určte prípustné intervaly zmien pre dispozičný čas v lakovni a ceny blatníkov.

3.4 Drobný podnikateľ predáva zemiakové lupienky a hranolčeky. Množstvo jednotlivých surovín potrebných na výrobu jednotlivých výrobkov a ceny výrobkov sú uvedené v tabuľke.

–	lupienky [1 kg]	hranolky [1 kg]
zemiaky [kg]	2	1,5
olej [kg]	0,4	0,2
cena [€/kg]	3	2

Podnikateľ nakúpil pred začatím výroby 180 kg zemiakov a 15 kg oleja. Aké množstvo jednotlivých výrobkov má podnikateľ vyrábať, aby maximalizoval svoj zisk ak podľa predpisov musí spotrebovať aspoň polovicu zakúpených zemiakov? Určte prípustné intervaly zmien pre zakúpené množstvo oleja a cenu hranoliek.

3.5 Firma vyrába tri výrobky A, B a C. Výrobky sa vyrábajú na strojovom zariadení Z a dokončujú se ručne. K dispozícii je 6 hodín strojového času denne, výrobou sa zaoberá 60 osôb, pričom čistá pracovná doba je 8 hodín denne. Prieskum trhu ukázal, že pre všetky výrobky je zaručený odbyt. Kalkulovaný jednotkový zisk a normy spotreby jednotlivých kapacít na kus výrobku sú uvedené v tabuľke. Cieľom je denný program výroby s maximálnym ziskom.

–	A	B	C	jednotky	kapacita
Z	1	3	2	min	6
R	2	1	2	hod	60
zisk [€/ks]	60	50	80	€	max

(a) Zistite v akom intervale sa môže meniť strojový čas tak, aby sa neporušilo optimálne riešenie.

(b) Zistite v akom intervale sa môže meniť pracovný čas tak, aby sa neporušilo optimálne riešenie.

(c) Zistite, či sa poruší optimalita riešenia ak strojový čas bude 400 minút.

(d) Aký vplyv na optimalitu riešenia bude mať pokles počtu pracovníkov na 40?

3.6 Analýzou citlivosti vyriešte nasledujúcu úlohu LP:

$$\begin{aligned} 50x_1 + 35x_2 + 60x_3 &\longrightarrow \text{max}, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leqq 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leqq 80, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leqq 20, \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

(a) Zistite v akom intervale sa môže meniť pravá strana každého ohraničenia.

(b) Určte intervaly prípustných hodnôt cenových koeficientov.

3.7 Analýzou citlivosti vyriešte nasledujúcu úlohu LP:

$$\begin{aligned} 77x_1 + 27x_2 + 56x_3 &\longrightarrow \text{max}, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leqq 28, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geqq 21, \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

(a) Zistite v akom intervale sa môže meniť pravá strana každého ohraničenia.

(b) Určte intervaly prípustných hodnôt cenových koeficientov.

3.8 Analýzou citlivosti vyriešte nasledujúcu úlohu LP:

$$\begin{aligned} 9x_1 + 10x_2 + 8x_3 &\longrightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqq 80, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leqq 50, \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

(a) Zistite v akom intervale sa môže meniť pravá strana každého ohraničenia.

(b) Určte intervaly prípustných hodnôt cenových koeficientov.

3.9 Analýzou citlivosti vyriešte nasledujúcu úlohu LP:

$$\begin{aligned} 16x_1 + 10x_2 + 12x_3 &\longrightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leqq 70, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leqq 80, \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0. \end{aligned}$$

(a) Zistite v akom intervale sa môže meniť pravá strana každého ohraničenia.

(b) Určte intervaly prípustných hodnôt cenových koeficientov.

3.10 Zlievareň vyrába 3 rôzne zliatiny Z_1, Z_2 a Z_3 pre letecký priemysel, ktoré vznikajú zmiešavaním štyroch rôznych kovov K_1, K_2, K_3 a K_4 v presných pomeroch. Na výrobu 1 kg zliatiny Z_1 potrebujeme 0,6 kg K_1 a 0,4 kg K_2. Na výrobu 1 kg zliatiny Z_2 potrebujeme 0,5 kg K_2 a 0,5 kg K_4. Na výrobu 1 kg zliatiny Z_3 potrebujeme 0,3 kg K_3 a 0,7 kg K_4. Zlievareň má k dispozícii 5 kg K_1, 6 kg K_2, 7 kg K_3 a 3 kg K_4. Zisky z predaja zliatin Z_1, Z_2 a Z_3 sú 50 €, 60 € a 70 €. Stanovte výrobný plán pre maximálny zisk a určte prípustné intervaly zmien pre množstvo kovu K_2 a cenu zliatiny Z_3.

3.8 Výsledky neriešených úloh

3.1 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3})^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = \frac{190}{3}$. Pre kapacitu kontajnerov je prípustný interval $\langle 1\,200, 2\,400\rangle$ a pre cenu lode $L2$ interval $\left\langle \frac{15}{2}, 30\right\rangle$.

3.3 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (0, 0, 180)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 2\,160$. Pre dispozičný čas je prípustný interval $\langle 0, 6{,}4\rangle$ a pre cenu interval $\langle 6, \infty\rangle$.

3.4 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (\frac{0}{75}, \frac{4}{3})^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 150$. Pre olej je prípustný interval $\langle 12, 24\rangle$ a pre cenu hranoliek interval $\langle 0, \infty)$.

3.5 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (120, 0, 120)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 16\,800$.

a) $\langle 240, 480\rangle$,

b) $\langle 6, 12\rangle$,

c) $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (80, 0, 160)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 17\,600$.

3.6 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (4, 0, 8)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 680$.

a) $b_1 \in \langle 10, 20\rangle$, $b_2 \in \langle 16, \infty\rangle$, $b_3 \in \langle 12, 24\rangle$,

b) $c_1 \in \langle 30, 60\rangle$, $c_3 \in \langle 50, 100\rangle$.

3.8 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (20, 30, 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 480$.

a) $b_1 \in \langle 50, 100\rangle$, $b_2 \in \langle 40, 80\rangle$,

b) $c_1 \in \langle 5, 10\rangle$, $c_2 \in \langle 9, 18\rangle$.

3.9 $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (30, 10, 0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}}(\vec{x}) = 580$.

a) $b_1 \in \langle 40, 80\rangle$, $b_2 \in \langle 70, \infty\rangle$,

b) $c_1 \in \langle 10, \infty\rangle$, $c_2 \in \langle 8, 16\rangle$.

3.10 áno.

Kapitola 4

Parametrické programovanie

Parametrizácia úlohy lineárneho programovania vytvára ideálny priestor pri rozhodovaní, ktoré je založené na optimalizácii účelovej funkcie. Podobne ako v časti postoptimalizačnej analýzy aj pri parametrizácii môžme uvažovať, ako sa bude správať prípustná množina, optimálne riešenie, neohraničenosť resp. neprípustnosť úlohy LP, ak pridáme reálny parameter do pravej strany ohraničení, koeficientov účelovej funkcie a pod. Úlohou je vytvoriť diskusiu pre daný parameter, z ktorej zistíme, pre ktoré hodnoty úloha má riešenie, pre ktoré nemá riešenie alebo je neohraničená a pod.

Definícia 4.1 (Konvexná funkcia) Nech je daná konvexná množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkcia $f\colon M \to \mathbb{R}$ je *konvexná*, ak platí:

$$(\forall \vec{x}, \vec{y} \in M)(\forall \lambda \in \langle 0, 1\rangle) f(\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y}) \leqq \lambda f(\vec{x}) + (1-\lambda) f(\vec{y}). \tag{4.1}$$

Uvažujme v tejto kapitole úlohu lineárneho programovania v štandardnom tvare (viď. 4.2):

$$\begin{array}{rcl} \vec{c}^{\top} \cdot \vec{x} & \longrightarrow & \min, \\ \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} & = & \vec{b}, \\ \vec{x} & \geqq & \vec{0}. \end{array} \tag{4.2}$$

V ďalších podkapitolách ukážeme najbežnejšie spôsoby parametrizácie úlohy LP.

4.1 Parametrizácia pravej strany

v úlohe LP má pravá strana špecifické postavanie. Podľa tipu úlohy LP to môžu byť skladové zásoby, časové obmedzenia, kapacitné obmedzenia a pod. Hodnota pravej strany môže ovplyvniť to, či úloha LP je prípustná, neprípustná resp. neohraničená. Pridaním parametrov do vektora pravých strán získame predstavu, ako môže napr. stav zásob ovplyvniť prípustnosť úlohy LP. V tejto podkapitole popíšeme ako riešiť úlohu LP, ak na pravej strane sú okrem konštánt aj reálne parametre.

Pravú stranu úlohy LP (4.2) upravíme tak, že pridáme lineárnu kombináciu vektorov $\vec{b}_i$ s koeficientami p_i a dostaneme úlohu v tvare:

$$\begin{aligned} \vec{c}^\top \cdot \vec{x} &\longrightarrow \min, \\ \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} &= \vec{b}_0 + \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \vec{b}_i, \\ \vec{x} &\geqq \vec{0}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

kde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ je daná matica s hodnosťou $h(\boldsymbol{A}) = m$, vektory $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k \in \mathbb{R}^m$, vektory $\vec{c}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{p} \in M \subseteq \mathbb{R}^k$.

Veta 4.1 Nech $M_0 \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^k$ je množina tých p_i, pre ktoré má úloha LP (4.3) optimálne riešenie. Potom je M_0 konvexná množina, a navyše funkcia

$$F(\vec{p}) = \min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^\top \cdot \vec{x} : \ \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}_0 + \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \vec{b}_i, \ \vec{x} \geqq \vec{0} \right\} \tag{4.4}$$

je konvexná na množine M_0 a na ľubovoľnej polyhedrickej podmnožine M_0 je po častiach lineárna.

Na základe vety 4.1 môžeme úlohu LP s reálnym parametrom na pravej strane riešiť napr. pomocou simplexovej metódy, kde v jednotlivých krokoch algoritmu musíme posúdiť primárnu, resp. duálnu prípustnosť úlohy vzhľadom na parametre na pravej strane. Potom vypíšeme tvar optimálneho riešenia úlohy LP v závislosti na daných parametroch.

4.2 Parametrizácia účelovej funkcie

Podobne ako pri pravej strane úlohy LP môžeme uvažovať aj o zavedení parametrov do účelovej funkcie. Bude nás zaujímať, pre aké hodnoty parametrov v účelovej funkcii bude úloha LP prípustná, resp. neprípustná a aký tvar bude mať optimálne riešenie vzhľadom na dané parametre. V tejto podkapitole popíšeme ako riešiť úlohu LP s reálnymi parametrami pri koeficientoch účelovej funkcie.

Účelovú funkciu úlohy LP (4.2) upravíme tak, že pridáme lineárnu kombináciu vektorov $\vec{c}_i$ s koeficientami p_i a dostaneme úlohu v tvare:

$$\begin{aligned} \left(\vec{c}_0 + \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \vec{c}_i \right)^\top \cdot \vec{x} &\longrightarrow \min, \\ \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{x} &\geqq \vec{0}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ je daná matica s hodnosťou $h(\boldsymbol{A}) = m$, vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, vektory $\vec{c}_0, \ldots, \vec{c}_k, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{p} \in M \subseteq \mathbb{R}^k$.

Veta 4.2 Nech $M_0 \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^k$ je množina tých p_i, pre ktoré má úloha LP (4.5) optimálne riešenie. Potom je M_0 konvexná mn’žina, a navyše funkcia

$$G(\vec{p}) = \min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ \left(\vec{c}_0 + \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \vec{c}_i \right)^{\top} \cdot x : \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b},\ \vec{x} \geqq \vec{0} \right\} \tag{4.6}$$

je konvexná na množine M_0 a na ľubovoľnej polyhedrickej podmnožine M_0 je po častiach lineárna.

Podobne ako pri parametrizácii pravej strany aj pri parametrizácii koeficientov účelovej funkcie môžeme využiť na riešenie úlohy LP napr. simplexovú metódu. Keďže platí veta 4.2, tak v každom kroku simplexovho algoritmu rozhodneme pre aké hodnoty parametrov je úloha LP prípustná, resp. optimálna. Optimálne riešenie zapíšeme vzhľadom na hodnoty parametrov.

Optimálne riešenia v tomto prípade nám môžu pomôcť pri správnom nastavení ceny výrobkov, nákladov na ich výrobu, tvorbu odpadu a pod.

4.3 Riešené príklady

Úloha 4.1 Pomocou simplexovej metódy vyriešte nasledujúcu úlohu:

$$\begin{aligned} 15x_1 + 10x_2 &\longrightarrow \max, \\ 2x_1 + 4x_2 &\leqq 12, \\ 4x_1 + 2x_2 &\leqq 16, \\ 2x_1 + 2 &\geqq 2x_2, \\ 2x_2 &\leqq 4, \\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Riešenie:
Prepíšeme danú úlohu na štandardný tvar, aby sme mohli vyplniť simplexovú tabuľku:

$$\begin{aligned} -15x_1 - 10x_2 &\longrightarrow \min, \\ 2x_1 + 4x_2 + s_1 &= 12, \\ 4x_1 + 2x_2 + s_2 &= 16, \\ -2x_1 + 2x_2 + s_3 &= 2, \\ 2x_2 + s_4 &= 4, \\ x_{1-2},\ s_{1-4} &\geqq 0. \end{aligned}$$

Úloha v štandardnom tvare má 4 ohraničenia a 6 premenných. Vyplníme simplexovú tabuľku (Tabuľka 4.1), ktorá má 6 riadkov a 8 stĺpcov.

Tabuľka 4.1: Simplexová tabuľka – krok 1

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
–	0	-15	-10	0	0	0	0
s_1	12	2	4	1	0	0	0
s_2	16	4	2	0	1	0	0
s_3	2	-2	2	0	0	1	0
s_4	4	0	2	0	0	0	1

Stĺpce s_1, s_2, s_3 a s_4 tvoria bázické stĺpce a v tabuľke ich vidíme ako jednotkovú podmaticu typu 4×4. V nultom stĺpci sa nachádzajú hodnoty pravých strán, ktoré musia byť nezáporné, aby tabuľka bola primárne prípustná a v nultom riadku sú relatívne ceny, pričom v bázických stĺpcoch musia byť relatívne ceny nulové. Ak simplexová tabuľka spĺňa všetky tieto podmienky, tak táto tabuľka je pripravená na spustenie simplexového algoritmu.

Daným algoritmom nájdeme pivot, ktorý nám určí, ako bude vyzerať nová tabuľka v novej báze. Pivot nájdeme tak, že v nultom riadku hľadáme stĺpce so zápornou relatívnou cenou. V našej tabuľke to sú stĺpce x_1 a x_2. Vyberieme stĺpec x_2 a v ňom vypočítame všetky podiely medzi nultým stĺpcom a stĺpcom x_2 pre všetky kladné hodnoty, ktoré sú v stĺpci x_2. Z nich vyberieme minimum, t. j. $\min\{\frac{12}{4}, \frac{16}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}\} = 1$ pre hodnotu v treťom riadku. Hodnota a_{32} je pivotom, čo znamená, že stĺpec s_3 z bázy vystupuje a stĺpec x_2 do bázy vstupuje. Prepočítame danú tabuľku podľa pivota a_{32} a dostávame novú simplexovú tabuľku (Tabuľka 4.2):

Tabuľka 4.2: Simplexová tabuľka – krok 2

	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
–	10	-25	0	0	0	5	0
s_1	8	6	0	1	0	-2	0
s_2	14	6	0	0	1	-1	0
x_2	1	-1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0
s_4	2	2	0	0	0	-1	1

Dostali sme tabuľku, v ktorej v prvom stĺpci je záporná relatívna cena. To znamená, že tabuľka ešte nie je optimálna a v tomto stĺpci určíme nový pivot. Po prepočítaní minima zistíme, že je to prvok a_{42}. Pivotujeme tabuľku a dostávame novú tabuľku s hodnotami (Tabuľka 4.3):

Tabuľka 4.3: Simplexová tabuľka – krok 3

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
–	35	0	0	0	0	$-\frac{15}{2}$	$\frac{25}{2}$
s_1	2	0	0	1	0	1	-3
s_2	8	0	0	0	1	2	-3
x_2	2	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
x_1	1	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Aj v tejto tabuľke máme zápornú relatívnu cenu (v piatom stĺpci). Podielovým kritériom nájdeme minimum v piatom stĺpci a určíme pivot (prvok a_{15}). Pivotujeme celú tabuľku 4.3 a dostávame:

Tabuľka 4.4: Simplexová tabuľka – krok 4

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
–	50	0	0	$\frac{15}{2}$	0	0	-10
s_3	2	0	0	1	0	1	-3
s_2	4	0	0	-2	1	0	3
x_2	2	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
x_1	2	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	-1

Skontrolujeme nultý riadok v tabuľke a vidíme, že v šiestom stĺpci je záporná relatívna cena. Určíme pivot, ako podiely v druhom a treťom riadku, t. j. $\min\{\frac{4}{3}, 4\} = \frac{4}{3}$ (je to prvok a_{26}). Po pivotovaní tabuľky 4.4 dostávame novú tabuľku 4.5:

Tabuľka 4.5: Simplexová tabuľka – krok 5

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
–	$\frac{190}{3}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{10}{3}$	0	0
s_3	6	0	0	-1	1	1	0
s_4	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
x_2	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	0
x_1	$\frac{10}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	0

V tabuľke 4.5 sa už nenachádzajú v nultom riadku žiadne záporné relatívne ceny, takže sme dostali optimálnu simplexovú tabuľku a môžme napísať optimálne riešenie nášho problému: $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3})^{\top}$. Hodnota účelovej funkcie je $f^{\text{opt}} = -\frac{190}{3}$. Optimálna hodnota pôvodnej účelovej funkcie je $f^{\text{opt}} = \frac{190}{3}$. Čitateľ si môže overiť správnosť riešenia grafickou metódou. $\surd$

Úloha 4.2 V predošlej úlohe 4.1 pridajte parameter p na pravú stranu tretieho ohraničenia. Vyriešte úlohu LP vzhľadom na parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 15x_1 + 10x_2 &\longrightarrow \text{max},\\ 2x_1 + 4x_2 &\leqq 12,\\ 4x_1 + 2x_2 &\leqq 16,\\ 2x_1 + p &\geqq 2x_2,\\ 2x_2 &\leqq 4,\\ x_1, x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Riešenie:
Prepíšeme danú úlohu na štandardný tvar, aby sme mohli vyplniť simplexovú tabuľku:

$$\begin{aligned} -15x_1 - 10x_2 &\longrightarrow \text{min},\\ 2x_1 + 4x_2 + s_1 &= 12,\\ 4x_1 + 2x_2 + s_2 &= 16,\\ -2x_1 + 2x_2 + s_3 &= p,\\ 2x_2 + s_4 &= 4,\\ x_{1-2},\ s_{1-4} &\geqq 0, \end{aligned}$$

kde $p \in \mathbb{R}$. Úloha v štandardnom tvare má 4 ohraničenia, 6 premenných a jeden parameter p. Vyplníme simplexovú tabuľku (Tabuľka 4.6), ktorá má 6 riadkov a 8 stĺpcov.

Tabuľka 4.6: Simplexová tabuľka – krok 1

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
–	0	-15	-10	0	0	0	0
s_1	12	2	4	1	0	0	0
s_2	16	4	2	0	1	0	0
s_3	p	-2	2	0	0	1	0
s_4	4	0	2	0	0	0	1

Stĺpce s_1, s_2, s_3 a s_4 tvoria bázické stĺpce a v tabuľke ich vidíme ako jednotkovú podmaticu typu 4×4. V nultom stĺpci sa nachádzajú hodnoty pravých strán, ktoré musia byť nezáporné, aby tabuľka bola primárne prípustná a v nultom riadku sú relatívne ceny, pričom v bázických stĺpcoch musia byť relatívne ceny nulové. Ak simplexová tabuľka spĺňa všetky tieto podmienky, tak táto tabuľka je pripravená na spustenie simplexového algoritmu. V našom prípade je to pravde, len ak parameter p bude nezáporný, t. j. $p \geqq 0$. Riešme najprv túto úlohu LP pre nezáporný parameter p.

Simplexovým algoritmom nájdeme pivot, ktorý nám určí, ako bude vyzerať nová tabuľka v novej báze. Pivot nájdeme tak, že v nultom riadku hľadáme stĺpce so zápornou relatívnou cenou. V našej tabuľke sú to stĺpce x_1 a x_2. Vyberieme stĺpec x_1 a v ňom vypočítame všetky podiely medzi nultým stĺpcom a stĺpcom x_1 pre všetky kladné hodnoty, ktoré sú v stĺpci x_1. Z nich vyberieme minimum, t. j. $\min\{\frac{12}{2}, \frac{16}{4}\} = 4$ pre hodnotu v druhom riadku. Hodnota a_{21} je pivotom, čo znamená, že stĺpec s_2 z bázy vystupuje a stĺpec x_1 do bázy vstupuje. Prepočítame danú tabuľku podľa pivota a_{21} a dostávame novú simplexovú tabuľku (Tabuľka 4.7):

Tabuľka 4.7: Simplexová tabuľka – krok 2

	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
–	60	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{15}{4}$	0	0
s_1	4	0	3	1	$-\frac{1}{2}$	0	0
x_1	4	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
s_3	$8+p$	0	3	0	$\frac{1}{2}$	1	0
s_4	4	0	2	0	0	0	1

Dostali sme tabuľku, v ktorej v druhom stĺpci je záporná relatívna cena. To znamená, že tabuľka ešte nie je optimálna a v tomto stĺpci určíme nový pivot. Platí:

$$\min\left\{\frac{4}{3}, \frac{4}{\frac{1}{2}}, \frac{8+p}{3}, \frac{4}{2}\right\} = \frac{4}{3},$$

pre všetky $p \geqq 0$. Prvok a_{12} je pivot. Pivotujeme tabuľku a dostávame novú tabuľku (Tabuľka 4.8):

Tabuľka 4.8: Simplexová tabuľka – krok 3

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
$-$	$\frac{190}{3}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{10}{3}$	0	0
x_2	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	0
x_1	$\frac{10}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	0
s_3	$4+p$	0	0	-1	1	1	0
s_4	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1

Tabuľka 4.8 je už optimálna, lebo v nultom riadku sa už nenachádzajú žiadne záporné relatívne ceny. Optimálne riešenie nášho problému je vektor: $\vec{x}^{\mathrm{opt}} = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3})^\top$ a hodnota účelovej funkcie je $f^{\mathrm{opt}} = -\frac{190}{3}$ pre parameter $p \geqq 0$. Musíme sa ešte pozrieť na situáciu, keď parameter p je záporný. V takomto prípade tabuľka 4.6 nie je primárne prípustná, lebo na pravej strane (nultý stĺpec) sa nachádza záporná hodnota. Riešime pomocnú úlohu:

$$\begin{aligned}
q &\longrightarrow \min,\\
2x_1 + 4x_2 + s_1 &= 12,\\
4x_1 + 2x_2 + s_2 &= 16,\\
2x_1 - 2x_2 - s_3 + q &= -p,\\
2x_2 + s_4 &= 4,\\
x_{1-2},\ s_{1-4} &\geqq 0,
\end{aligned}$$

kde $p < 0$. Vyplníme simplexovú tabuľku (Tabuľka 4.9) a uparvíme tak, aby sme mohli spustiť simplexový algoritmus (Tabuľka 4.10):

Tabuľka 4.9: Simplexová tabuľka – krok 4

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	q
–	0	0	0	0	0	0	0	1
s_1	12	2	4	1	0	0	0	0
s_2	16	4	2	0	1	0	0	0
q	$-p$	2	-2	0	0	-1	0	1
s_4	4	0	2	0	0	0	1	0

Tabuľka 4.10: Simplexová tabuľka – krok 5

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	q
–	p	-17	-8	0	0	1	0	0
s_1	12	2	4	1	0	0	0	0
s_2	16	4	2	0	1	0	0	0
q	$-p$	2	-2	0	0	-1	0	1
s_4	4	0	2	0	0	0	1	0

V nultom riadku sú dve záporné relatívne ceny. Určíme pivot v druhom stĺpci:

$$\min\left\{\frac{12}{4}, \frac{16}{2}, \frac{4}{2}\right\} = \min\{3, 8, 2\} = 2.$$

Vidíme, že určenie pivota nie je závislé od hodnoty parametra p, keďže prvok a_{32} je záporný. Pivot je prvok a_{42}. Pivotujeme tabuľku 4.10. Z bázy odchádza premenná s_4 a do bázy vstupuje premenná x_2. Dostávame novú tabuľku 4.11:

Tabuľka 4.11: Simplexová tabuľka – krok 6

B	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	q
–	$16+p$	-17	0	0	0	1	4	0
s_1	4	2	0	1	0	0	-2	0
s_2	12	4	0	0	1	0	-1	0
q	$4-p$	2	0	0	0	-1	1	1
x_2	2	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0

Tabuľka 4.11 obsahuje už len jednu zápornú relatívnu cenu. Určíme pivot v prvom stĺpci:

$$\min\left\{\frac{4}{2}, \frac{12}{4}, \frac{4-p}{2}\right\} = \min\left\{2, 3, \frac{4-p}{2}\right\} = 2,$$

pre všetky hodnoty parametra $p < 0$. Pivot je prvok a_{11}, t. j. stĺpec s_1 z bázy odchádza a stĺpec x_1 do bázy vstupuje. Po pivotovaní dostávame tabuľku 4.12: V stĺpci s_4 je záporná

Tabuľka 4.12: Simplexová tabuľka – krok 7

B	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	q
–	$50+p$	0	0	$\frac{17}{2}$	0	1	-13	0
x_1	2	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	0
s_2	4	0	0	-2	1	0	3	0
q	$-p$	0	0	-1	0	-1	3	1
x_2	2	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0

relatívna cena. V tomto stĺpci určíme pivot vzhľadom na hodnotu parametra p:

$$\min\left\{\frac{4}{3}, \frac{-p}{3}, \frac{2}{\frac{1}{2}}\right\} = \min\left\{\frac{4}{3}, \frac{-p}{3}\right\} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{ak parameter } p \leqq -4, \\ -\frac{p}{3} & \text{ak parameter } p \in (-4, 0). \end{cases}$$

Ak parameter $p \leqq -4$, tak pivot je prvok a_{26}. Ak parameter $p \in (-4, 0)$, tak pivot je prvok a_{36}. Popíšeme oba prípady. Nech $p \leqq -4$, potom dostávame tabuľku 4.13:

Tabuľka 4.13: Simplexová tabuľka – krok 8

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	q
$-$	$\frac{202}{3}+p$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{13}{3}$	1	0	0
x_1	$\frac{10}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
s_2	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0
q	$-4-p$	0	0	1	-1	-1	0	1
x_2	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	0

V stĺpci s_1 je záporná relatívna cena. V tomto stĺpci určíme pivot vzhľadom na hodnotu parametra p:

$$\min\left\{\frac{-4-p}{1}, \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}\right\} = \min\{-4-p, 4\} = \begin{cases} -4-p & \text{ak parameter } -8 < p \leqq -4, \\ 4 & \text{ak parameter } p \in (-\infty, -8\rangle. \end{cases}$$

Ak parameter $p \in (-8, -4\rangle$, tak pivot je prvok a_{33}. Ak parameter $p \in (-\infty, -8\rangle$, tak pivot je prvok a_{43}. Popíšeme oba prípady. Nech $p \in (-\infty, -8\rangle$, potom dostávame tabuľku 4.14:

Tabuľka 4.14: Simplexová tabuľka – krok 9

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	q
$-$	$68+p$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{17}{4}$	1	0	0
x_1	4	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0
s_4	4	0	2	0	0	0	1	0
q	$-8-p$	0	-3	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
s_1	4	0	3	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0

V tabuľke 4.14 nie sú záporné relatívne ceny, preto simplexový algoritmus končí. V báze ostala pomocná premenná q a hodnota účelovej funkcie je nenulová, preto pôvodná úloha LP je neprípustná. Tento výsledok zodpovedá vetve riešenia pre hodnotu parametra $p \in (-\infty, -8\rangle$. V tabuľke 4.13 sme mohli zvoliť za pivot prvok a_{33} pre parameter $p \in (-8, -4\rangle$. Po pivotovaní dostávame tabuľku 4.15:

Tabuľka 4.15: Simplexová tabuľka – krok 10

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	q
$-$	$\frac{200}{3}+\frac{5p}{6}$	0	0	0	$\frac{25}{6}$	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
x_1	$\frac{8}{3}-\frac{p}{6}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
s_4	$-\frac{4}{3}-\frac{2p}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
s_1	$-4-p$	0	0	1	-1	-1	0	1
x_2	$\frac{8}{3}+\frac{p}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

Vidíme, že v tabuľke 4.15 nie sú záporné relatívne ceny a pomocná premenná q nie je v báze, t. j. môžeme ukončiť pomocnú úlohu LP a nájsť optimálne riešenie úlohy LP pre hodnotu parametra $p \in (-8, -4\rangle$. Dostávame tabuľku 4.16:

Tabuľka 4.16: Simplexová tabuľka – krok 11

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
$-$	$\frac{200}{3}+\frac{5p}{6}$	0	0	0	$\frac{25}{6}$	$\frac{5}{6}$	0
x_1	$\frac{8}{3}-\frac{p}{6}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0
s_4	$-\frac{4}{3}-\frac{2p}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
s_1	$-4-p$	0	0	1	-1	-1	0
x_2	$\frac{8}{3}+\frac{p}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0

Tabuľka 4.16 je optimálna. Všetky relatívne ceny sú nezáporné. Optimálne riešenie má tvar: $\vec{x}^{\,\text{opt}} = \left(\frac{8}{3}-\frac{p}{6}, \frac{8}{3}+\frac{p}{3}\right)^\top$ a hodnota účelovej funkcie je $f^{\text{opt}} = \frac{200}{3}+\frac{5p}{6}$, pre $p \in (-8, -4\rangle$. Ostal prípad, keď parameter $p \in (-4, 0)$. V tomto prípade určíme pivot, ktorý zodpovedá prvku a_{36}, pozri tabuľku 4.12. Po pivotovaní dostávame tabuľku 4.17:

Tabuľka 4.17: Simplexová tabuľka – krok 12

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	q
–	$50-\frac{10p}{3}$	0	0	$\frac{25}{6}$	0	$-\frac{10}{3}$	0	$\frac{13}{3}$
x_1	$2-\frac{p}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
s_2	$4+p$	0	0	-1	1	1	0	-1
s_4	$-\frac{p}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
x_2	$2+\frac{p}{6}$	0	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$

V stĺpci s_3 je záporná relatívna cena. V tomto stĺpci určíme pivot vzhľadom na hodnotu parametra p:

$$\min\left\{\frac{4+p}{1}, \frac{2+\frac{p}{6}}{\frac{1}{6}}\right\} = \min\{4+p, 12+p\} = 4+p,$$

pre všetky $p \in (-4, 0)$. Pivot je prvok $a25$. Po prepočítané dostávame tabuľku 4.18: Všetky relatívne ceny sú nezáporné. Tabuľka 4.18 je optimálna. Optimálne riešenie má

Tabuľka 4.18: Simplexová tabuľka – krok 13

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	q
–	$\frac{190}{3}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{10}{3}$	0	0	1
x_1	$\frac{10}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
s_3	$4+p$	0	0	-1	1	1	0	-1
s_4	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0
x_2	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	0

tvar: $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)^\top$ a hodnota účelovej funkcie je $f^{\mathrm{opt}} = \frac{190}{3}$, pre $p \in (-4, 0)$. Zhrnieme všetky čiastkové riešenia:

$$\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = \begin{cases} \emptyset & \text{pre parameter } p \in (-\infty, -8\rangle, \\ \left(\frac{8}{3}-\frac{p}{6}, \frac{8}{3}+\frac{p}{3}\right)^\top & \text{pre parameter } p \in (-8, -4\rangle, \\ \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)^\top & \text{pre parameter } p \in \langle -4, \infty), \end{cases}$$

$$f^{\text{opt}} = \begin{cases} \text{neprípustná úloha LP} & \text{pre parameter } p \in (-\infty, -8\rangle, \\ \frac{200}{3} + \frac{5p}{6} & \text{pre parameter } p \in (-8, -4\rangle, \\ \frac{190}{3} & \text{pre parameter } p \in \langle -4, \infty). \end{cases}$$

$\surd$

4.4 Neriešené príklady

4.1 Pre všetky hodnoty parametra $\lambda \in (-\infty; \infty)$ vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$(-6-2\lambda)x_1 + (-1+3\lambda)x_2 \to \max$$
$$-2x_1 - x_2 \leq -5$$
$$x_1 - 3x_2 \leq -4$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4.2 Pre všetky hodnoty parametra $\lambda \in (-\infty; \infty)$ vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$-3x_1 - 5x_2 \to \max$$
$$-2x_1 + x_2 \leq -10 + 3\lambda$$
$$-x_1 - x_2 \leq -8 - \lambda$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 12 + 2\lambda$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4.3 Pre všetky hodnoty parametra $\lambda \in (-\infty; \infty)$ vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$2\lambda x_1 - (1+\lambda)x_2 \to \max$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4.4 Pre všetky hodnoty parametra $\lambda \in \langle -3; 4 \rangle$ vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \leq 10 + 2\lambda$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 2 + \lambda$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4.5 Pre všetky hodnoty parametra $\lambda \in (-\infty; \infty)$ vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$(1-4\lambda)x_1 + 4\lambda x_2 \to \max$$
$$x_1 - 2x_2 \geq -1$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4.6 Pre všetky hodnoty parametra $\lambda \in (-\infty; \infty)$ vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$x_1 + 4x_2 \to \min$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 1 + \lambda$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 1 + 2\lambda$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4.7 Pre všetky hodnoty parametra $\lambda \in \langle 0; 24 \rangle$ vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$50x_1 + 60x_2 + 25x_3 \to \max$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 24 + \lambda$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 - 0,5\lambda$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

4.8 Pre všetky hodnoty parametra $\lambda \in (2; \infty)$ vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$(70 + 2\lambda)x_1 + (80 - \lambda)x_2 \to \max$$

$$2x_1 + x_2 \leq 19$$

$$x_1 + x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4.9 Pre všetky hodnoty parametra $\lambda \in (-\infty; \infty)$ vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$-\lambda x_1 + (1 + 6\lambda)x_2 \to \min$$

$$x_1 - 5x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4.10 Pre všetky hodnoty parametra $\lambda \in (-\infty; \infty)$ vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$7x_1 + x_2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq -1 + 3\lambda$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4.5 Výsledky neriešených úloh

4.3
- pre $\lambda \leq -1$ je $x^{opt} = (0; 3)^T$ a $z = -3 - 3\lambda$;
- pre $-1 \leq \lambda \leq 0$ je $x^{opt} = (0; 0)^T$ a $z = 0$;
- pre $0 \leq \lambda < \frac{1}{3}$ je $x^{opt} = (2; 0)^T$ a $z = 4\lambda$;
- pre $\lambda = \frac{1}{3}$ je $x^{opt} = (2 + 2\sigma; \sigma)^T, \sigma \geq 0$ a $z = \frac{4}{3}$;
- pre $\frac{1}{3} < \lambda < \infty$ je neohraničená.

4.5
- pre $\lambda \leq \frac{1}{6}$ je $x^{opt} = (3; 0)^T$ a $z = 3 - 12\lambda$;
- pre $\frac{1}{6} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ je $x^{opt} = (1; 1)^T$ a $z = 1$;
- pre $\frac{1}{2} < \lambda < \infty$ je $x^{opt} = (0; \frac{1}{2})^T$ a $z = 2\lambda$.

4.6
- pre $\lambda < -\frac{1}{4}$ je neprípustná;
- pre $-\frac{1}{4} \leq \lambda \leq 0$ je $x^{opt} = (1 + 4\lambda; -\lambda)^T$ a $z = 1 + 2\lambda$;
- pre $0 \leq \lambda < \infty$ je $x^{opt} = (1 + \lambda; 0)^T$ a $z = 1 + \lambda$.

4.9
- pre $\lambda < -1$ je neohraničená;
- pre $\lambda = -1$ je $x^{opt} = (\frac{5}{3} + \frac{5}{6}\sigma; \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\sigma)^T, \sigma \geq 0$ a $z = 0$;
- pre $-1 < \lambda < -\frac{1}{7}$ je $x^{opt} = (\frac{5}{3}; \frac{1}{3})^T$ a $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda$;
- pre $-\frac{1}{7} \leq \lambda < 0$ je $x^{opt} = (2; 0)^T$ a $z = -2\lambda$;
- pre $\lambda = 0$ je $x^{opt} = (2 + \sigma; 0)^T, \sigma \geq 0$ a $z = 0$;
- pre $0 < \lambda < \infty$ je neohraničená.

4.10
- pre $\lambda \leq \frac{1}{3}$ je $x^{opt} = (0; 0)^T$ a $z = 0$;
- pre $\frac{1}{3} \leq \lambda \leq 1$ je $x^{opt} = (0; -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda)^T$ a $z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda$;
- pre $1 \leq \lambda \leq 2$ je $x^{opt} = (-1 + \lambda; 2 - \lambda)^T$ a $z = -5 + 6\lambda$;
- pre $2 < \lambda < \infty$ je neprípustná.

Kapitola 5

Kvadratické programovanie

5.1 Úvod do nelineárneho programovania

Cieľom úlohy nelineárneho programovania (ďalej už len NLP) je minimalizácia funkcie $f(x_1, \dots, x_n)$ za podmienok $g_i(x_1, \dots, x_n) \leqq 0$, pre $i = 1, \dots, m$ a $h_k(\vec{x}) = 0$ pre $k = 1, \dots, p$, kde $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in X \subset \mathbb{R}^n$. Predpokladom však je, že dané funkcie f, g_i a h_k pre $i \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, \dots, p\}$ sú definované na celom $\mathbb{R}^n$ a majú hodnoty na rozšírenej reálnej priamke $\mathbb{R}^*$. Nelinearita úlohy je podmienená tým, že aspoň jedna z uvedených funkcií nie je lineárna. Množina X predstavuje napr. nezápornosť niektorých premenných.

Úlohu NLP v rovnicovom tvare na základe vyššie uvedeného môžeme zapísať nasledovne:

$$\min\{f(\vec{x}) : g(\vec{x}) \le \vec{0}; h(\vec{x}) = \vec{0}, \vec{x} \in X\}, \tag{5.1}$$

kde $g(\vec{x}) = (g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))^\top$ a $h(\vec{x}) = (h_1(\vec{x}), \dots, h_p(\vec{x}))^\top$ sú vektorové funkcie. Množinu prípustných riešení úlohy (5.1) budeme štandardne označovať

$$M = \{\vec{x} \in X : g(\vec{x}) \leqq \vec{0}, h(\vec{x}) = \vec{0}\}. \tag{5.2}$$

V špeciálnych prípadoch $g_i(\vec{x}) = 0$ je možné previesť na dve nerovnosti v tvare $g_i(\vec{x}) \leqq 0$ a $-g_i(\vec{x}) \leqq 0$.

5.2 Úvod do kvadratického programovania

Definícia 5.1 (**Pozitívne definitná matica**) Matica $\boldsymbol{A}$ sa nazýva *pozitívne definitná*, ak platí:

$$(\forall \vec{x})\ \vec{x}^\top \cdot \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} > 0. \tag{5.3}$$

Definícia 5.2 (**Pozitívne semidefinitná matica**) Matica $\boldsymbol{A}$ sa nazýva *pozitívne semidefinitná*, ak platí:

$$(\forall \vec{x})\ \vec{x}^\top \cdot \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \geqq 0. \tag{5.4}$$

Definícia 5.3 (**Symetrická matica**) Matica $\boldsymbol{A}$ je *symetrická*, ak $\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}$.

Keďže pre symetrické matice platí:

$$\vec{x}^\top \cdot \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}^\top \left(\frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top) \cdot \vec{x} \right), \tag{5.5}$$

tak sa budeme zaoberať len symetrickými maticami.

Veta 5.1 Symetrická matica je pozitívne definitná (semidefinitná) práve vtedy, keď všetky jej vlastné čísla sú kladné (nezáporné).

Veta 5.2 Symetrická matica $\boldsymbol{A}$ rozmerov $n \times n$ je pozitívne definitná práve vtedy, keď

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0,$$

pre $k = 1, \dots, n$.

Špeciálnym prípadom úlohy nelineárneho programovania je úloha kvadratického programovnia (ďalej už len KP), t. j. účelová funkcia je kvadratická a podmienky sú lineárne:

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^\top \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \vec{p}^\top \cdot \vec{x} \longrightarrow \min, \tag{5.6}$$

pri ohraničeniach $\vec{x} \in D$, kde n je počet rozhodovacích premenných úlohy, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je vektor rozhodovacích premenných, $\boldsymbol{C}$ je symetrická pozitívne semidefinitná matica n-tého stupňa, $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ je vektor koeficientov, $D \subset \mathbb{R}^n$ je konvexná polyedrická množina v $\mathbb{R}^n$.

Budeme uvažovať len tri špeciálne prípady polyedrickej množiny D a to:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\vec{x} : \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \leqq \vec{b}, \vec{x} \geqq \vec{0}\}, \\ D_2 &= \{\vec{x} : \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geqq \vec{0}\}, \\ D_3 &= \{\vec{x} : \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}\}, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je matica rozmerov $m \times n$ a $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ je vektor. Prípady množín D_2 a D_3 vieme vhodnými dodatočnými podmienkami (napr. $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \leqq \vec{b}$ a $-\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \leqq -\vec{b}$) previesť na problém pre prípad D_1, a tak sa budeme ďalej zaoberať len týmto typom množiny D_1. Keďže sústava ohraničení úlohy KP je tvorená lineárnymi, t. j. konvexnými funkciami a predpokladáme, že $\boldsymbol{C}$ je pozitívne semidefinitná matica a z tohoto dôvodu je účelová funkcia konvexná, tak úloha kvadratického programovania je úlohou konvexného programovania. Na základe toho môžeme využiť niektoré metódy pre riešenie úloh na viazaný extrém.

5.3 Kuhnove-Tuckerove podmienky

V tejto časti sa budeme zaoberať stanovením podmienok optimálnosti pre sústavu ohraničení v tvare D_1:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = \vec{x}^\top \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \vec{p}^\top \cdot \vec{x} \quad &\longrightarrow \quad \min, \\ \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \quad &\leqq \quad \vec{b}, \\ \vec{x} \quad &\geqq \quad \vec{0}. \end{aligned}$$

Inak povedané, podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera nám pomôžu pri hľadaní riešenia úlohy KP. Keďže účelová funkcia f je konvexná a diferencovateľná na celom $\mathbb{R}^n$ a navyše množina prípustných riešení je určená lineárnymi podmienkami, tak je pri hľadaní viazaného extrému vhodné použiť Lagrangeovu funkciu s multiplikátormi $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ a $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$:

$$L(\vec{x}, \vec{u}, \vec{w}) = \vec{x}^\top \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \vec{p}^\top \cdot \vec{x} + \vec{u}^\top \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{b}) + \vec{w}^\top \cdot (-\vec{x}). \tag{5.7}$$

Rozhodovacie premenné sú nezáporné, a tak môžeme použiť zovšeobecnenú Lagrangeovu funkciu v tvare:

$$L(\vec{x}, \vec{u}) = \vec{x}^\top \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \vec{p}^\top \vec{x} + \vec{u}^\top \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{b}). \tag{5.8}$$

Postup na získanie Kuhnových-Tuckerových podmienok:

Na stanovenieu Kuhnových-Tuckerových podmienok sú potrebné parciálne derivácie Lagrangeovej funkcie $L(\vec{x}, \vec{u})$ nakoľko jej lokálne extrémy sú aj viazanými extrémami danej funkcie f na príslušnej väzbe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_i} &= \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{b}, \quad \text{pre} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\ \frac{\partial L}{\partial x_j} &= 2 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \vec{p} + \boldsymbol{A}^\top \cdot \vec{u}, \quad \text{pre} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Pre vypočítané derivácie majú platiť podmienky komplementárnej rovnováhy v tvare:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \geqq 0; \quad x_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0; \quad x_j \geqq 0, \quad \text{pre} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} \leqq 0; \quad u_i \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0; \quad u_i \geqq 0, \quad \text{pre} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Z vypočítaných parciálnych derivácií tak dostávame:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \vec{p} + \boldsymbol{A}^\top \cdot \vec{u} \quad &\geqq \quad \vec{0}, \\ \vec{x}^\top \cdot (2 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \vec{p} + \boldsymbol{A}^\top \vec{u}) \quad &= \quad \vec{0}, \\ \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} + \vec{b} \quad &\leqq \quad \vec{0}, \\ \vec{u}^\top \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{b}) \quad &= \quad \vec{0}, \\ \vec{x} \quad &\geqq \quad \vec{0}, \\ \vec{u} \quad &\geqq \quad \vec{0}. \end{aligned}$$

Zavedením vhodných substitúcií, t.j. nových premenných $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 2 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \vec{p} + \boldsymbol{A}^\top \cdot \vec{u}, \\ \vec{y} &= \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{b}, \end{aligned}$$

a následnom dosadení dostávame sústavu:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \vec{p} + \boldsymbol{A}^\top \cdot \vec{u} &= \vec{v} \geqq \vec{0}, \\ x_j \cdot v_j &= 0 \quad \text{pre} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ \vec{x} &\geqq \vec{0}, \\ \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{b} &= -\vec{y} \leqq \vec{0}, \\ u_i \cdot y_i &= 0 \quad \text{pre} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\ \vec{u} &\geqq \vec{0}, \end{aligned}$$

resp. po malých úpravách sústavu v tvare:

$$\begin{aligned} -2 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} - \boldsymbol{A}^\top \cdot \vec{u} + \vec{v} &= \vec{p}, && (5.9) \\ \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} + \vec{y} &= \vec{b}, && (5.10) \\ \vec{x} &\geqq \vec{0}, && (5.11) \\ \vec{y} &\geqq \vec{0}, && (5.12) \\ \vec{u} &\geqq \vec{0}, && (5.13) \\ \vec{v} &\geqq \vec{0}, && (5.14) \\ x_j \cdot v_j &= 0, \quad \text{pre} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}, && (5.15) \\ u_i \cdot y_i &= 0, \quad \text{pre} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}. && (5.16) \end{aligned}$$

Z podmienok (5.11), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) a 5.16 vyplýva, že z každej dvojice premenných (x_j, v_j) resp. (u_i, y_i) je aspoň jedna zložka nenulová t. j. najviac $n+m$ premenných môže byť nenulových.

Ak nejaká sústava rovníc má nezáporné riešenie, tak má aj nezáporné bázické riešenie. Pri hľadaní bodu vyhovujúceho podmienkam optimálnosti Kuhna-Tuckera stačí skúmať nezáporné bázické riešenia.

5.4 Wolfeho algoritmus

Táto metóda riešenia úloh KP je založená na Kuhnových-Tuckerových podmienkach a na ich riešenie Wolfe rozpracoval upravený simplexový algoritmus. Pôvodne bola táto metóda rozpracovaná v závislosti od vlastností účelovej funkcie v dvoch variantoch:

(1) špeciálny prípad, tzv. krátky tvar Wolfeho metódy. Tento variant nám umožňuje riešiť úlohy, v ktorých matica $\boldsymbol{C}$ kvadratickej formy účelovej funkcie je pozitívne definitná, alebo vektor $\vec{p}$ lineárnej formy je nulový. V praxi platí, že krátky tvar Wolfeho metódy

konverguje v mnohých prípadoch, aj keď matica $\boldsymbol{C}$ je len pozitívne semidefinitná a vektor $\vec{p}$ je nenulový. Toreticky je však možné konvergenciu zaručiť len pri splnení vyššie uvedených predpokladov.

(2) všeobecný prípad, tzv. dlhý tvar Wolfeho metódy. Tento tvar je možné použiť bez vyššie uvedených obmedzení.

Uvažujme úlohu KP v tvare:

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^\top \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \vec{p}^\top \cdot \vec{x} \longrightarrow \min, \quad \text{pre} \quad i \in D, \tag{5.17}$$

kde D je konvexná polyedrická množina v $\mathbb{R}^n$ v špeciálnom tvare $D_1 = \{\vec{x} : \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \leqq \vec{b},\ \vec{x} \geqq \vec{0}\}$, n je počet rozhodovacích premenných úlohy, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je vektor rozhodovacích premenných, $\boldsymbol{C}$ je symetrická pozitívne semidefinitná matica n-tého stupňa, $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ je vektor lineárnej formy. Ďalej predpokladáme, že $\vec{b} \geqq \vec{0}$ a hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ je $h(\boldsymbol{A}) = m$.

Podľa Kuhnových-Tuckerových podmienok, bod $\vec{x}^*$ spĺňajúci podmienky $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x}^* \leqq \vec{b}$, $\vec{x}^* \geqq \vec{0}$ je riešením úlohy (5.17) práve vtedy, keď existuje vektor $\vec{u}^* \in \mathbb{R}^m$ taký, že sú splnené nasledovné podmienky:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x}^* + \vec{p} + \boldsymbol{A}^\top \vec{u}^* &\geqq \vec{0}, \\ \vec{x}^{*\top} \cdot (2 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x}^* + \vec{p} + \boldsymbol{A}^\top \cdot \vec{u}^*) &= \vec{0}, \\ \boldsymbol{A} \cdot \vec{x}^* - \vec{b} &\leqq \vec{0}, \\ \vec{u}^{*\top} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \vec{x}^* - \vec{b}) &= \vec{0}, \end{aligned}$$

kde $\vec{x}^* \geqq \vec{0}$, $\vec{u}^* \geqq \vec{0}$. Zavedením vhodných substitúcií v tvare

$$\begin{aligned} \vec{v}^* &= 2 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x}^* + \vec{p} + \boldsymbol{A}^\top \cdot \vec{u}^*, \\ -\vec{y}^* &= \boldsymbol{A} \cdot \vec{x}^* - \vec{b}, \end{aligned}$$

pre $\vec{y}^* \geqq \vec{0}$, $\vec{v}^* \geqq \vec{0}$ sa problém pôvodnej úlohy transformuje na problém vyriešenia nasledujúcej sústavy:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x}^* + \boldsymbol{A}^\top \cdot \vec{u}^* - \vec{v} &= -\vec{p}, \\ \boldsymbol{A} \cdot \vec{x}^* + \vec{y}^* &= \vec{b}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

kde $x^*, y^*, u^*, v^* \geqq \vec{0}$ a zároveň musí byť splnená podmienka (tzv. podmienka ortogonality) t. j. podmienka:

$$\vec{x}^{*\top} \cdot \vec{v}^* = 0 \quad \text{a} \quad \vec{u}^{*\top} \cdot \vec{y}^* = 0. \tag{5.19}$$

Nato, aby táto podmienka mohla byť splnená, musí byť x_i alebo v_i rovné nule pre každé $i = 1, \dots, n$ (podobne pre y_i a u_i pre každé $i = 1, \dots, m$). Do úvahy teda prichádzajú len také riešenia sústavy (5.18), v ktorých je z $2n + 2m$ premenných nenulových najviac $n + m$, t. j. toľko, koľko má sústava rovníc. Táto podmienka je splnená práve bázickými riešeniami. Princíp metódy teda spočíva v tom, že spomedzi prípustných bázických riešení sústavy (5.18) vyberieme tie, ktoré zároveň spĺňajú podmienku ortogonality. Nato použijeme obmenený simplexový algoritmus tak, aby sa zavedením pomocných (resp. umelých) premenných sústava (5.18) rozšírila na tvar, v ktorom možno bezprostredne určiť počiatočné bázické riešenie vyhovujúce podmienke ortogonality. Nasledovne sa simplexovým algoritmom pomocné premenné anulujú a algoritmus upravíme tak, aby v každej iterácii bola splnená aj podmienka ortogonality (určia sa tzv. Wolfeho podmienky resp. pravidlá).

ALGORITMUS (Wolfe):

K0: Nájdeme prípustnú bázu $\boldsymbol{B} \subset \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ pre nezáporné riešenie sústavy $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{b}$. Ak takáto primárne prípustná báza neexistuje, tak choď na krok K3.

K1: Zostavíme pomocnú úlohu (5.20):

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} w_i : \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{b},\ 2 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \boldsymbol{A}^\top \cdot \vec{u} - \vec{v} + \boldsymbol{D} \cdot \vec{w} = -\vec{p} \text{ pre } \vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v} \geqq \vec{0}\right\}, \tag{5.20}$$

kde $\boldsymbol{D}$ je diagonálna matica, ktorú definujeme nasledovne:

(1) ak $\sum_j 2c_{kj} x_j(\boldsymbol{B}) > -p_k$, tak $d_{k,k} = -1$,

(2) ak $\sum_j 2c_{kj} x_j(\boldsymbol{B}) \leqq -p_k$, tak $d_{k,k} = 1$.

Položíme $L_0 = \boldsymbol{B} \cup \{w_1, \ldots, w_n\}$ a L_0 bude prípustnou bázou pre úlohu (5.20).

K2: Riešime úlohu (5.20) pomocou simplexového algoritmu s dodatočnými pravidlami pre vstup premenných do bázy:

P1: x_j môže vstupovať do bázy, ak $z_{x_j} - c_{x_j} > 0$ a v_j nie je bázická premenná, pre $j \in \{1, \ldots, n\}$,

P2: v_j môže vstupovať do bázy, ak $z_{v_j} - c_{v_j} > 0$ a x_j nie je bázická premenná, pre $j \in \{1, \ldots, n\}$,

P3: u_i môže vstupovať do bázy, ak $z_{u_i} - c_{u_i} > 0$ a y_i nie je bázická premenná, pre $i \in \{1, \ldots, m\}$,

P4: y_i môže vstupovať do bázy, ak $z_{y_i} - c_{y_i} > 0$ a u_i nie je bázická premenná, pre $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Týmito podmienkami zabezpečíme podmienky ortogonality uvedené vyššie. Za počiatočnú bázu simplexového algorimu vezmeme L_0 a takto upravený algoritmus skončí po konečnom počte krokov. Označme konečnú nájdenú bázu L_{kon}.

(1) Ak $\sum_{i=1}^{m} u(L_{\text{kon}})_j > 0$, tak prejdeme na krok K4.

(2) Ak $\sum_{i=1}^{m} u(L_{\text{kon}})_j = 0$, tak prejdeme na krok K5.

K3: (Ukončenie algoritmu)
Úloha (5.17) nemá prípustné riešenie.

K4: (Ukončenie algoritmu)
Komponenty bázického riešenia $x(L_{\text{kon}})$ sú optimálne riešenia úlohy (5.17).

K5: (Ukončenie algoritmu)
Algoritmus nenašiel optimálne riešenie úlohy (5.17).

Wolfeho algoritmus skončí po konečnom počte krokov, ale nemusí vždy nájsť optimálne riešenie úlohy (5.17). Je však dokázané, že Wolfeho algoritmus za dodatočnej podmienky nájde vždy optimálne riešenie na základe Vety 5.3.

Veta 5.3 Ak $\boldsymbol{C}$ je pozitívne semidefinitná matica a $h(\boldsymbol{C}|\vec{p}) = h(\boldsymbol{C})$, tak Wolfeho algoritmus buď zistí, že neexistuje prípustné riešenie alebo nenájde optimálne riešenie úlohy (5.17).

5.5 Shettyho-Lemkeho algoritmus

Na úvod je potrebné si zopakovať pojmy ako symetrická, pozitívne semidefinitná a definitná matica a taktiež ich príslušné ekvivalentné formulácie.

Shettyho-Lemkeho metóda patrí medzi simplexové algoritmy a je založená na hľadaní bodu vyhovujúceho podmienkam optimálnosti Kuhna-Tuckera. Myšlienkou je zavedenie pomocnej premennej μ do riadkov, v ktorých majú vektory $\vec{p}$ a $\vec{b}$ zápornú zložku. Úloha kvadratického programovania je úlohou nelineárneho programovania, v ktorej sústava ohraničení je lineárna a účelová funkcia je kvadratická. Všeobecná formulácia úlohy KP je v tvare:

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^\top \cdot \boldsymbol{C} \cdot \vec{x} + \vec{p}^\top \cdot \vec{x} \longrightarrow \min \qquad \text{pre} \quad x \in D, \tag{5.21}$$

kde D je konvexná polyedrická množina v $\mathbb{R}^n$ v špeciálnom tvare $D_1 = \{\vec{x} : \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \leqq \vec{b},\ \vec{x} \geqq \vec{0}\}$. n je počet rozhodovacích premenných úlohy, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je vektor rozhodovacích premenných, $\boldsymbol{C}$ je symetrická pozitívne semidefinitná matica n-tého stupňa, $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ je vektor lineárnej formy a $\boldsymbol{A}$ je matica sústavy ohraničení rozmeru $m \times n$.

ALGORITMUS (Shetty-Lemke):

K0: **(Inicializačná fáza)**
Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera (pozri predchádzajúcu sekciu) upravíme o

parameter μ s príslušnými koeficientami:

$$\begin{aligned} -2\cdot \boldsymbol{C}\cdot \vec{x} - \boldsymbol{A}^\top \cdot \vec{u} + \vec{v} + \vec{q}\cdot\mu &= \vec{p}, \\ \boldsymbol{A}\cdot\vec{x} + \vec{y} + \vec{t}\cdot\mu &= \vec{b}, \\ \vec{x}^\top\cdot\vec{v} &= 0, \\ \vec{y}^\top\cdot\vec{u} &= 0, \\ \vec{x} &\geqq \vec{0}, \\ \vec{y} &\geqq \vec{0}, \\ \vec{u} &\geqq \vec{0}, \\ \vec{v} &\geq \vec{0}, \end{aligned}$$

kde $\vec{q}\in\mathbb{R}^n$ a $\vec{t}\in\mathbb{R}^m$ sú vektory definované nasledovne:

$$q_j = \begin{cases} -1 & \text{ak } p_j < 0, \\ 0 & \text{ak } p_j \geqq 0, \end{cases} \tag{5.22}$$

$$t_i = \begin{cases} -1 & \text{ak } b_i < 0, \\ 0 & \text{ak } b_i \geqq 0. \end{cases} \tag{5.23}$$

K1: **(Fáza riešenia)**
Riešeniu danej sústavy rovníc zodpovedá simplexová tabuľka 5.1:

Tabuľka 5.1: Simplexová tabuľka

$\vec{x}_B$	$\vec{x}$	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{y}$	μ	$\vec{p} \mid \vec{b}$
$\vec{v}$	$-2\cdot\boldsymbol{C}$	$-\boldsymbol{A}^\top$	$\boldsymbol{E}$	$\mathbf{0}$	$\vec{q}$	$\vec{p}$
$\vec{y}$	$\boldsymbol{A}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{E}$	$\vec{t}$	$\vec{b}$

a východiskové bázické riešenie $\vec{x}=\vec{0}$, $\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{v}=\vec{p}$, $\vec{y}=\vec{b}$, $\mu=0$. Potom overíme:

(1) Ak $\vec{v}\geqq\vec{0}$ a $\vec{y}\geqq\vec{0}$, tak vektor $\vec{x}=\vec{0}$ je optimálnym riešením úlohy.

(2) Inak realizujeme elementárnu zmenu bázy, pri ktorej sa vedúcim stĺpcom stáva stĺpec reprezentovaný premennou μ a vedúci riadok je určený minimálnym prvokom pravej strany. Pokračujeme pokiaľ premenná μ nevystúpi z bázy.

Nezápornosť vektorov $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{u}$ a $\vec{v}$ garantuje kritérium prípustnosti riešenia pri primárnom riešení simplexovej metódy.

K2: **(Pravidlo výpočtu)**
Ak z bázy vystúpila v $(k-1)$-ej iterácii premenná v_j (resp. x_j), alebo y_i (resp. u_i), tak v aktuálnej k-ej iterácii vstúpi do bázy premenná x_j (resp. v_j), alebo u_i (resp. y_i).

5.6 Riešené príklady

Úloha 5.1 Z nasledujúcej úlohy určte príslušné matice a vektory úlohy KP a stanovte Kuhnove-Tuckerove podmienky:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 24x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leqq 8, \\ 5x_1 - 2x_2 &\leq 9, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

Riešenie:
Zo zadania dostávame:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -6 \\ -24 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Zostavíme K-T podmienky:

$$\begin{aligned} -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 \\ -24 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \\ \vec{x} &\geqq \vec{0}, \\ \vec{v} &\geqq \vec{0}, \\ \vec{y} &\geqq \vec{0}, \\ \vec{u} &\geqq \vec{0}, \\ \vec{u}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{y}^{\text{opt}} + \vec{x}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{v}^{\text{opt}} &= 0. \end{aligned}$$

Po úprave dostávame:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 - u_1 - 5u_2 + v_1 &= -6, \\ 2x_1 - 4x_2 - u_1 + 2u_2 + v_2 &= -24, \\ x_1 + 2x_2 + y_1 &= 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + y_2 &= 9, \\ \vec{x},\ \vec{v},\ \vec{y},\ \vec{u} &\geqq \vec{0}, \\ \vec{u}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{y}^{\text{opt}} + \vec{x}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{v}^{\text{opt}} &= 0. \end{aligned}$$

$\surd$

Úloha 5.2 Pomocou Wolfeho algoritmu vyriešte nasledujúci problém:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 - 14x_2 &\longrightarrow \min,\\
3x_1 - 2x_2 &\leqq 5,\\
x_1 + 4x_2 &\leqq 6,\\
x_{1,2} &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Riešenie:
Ohraničenia sú v základnom tvare D_1, a tak zo zadania účelovej funkcie a dvoch ohraničení dostávame matice:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Zo získaných matíc zostavíme Kuhnove-Tuckerove podmienky v tvare:

$$\begin{aligned}
-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix},\\
\vec{x} &\geqq \vec{0},\\
\vec{v} &\geqq \vec{0},\\
\vec{y} &\geqq \vec{0},\\
\vec{u} &\geqq \vec{0},\\
\vec{u}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{y}^{\text{opt}} + \vec{x}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{v}^{\text{opt}} &= 0.
\end{aligned}$$

Zavedieme nový vektor $\vec{w}^{\top} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ a zostavíme úlohu LP v tvare:

$$\begin{aligned}
w_1 + w_2 &\longrightarrow \min,\\
2x_1 - 4x_2 + 3u_1 + u_2 - v_1 + d_{1,1}w_1 &= 3,\\
-4x_1 + 10x_2 - 2u_1 + 4u_2 - v_2 + d_{2,2}w_2 &= 14,\\
3x_1 - 2x_2 + y_1 &= 5,\\
x_1 + 4x_2 + y_2 &= 6,\\
\vec{x} &\geqq \vec{0},\\
\vec{v} &\geqq \vec{0},\\
\vec{y} &\geqq \vec{0},\\
\vec{u} &\geqq \vec{0},\\
\vec{w} &\geqq \vec{0},\\
\vec{u}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{y}^{\text{opt}} + \vec{x}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{v}^{\text{opt}} &= 0.
\end{aligned}$$

V 3. a 4. ohraničení premenné y_1 a y_2 môžu byť bázické a preto nie je potrebné riešiť pomocnú úlohu zavedením ďalších pomocných premenných. Keďže $x_1(\boldsymbol{B}) = x_2(\boldsymbol{B}) = 0$, tak v prvej a druhej rovnici je $d_{1,1} = d_{2,2} = 1$.

Tabuľka 5.2: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 1

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v_1	v_2	w_1	w_2
–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
y_1	5	3	−2	1	0	0	0	0	0	0	0
y_2	6	1	4	0	1	0	0	0	0	0	0
w_1	3	2	−4	0	0	3	1	−1	0	1	0
w_2	14	−4	10	0	0	−2	4	0	−1	0	1

Zapísaním všetkých rovníc do simplexovej tabuľky sa neporušili bázické stĺpce v spodnej časti tabuľky, a tak nie je potrebné ich nulovanie. Pridáme nový riadok pre $z_j - c_j$ ako súčet $w_1 + w_2$, pomocou ktorého určíme stĺpec zodpovedajúci premennej, ktorá v ďalšom kroku algoritmu bude vstupovať do bázy.

Tabuľka 5.3: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 2

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v_1	v_2	w_1	w_2
y_1	5	3	−2	1	0	0	0	0	0	0	0
y_2	6	1	4	0	1	0	0	0	0	0	0
w_1	3	2	−4	0	0	3	1	−1	0	1	0
w_2	14	−4	10	0	0	−2	4	0	−1	0	1
$z_j - c_j$	17	−2	6	0	0	1	5	−1	−1	1	1

Premenné y_1, y_2 sú bázické, a tak v ďalšom kroku nemôžu vstupovať do bázy premenné u_1, u_2. Jedinou možnosťou je stĺpec pre premennú x_2. Keďže $\min\left\{\frac{6}{4}, \frac{14}{10}\right\} = \frac{14}{10}$, pivotom je 10 pre riadok w_2.

Tabuľka 5.4: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 3

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v_1	v_2	w_1	w_2
y_1	7,8	2,2	0	1	0	$-0{,}4$	0,8	0	$-0{,}2$	0	0,2
y_2	0,4	2,6	0	0	1	0,8	$-1{,}6$	0	0,4	0	$-0{,}4$
w_1	8,6	0,4	0	0	0	2,2	2,6	-1	$-0{,}4$	1	0,4
x_2	1,4	$-0{,}4$	1	0	0	$-0{,}2$	0,4	0	$-0{,}1$	0	0,1
$z_j - c_j$	8,6	0,4	0	0	0	2,2	2,6	-1	$-0{,}4$	1	0,4

Premenné y_1, y_2 sú bázické, a tak v ďalšom kroku nemôžu vstupovať do bázy premenné u_1, u_2. Jedinou možnosťou je stĺpec pre premennú x_1. Keďže $\min\left\{\frac{7{,}8}{2{,}2}, \frac{0{,}4}{2{,}6}, \frac{8{,}6}{0{,}4}\right\} = \frac{0{,}4}{2{,}6}$, pivotom je 2,6 pre riadok y_2.

Tabuľka 5.5: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 4

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v_1	v_2	w_1	w_2
y_1	$\frac{97}{13}$	0	0	1	$-\frac{11}{13}$	$-\frac{14}{13}$	$\frac{28}{13}$	0	$-\frac{7}{13}$	0	$\frac{7}{13}$
x_1	$\frac{2}{13}$	1	0	0	$\frac{5}{13}$	$\frac{4}{13}$	$-\frac{8}{13}$	0	$\frac{2}{13}$	0	$-\frac{2}{13}$
w_1	$\frac{111}{13}$	0	0	0	$-\frac{2}{13}$	$\frac{27}{13}$	$\frac{37}{13}$	-1	$-\frac{6}{13}$	1	$\frac{6}{13}$
x_2	$\frac{19}{13}$	0	1	0	$\frac{2}{13}$	$-\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	0	$-\frac{1}{26}$	0	$\frac{1}{26}$
$z_j - c_j$	$\frac{111}{13}$	0	0	0	$-\frac{2}{13}$	$\frac{27}{13}$	$\frac{37}{13}$	-1	$-\frac{6}{13}$	1	$\frac{6}{13}$

Premenná y_1 je bázická, a tak v ďalšom kroku nemôže vstupovať do bázy premenná u_1. Jedinou možnosťou je stĺpec pre premennú u_2. Keďže $\min\left\{\frac{97/13}{28/13}, \frac{111/13}{37/13}, \frac{19/13}{2/13}\right\} = \frac{111/13}{37/13}$, pivotom je $\frac{37}{13}$ pre riadok w_1.

Tabuľka 5.6: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 5

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v_1	v_2	w_1	w_2
y_1	1	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–
x_1	2	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–
u_2	3	0	0	0	$-\frac{2}{37}$	$\frac{27}{37}$	1	$-\frac{13}{37}$	$-\frac{6}{37}$	$\frac{13}{37}$	$\frac{6}{37}$
x_2	1	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–

Premenné w_1 a w_2 sú už nebázické a tak algoritmus končí. Úloha má optimálne riešenie a to $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (2,1)^\top$, $\vec{y}^{\,\mathrm{opt}} = (1,0)^\top$, $\vec{u}^{\,\mathrm{opt}} = (0,3)^\top$, $\vec{v}^{\,\mathrm{opt}} = (0,0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = -19$, kde f^{opt} získame dosadením $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}}$ do účelovej funkcie f. $\checkmark$

Úloha 5.3 Pomocou Wolfeho algoritmu vyriešte nasledujúci problém:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 30x_1 + 12x_2 &\longrightarrow \min,\\
x_1 + x_2 &\leqq 8,\\
x_1 &\geqq 2,\\
x_2 &\geqq 3,\\
x_{1,2} &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Riešenie:
Ako prvý krok je potrebné upraviť ohraničenia na základný tvar D_1:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leqq 8,\\
-x_1 &\leqq -2,\\
-x_2 &\leqq -3.
\end{aligned}
$$

Následne zo zadania účelovej funkcie a upravených ohraničení dostávame matice:

$$
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -30 \\ 12 \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.
$$

Z nich zostavíme Kuhnove-Tuckerove podmienky v tvare sústavy maticových rovníc:

$$
\begin{aligned}
-2\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-30\\12\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}8\\-2\\-3\end{pmatrix},\\
\vec{u}^{\top\text{opt}}\cdot\vec{y}^{\text{opt}}+\vec{x}^{\top\text{opt}}\cdot\vec{v}^{\text{opt}} &= 0,\\
\vec{x} &\geqq \vec{0},\\
\vec{v} &\geqq \vec{0},\\
\vec{y} &\geqq \vec{0},\\
\vec{u} &\geqq \vec{0}.
\end{aligned}
$$

Zavedieme nový vektor $\vec{w}^\top=(w_1,w_2)\in\mathbb{R}^2$ s príslušnými koeficientami d_{11} a d_{22} a zostavíme úlohu LP:

$$
\begin{aligned}
w_1+w_2 &\longrightarrow \min,\\
2x_1+4x_2+u_1-u_2-v_1+d_{11}w_1 &= 30, && (5.24)\\
4x_1+2x_2+u_1-u_3-v_2+d_{22}w_2 &= -12, && (5.25)\\
x_1+x_2+y_1 &= 8, && (5.26)\\
x_1-y_2 &= 2, && (5.27)\\
x_2-y_3 &= 3, && (5.28)\\
\vec{u}^{\top\text{opt}}\cdot\vec{y}^{\text{opt}}+\vec{x}^{\top\text{opt}}\cdot\vec{v}^{\text{opt}} &= 0,\\
\vec{x} &\geqq \vec{0},\\
\vec{v} &\geqq \vec{0},\\
\vec{y} &\geqq \vec{0},\\
\vec{u} &\geqq \vec{0},\\
\vec{w} &\geqq \vec{0}.
\end{aligned}
$$

V ohraničeniach (5.26), (5.27) a (5.28) nemôžeme hneď určiť bázické premenné, a preto musíme riešiť pomocnú úlohu zavedením pomocných premenných p_1 a p_2 do ohraničení (5.27) a (5.28), keďže jednou bázickou premennou môže byť premenná y_1. Riešime pomocnú úlohu LP:

$$
\begin{aligned}
p_1+p_2 &\longrightarrow \min,\\
x_1+x_2+y_1 &= 8,\\
x_1-y_2+p_1 &= 2,\\
x_2-y_3+p_2 &= 3,\\
x_1,\,x_2,\,y_1,\,y_2,\,y_3,\,p_1,\,p_2 &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

Zapíšeme sústavu rovníc do simplexovej tabuľky 5.7.

Tabuľka 5.7: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 1

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1	p_2
$-$	0	0	0	0	0	0	1	1
y_1	8	1	1	1	0	0	0	0
p_1	2	1	0	0	-1	0	1	0
p_2	3	0	1	0	0	-1	0	1

Nakoľko sme dostali nenulové hodnoty v nultom riadku pre bázické premenné, tak je potrebné jeho vynulovanie v bázických stĺpcoch reprezentovaných premennými p_1 a p_2. Pri

Tabuľka 5.8: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 2

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1	p_2
$-$	-5	-1	-1	0	1	1	0	0
y_1	8	1	1	1	0	0	0	0
p_1	2	1	0	0	-1	0	1	0
p_2	3	0	1	0	0	-1	0	1

výbere stĺpca pre premennú x_1 je z jednoznačnosti pivotom 1 pre riadok p_1. Pri výbere

Tabuľka 5.9: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 3

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1	p_2
$-$	-3	0	-1	0	0	1	1	0
y_1	6	0	1	1	1	0	-1	0
x_1	2	1	0	0	-1	0	1	0
p_2	3	0	1	0	0	-1	0	1

stĺpca pre premennú x_2 je z jednoznačnosti pivotom 1 pre riadok p_2. Pomocná úloha LP

Tabuľka 5.10: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 4

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1	p_2
$-$	0	0	0	0	0	0	1	1
y_1	3	0	0	1	1	1	-1	-1
x_1	2	1	0	0	-1	0	1	0
x_2	3	0	1	0	0	-1	0	1

končí, lebo pomocné premenné p_1 a p_2 už nie sú bázické. Keďže $x_1(\boldsymbol{B}) = 2$ a $x_2(\boldsymbol{B}) = 3$, tak už poznáme $d_{11} = 1$ a $d_{22} = -1$ v rovniciach (5.24) a (5.25). Pokračujeme riešením pôvodnej úlohy Wolfeho algoritmom zapísaním rovníc do simplexovej tabuľky 5.11. Zapísaním

Tabuľka 5.11: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 5

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	w_1	w_2
$-$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
y_1	3	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_1	2	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	3	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
w_1	30	2	4	0	0	0	1	-1	0	-1	0	1	0
w_2	12	-4	-2	0	0	0	-1	0	1	0	1	0	1

všetkých rovníc do simplexovej tabuľky sa nám však porušili bázické stĺpce pre premenné x_1 a x_2 a preto je potrebné ich nulovanie. Pridáme nový riadok pre $z_j - c_j$ ako súčet $w_1 + w_2$, pomocou ktorého určíme stĺpec zodpovedajúci premennej, ktorá v ďalšom kroku algoritmu bude vstupovať do bázy.

Tabuľka 5.12: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 6

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	w_1	w_2
–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
y_1	3	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_1	2	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	3	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0
w_1	14	0	0	0	2	4	1	−1	0	−1	0	1	0
w_2	26	0	0	0	−4	−2	−1	0	1	0	1	0	1

Tabuľka 5.13: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 7

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	w_1	w_2
y_1	3	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_1	2	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	3	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0
w_1	14	0	0	0	2	4	1	−1	0	−1	0	1	0
w_2	26	0	0	0	−4	−2	−1	0	1	0	1	0	1
$z_j - c_j$	40	0	0	0	−2	2	0	−1	1	−1	1	1	1

Premenná x_2 je bázická a tak v ďalšom kroku nemôžu vstupovať do bázy premenná v_2. Do bázy môžu vstupovať premenné y_3 a u_3. Pri výbere stĺpca pre premennú u_3 je z jednoznačnosti pivotom 1 pre riadok premennej w_2.

Tabuľka 5.14: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 8

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	w_1	w_2
y_1	3	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_1	2	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	3	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
w_1	14	0	0	0	2	4	1	-1	0	-1	0	1	0
u_3	26	0	0	0	-4	-2	-1	0	1	0	1	0	1
$z_j - c_j$	14	0	0	0	2	4	1	-1	0	-1	0	1	0

Premenná y_1 je bázická a tak v ďalšom kroku nemôžu vstupovať do bázy premenná u_1, podobne kvôli premennej u_3 nemôže v ďalšom kroku vstupovať do bázy premenná y_3. Pri výbere stĺpca pre premenú y_2 je z jednoznačnosti minimálnych podielov pivotom 1 pre riadok premennej y_1. Premenná u_3 je bázická, a tak v ďalšom kroku nemôže vstupovať do

Tabuľka 5.15: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 9

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	w_1	w_2
y_2	3	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_1	5	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	3	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
w_1	8	0	0	-2	0	2	1	-1	0	-1	0	1	0
u_3	38	0	0	4	0	2	-1	0	1	0	1	0	1
$z_j - c_j$	8	0	0	-2	0	2	1	-1	0	-1	0	1	0

bázy premenná y_3. Pri výbere stĺpca pre premennú u_1 je pivotom 1 pre riadok premennej w_1. Premené w_1 a w_2 sú už nebázické a tak algoritmus končí. Úloha má optimálne riešenie, a to $\vec{x}^{\text{opt}} = (5,3)^\top$, $\vec{y}^{\text{opt}} = (0,3,0)^\top$, $\vec{u}^{\text{opt}} = (8,0,46)^\top$, $\vec{v}^{\text{opt}} = (0,0)^\top$ a $f^{\text{opt}} = -20$, kde hodnotu f^{opt} získame dosadením $\vec{x}^{\text{opt}}$ do účelovej funkcie f. $\surd$

Tabuľka 5.16: Simplexová tabuľka – Wolfeho algoritmus – krok 10

$\boldsymbol{B}$	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	w_1	w_2
y_2	3	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_1	5	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	3	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
u_1	8	0	0	-2	0	2	1	-1	0	-1	0	1	0
u_3	46	0	0	2	0	4	0	-1	1	-1	1	1	1

Úloha 5.4 Pomocou Shettyho-Lemkeho algoritmu vyriešte nasledujúcu úlohu:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 24x_2 &\longrightarrow \text{min}, \\ x_1 + x_2 &\leqq 8, \\ 5x_1 - 2x_2 &\leqq 9, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

Riešenie:
Ohraničenia sú v základnom tvare D_1, a tak zo zadania účelovej funkcie a dvoch ohraničení dostávame matice

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -6 \\ -24 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zo získaných matíc zostavíme Kuhnove-Tuckerove podmienky modifikované o premennú μ v tvare:

$$\begin{aligned} -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 \\ -24 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \\ \vec{u}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{y}^{\text{opt}} + \vec{x}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{v}^{\text{opt}} &= 0, \\ \vec{x} &\geqq \vec{0}, \\ \vec{v} &\geqq \vec{0}, \\ \vec{y} &\geqq \vec{0}, \\ \vec{u} &\geqq \vec{0}. \end{aligned}$$

Po roznásobení a úpravách dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned}
-2x_1 + 2x_2 - u_1 - 5u_2 + v_1 - \mu &= -6, \\
2x_1 - 4x_2 - u_1 + 2u_2 + v_2 - \mu &= -24, \\
x_1 + x_2 + y_1 &= 8, \\
5x_1 - 2x_2 + y_2 &= 9, \\
\vec{u}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{y}^{\text{opt}} + \vec{x}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{v}^{\text{opt}} &= 0, \\
\vec{x} &\geqq \vec{0}, \\
\vec{v} &\geqq \vec{0}, \\
\vec{y} &\geqq \vec{0}, \\
\vec{u} &\geqq \vec{0}.
\end{aligned}$$

Získanú sústavu rovníc prepíšeme do simplexovej tabuľky nasledovným spôsobom. V ďal-

Tabuľka 5.17: Simplexová tabuľka – Shettyho-Lemkeho algoritmus – krok 1

$\boldsymbol{B}$	x_1	x_2	u_1	u_2	v_1	v_2	y_1	y_2	μ	p/b
v_1	-2	2	-1	-5	1	0	0	0	-1	-6
v_2	2	-4	-1	2	0	1	0	0	-1	-24
y_1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	8
y_2	5	-2	0	0	0	0	0	1	0	9

šom kroku algoritmu bude premenná μ vstupovať do bázy a z minimálnosti pravých strán sa premenná v_2 stane nebázickou.

Tabuľka 5.18: Simplexová tabuľka – Shettyho-Lemkeho algoritmus – krok 2

$\boldsymbol{B}$	x_1	x_2	u_1	u_2	v_1	v_2	y_1	y_2	μ	p/b
v_1	-4	6	0	-7	1	-1	0	0	0	18
μ	-2	4	1	-2	0	-1	0	0	1	24
y_1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	8
y_2	5	-2	0	0	0	0	0	1	0	9

V predchádzajúcom kroku premenná v_2 vystúpila z bázy, a tak na základe pravidla výpočtu v ďalšom kroku do bázy bude vstupovať premenná x_2.

Tabuľka 5.19: Simplexová tabuľka – Shettyho-Lemkeho algoritmus – krok 3

$\boldsymbol{B}$	x_1	x_2	u_1	u_2	v_1	v_2	y_1	y_2	μ	p/b
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	0	3
μ	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	12
y_1	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	0	0	5
y_2	$\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	15

V predchádzajúcom kroku premenná v_1 vystúpila z bázy, a tak na základe pravidla výpočtu v ďalšom kroku do bázy bude vstupovať premenná x_1.

Tabuľka 5.20: Simplexová tabuľka – Shettyho-Lemkeho algoritmus – krok 4

$\boldsymbol{B}$	x_1	x_2	u_1	u_2	v_1	v_2	y_1	y_2	μ	p/b
x_2	0	1	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	0	5
μ	0	0	1	$\frac{11}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	10
x_1	1	0	0	$\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	0	0	3
y_2	0	0	0	$-\frac{14}{3}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{11}{5}$	1	0	5

V predchádzajúcom kroku premenná y_1 vystúpila z bázy, a tak na základe pravidla výpočtu v ďalšom kroku do bázy bude vstupovať premenná u_1.

Tabuľka 5.21: Simplexová tabuľka – Shettyho-Lemkeho algoritmus – krok 5

$\boldsymbol{B}$	x_1	x_2	u_1	u_2	v_1	v_2	y_1	y_2	μ	p/b
x_2	0	1	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	0	5
u_1	0	0	1	$\frac{11}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	10
x_1	1	0	0	$\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	0	0	3
y_2	0	0	0	$-\frac{14}{3}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{11}{5}$	1	0	5

V závere premenná w vystúpila z bázy a tým algoritmus končí. Úloha má optimálne riešenie, a to $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}} = (3;5)^\top$, $\vec{y}^{\,\mathrm{opt}} = (0;5)^\top$, $\vec{u}^{\,\mathrm{opt}} = (10;0)^\top$, $\vec{v}^{\,\mathrm{opt}} = (0;0)^\top$ a $f^{\mathrm{opt}} = -109$, kde hodnotu f^{opt} získame dosadením $\vec{x}^{\,\mathrm{opt}}$ do účelovej funkcie f. $\surd$

Úloha 5.5 Pomocou Shettyho-Lemkeho algoritmu vyriešte nasledujúcu úlohu:

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 30x_1 + 12x_2 &\longrightarrow \text{min},\\
x_1 + x_2 &\leqq 8,\\
x_1 &\geqq 2,\\
x_2 &\geqq 3,\\
x_{1,2} &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Riešenie:
Ako prvý krok je potrebné upraviť ohraničenia na základný tvar D_1:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leqq 8,\\
-x_1 &\leqq -2,\\
-x_2 &\leqq -3.
\end{aligned}$$

Následne zo zadania účelovej funkcie a upravených ohraničení dostávame matice:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -30 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zo získaných matíc zostavíme Kuhnove-Tuckerove podmienky modifikované o premennú μ v tvare:

$$\begin{aligned}
-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -30 \\ 12 \end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},\\
\vec{u}^{\top\mathrm{opt}} \cdot \vec{y}^{\,\mathrm{opt}} + \vec{x}^{\top\mathrm{opt}} \cdot \vec{v}^{\,\mathrm{opt}} &= 0,\\
\vec{x} &\geqq \vec{0},\\
\vec{v} &\geqq \vec{0},\\
\vec{y} &\geqq \vec{0},\\
\vec{u} &\geqq \vec{0}.
\end{aligned}$$

Po roznásobení a úpravách dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned}
-2x_1 - 4x_2 - u_1 + u_2 + v_1 - \mu &= -30,\\
-4x_1 - 2x_2 - u_1 + u_3 + v_2 &= 12,\\
x_1 + x_2 + y_1 &= 8,\\
-x_1 + y_2 - \mu &= -2,\\
-x_2 + y_3 - \mu &= -3,\\
\vec{u}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{y}^{\text{opt}} + \vec{x}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{v}^{\text{opt}} &= 0,\\
\vec{x} &\geqq 0,\\
\vec{v} &\geqq 0,\\
\vec{y} &\geqq 0,\\
\vec{u} &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Získanú sústavu rovníc prepíšeme do simplexovej tabuľky nasledovným spôsobom:

Tabuľka 5.22: Simplexová tabuľka – Shettyho-Lemkeho algoritmus – krok 1

$\boldsymbol{B}$	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	y_1	y_2	y_3	μ	p/b
v_1	-2	-4	-1	1	0	1	0	0	0	0	-1	-30
v_2	-4	-2	-1	0	1	0	1	0	0	0	0	12
y_1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	8
y_2	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-2
y_3	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-3

V ďalšom kroku algoritmu bude premenná μ vstupovať do bázy a z minimálnosti pravých strán sa premenná v_1 stane nebázickou.

Tabuľka 5.23: Simplexová tabuľka – Shettyho-Lemkeho algoritmus – krok 2

$\boldsymbol{B}$	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	y_1	y_2	y_3	μ	p/b
μ	2	4	1	-1	0	-1	0	0	0	0	1	30
v_2	-4	-2	-1	0	1	0	1	0	0	0	0	12
y_1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	8
y_2	1	4	1	-1	0	-1	0	0	1	0	0	28
y_3	2	3	1	-1	0	-1	0	0	0	1	0	27

V predchádzajúcom kroku premenná v_1 vystúpila z bázy, a tak na základe pravidla výpočtu v ďalšom kroku bude do bázy vstupovať premenná x_1.

Tabuľka 5.24: Simplexová tabuľka – Shettyho-Lemkeho algoritmus – krok 3

$\boldsymbol{B}$	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	y_1	y_2	y_3	μ	p/b
μ	0	2	1	-1	0	-1	0	-2	0	0	1	14
v_2	0	2	-1	0	1	0	1	4	0	0	0	44
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	8
y_2	0	3	1	-1	0	-1	0	-1	1	0	0	20
y_3	0	1	1	-1	0	-1	0	-2	0	1	0	11

V predchádzajúcom kroku premenná y_1 vystúpila z bázy, a tak na základe pravidla výpočtu v ďalšom kroku do bázy bude vstupovať premenná u_1.

Tabuľka 5.25: Simplexová tabuľka – Shettyho-Lemkeho algoritmus – krok 4

$\boldsymbol{B}$	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	y_1	y_2	y_3	μ	p/b
μ	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	3
v_2	0	3	0	-1	1	-1	1	2	0	1	0	55
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	8
y_2	0	2	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	9
u_1	0	1	1	-1	0	-1	0	-2	0	1	0	11

V predchádzajúcom kroku premenná y_3 vystúpila z bázy, a tak na základe pravidla výpočtu v ďalšom kroku do bázy bude vstupovať premenná u_3.

Tabuľka 5.26: Simplexová tabuľka – Shettyho-Lemkeho algoritmus – krok 5

$\boldsymbol{B}$	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	y_1	y_2	y_3	μ	p/b
μ	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	3
u_3	0	3	0	-1	1	-1	1	2	0	1	0	55
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	8
y_2	0	2	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	9
u_1	0	1	1	-1	0	-1	0	-2	0	1	0	11

V predchádzajúcom kroku premenná v_2 vystúpila z bázy, a tak na základe pravidla výpočtu v ďalšom kroku do bázy bude vstupovať premenná x_2.

Tabuľka 5.27: Simplexová tabuľka – Shettyho-Lemkeho algoritmus – krok 6

$\boldsymbol{B}$	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	y_1	y_2	y_3	μ	p/b
x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	3
u_3	0	0	0	-1	1	-1	1	2	0	4	-3	46
x_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	5
y_2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	-2	3
u_1	0	0	1	-1	0	-1	0	-2	0	2	-1	8

V závere premenná w vystúpila z bázy a tým algoritmus končí. Úloha má optimálne riešenie, a to $\vec{x}^{\text{opt}} = (5;3)^\top$, $\vec{y}^{\text{opt}} = (0;3;0)^\top$, $\vec{u}^{\text{opt}} = (8;0;46)^\top$, $\vec{v}^{\text{opt}} = (0;0)^\top$ a $f^{\text{opt}} = -20$, kde hodnotu f^{opt} získame dosadením $\vec{x}^{\text{opt}}$ do účelovej funkcie f. $\surd$

5.7 Neriešené úlohy

5.1 Zistite, ktoré z nasledujúcich matíc sú pozitívne definitné:

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2 Zistite, ktoré z nasledujúcich matíc sú pozitívne semidefinitné:

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_4 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3 V nasledujúcich úlohách určte príslušné matice a vektory úlohy KP:

a)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 - 14x_2 &\longrightarrow \text{min}, \\ 3x_1 - 2x_2 &\leqq 5, \\ x_1 + 4x_2 &\leqq 6, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + x_2 &\longrightarrow \text{max}, \\ x_1 + x_2 &\leqq 5, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 22x_1 - 16x_2 &\longrightarrow \text{min}, \\ x_1 + x_2 &\leqq 10, \\ x_1 &\geqq 1, \\ x_2 &\geqq 4, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.4 V nasledujúcich úlohách napíšte Kuhnove-Tuckerove podmienky:

a)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 30x_1 + 12x_2 &\longrightarrow \text{min},\\ x_1 + x_2 &\leqq 8,\\ x_1 &\geqq 2,\\ x_2 &\geqq 3,\\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 5x_2 &\longrightarrow \text{min},\\ x_1 + x_2 &\leqq 4,\\ 2x_1 - x_2 &\geqq 3,\\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 5x_1 - 4x_2 &\longrightarrow \text{min},\\ x_1 + x_2 &\leqq 8,\\ x_1 &\geqq 1,\\ x_2 &\leqq 3,\\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.5 Riešte zadanú úlohu Wolfeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 - 8x_2 &\longrightarrow \text{min},\\ x_1 + 2x_2 &\leqq 4,\\ x_1 + x_2 &\leqq 3,\\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.6 Riešte zadanú úlohu Wolfeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 10x_1 - 12x_2 &\longrightarrow \text{min},\\ x_1 + x_2 &\leqq 6,\\ x_1 &\geqq 2,\\ x_2 &\leqq 4,\\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.7 Riešte zadanú úlohu Wolfeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 5x_1 - 4x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leqq 8, \\ x_1 &\geqq 1, \\ x_2 &\leqq 3, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.8 Riešte zadanú úlohu Wolfeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 5x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leqq 4, \\ 2x_1 - x_2 &\geqq 3, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.9 Riešte zadanú úlohu Wolfeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 22x_1 - 16x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leqq 10, \\ x_1 &\geqq 1, \\ x_2 &\geqq 4, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.10 Riešte zadanú úlohu Wolfeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 24x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leqq 8, \\ 5x_1 - 2x_2 &\leqq 9, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.11 Riešte zadanú úlohu Wolfeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + 2x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4, \\ x_{1,2,3} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.12 Riešte zadanú úlohu Wolfeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 + 5x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leqq 4, \\ 2x_1 - x_2 &\geqq 3, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.13 Riešte zadanú úlohu Wolfeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 30x_1 + 12x_2 &\longrightarrow \text{min},\\ x_1 + x_2 &\leqq 8,\\ x_1 &\geqq 2,\\ x_2 &\geqq 3,\\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.14 Riešte zadanú úlohu Wolfeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2 &\longrightarrow \text{min},\\ x_1 + x_2 &= 1,\\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.15 Riešte zadanú úlohu Shetty-Lemkeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 + 5x_2 &\longrightarrow \text{min},\\ x_1 + x_2 &\leqq 4,\\ 2x_1 - x_2 &\geqq 3,\\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.16 Riešte zadanú úlohu Shetty-Lemkeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 5x_2 &\longrightarrow \text{min},\\ x_1 + x_2 &\leqq 4,\\ 2x_1 - x_2 &\geqq 3,\\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.17 Riešte zadanú úlohu Shetty-Lemkeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 - 8x_2 &\longrightarrow \text{min},\\ x_1 + 2x_2 &\leqq 4,\\ x_1 + x_2 &\leqq 3,\\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.18 Riešte zadanú úlohu Shetty-Lemkeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = -x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + x_2 &\longrightarrow \text{max},\\ x_1 + x_2 &\leqq 5,\\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.19 Riešte zadanú úlohu Shetty-Lemkeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 22x_1 - 16x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leqq 10, \\ x_1 &\geqq 1, \\ x_2 &\geqq 4, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.20 Riešte zadanú úlohu Shetty-Lemkeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 - 14x_2 &\longrightarrow \min, \\ 3x_1 - 2x_2 &\leqq 5, \\ x_1 + 4x_2 &\leqq 6, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.21 Riešte zadanú úlohu Shetty-Lemkeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leqq 5, \\ x_1 &\leqq 3, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.22 Riešte zadanú úlohu Shetty-Lemkeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &= 1, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.23 Riešte zadanú úlohu Shetty-Lemkeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 0,5x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leqq 3, \\ -2x_1 - 3x_2 &\leqq -6, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.24 Riešte zadanú úlohu Shetty-Lemkeho algoritmom:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2 + 3x_1 - 4x_2 &\longrightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leqq 5, \\ x_1 - x_2 &= 0, \\ x_{1,2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

5.25 Riešte zadanú úlohu Shetty-Lemkeho algoritmom:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 3x_2 &\longrightarrow \min, \\
x_1 + 2x_2 &\leqq 8, \\
2x_1 + x_2 &\leqq 10, \\
x_2 &\leqq 3, \\
x_{1,2} &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

5.8 Výsledky neriešené úlohy

5.1 Matice $\boldsymbol{C}_2$, $\boldsymbol{C}_4$

5.2 Matice $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_4$

5.3 a)

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -22 \\ -16 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

5.4 a)

$$\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + u_1 - u_2 - v_1 &= 30, \\
4x_1 + 2x_2 + u_1 - u_3 - v_2 &= -12, \\
x_1 + x_2 + y_1 &= 8, \\
x_1 - y_2 &= 2, \\
x_2 - y_3 &= 3, \\
\vec{u}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{y}^{\text{opt}} + \vec{x}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{v}^{\text{opt}} &= 0, \\
\vec{x} \geqq \vec{0},\ \vec{v} \geqq \vec{0},\ \vec{y} \geqq \vec{0},\ \vec{u} &\geqq \vec{0}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
-2x_1 + 6x_2 - u_1 + 2u_2 + v_1 &= -4, \\
6x_1 - 6x_2 - u_1 - u_2 + v_2 &= 5, \\
x_1 + x_2 + y_1 &= 4, \\
-2x_1 + x_2 + y_2 &= -3, \\
\vec{u}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{y}^{\text{opt}} + \vec{x}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{v}^{\text{opt}} &= 0, \\
\vec{x} \geqq \vec{0},\ \vec{v} \geqq \vec{0},\ \vec{y} \geqq \vec{0},\ \vec{u} &\geqq \vec{0}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
2x_1 - 2x_2 + u_1 - u_2 - v_1 &= 5,\\
-2x_1 + 6x_2 + u_1 + u_3 - v_2 &= 4,\\
x_1 + x_2 + y_1 &= 8,\\
-x_1 + y_2 &= -1,\\
x_2 + y_3 &= 3,\\
\vec{u}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{y}^{\text{opt}} + \vec{x}^{\top\text{opt}} \cdot \vec{v}^{\text{opt}} &= 0,\\
\vec{x} \geqq \vec{0},\ \vec{v} \geqq \vec{0},\ \vec{y} \geqq \vec{0},\ \vec{u} &\geqq \vec{0}.
\end{aligned}$$

5.5 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{24}{17}; \frac{22}{17})^\top$ a $f^{\text{opt}} = -\frac{76}{17}$.

5.6 $\vec{x}^{\text{opt}} = (2; 4)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 8$.

5.7 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{19}{4}; \frac{9}{4})^\top$ a $f^{\text{opt}} = -\frac{131}{8}$.

5.8 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{57}{20}; \frac{23}{20})^\top$ a $f^{\text{opt}} = -\frac{529}{40}$.

5.9 $\vec{x}^{\text{opt}} = (3; 5)^\top$ a $f^{\text{opt}} = -73$.

5.10 $\vec{x}^{\text{opt}} = (3; 5)^\top$ a $f^{\text{opt}} = -109$.

5.11 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{5}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{4})^\top$ a $f^{\text{opt}} = 17$.

5.12 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{3}{2}; 0)^\top$ a $f^{\text{opt}} = -\frac{3}{2}$.

5.13 $\vec{x}^{\text{opt}} = (5; 3)^\top$ a $f^{\text{opt}} = -20$.

5.14 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})^\top$ a $f^{\text{opt}} = \frac{15}{8}$.

5.15 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{3}{2}; 0)^\top$ a $f^{\text{opt}} = -\frac{3}{2}$.

5.16 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{57}{20}; \frac{23}{20})^\top$ a $f^{\text{opt}} = -\frac{529}{40}$.

5.17 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{24}{17}; \frac{22}{17})^\top$ a $f^{\text{opt}} = -\frac{76}{17}$.

5.18 $\vec{x}^{\text{opt}} = (2; 0)^\top$ a $f^{\text{opt}} = 4$.

5.19 $\vec{x}^{\text{opt}} = (3; 5)^\top$ a $f^{\text{opt}} = -73$.

5.20 $\vec{x}^{\text{opt}} = (2; 1)^\top$ a $f^{\text{opt}} = -19$.

5.21 $\vec{x}^{\text{opt}} = (3; 2)^\top$ a $f^{\text{opt}} = -31$.

5.22 $\vec{x}^{\text{opt}} = (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})^\top$ a $f^{\text{opt}} = \frac{15}{8}$.

Register

Literatúra

[1] Š. Berežný – Z. Hajduová – D. Kravecová: *Úvod do lineárneho programovania*, Humanitas University – Sosnowiec, Poland (2013), ISBN: 978-83-61991-74-8

[2] Š. Berežný – D. Kravecová: *Lineárne programovanie*, FEI TU Košice, Košice (2012), ISBN: 978-80-553-0910-1

[3] Robert G. Bland: *New finite pivoting rules for the simplex method*, Mathematics of Operations Research 2 (2), 103–107, (May 1977), doi:10.1287/moor.2.2.103, JSTOR 3689647, MR 459599.

[4] I. Brezina – Z. Ivaničová – J. Pekár, *Operačná analýza*, Iura Edition, Bratislava (1999), 243 s, ISBN 978-80-8078-176-7

[5] J. Dudorkin, *Operační výskum*, Fakulta elektrotechnická – Vydavatelství ČVUT, Praha (2002), 296 s, Štvrté vydanie, ISBN 80-01-02469-5

[6] C. W. Carrol: *The created response surface technique for optimizing nonlinear restrained system*, Operations Research Vol. 9 (1961) p. 169

[7] K. Cechlárová – G. Semanišin, *Lineárna optimalizácia*, UPJŠ, Košice (1999), 98 s, ISBN 80-7079-385-4

[8] A. V. Fiacco – G. P. McCormick: *The sequential unconstrained minimization technique for linear programming, a primal-dual method*, Management Science, 10 (2) (1964), p. 360-366

[9] S. I. Gass, *Lineárne programovanie*, Alfa, Bratislava (1972), 400 s

[10] J. Jablonský, *Operační výskum – kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*, Professional publishing, Praha (2007), 323 s, Tretie vydanie, ISBN 978-80-86946-44-3

[11] Carlton E. Lemke: *The dual method of solving the linear programming problem*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 1, 1954, pp. 36-47

[12] J. Plesník – J. Dupačová – M. Vlach, *Lineárne programovanie*, Alfa, Bratislava (1990), 320 s, ISBN 80-05-00679-9

[13] D. Rosinová – M. Dúbravská, *Optimalizácia*, Slovenská technická univerzita, Bratislava (2007), 195 s, ISBN 978-80-227-2795-2

[14] J. Strádalová, *Užití některých matematických metod v ekonomické praxi*, Nakladatelství Univerzity Karlovy – Karolinum, Praha (1999), 261 s, ISBN 80-7184-800-X

[15] J. Štecha, *Optimální rozhodování a řízení*, Fakulta elektrotechnická – Vydavatelství ČVUT, Praha (2002), 242 s, Prvé vydanie, ISBN 80-01-02083-5

Názov: Lineárne a kvadratické programovanie

Autori: © RNDr. Štefan BEREŽNÝ, PhD., 2016
© RNDr. Michal STAŠ, PhD., 2016

Recenzovali: doc. RNDr. Jozef Bucko, PhD.
Mgr. Ján Buša, Ph.D.

Vydavateľ: Technická univerzita v Košiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Miesto vydania: Košice
Rok vydania: 2016
Vydanie: Prvé
Rozsah: 130 strán
Náklad: 50 ks

ISBN: 978-80-553-2625-2