Technická univerzita
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Košice

Lineárne programovanie

Vysokoškolská učebnica

Košice 2012

Technická univerzita v Košiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra matematiky a teoretickej informatiky

Lineárne programovanie

Vysokoškolská učebnica

Štefan Berežný
a
Daniela Kravecová

Košice 2012

Lineárne programovanie

Prvé vydanie

Autori: © **RNDr. Štefan BEREŽNÝ, PhD., 2012**
© **RNDr. Daniela KRAVECOVÁ, PhD., 2012**

Recenzovali: prof. RNDr. Jozef DŽURINA, CSc.
prof. RNDr. Michal TKÁČ, CSc.

Vydavateľ: Katedra matematiky a teoretickej informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

ISBN: 978-80-553-0910-1

Za odbornú a jazykovú stránku tejto vysokoškolskej učebnice zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

Obsah

Predhovor

Vo všeobecnosti možno povedať, že takmer každá činnosť človeka je ovplyvnená snahou čo najviac ju optimalizovať. Snažíme sa cestovať čo najkratšou cestou, kúpiť čo najlepší výrobok za čo najnižšiu cenu, a pod. Zjednodušene povedané, pri svojej činnosti sa snažíme čosi minimalizovať, resp. maximalizovať.

Podobne sa to deje vo firmách a podnikoch. Súčasťou každodenného rozhodovania manažmentu podnikov je aj snaha o dosiahnutie maximálnej účinnosti či zisku, minimalizácia vzniknutého odpadu, prestojov, čo najefektívnejšie využitie surovinových zdrojov, pracovného času a pod. Teda v podstate tu ide o určenie extrému jednej alebo viacerých funkcií. Pri tom všetkom sa však musia rešpektovať limitované zdroje, požiadavky dodávateľov a odberateľov a rôzne iné obmedzujúce či ohraničujúce faktory, ktoré môžu byť vyvolané situáciou na trhu, ľudskými zdrojmi, požiadavkami na bezpečnosť výroby, ochranu životného prostredia a mnohé ďalšie faktory. Ide tu o optimalizáciu viac alebo menej zložitých systémov, na ktoré vplývajú mnohé viac alebo menej predvídateľné faktory. Medzi obľúbené a v praxi aj najčastejšie používané metódy riešenia optimalizácií zložitých procesov sú metódy matematického programovania.

Predkladaná učebnica je zameraná na optimalizáciu pomocou lineárneho programovania a je určená predovšetkým študentom Fakulty elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach. Obsahuje niektoré základné teoretické poznatky – hlavne definície základných pojmov a vybrané tvrdenia. Tvrdenia sú uvedené bez dôkazov, tie je možné nájsť v literatúre uvedenej na konci učebnice. Teoretické poznatky sú aplikované na vzorové príklady.

Cieľom tejto učebnice nie je vyčerpávajúcim spôsobom obsiahnuť problematiku lineárneho programovania. Jej prioritným cieľom je prístupným spôsobom ponúknuť základné poznatky a ich aplikácie študentom, prípadne aj iným záujemcom.

Na tomto mieste vyjadrujeme vďaku prof. RNDr. Jozefovi Džurinovi, CSc a prof. RNDr. Michalovi Tkáčovi, CSc. za podrobné prečítanie a recenziu tejto učebnice.

Zoznam skratiek a symbolov

ÚMP – úloha matematického programovania

ÚLP – úloha lineárneho programovania

$\boldsymbol{a_i}$ – i-tý riadok matice $\boldsymbol{A}$

A_j – j-tý stĺpec matice $\boldsymbol{A}$

F – množina prípustných riešení úlohy lineárneho programovania

$\boldsymbol{x}^{opt}$ – optimálne riešenie úlohy lineárneho programovania

$f^{opt}(\boldsymbol{x})$ – hodnota účelovej funkcie v optimálnom riešení

$conv(M)$ – konvexný obal množiny M

$ex(M)$ – množina krajných bodov množiny M

$B(i)$ – index toho stĺpca matice $\boldsymbol{A}$, ktorý tvorí i-tú zložku bázy $\mathcal{B}$

BR – bázické riešenie

P – primárna úloha lineárneho programovania

D – duálna úloha lineárneho programovania

F_P – množina prípustných riešení primárnej úlohy lineárneho programovania

F_D – množina prípustných riešení duálnej úlohy lineárneho programovania

ÚCLP – úloha celočíselného lineárneho programovania

$\boldsymbol{x}_r^{opt}$ – optimálne riešenie relaxácie úlohy celočíselného lineárneho programovania

$\overline{BC}$ – úsečka BC

$\{a\}$ – zlomková časť čísla a

$\lfloor a \rfloor$ – dolná celá časť čísla a

DP – dopravný problém

FD – fiktívny dodávateľ

FO – fiktívny odberateľ

Zoznam obrázkov

Kapitola 1

Úvod do lineárneho programovania

1.1 Matematické programovanie

Medzi často používané metódy na optimalizáciu výrobných a iných rozhodovacích procesov patria metódy matematického programovania. Umožňujú transformovať reálne procesy do matematických modelov a tie následne riešiť pomocou matematického aparátu. Takže reálny proces sa transformuje na *úlohu matematického programovania* - ÚMP . Súčasťou úlohy matematického programovania sú:

1. Ciele - ich stanovenie je závislé od samotného procesu. Sú to optimalizačné (maximalizačné alebo minimalizačné) kritéria. Môžu to byť napríklad:

   - maximalizácia zisku,
   - maximalizácia účinnosti zariadenia,
   - maximalizácia produktivity,
   - maximalizácia množstva prepravovaného materiálu,
   - minimalizácia výrobných nákladov,
   - minimalizácia odpadu,
   - minimalizácia prejdených kilometrov, a iné.

2. Ohraničujúce podmienky - vyjadrujú podmienky a obmedzenia, za ktorých má daný proces fungovať. Môže ísť o jednu, ale aj o veľké množstvo ohraničujúcich podmienok. Ako príklady môžu byť uvedené:

   - materiálové zdroje,
   - kapacity výrobných zariadení,
   - kapacity pracovných síl,
   - obmedzená životnosť zariadení,
   - finančné zdroje,

- odbytové možnosti,
- kapacity dodávateľov,
- prepravné kapacity,
- požiadavky odberateľov,
- kapacity skladov, a iné.

Ciele a ohraničujúce podmienky sa dajú vyjadriť pomocou matematického aparátu, čo nazývame *matematickým modelom* .

Ciele sa vyjadrujú pomocou jednej alebo viacerých funkcií, ktoré nazývame *účelovými funkciami.* Podľa toho rozlišujeme matematické modely s jednou účelovou funkciou alebo modely s viacerými účelovými funkciami. Tieto funkcie môžu byť lineárnymi alebo nelineárnymi funkciami viacerých premenných - tzv. *rozhodovacích premenných.* Úlohou je nájsť extremálne hodnoty týchto rozhodovacích premenných vzhľadom na optimalizačné kritéria.

Ohraničujúce podmienky sa vyjadrujú rovnicami, nerovnicami alebo ich sústavami. A tiež môže ísť o lineárne alebo nelineárne rovnice a nerovnice.

Schématicky možno ÚMP, ktorá obsahuje s účelových funkcií, n rozhodovacích premenných a m ohraničujúcich podmienok zapísať takto:

sledované ciele (účelové funkcie)	$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min(\max)$ $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min(\max)$ $\ldots$ $f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min(\max)$
ohraničujúce podmienky	$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq\geqq= 0$ $g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq\geqq= 0$ $\ldots$ $g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq\geqq= 0$

Zapísanie úlohy matematického programovania pomocou matematického aparátu ilustruje nasledujúci príklad.

Príklad 1.1.1 *Malý podnikateľ vo svojej dielničke vyrába dva typy výrobkov: výrobok A, výrobok B. Zamestnáva dvoch zamestnancov, ktorých produktivita je približne rovnaká. Výroba jedného výrobku A trvá 4 hodiny, jeho záverečne opracovanie trvá 2 hodiny, pri výrobku B je to 9 hodín na výrobu a 1 hodina na záverečné opracovanie. Každý kus výrobku zaberá na sklade 1* m^3 *a kapacita skladu je 12* m^3*. Na výrobu výrobkov má podnikateľ maximálne*

90 hodín, na záverečné opracovanie maximálne 20 hodín. Zisk z predaja jedného výrobku A je 65 eur, výrobku B je 48 eur. Koľko kusov, a ktorých výrobkov má podnikateľ vyrobiť, aby bol zisk maximálny?

Riešenie: Kvôli prehľadnosti zapíšeme známe údaje do nasledujúcej tabuľky:

	Výroba (h)	Záverečné opracovanie (h)	Sklad (m^3)	Zisk (€)
Výrobok A (x_1)	4	2	1	65
Výrobok B (x_2)	9	1	1	48
Kapacita	90	20	12	---

Tento výrobný proces možno vyjadriť nasledujúcim matematickým modelom

$$f(x_1, x_2) = 65x_1 + 48x_2 \to \max$$

$$4x_1 + 9x_2 \leqq 90$$

$$2x_1 + x_2 \leqq 20$$

$$x_1 + x_2 \leqq 12$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

Ak sú účelové funkcie vyjadrené len lineárnymi funkciami a ohraničujúce podmienky tvoria sústavu lineárnych rovníc alebo nerovníc (ako to ilustruje predchádzajúci príklad), tak hovoríme o *lineárnom programovaní* a takúto úlohu nazývane *úlohou lineárneho programovania* – ÚLP.
V ďalšom sa budeme zaoberať len úlohami lineárneho programovania s jednou účelovou funkciou.

Kapitola 2

Úloha lineárneho programovania

2.1 Základné pojmy

Definícia 2.1.1 *Funkciu n-premenných $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ nazývame lineárnou funkciou, ak spĺňa nasledujúce podmienky:*

(1) $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ aditívnosť,

(2) $f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$ proporcionalita,

kde $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dôsledok 2.1.1 *Všetky lineárne funkcie n reálnych premenných sú v tvare*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} (c_j \cdot x_j), \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad c_j \in \mathbb{R}.$$

Definícia 2.1.2 *Všeobecnou úlohou lineárneho programovania nazývame úlohu extremalizácie (minimalizovania alebo maximalizovania) lineárnej (tzv. účelovej) funkcie viacerých premenných*

$$f(\boldsymbol{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n \to \min\ (\max), \tag{2.1}$$

za podmienok, z ktorých každá je v tvare:

$$\begin{aligned}
a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n &\leqq b_i, \quad \textit{pre } i = 1, \ldots, k-1 \\
a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n &\geqq b_i, \quad \textit{pre } i = k, \ldots, l-1 \\
a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n &= b_i, \quad \textit{pre } i = l, \ldots, m \\
x_i &\leqq 0 \quad \forall i \in N_1 \\
x_i &\geqq 0 \quad \forall i \in N_2 \\
x_i &\ \textit{je neohraničené} \quad \forall i \in N_3\ , \textit{ kde} \\
1 \leqq k &\leqq l \leqq m, \\
N_1 \cup N_2 \cup N_3 &= \{1, 2, \ldots, n\}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *nazývame rozhodovacie premenné,*
$c_1, c_2, \ldots, c_n$ – *nazývame koeficienty účelovej funkcie,*
$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ - *nazývame koeficienty ohraničení,*
$b_1, b_2, \ldots, b_m$ – *nazývame koeficienty pravých strán ohraničení.*

Použitím Dôsledku 2.1.1 môžeme úlohu lineárneho programovania zapísať takto:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n}(c_j \cdot x_j) \to \min\ (\max),$$

za podmienok:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) \leqq b_i, \quad \text{pre } i = 1, \ldots, k-1$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) \geqq b_i, \quad \text{pre } i = k, \ldots, l-1$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) = b_i, \quad \text{pre } i = l, \ldots, m$$

$$x_j \leqq 0 \quad \forall j \in N_1$$

$$x_j \geqq 0 \quad \forall j \in N_2$$

$$x_j \text{ je neohraničené} \quad \forall j \in N_3.$$

Zjednodušene môžeme úlohu lineárneho programovania zapísať takýmto symbolickým zápisom:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n}(c_j \cdot x_j) \to \min\ (\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) \left\{ \begin{array}{c} \leqq \\ = \\ \geqq \end{array} \right\} b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \leqq\geqq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Vektorový zápis:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} \to \min\ (\max)$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{x}) \left\{ \begin{array}{c} \leqq \\ = \\ \geqq \end{array} \right\} \boldsymbol{b}$$

$$x_j \leqq\geqq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n \text{ , kde}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$
$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$
$\boldsymbol{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$
$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^\top$.

Maticovým zápisom možno ÚLP zapísať takto:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} \to \min \ (\max)$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \left\{ \begin{array}{c} \leqq \\ = \\ \geqq \end{array} \right\} \boldsymbol{b}$$

$$x_j \leqq\geqq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

kde matica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{m,n}$, teda je maticou s m riadkami a n stĺpcami:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Označenie: i-tý riadok matice $\boldsymbol{A}$ budeme označovať $\boldsymbol{a_i}$ a j-tý stĺpec matice budeme označovať A_j.

Definícia 2.1.3

- *Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ vyhovujúci ohraničeniam (2.2) nazývame prípustným riešením danej úlohy lineárneho programovania.*
- *Množinu všetkých prípustných riešení danej ÚLP nazývame prípustnou množinou a budeme ju označovať F.*
- *Úlohu lineárneho programovania nazývame prípustnou, ak má aspoň jedno prípustné riešenie. V opačnom prípade ju nazývame neprípustnou.*
- *Prípustné riešenie $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, v ktorom účelová funkcia (2.1) danej ÚLP nadobúda požadovanú extremálnu (minimálnu alebo maximálnu) hodnotu nazývame optimálnym riešením a označujeme $\boldsymbol{x}^{opt}$. Túto extremálnu hodnotu účelovej funkcie budeme označovať $f^{opt}(\boldsymbol{x})$.*
- *Prípustnú úlohu lineárneho programovania nazývame neohraničenou, ak hodnoty prípustného riešenia môžu byť ľubovoľne veľké (v kladnom alobo zápornom smere). V opačnom prípade prípustnú ÚLP nazývame ohraničenou.*

2.2 Vybrané typy úloh lineárneho programovania

Úlohy lineárneho programovania v praxi ponúkajú veľké množstvo rôznych aplikácii. Nasledujúce konštrukcie popisujú len niektoré z nich a príklady, ktoré sú k nim uvedené ilustrujú len veľmi zjednodušené procesy. Reálne sa v praxi stretávame s procesmi, ktoré obsahujú oveľa viac rozhodovacích premenných (desiatky ba až stovky) a tiež množstvo ohraničujúcich podmienok je zvyčajne oveľa vyššie.

2.2.1 Úloha o plánovaní výroby

Výrobca vyrába niekoľko druhov výrobkov. Má k dispozícii určité množstvo rozličných výrobných prostriedkov: suroviny, pracovný čas, mzdové prostriedky, výrobné zariadenia, ... Výrobca vie, aké množstvo $i-$tého prostriedku potrebuje na výrobu jedného $j-$tého výrobku. Vie tiež, aký je zisk z predaja jednotkového množstva jednotlivých výrobkov. Úlohou je naplánovať výrobu tak, aby výrobca pri daných kapacitách prostriedkov vyrábal také množstvá tovarov, aby bol zisk maximálny.

Všeobecná matematická formulácia danej úlohy sa dá zapísať takto:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n}(c_j \cdot x_j) \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) \leqq b_i \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geqq 0 \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

kde

n - počet druhov výrobkov,

m - počet faktorov (obmedzení), ktoré limitujú výrobu,

x_j - množstvo vyrobených jednotiek j-tého výrobku,

c_j - cena/zisk z jednotkového množstva j-tého výrobku,

a_{ij} - množstvo jednotiek i-tého prostriedku spotrebovaného pri výrobe jednotkového množstva j-tého výrobku,

b_i - kapacita i-tého výrobného prostriedku, ktorá je k dispozícii.

Príklad 2.2.1 *Zlievareň vyrába tri rôzne zliatiny (Z_1, Z_2, Z_3) pre letecký priemysel, ktoré vznikajú zmiešaním štyroch rôznych kovov (K_1, K_2, K_3, K_4) v presných pomeroch. Na výrobu jedného kilogramu zliatiny Z_1 potrebujeme $0,6$ kg kovu K_1 a $0,4$ kg kovu K_2. Kilogram* *zliatiny Z_2 obsahuje $0,5$ kg kovu K_2 a $0,5$ kg kovu K_4. Na kilogram zliatiny Z_3 potrebujeme $0,3$ kg kovu K_3 a $0,7$ kg kovu K_4. Zlievareň má k dispozícii 5 kg kovu K_1, 6 kg kovu K_2, 7 kg kovu K_3 a 3 kg kovu K_4. Zisk z predaja jedného kilogramu zliatiny Z_1, Z_2 a Z_3 je $50, 60$ a 70 €. Aký výrobny plán má zlievareň použiť, keď chce maximalizovať zisk?*

Riešenie: Známe údaje o výrobe jednotlivých druhov zliatín zapíšeme do prehľadnej tabuľky:

zliatina\kov	K_1 (kg)	K_2 (kg)	K_3 (kg)	K_4 (kg)	zisk (€)
Z_1 (1 kg)	0,6	0,4	0	0	50
Z_2 (1 kg)	0	0,5	0	0,5	40
Z_3 (1 kg)	0	0	0,3	0,7	60
kapacita (kg)	5	6	7	3	$--$

Pomocou matematického aparátu zapíšeme matematický model danej úlohy. Množstvá zliatín, ktoré má zlievareň vyrobiť sú neznáme, sú to teda rozhodovacie premenné účelovej funkcie, označíme si ich x_1, x_2, x_3. Účelová funkcia tejto úlohy potom je

$$50x_1 + 40x_2 + 60x_3 \to \max .$$

Každá zliatina má pevne stanovený pomer jednotlivých kovov. Tiež vieme, že množstvo kovov, ktoré máme k dispozícii nie je neobmedzené, to znamená, že pri výrobe nesmieme prekročiť tieto uvedené množstvá. Tak pre každý kov vieme zapísať ohraničujúcu podmienku v tvare nerovnice. Napríklad kov K_2 sa používa na výrobu zliatiny Z_1 a Z_2. Na výrobu jedného kilogramu Z_1 potrebujeme $0,4$ kg toho kovu a na jeden kilogram Z_2 potrebujeme $0,5$ kg. K dispozícii ho máme 6 kg. Ohraničujúca podmienka pre kov K_2 je teda takáto:

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leqq 6$$

K ohraničeniam pribudnú aj tzv. podmienky nezápornosti pre jednotlivé premenné, keďže uvažovať o výrobe záporného množstva zliatín nemá zmysel.

$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

Celý zápis matematického modelu danej ÚLP je takýto:

$$\begin{aligned} 50x_1 + 40x_2 + 60x_3 &\to \max \\ 0,6x_1 &\leqq 5 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 &\leqq 6 \\ 0,3x_3 &\leqq 7 \\ 0,5x_2 + 0,7x_3 &\leqq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Príklad 2.2.2 *Lodenica vyrába tri typy lodí: $L100$, $L80$ a $L40$. Loď typu $L100$ prinesie lodenici zisk 12 miliónov €, konštrukcia tejto lode trvá 6 mesiacov a je schopná prepraviť 100 kontajnerov. Loď typu $L80$ prinesie lodenici zisk 10 miliónov €, konštrukcia tejto lode trvá 4 mesiace a je schopná prepraviť 80 kontajnerov. Loď typu $L40$ prinesie lodenici zisk 8 miliónov €, konštrukcia tejto lode trvá 3 mesiace a je schopná prepraviť 40 kontajnerov. Podľa prieskumu trhu lodenica zistila, že sa jej podarí predať lode schopné prepraviť najviac 320 kontajnerov, navyše lode $L80$ sú dosť atypické, a preto ich nepredá viac ako 4. Navrhnite výrobný plán na najbližších 20 mesiacov tak, aby boli zachované všetky požiadavky a zisk z predaja lodí bol maximálny.*

Riešenie: Údaje zo zadania si znova prehľadne zapíšeme do tabuľky:

Lode	doba konštrukcie (mes.)	prepravná kapacita (ks)	zisk (mil.€)
$L100$	6	100	12
$L80(\leqq 4)$	4	80	10
$L40$	3	40	8
kapacita	20	320	−−

Rozhodovacími premennými v tejto úlohe budú počty vyrobených lodí jednotlivých typov $L100$, $L80$ a $L40$, označíme ich x_1, x_2 a x_3. Ohraničujúce podmienky budú tri, prvá sa bude týkať doby konštrukcie, druhá množstva prepravovaných kontajnerov a tretia podmienka bude vyjadrovať to, že lodí typu $L80$ je možné vyrobiť najviac 4 kusy. Všetky tri premenné musia byť nezáporné, no navyše pre počty vyrobených lodí máme podmienku, že to musia byť celočíselne počty, keďže lodenica môže predať len celé lode. Preto v tomto prípade pribudne podmienka celočíselnosti rozhodovacích premenných:

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

Matematický model tejto úlohy je takýto:

$$\begin{aligned} 12x_1 + 10x_2 + 8x_3 &\to \max \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leqq 20 \\ 100x_1 + 80x_2 + 40x_3 &\leqq 320 \\ x_2 &\leqq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2.2.2 Zmiešavacia úloha (úloha o diéte)

Je známe množstvo chemických látok, ktorých obsah v požadovanej zmesi nás bude zaujímať. Poznáme tiež zastúpenie týchto chemických látok v polotovaroch (surovinách), ktoré máme k dispozícii na prípravu danej zmesi. Vieme minimálne (resp. maximálne) množstvá jednotlivých chemických látok, ktoré má obsahovať jednotkové množstvo požadovanej zmesi. Známe sú aj ceny za jednotkové množstvo daných polotovarov. Úlohou je zistiť, aké množstvá polotovarov, ktoré máme k dispozícii, potrebujeme namiešať, aby sme dostali požadovanú zmes pri minimálnych nákladoch.

Všeobecná matematická formulácia danej úlohy sa dá zapísať takto:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} (c_j \cdot x_j) \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot x_j) \geqq b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geqq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

kde

n - počet polotovarov, ktoré máme k dispozícii,

m - počet chemických látok,

x_j - množstvo j-tého polotovaru použitého na výrobu zmesi,

c_j - cena/náklady na jednotkové množstvo j-tého polotovaru,

a_{ij} - množstvo jednotiek i-tej chemickej látky obsiahnutej v jednotke j-tého polotovaru,

b_i - minimálne (maximálne) množstvo i-tej chemickej látky, ktoré má požadovaná zmes obsahovať.

Príklad 2.2.3 *Farmár chová na farme dobytok. Pre jeho výkrm potrebuje nakúpiť potrebne množstvo z troch ponúkaných polotovarov P_1, P_2 a P_3, ktoré nakoniec zmieša a pripraví výslednú dávku kŕmnej zmesi. Tá by mala obsahovať aspoň* 5 *kg bielkovín,* 7 *kg sacharidov a* $3,5$ *kg tukov. V jednom kilograme polotovaru P_1 sa nachádza* 380 *g bielkovín,* 240 *g sacharidov a* 200 *g tukov. Jeden kilogram polotovaru P_2 obsahuje* 180 *g bielkovín,* 320 *g sacharidov a* 150 *g tukov. Polotovar P_3 v jednom kilograme obsahuje* 110 *g bielkovín,* 220 *g sacharidov a* 400 *g tukov. Ceny za jeden kilogram polotovarov P_1, P_2 a P_3 sú* $4,3$ €, $3,2$ € *a* $3,7$ €. *Úlohou je zistiť, aké množstvá jednotlivých polotovarov má farmár zmiešať, aby dosiahol zmes s požadovanými parametrami a zároveň boli náklady čo najmenšie.*

Riešenie: Údaje o zložení a cene polotovarov zapíšeme do tabuľky, dbáme pritom o jednotnosť fyzikálnych veličín:

chem. látka\polotovar	P_1 (kg)	P_2 (kg)	P_3 (kg)	požadované mn. (g)
bielkoviny (g)	380	180	110	5000
sacharidy (g)	240	320	220	7000
tuky (g)	200	150	400	3500
cena (€)	4,3	3,2	3,7	–

Podobným spôsobom ako v predchádzajúcich príkladoch zapíšeme matematický model danej úlohy. Účelovou funkciou bude funkcia ceny jednotlivých polotovarov a jednotlivé ohraničenia (nerovnice) určujú stanovené množstvá bielkovín, sacharidov a tukov, ako sú zapísané v tabuľke.

$$\begin{aligned} 4,3x_1 + 3,2x_2 + 3,7x_3 &\to \min \\ 380x_1 + 180x_2 + 110x_3 &\geqq 5000 \\ 240x_1 + 320x_2 + 220x_3 &\geqq 7000 \\ 200x_1 + 150x_2 + 400x_3 &\geqq 3500 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

2.2.3 Rezný plán

Máme k dispozícii určité množstvo tyčí danej dĺžky. Z nich potrebujeme narezať stanovené množstvá požadovaných kratších dĺžok. Úlohou je stanoviť taký rezný plán - spôsob narezania tyčí (nastavenia rezacích nožov), aby zabezpečil požadované množstvo požadovaných dĺžok a odpad bol čo najmenší.

Matematický model danej úlohy je nasledovný:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} (c_j \cdot x_j) &\to \min \\ \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot x_j) \geqq b_i \qquad & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geqq 0 \qquad & j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

kde

n - počet rôznych spôsobov rezania tyčí (počet možností nastavenia rezacích nožov),

m - počet rôznych dĺžok tyčí, ktoré potrebujeme narezať,

x_j - počet kusov tyčí pôvodnej dĺžky, ktoré sa narežú j-tým spôsobom,

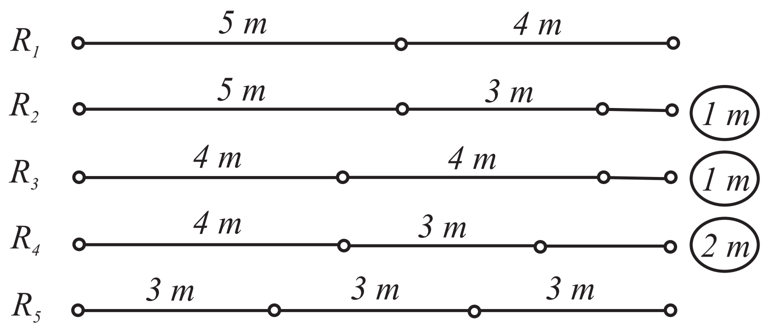
c_j - odpad, ktorý vzikne rozrezaním jednej tyče j-tým spôsobom,

a_{ij} - počet tyčí i-tej veľkosti narezaný pri j-tom spôsobe rezania,

b_i - požadovaný počet tyčí i-tej dĺžky.

Príklad 2.2.4 *Máme k dispozícií 18 tyčí dĺžky 9m. Potrebujeme narezať aspoň 8 kusov 5-metrových tyčí, 14 kusov 4-metrových tyčí a 20 kusov 3-metrových tyčí. Navrhnite optimálne riešenie, aby sme minimalizovali odpad.*

Riešenie: Deväťmetrová tyč sa dá rozrezať na požadované dĺžky piatimi spôsobmi:



Obr. 2.1

Pri rezných plánoch R_2 a R_3 vznikne odpad 1 meter, pri reznom pláne R_4 odpad 2 metre a pri plánoch R_1 a R_5 nevznikne žiaden odpad. Počet premenných teda bude päť a minimalizovať budeme funkciu odpadu. Podmienky budú stanovené počtami potrebných kusov pre všetky požadované dĺžky. Posledná podmienka bude zohľadňovať to, že všetkých tyčí k dispozícii máme len 18. Samozrejme pre všetky premenné musia platiť podmienky nezápornosti (nemôžeme rezať záporný počet kusov) a úloha musí byť celočíselna (ak už režeme tyč, tak celú).

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \min \\ x_1 + x_2 &\geqq 8 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &\geqq 14 \\ x_2 + x_4 + 3x_5 &\geqq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leqq 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2.2.4 Dopravná úloha

Majme n dodávateľov (výrobcov) a m odberateľov (spotrebiteľov) daného tovaru. Každý z dodávateľov má k dispozícii určité množstvo tovaru na prepravu a každy odberateľ má určitú požiadavku na množstvo tovaru, ktoré mu má byť dodané. Sú dané náklady na prepravu jednotky tovaru medzi každou dvojicou dodávateľ - odberateľ. Úlohou je stanoviť taký plán rozvozu tovaru, aby boli náklady na prepravu čo najmenšie.

Všeobecná matematická formulácia danej úlohy:

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}\cdot x_{ij}) \to \min \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i \qquad i = 1,2,\dots,m \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j \qquad j = 1,2,\dots,n \\
x_{ij} &\geqq 0 \qquad \text{pre } i = 1,2,\dots,m; \quad j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
$$

kde

n - počet odberateľov,

m - počet dodávateľov,

x_{ij} - množstvo jednotiek tovaru, ktoré sa prepraví od $i-$tého dodávateľa k j-tému odberateľovi,

c_{ij} - náklady na prepravu jednotky tovaru od i-tého dodávateľa k j-tému odberateľovi,

a_i - množstvo jednotiek tovaru, ktoré má k dispozícii i-tý dodávateľ,

b_j - množstvo jednotiek tovaru, ktoré požaduje j-tý odberateľ.

Príklad 2.2.5 *Sieť hypermarketov má svoje centrálne sklady v BA, LM a KE. Tieto centrálne sklady disponujú množstvami 40, 20 a 40 jednotiek rovnakého druhu tovaru. Jednotlivé hypermarkety potrebujú takéto množstvá tohto tovaru: TN – 25, ZA – 10, RV – 20, BB – 30, PP – 15. Prepravné náklady na jednotku množstva tohto tovaru z centrálnych skladov do hypermarketov sú v nasledujúcej tabuľke. Navrhnite zásobovanie daným tovarom tak, aby boli náklady na prepravu minimálne.*

dodávateľ\odberateľ	*TN*	*ZA*	*RV*	*BB*	*PP*
KE	55	60	30	50	40
BA	35	30	100	45	60
LM	40	30	95	35	30

Riešenie: V tomto príklade máme piatich odberateľov, teda $n = 5$ a troch dodávateľov, takže $m = 3$. Minimalizovať budeme funkciu nákladov, kde premenná x_{ij} stanovuje množstvo jednotiek tovaru, ktoré sa prepraví od $i-$tého dodávateľa k $j-$tému odberateľovi. To znamená, že budeme mať $m \cdot n = 3 \cdot 5 = 15$ premenných. Účelovú funkciu teda zapíšeme takto:

$$\begin{gathered}55x_{11} + 60x_{12} + 30x_{13} + 50x_{14} + 40x_{15} + 35x_{21} + 30x_{22} + 100x_{23} + \\ +45x_{24} + 60x_{25} + 40x_{31} + 30x_{32} + 95x_{33} + 35x_{34} + 30x_{35} \to \min\end{gathered}$$

Z požiadaviek odberateľov dostávame nasledovné ohraničujúce podmienky:

$$\begin{array}{lllr}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} & & & = 40 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} & & = 40 \\
& & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} & = 20
\end{array}$$

Z kapacít, ktoré majú k dispozícii dodávatelia, dostávame nasledovné ohraničujúce podmienky:

$$\begin{array}{cccccccccccccccr}
x_{11} & & & & & +x_{21} & & & & & +x_{31} & & & & & = 25 \\
& x_{12} & & & & & +x_{22} & & & & & +x_{32} & & & & = 10 \\
& & x_{13} & & & & & +x_{23} & & & & & +x_{33} & & & = 20 \\
& & & x_{14} & & & & & +x_{24} & & & & & +x_{34} & & = 30 \\
& & & & x_{15} & & & & & +x_{25} & & & & & +x_{35} & = 15
\end{array}$$

Je zjavné, že nemôžeme prepravovať záporné množstvá tovaru, takže musia platiť aj podmienky nezápornosti:

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad \text{pre } i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

2.2.5 Priraďovací problém

Na určitej prevádzke pracuje n pracovníkov, z ktorých každý má vykonávať jednu z n odlišných činností. Vzhľadom na rôzne faktory, nie všetci pracovníci vykonávajú konkrétnu činnosť rovnako efektívne. Na základe nejakých testov a prieskumov bola stanovená kvalifikácia (vhodnosť) každého pracovníka vykonávať jednotlivé činnosti vyjadrená koeficientom c_{ij}. Úlohou je nájsť také rozdelenie jednotlivých činností medzi pracovníkov, aby výsledná efektivita práce celej prevádzky bola maximálna. Premenné tu nebudú stanovovať množstvo vykonanej práce, ale to, či $i-$tý pracovník vykonáva $j-$tú činnosť, alebo nie.
Teda:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{ak } i\text{-tý pracovník vykonáva } j\text{-tú činnosť,} \\ 0; & \text{ak } i\text{-tý pracovník nevykonáva } j\text{-tú činnosť.} \end{cases}$$

Priraďovací problém je v určitom zmysle modifikáciou, resp. špeciálnym prípadom dopravnej úlohy, preto všeobecná matematická formulácia daného problému bude podobná matematickému modelu dopravnej úlohy:

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}\cdot x_{ij}) &\to \max \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad & i = 1,2,\ldots,n \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad & j = 1,2,\ldots,n \\
x_{ij} \in \{0,1\} \quad & \text{pre } i,j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
$$

kde

n – počet pracovníkov a tiež počet odlišných činností,

x_{ij} – premenná, ktorá vyjadruje, či i-tý pracovník vykonáva j-tú činnosť, alebo nie,

c_{ij} – koeficient vyjadrujúci kvalifikáciu (vhodnosť) i-tého pracovníka vykonávať j-tú činnosť.

Príklad 2.2.6 *Taxislužba má na rôznych stanovištiach k dispozícii 3 voľné taxíky T_1, T_2, T_3. Na základe telefonickej objednávky ich má dispečer poslať k trom zákazníkom Z_1, Z_2, Z_3. Dispečer musí rozhodnúť, ktorý taxík pošle ku ktorému zákazníkovi, aby zákazníci čakali na taxík čo najkratšie. Čas potrebný na presun jednotlivých taxíkov ku konkrétnym zákazníkom je daný v tabuľke (v minútach).*

taxík\zákazník	Z_1	Z_2	Z_3
T_1	13	15	20
T_2	14	10	17
T_3	12	15	12

Riešenie: Keďže $n = 3$, tak daná úloha bude mať deväť premenných. Podobným spôsobom ako v príklade 2.2.5 zapíšeme účelovú funkciu aj ohraničujúce podmienky pre jednotlivé taxíky a zákazníkov. Iné budú len podmienky „nezápornosti“, tie sa zmenia na podmienky $x_{ij} \in \{0,1\}$.

$$13x_{11} + 15x_{12} + 20x_{13} + 14x_{21} + 10x_{22} + 17x_{23} + 12x_{31} + 15x_{32} + 12x_{33} \to \min$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_{11}+ & x_{12}+ & x_{13} & & & & & & & = 1 \\
& & & x_{21}+ & x_{22}+ & x_{23} & & & & = 1 \\
& & & & & & x_{31}+ & x_{32}+ & x_{33} & = 1 \\
x_{11}+ & & & x_{21}+ & & & x_{31} & & & = 1 \\
& x_{12}+ & & & x_{22}+ & & & x_{32} & & = 1 \\
& & x_{13}+ & & & x_{23}+ & & & x_{33} & = 1
\end{array}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pre } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

2.3 Grafické znázornenie úlohy lineárneho programovania v $\mathbb{R}^2$

Definícia 2.1.2 úlohy lineárneho programovania určuje, ako vyzerá účelová funkcia ÚLP – (2.1), a v akom tvare sú ohraničujúce podmienky – (2.2). Pre funkciu dvoch rozhodovacích premenných môžeme všeobecnú úlohu lineárneho programovania zapísať takto:

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 &\to \min\ (\max) \\
a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 &\leqq b_i, \quad \text{pre } i = 1, \dots, k-1 \\
a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 &\geqq b_i, \quad \text{pre } i = k, \dots, l-1 \\
a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 &= b_i, \quad \text{pre } i = l, \dots, m \\
x_1, x_2 &\leqq\geqq 0, \\
1 \leqq k \leqq l &\leqq m
\end{aligned}
$$

Všetky ohraničenia sú dané lineárnymi rovnicami, resp. nerovnicami, teda v rovine ich môžeme znázorniť pomocou priamok, resp. polrovín. Množina prípustných riešení F bude prienikom týchto priamok a polrovín .

Príklad 2.3.1 *Úloha lineárneho programovania je daná takto:*

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) = 66x_1 + 48x_2 &\to \max \\
4x_1 + 9x_2 &\leqq 90 \quad \dots p_1 \\
2x_1 + x_2 &\leqq 20 \quad \dots p_2 \\
x_1 + x_2 &\leqq 12 \quad \dots p_3 \\
x_1, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

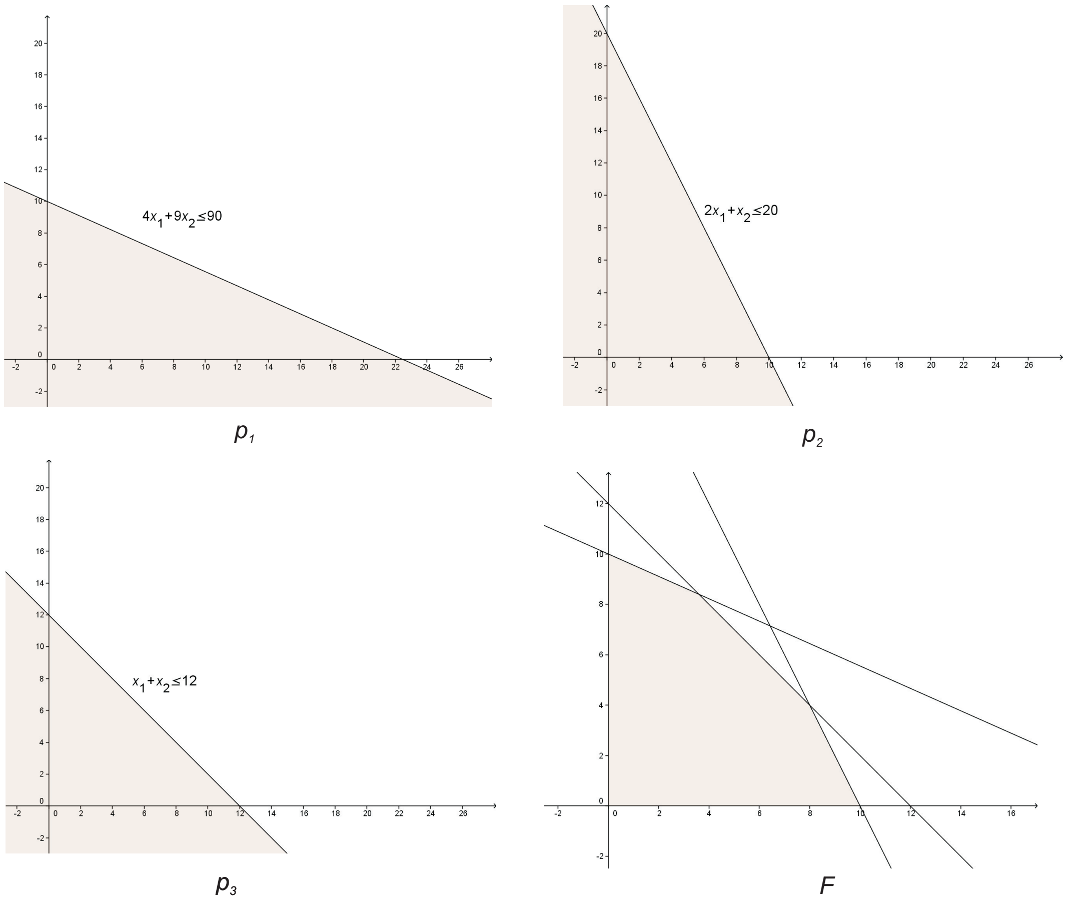
Graficky znázornite množinu prípustných riešení a optimálne riešenie tejto ÚLP.

Riešenie: Všetky ohraničujúce podmienky sú v tvare nerovnice, tak ich zobrazíme ako polroviny p_1, p_2, p_3. Ich prienikom a tiež prienikom polrovín vyjadrujúcich podmienky nezápornosti $x_1, x_2 \geqq 0$ dostaneme množinu prípustných riešení F (obrázok 2.2).
Znázorníme vrstevnicu účelovej funkcie – napríklad tak, že položíme $f(\boldsymbol{x}) = 0$, čo v našom príklade znamená, že znázorníme priamku p: $66x_1 + 48x_2 = 0$ a vyznačíme, ktorým smerom sa hodnota účelovej funkcie blíži k maximu (obrázok 2.3).
Vo vyznačenom smere pohybu vrstevnice hľadáme čo najvzdialenejší bod množiny prípustných riešení (obrázok 2.4). Je to prienik priamok vyjadrených rovnicami:

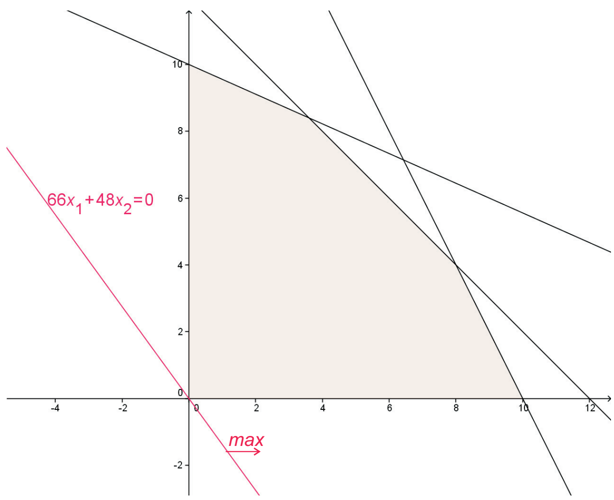
$$2x_1 + x_2 = 20; \quad x_1 + x_2 = 12$$

Súradnice optimálneho riešenia dostaneme vyriešením tejto sústavy a optimálnu hodnotu účelovej funkcie dosadením optimálneho riešenia do účelovej funkcie:

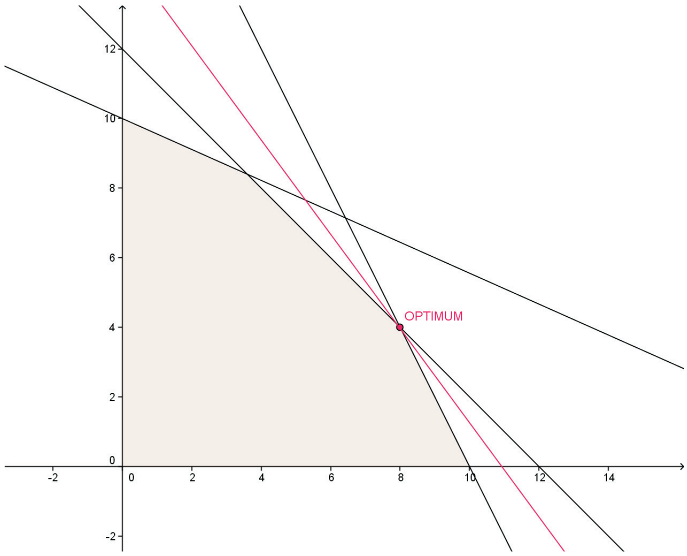
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{opt} &= (8, 4)^\top \\
f^{opt}(\boldsymbol{x}) &= 720.
\end{aligned}
$$



Obr. 2.2: Znázornenie ohraničujúcich podmienok ako polrovín (p_1, p_2, p_3) a množiny prípustných riešení F v rovine $\mathbb{R}^2$.



Obr. 2.3: Vrstevnica účelovej funkcie.



Obr. 2.4: Optimum - bod, v ktorom účelová funkcia nadobúda maximum.

Príklad 2.3.2 *Sú dané ohraničujúce podmienky pre ÚLP:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\geqq 6 \\ 4x_1 - x_2 &\leqq 5 \\ x_1 &\geqq 0 \end{aligned}$$

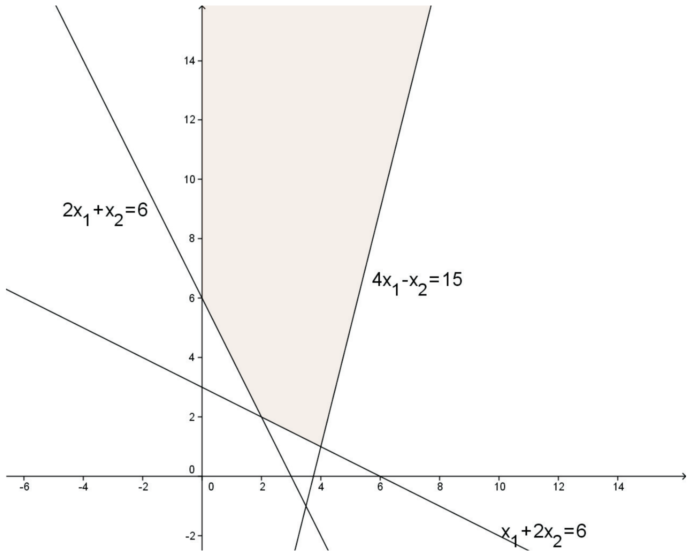
Graficky znázornite množinu prípustných riešení a nájdite optimálne riešenie ak účelová funkcia je:

a) $f_1(\boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max$,

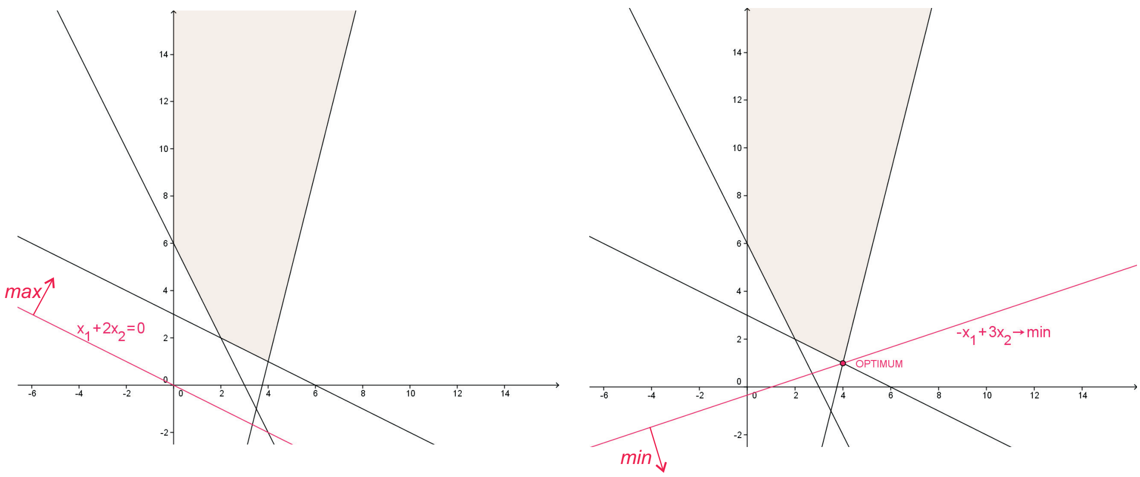
b) $f_2(\boldsymbol{x}) = -x_1 + 3x_2 \to \min$.

Riešenie: Podobne ako v príklade 2.3.1 znázorníme množinu prípustných riešení ako prienik polrovín, ktoré sú ohraničujúcimi podmienkami. Ako možno vidieť na obrázku 2.5, množina prípustných riešení je neohraničená.
Na obrázku 2.6 sú znázornené vrstevnice účelových funkcií $f_1(\boldsymbol{x}) a f_2(\boldsymbol{x})$. V prípade funkcie $f_1(\boldsymbol{x})$ nevieme nájsť optimum, maximalizácia funkcie je v tom smere, v ktorom je množina prípustných riešení neohraničená, teda táto ÚLP je prípustná no neohraničená.
Účelová funkcia $f_2(\boldsymbol{x})$ však na tej istej množine prípustných riešení nadobuda optimálnu hodnotu, optimálne riešenie a hodnotu účelovej funkcie v tomto riešení vypočítame analogicky ako v príklade 2.3.1:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{opt} &= (4, 1)^\top \\ f_2^{opt}(\boldsymbol{x}) &= -1. \end{aligned}$$



Obr. 2.5: Množina prípustných riešení.

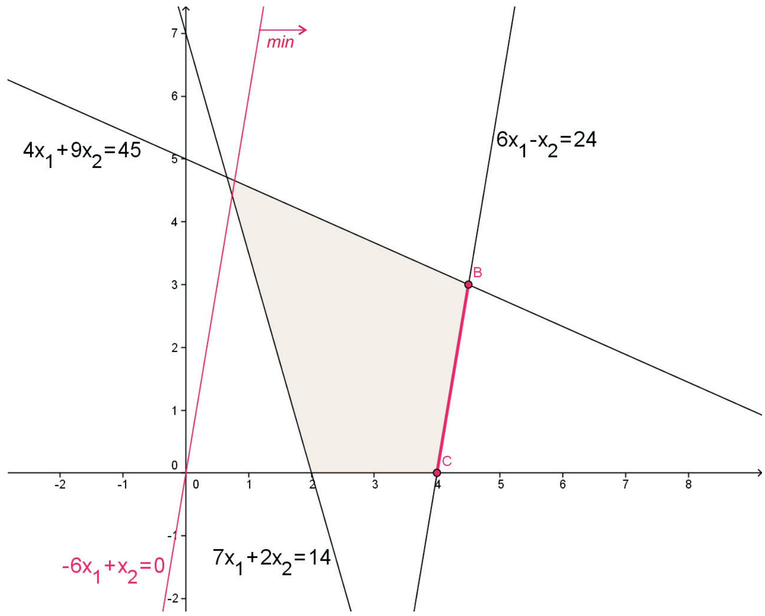


Obr. 2.6: Vrstevnice účelových funkcií a optimálne riešenie.

Príklad 2.3.3 *Je daná nasledujúca úloha lineárneho programovania. Graficky znázornite množinu prípustných riešení a optimálne riešenie tejto ÚLP.*

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) = -6x_1 + x_2 &\to \min \\
6x_1 - x_2 &\leqq 24 \\
7x_1 + 2x_2 &\geqq 14 \\
4x_1 + 9x_2 &\leqq 45 \\
x_1, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

Riešenie: Na obrázku 2.7 je znázornená množina prípustných riešení a tiež vrstevnica účelovej funkcie ako priamka $-6x_1+x_2 = 0$. Jej posúvaním smerom doprava sa približujeme k optimálnemu riešeniu. Keďže hranica množiny prípustných riešení daná podmienkou $6x_1 - x_2 \leqq 24$ je rovnobežná s vrstevnicou, optimálnym riešením sú všetky body úsečky BC a táto úloha lineárneho programovania má nekonečne veľa riešení. Hodnotu účelovej funkcie v optime vypočítame dosadením súradníc hocijakého bodu úsečky BC do účelovej funkcie: $f^{opt}(\boldsymbol{x}) = -24$.



Obr. 2.7: Množina prípustných riešení, vrstevnica účelovej funkcie a optimálne riešenia.

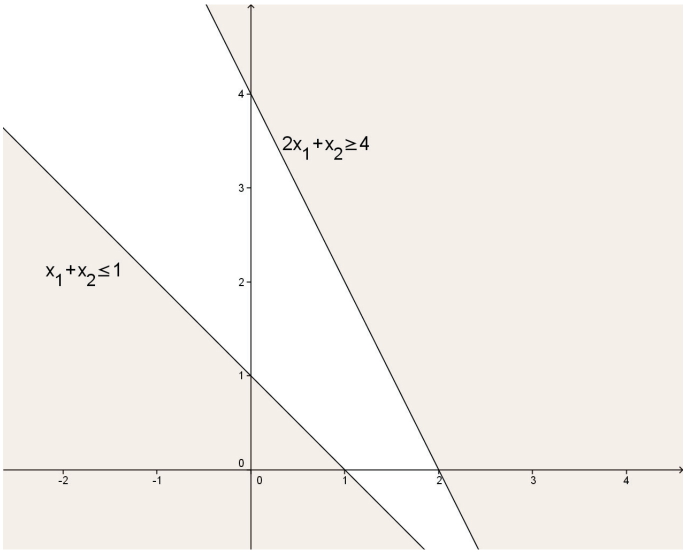
Príklad 2.3.4 *Majme danú úlohu lineárneho programovania. Graficky znázornite množinu prípustných riešení a optimálne riešenie tejto ÚLP.*

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 &\to \min \\
x_1 + x_2 &\leqq 1 \\
2x_1 + x_2 &\geqq 4 \\
x_1, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

Riešenie: Pre obidve premenné majú platiť podmienky nezápornosti, to znamená, že množina prípustných riešení bude obsahovať len body z prvého kvadrantu. Ako však môžeme vidieť na obrázku 2.6, dané dve polroviny určené ohraničujúcimi podmienkami nemajú v prvom kvadrante prienik. Preto množina prípustných riešení je prázdna a daná ÚLP nemá optimálne riešenie.

Pozorovanie:

V predchádzajúcich príkladoch bolo možné všimnúť si, že množina prípustných riešení môže byť prázdna, neprázdna ohraničená a neprázdna neohraničená. Počet oprimálnych riešení pre nejakú ÚLP môže byť nula, jedno a nekonečne veľa. Nasledujúca tabuľka prehľadne



Obr. 2.8: Množina prípustných riešení.

znázorňuje, ktoré možnosti kombinácie dvojice „množina prípustných riešení – počet optimálnych riešení“ sú možné (označené: $\surd$) a ktoré nie (označené: –).

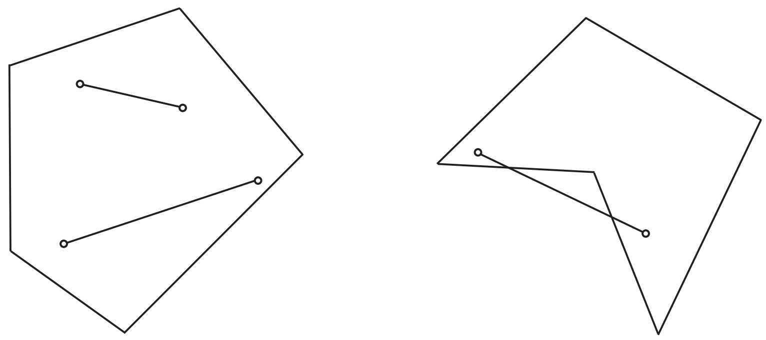
počet opt. rieš.\mn. príp. rieš.	prázdna	príp. ohraničená	príp. neohraničená
žiadne	$\surd$	–	$\surd$
práve jedno	–	$\surd$	$\surd$
nekonečne veľa	–	$\surd$	$\surd$

2.4 Základy konvexnej analýzy

Definícia 2.4.1 *Neprázdna množina $M \in \mathbb{R}^n$ sa nazýva konvexná, ak platí:*

$$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M)(\forall \lambda \in \langle 0; 1\rangle) : \lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in M.$$

Ak množina M je podmnožinou $\mathbb{R}^2$, tak môžeme povedať, že množina M je konvexná, ak s každými dvomi bodmi obsahuje aj celú ich spojnicu.



(a) (b)

Obr. 2.9: Príklad konvexnej množiny (a) a nekonvexnej množiny (b) v $\mathbb{R}^2$.

Veta 2.4.1 *Prienik konvexných množín je konvexná množina.*

Definícia 2.4.2 *Konvexnou kombináciou bodov $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k} \in \mathbb{R}^n$ nazývame ľubovoľný bod $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, ktorý je tvaru $\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x_1} + \lambda_2 \boldsymbol{x_2} + \dots + \lambda_k \boldsymbol{x_k}$ a platí:*
(1) $\lambda_i \geqq 0$; $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ a
(2) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$.

Veta 2.4.2 *Nech je daná množina $M \in \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Množina M je konvexná práve vtedy, ak konvexná kombinácia ľubovoľných jej bodov je tiež bodom z M.*

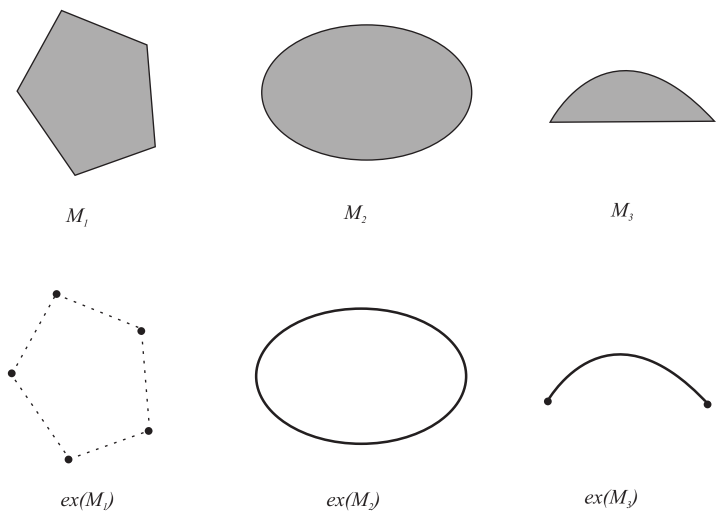
Definícia 2.4.3 *Konvexným obalom množiny $M \in \mathbb{R}^n$ – ozn. $conv(M)$ – nazývame množinu, pre ktorú platí:*
(1) $M \subseteq conv(M)$
(2) $conv(M)$ je konvexná
(3) ak existuje M_1 – konvexná, taká že $M \subseteq M_1$, tak $conv(M) \subseteq M_1$.

T. j.: $conv(M)$ je najmenšia konvexná množina taká, že $M \subseteq conv(M)$.

Definícia 2.4.4 *Nech M je konvexná množina. Krajným bodom množiny M nazývame bod $\boldsymbol{x} \in M$, pre ktorý platí:*

ak $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{y} + (1-\lambda)\boldsymbol{z}$ pre nejaké $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in M$ a $\lambda \in (0; 1)$, tak $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$.

T. j.: Krajný bod množiny M sa nedá vyjadriť ako konvexná (netriviálna) kombinácia iných bodov množiny M.
Množinu krajných bodov množiny M budeme označovať $ex(M)$.



Obr. 2.10: Konvexné množiny s ich množinami krajných bodov.

Veta 2.4.3 *Každá ohraničená, uzavretá, neprázdna a konvexná množina obsahuje aspoň jeden krajný bod.*

Veta 2.4.4 *Nech $M \in \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$ je konvexná, uzavretá a ohraničená množina. Potom každý bod $\boldsymbol{x} \in M$ sa dá vyjadriť ako konvexná kombinácia krajných bodov množiny M.*

Definícia 2.4.5 *Uzavretá konvexná množina sa nazýva polyedrická, ak má konečný počet krajných bodov.*

Z množín na obrázku 2.10 je polyedrickou len množina M_1.

Veta 2.4.5 *Množina F prípustných riešení ľubovoľnej úlohy lineárneho programovania je konvexná.*

Veta 2.4.6 *Množina F prípustných riešení ľubovoľnej úlohy lineárneho programovania je polyedrická.*

Veta 2.4.7 *Množina optimálnych riešení ľubovoľnej úlohy lineárneho programovania je konvexná.*

Veta 2.4.8 *Nech množina F prípustných riešení úlohy lineárneho programovania je ohraničená a neprázdna. Potom platí:*
(1) Existuje $min\{\boldsymbol{c}^\top . \boldsymbol{x} \ : \ \boldsymbol{x} \in F\} = f^*$
(2) Existuje krajný bod $\boldsymbol{x_0}$ množiny F taký, že $\boldsymbol{c}^\top . \boldsymbol{x} = f^*$.

Veta 2.4.9 *(Hlavná veta o LP)*
Pre každú minimalizačnú úlohu lineárneho programovania nastáva práve jedna z možností:
- *ÚLP je neprípustná, t. j.:* $F = \emptyset$.
- *ÚLP je prípustná no neohraničená, t. j.:* $F \neq \emptyset$ *a zároveň účelová funkcia* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x}$ *je na množine* F *zdola neohraničená.*
- *ÚLP má optimálne riešenie v niektorom z krajných bodov prípustnej množiny.*

2.5 Štandardný tvar úlohy lineárneho programovania

Definícia 2.5.1 *Hovoríme, že úloha lineárneho programovania je v kanonickom tvare, ak je v tvare:*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n}(c_j \cdot x_j) &\to \min \\ \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) \geqq b_i, &\quad \textit{pre } i = 1, \dots, m \\ x_i \geqq 0, &\quad \textit{pre } j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Definícia 2.5.2 *Hovoríme, že úloha lineárneho programovania s n rozhodujúcimi premennými a m ohraničujúcimi podmienkami je v štandardnom tvare, ak je v tvare:*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n}(c_j \cdot x_j) &\to \min \\ \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) = b_i, &\quad \textit{pre } i = 1, \dots, m \\ x_j \geqq 0, &\quad \textit{pre } j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Poznámka: Maticový zápis ÚLP s n premennými a m ohraničujúcimi podmienkami v štandardnom tvare je takýto:

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} \to \min \\ & \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \quad x_i \geqq 0, \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Veta 2.5.1 *Všeobecný, kanonický a štandardný tvar úlohy lineárneho programovania sú navzájom ekvivalentné.*

Teda: Každá ÚLP vo všeobecnom tvare môže byť transformovaná do kanonického alebo štandardného tvaru a naopak.

2.5.1 Prevod medzi tvarmi ÚLP

Na prevod úlohy lineárneho programovania z nejakého tvaru do iného používame niekoľko základných transformácií:

1. zmena extemalizácie účelovej funkcie ÚLP,
2. zmena ohraničujúcej podmienky v tvare nerovnice typu „$\leqq$“ na ohraničujúcu podmienku v tvare nerovnice typu „$\geqq$“, alebo naopak,

3. zmena ohraničujúcej podmienky v tvare nerovnice na ohraničujúcu podmienku v tvare rovnice,
4. zmena ohraničujúcej podmienky v tvare rovnice na ohraničujúce podmienky v tvare nerovníc,
5. neohraničenú premennú nahradiť nezápornými premennými.

Spôsob realizácie týchto základných transformácií:

1. Zmenu maximalizačnej ÚLP na minimalizačnú (alebo naopak) realizujeme vynásobením pôvodnej účelovej funkcie číslom -1:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &\to \max \quad / \cdot (-1) \\ -f(\boldsymbol{x}) &\to \min \end{aligned} \tag{2.7}$$

2. Transformáciu ohraničujúcej podmienky v tvare nerovnice typu „$\leqq$“ na ohraničujúcu podmienku v tvare nerovnice typu „$\geqq$“ (alebo naopak) realizujeme tiež vynásobením danej ohraničujúcej podmienky číslom -1:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) &\geqq b_i \quad / \cdot (-1) \\ \sum_{j=1}^{n}(-a_{ij} \cdot x_j) &\leqq -b_i \end{aligned} \tag{2.8}$$

3. Transformáciu ohraničujúcej podmienky v tvare nerovnice na ohraničujúcu podmienku v tvare rovnice urobíme pridaním doplnkových premenných s podmienkou nezápornosti pre doplnkovú premennú:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) \geqq b_i \quad &\to \quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) - s_i = b_i; \quad s_i \geqq 0 \\ \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) \leqq b_i \quad &\to \quad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) + s_i = b_i; \quad s_i \geqq 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

4. Transformáciu ohraničujúcej podmienky v tvare rovnice na ohraničujúcu podmienku v tvare nerovnice urobíme nahradením danej rovnice dvomi nerovnicami podľa princípu dichotómie:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) = b_i \quad \to \quad \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) \leqq b_i \\ \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) \geqq b_i \end{array} \tag{2.10}$$

5. Transformáciu neohraničenej premennej na ohraničenú realizujeme nahradením danej premennej rozdielom dvoch nezáporných premenných v celej ÚLP:

$$x_j \text{ je neohraničené} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x_j = x_j^+ - x_j^- \\ x_j^+ \geqq 0; \; x_j^- \geqq 0 \end{array} \tag{2.11}$$

Príklad 2.5.1 *Transformujte danú úlohu lineárneho programovania na kanonický aj štandardný tvar:*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\rightarrow \max \\ 3x_1 - 5x_2 &\leqq 8 \\ -2x_1 + x_2 &\geqq 4 \\ x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Riešenie: V kanonickom aj štandardnom tvare je účelová funkcia minimalizačná, preto použijeme základnú transformáciu (2.7). Takto dostaneme účelovú funkciu:

$$-x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

Premenná x_2 je neohraničená. Pomocou transformácie (2.11) ju nahradíme dvojicou premenných:

$$x_2 = x_2^+ - x_2^-; \quad x_2^+ \geqq 0; \; x_2^- \geqq 0$$

Po týchto transformáciách je daná ÚLP v tvare:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2^+ - x_2^- &\rightarrow \min \\ 3x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- &\leqq 8 \\ -2x_1 + x_2^+ - x_2^- &\geqq 4 \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- &= 6 \\ x_1, x_2^+, x_2^- &\geqq 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

V kanonickom tvare sú všetky ohraničujúce podmienky v tvare nerovnice typu „$\geqq$“. Preto prvú ohraničujúcu podmienku vynásobíme číslom -1 a na tretiu podmienku aplikujeme transformáciu (2.10) a vzniknutú nerovnicu typu „$\leqq$“ vynásobíme -1. Potom táto ÚLP má takýto zápis v kanonickom tvare:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2^+ - x_2^- &\rightarrow \min \\ -3x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- &\geqq -8 \\ -2x_1 + x_2^+ - x_2^- &\geqq 4 \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- &\geqq 6 \\ -x_1 - x_2^+ + x_2^- &\geqq -6 \\ x_1, x_2^+, x_2^- &\geqq 0 \end{aligned}$$

Ak chceme dostať štandardný tvar, použijeme už čiastočne transformovanú ÚLP (2.12). Do prvej aj druhej ohraničujúcej podmienky pridáme doplnkové premenné podľa (2.9). Štandardný tvar danej ÚLP je takýto:

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2^+ - x_2^- &\to \min \\
3x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- + s_1 &= 8 \\
-2x_1 + x_2^+ - x_2^- - s_1 &= 4 \\
x_1 + x_2^+ - x_2^- &= 6 \\
x_1, x_2^+, x_2^-, s_1, s_2 &\geqq 0
\end{aligned}$$

2.6 Bázické prípustné riešenie úlohy lineárneho programovania

Nech je daná matica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{m,n}$ taká, že $h(\boldsymbol{A}) = m$. Je zjavné, že $m \leqq n$. Z vlastností matíc platí, že riadky matice $\boldsymbol{A}$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, ak v $\boldsymbol{A}$ existuje m lineárne nezávislých stĺpcov.

Definícia 2.6.1 *Množinu tvorenú m lineárne nezávislými stĺpcami matice $\boldsymbol{A}$ nazývame bázou matice $\boldsymbol{A}$ a budeme ju označovať $\mathcal{B}$. Maticu tvorenú stĺpcami tejto bázy budeme označovať $\boldsymbol{B}$.*

Označenie: Báza $\mathcal{B}$ je tvorená m lineárne nezávislými stlpcami matice $\boldsymbol{A}$, čo budeme zapisovať $\mathcal{B} = \{A_{B(1)}, A_{B(2)}, \ldots, A_{B(m)}\}$, teda $A_{B(i)}$ označuje stĺpec matice $\boldsymbol{A}$, ktorý tvorí i-tú zložku bázy $\mathcal{B}$. $B(i)$ vyjadruje index toho stĺpca, ktorý tvorí i-tú zložku bázy $\mathcal{B}$.
Je zrejmé, že matica $\boldsymbol{B}$ je regulárna, teda existuje k nej inverzná matica $\boldsymbol{B}^{-1}$.

Príklad 2.6.1 *Máme danú nasledujúcu maticu $\boldsymbol{A}$, chceme z nej vybrať bázu.*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Riešenie: Z matice $\boldsymbol{A}$ vyberieme stĺpce A_1, A_2 a A_5. Sú to lineárne nezávislé stĺpce, preto tvoria bázu $\mathcal{B}_1$. Podobne, ak zoberieme stĺpce A_2, A_3 a A_4 tiež dostaneme bázu $\mathcal{B}_2$. Potom matice $\boldsymbol{B_1}$ a $\boldsymbol{B_2}$ sú matice tvorené stĺpcami týchto báz. Matica $\boldsymbol{C_1}$ tvorená stĺpcami A_1, A_2 a A_4 nie je maticou bázy, keďže stĺpec $A_4 = A_1 + A_2$, podobne matica $\boldsymbol{C_2}$ tvorená stĺpcami A_1, A_3 a A_5 nie je maticou bázy, pretože $A_3 = A_5 + 3A_1$.

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nech máme maticu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{m,n}$ s m lineárne nezávislými riadkami a n stĺpcami. Hocijaká báza tejto matice je typu $m \times m$. Potom maximálny počet báz matice $\boldsymbol{A}$ je rovný počtu m-prvkových kombinácií bez opakovania z n-prvkov, teda $\binom{n}{m}$.

Príklad 2.6.2 *Nájdite všetky bázy matice* $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie: Riadky matice $\boldsymbol{A}$ sú lineárne nezávislé, teda jej hodnosť $h(\boldsymbol{A}) = 2$. Počet stĺpcov v $\boldsymbol{A}$ je 4. Maximálny počet báz matice $\boldsymbol{A}$ je teda $\binom{4}{2} = 6$. Zo stĺpcov matice $\boldsymbol{A}$ vytvoríme všetkých 6 možných podmatíc typu 2×2.

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{M}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_5 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_6 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Slpce matice $\boldsymbol{M}_2$, ktorá je vytvorená zo stĺpcov A_1 a A_3, sú lineárne závislé (jeden je násobkom druhého), teda táto matica nemôže byť maticou bázy matice $\boldsymbol{A}$. Vo všetkých ostatných prípadoch sú stĺpce lineárne nezávislé a dané matice sú maticami báz matice $\boldsymbol{A}$:

$$\mathcal{B}_1 = \{A_1, A_2\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{A_1, A_4\}, \quad \mathcal{B}_3 = \{A_2, A_3\}, \quad \mathcal{B}_4 = \{A_2, A_4\}, \quad \mathcal{B}_5 = \{A_3, A_4\}.$$

Poznámka: Nech $\mathcal{B} = \{A_{B(1)}, A_{B(2)}, \ldots, A_{B(m)}\}$ je báza matice $\boldsymbol{A}$, tak každý stĺpec A_j; $j = 1, 2, \ldots, n$ matice $\boldsymbol{A}$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia bázových stĺpcov:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} (x_{ij} \cdot A_{B(i)}),$$

a hodnoty x_{ij} nazývame súradnicmi stĺpca A_j v báze $\mathcal{B}$.

Príklad 2.6.3 *Vypočítajte súradnice stĺpca* A_4 *v báze* $\mathcal{B}_3$ *z príkladu 2.6.2.*

Riešenie: Báza $\mathcal{B}_3$ je tvorená stĺpcami A_2, A_3. Podľa predchádzajúcej poznámky teda zapíšeme, že:

$$A_4 = x_{14} \cdot A_2 + x_{24} \cdot A_3.$$

Dosadením jednotlivých zložiek daných stĺpcov dostaneme sústavu

$$\begin{aligned} -1 &= 3x_{14} + 4x_{24} \\ 0 &= 5x_{14} + 2x_{24} \end{aligned}$$

Vyriešením tejto sústavy dostaneme súradnice stĺpca A_4 v báze $\mathcal{B}_3$: $\boldsymbol{x}^{\mathcal{B}_3} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{14}\right)$

Definícia 2.6.2 *Bazickým riešením (BR) sústavy* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *prislúchajúcim báze* $\mathcal{B}$ *matice* $\boldsymbol{A}$ *nazývame také riešenie* $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ *danej sústavy, v ktorom:*

$$x_j = \begin{cases} 0; & \text{ak } \boldsymbol{A}_j \notin \mathcal{B}, \\ \textit{príslušná zložka jediného riešenia sústavy } \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{b}; & \text{ak } \boldsymbol{A}_j \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Teda platí:

$$\sum_{i=1}^{m}(x_{B(i)} \cdot A_{B(i)}) = \boldsymbol{b}.$$

Príklad 2.6.4 *Nájdite všetky bazické riešenia sústavy*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Maticu na ľavej strane sústavy označíme $\boldsymbol{A}$ a je to tá istá matica ako v príklade 2.6.2 a teda má päť rôznych báz

$$\mathcal{B}_1 = \{A_1, A_2\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{A_1, A_4\}, \quad \mathcal{B}_3 = \{A_2, A_3\}, \quad \mathcal{B}_4 = \{A_2, A_4\}, \quad \mathcal{B}_5 = \{A_3, A_4\}.$$

Maticu na pravej strane (stĺpcový vektor) označíme $\boldsymbol{b}$. Pre každú bázu $\mathcal{B}_k$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ vypočítame sústavu $\boldsymbol{B}_k \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Podľa definície 2.6.2 zapíšeme bazické riešenia $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_k}$ prislúchajúce jednotlivým bázam.

$$\mathcal{B}_1 = \{A_1, A_2\}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_1} = (2, 0, 0, 0)^\top$$

$$\mathcal{B}_2 = \{A_1, A_4\}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_2} = (2, 0, 0, 0)^\top$$

$$\mathcal{B}_3 = \{A_2, A_3\}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_3} = (0, 0, 1, 0)^\top$$

$$\mathcal{B}_4 = \{A_2, A_4\}; \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_4} = \left(0, \frac{2}{5}, 0, -\frac{14}{5}\right)^\top$$

$$\mathcal{B}_5 = \{A_3, A_4\}; \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_5} = (0, 0, 1, 0)^\top$$

Definícia 2.6.3 *Bazické riešenie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ sa nazýva bazické prípustné riešenie (BPR), ak $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $x_j \geqq 0$.*

Definícia 2.6.4 *Nech je daná sústava $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{m,n}$ je matica s m lineárne nezávislými riadkami. Bazické riešenie, ktoré má viac ako $n-m$ nulových zložiek nazývame degenerovaným riešením.*

Príklad 2.6.5 *Určte, ktoré z riešení v príklade 2.6.4 je prípustné, a ktoré je degenerované.*

Riešenie: Bazickými prípustnými riešeniami sú $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_1}$, $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_2}$, $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_3}$ a $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_5}$.
Degenerovanými riešeniami sú tie isté riešenia $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_1}$, $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_2}$, $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_3}$ a $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_5}$.

Veta 2.6.1 *Ak dve rôzne bázy zodpovedjú tomu istému bazickému riešeniu $\boldsymbol{x}$, tak toto riešenie $\boldsymbol{x}$ je degenerované.*

Môžeme to vidieť na predchádzajúcom príklade. Riešenie $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_1} = \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_2} = (2, 0, 0, 0)^\top$ je degenerované a zodpovedá dvom bázam $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Podobne riešenie $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_3} = \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_5} = (0, 0, 1, 0)^\top$ je tiež degenerované a zodpovedá dvom bázam $\mathcal{B}_3$ a $\mathcal{B}_5$.

Veta 2.6.2 *Úloha LP v štandardnom tvare (2.5) s maticou $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{m,n}$ má bazické prípustné riešenie práve vtedy, ak $F \neq \emptyset$ a $h(\boldsymbol{A}) = m$.*

Veta 2.6.3 *Ak stĺpce $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matice $\boldsymbol{A}$ sú lineárne nezávislé a riešenie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0, 0)^T \in F$,tak $\boldsymbol{x} \in ex(F)$.*

Veta 2.6.4 *Ak $\boldsymbol{x} \in ex(F)$, tak množina $\{A_j, x_j \geqq 0\}$ stĺpcov matice $\boldsymbol{A}$ je lineárne nezávislá.*

Kapitola 3

Dualita v úlohách lineárneho programovania

3.1 Primárno – duálna dvojica úloh

Majme úlohu lineárneho programovania s n rozhodujúcimi premennými a m ohraničujúcimi podmienkami v nasledujúcom tvare:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} &\to \min \\ \boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{x} &= b_i, \quad \text{pre } i = 1, \dots, k-1 \\ \boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{x} &\geqq b_i, \quad \text{pre } i = k, \dots, m \\ x_j &\geqq 0 \quad \text{pre } j \in N_1 \\ x_j & \text{ je neohraničené} \quad \text{pre } j \in N_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Previesť ÚLP v hocijakom tvare na tento tvar môžeme veľmi ľahko pomocou základných transformácií (2.7) – (2.11).

Definícia 3.1.1 *Nech je daná úloha lineárneho programovania v tvare (3.1). Úlohu lineárneho programovania danú nasledujúcim spôsobom nazývame duálnou úlohou k úlohe (3.1).*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^\top \cdot \boldsymbol{b} &\to \max \\ y_i & \textit{ je neohraničené} \quad \textit{pre } i = 1, \dots, k-1 \\ y_i &\geqq 0 \quad \textit{pre } i = k, \dots, m \\ \boldsymbol{y}^\top \cdot A_j &\leqq c_j \quad \textit{pre } j \in N_1 \\ \boldsymbol{y}^\top \cdot A_j &= c_j \quad \textit{pre } j \in N_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ak je ÚLP v kanonickom tvare, tak primárno – duálna dvojica úloh vyzerá takto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} &\to \min & \qquad \boldsymbol{y}^\top \cdot \boldsymbol{b} &\to \max \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} &\geqq \boldsymbol{b} & \qquad \boldsymbol{y}^\top \cdot \boldsymbol{A} &\leqq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} &\geqq 0 & \qquad \boldsymbol{y} &\geqq 0 \end{aligned}$$

Ak je ÚLP v štandardnom tvare, tak primárno – duálna dvojica úloh vyzerá takto:

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} \to \min \qquad & \boldsymbol{y}^\top \cdot \boldsymbol{b} \to \max \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad & \boldsymbol{y}^\top \cdot \boldsymbol{A} \leqq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} \geqq 0 \qquad & y_i \text{ je neohraničené} \quad \text{pre } i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Označenie: Primárnu ÚLP budeme označovať „P“, k nej duálnu ÚLP budeme označovať „D“.

Veta 3.1.1 *(O symetrii)*
Ak D je duálnou úlohou k úlohe lineárneho programovania P, tak P je duálnou úlohou k D.

Teda: Duálna úloha k duálnej úlohe je pôvodná primárna úloha.

Na základe predchádzajúcej definície a vety možno odvodiť niekoľko všeobecných pravidiel, pomocou ktorých môžeme k akejkoľvek úlohe lineárneho programovania zostrojiť jej duálnu úlohu:

1. ak je P maximalizačná (minimalizačná), tak D je minimalizačná (maximalizačná),
2. ku každému ohraničeniu v P prislúcha jedna premenná v D,
3. ku každej premennej v P prislúcha jedno ohraničenie v D,
4. koeficienty účelovej funkcie v P tvoria príslušné pravé strany v D,
5. prvky pravej strany v P tvoria koeficienty účelovej funkcie v D,
6. matica ohraničení v D je transponovanou maticou k matici ohraničení v P,
7. znaky rovnosti a nerovnosti v P – D dvojici sa odvodzujú pomocou nasledujúcich pravidiel:
   a) i-tému ohraničeniu typu „$\geqq$“ v minimalizačnej (maximalizačnej) P zodpovedá i-tá nezáporná (nekladná) duálna premenná v maximalizačnej (minimalizačnej) D,
   b) i-tému ohraničeniu typu „$\leqq$“ v minimalizačnej (maximalizačnej) P zodpovedá i-tá nekladná (nezáporná) duálna premenná v maximalizačnej (minimalizačnej) D,
   c) i-tému ohraničeniu typu „$=$“ v P zodpovedá i-tá neohraničená duálna premenná v D,
   d) j-tej nezápornej (nekladnej) premennej v maximalizačnej P zodpovedá j-té ohraničenie typu „$\geqq$“ („$\leqq$“) v minimalizačnej D,

e) j-tej nezápornej (nekladnej) premennej v minimalizačnej P zodpovedá j-té ohraničenie typu „$\leqq$“ („$\geqq$“) v maximalizačnej D,

f) j-tej neohraničenej premennej v P zodpovedá j-té ohraničenie typu „=“ v D.

Tieto pravidlá prehľadne zosumarizujeme v nasledujúcej tabuľke:

Primárna úloha (P)	$\Longleftrightarrow$	Duálna úloha (D)
$\boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} \to \min$	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{y}^\top \cdot \boldsymbol{b} \to \max$
$\boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} \to \max$	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{y}^\top \cdot \boldsymbol{b} \to \min$
$\boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{x} \geqq b_i$ (min)	$\Longleftrightarrow$	$y_i \geqq 0$ (max)
$\boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{x} \geqq b_i$ (max)	$\Longleftrightarrow$	$y_i \leqq 0$ (min)
$\boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{x} \leqq b_i$ (min)	$\Longleftrightarrow$	$y_i \leqq 0$ (max)
$\boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{x} \leqq b_i$ (max)	$\Longleftrightarrow$	$y_i \geqq 0$ (min)
$\boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{x} = b_i$	$\Longleftrightarrow$	$y_i \in (-\infty, \infty)$
$x_j \geqq 0$ (max)	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{y}^\top \cdot A_j \geqq c_j$ (min)
$x_j \leqq 0$ (max)	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{y}^\top \cdot A_j \leqq c_j$ (min)
$x_j \geqq 0$ (min)	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{y}^\top \cdot A_j \leqq c_j$ (max)
$x_j \leqq 0$ (min)	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{y}^\top \cdot A_j \geqq c_j$ (max)
$x_j \in (-\infty, \infty)$	$\Longleftrightarrow$	$\boldsymbol{y}^\top \cdot A_j = c_j$

Príklad 3.1.1 *Zapíšte duálnu úlohu k nasledujúcej úlohe lineárneho programovania:*

$$
\begin{array}{rrrrl}
x_1 & +x_2 & -3x_3 & +x_4 & \to \min \\
3x_1 & -2x_2 & -x_3 & & \leqq 4 \\
 & x_2 & +x_3 & +4x_4 & \leqq 2 \\
x_1 & & +3x_3 & & \geqq 3 \\
 & & & x_{1-4} & \geqq 0
\end{array}
$$

Riešenie: Duálna úlohe bude maximalizačná, keďže primárna je minimalizačná. Primárna úloha má 4 premenné (x_1, x_2, x_3, x_4) a 3 ohraničenia, takže duálna úloha k nej bude mať 4 ohraničenia a 3 premenné (y_1, y_2, y_3). Koeficienty účelovej funkcie primárnej úlohy budú prvkami pravých strán duálnej úlohy a naopak prvky pravých strán primárnej úlohy budú koeficientami účelovej funkcie duálnej úlohy. Matica ohraničení duálnej úlohy bude transponovanou maticou $(\boldsymbol{A}^\top)$ k matici ohraničení primárnej úlohy $(\boldsymbol{A})$. Zapíšeme z duálnej úlohy, to čo sme sa zatiaľ určili:

$$\begin{array}{rrrl}
4y_1 & +2y_2 & +3y_3 & \to \max \\
3y_1 & & +y_3 & \qquad 1 \\
-2y_1 & +y_2 & & \qquad 1 \\
-y_1 & +y_2 & +3y_3 & \quad -3 \\
& 4y_2 & & \qquad 1
\end{array}$$

Ďalej si všimnime, že všetky premenné v primárnej úlohe sú nezáporne. Keďže ide o minimalizačnú úlohu, tak všetky ohraničenia v duálnej úlohe budú typu „$\leqq$“. Prvé dve ohraničenia v primárnej (minimalizačnej) úlohe sú typu „$\leqq$“, takže premenné y_1, y_2 budú nekladné. Tretie ohraničenie je typu „$\geqq$“, čo určuje, že y_3 bude nezáporné. Tak dostaneme kompletný matematický model požadovanej duálnej úlohy:

$$\begin{array}{rrrl}
4y_1 & +2y_2 & +3y_3 & \to \max \\
3y_1 & & +y_3 & \leqq 1 \\
-2y_1 & +y_2 & & \leqq 1 \\
-y_1 & +y_2 & +3y_3 & \leqq -3 \\
& 4y_2 & & \leqq 1
\end{array}$$

$$y_1, y_2 \leqq 0; \quad y_3 \geqq 0.$$

Príklad 3.1.2 *Zapíšte duálnu úlohu k nasledujúcej úlohe lineárneho programovania:*

$$\begin{array}{rrrl}
2x_1 & -x_2 & +4x_3 & \to \max \\
x_1 & +3x_2 & -2x_3 & \geqq 0 \\
2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & \leqq 6 \\
x_1 & -x_2 & -x_3 & = -8 \\
& & x_1 & \geqq 0.
\end{array}$$

Riešenie: Podobne ako v predchádzajúcom príklade 3.1.1 si najprv zapíšeme koeficienty účelovej funkcie z P ako pravé strany v D, prvky pravých strán z P ako koeficienty účelovej funkcie v D a maticu ohraničení v D dostaneme transponovaním matice ohraničení z P:

$$\begin{array}{rrrl}
& 6y_2 & -8y_3 & \to \min \\
y_1 & +2y_2 & +y_3 & \qquad 2 \\
3y_1 & +2y_2 & -y_3 & \quad -1 \\
-2y_1 & +4y_2 & -y_3 & \qquad 4
\end{array}$$

Podľa znakov rovnosti a nerovností ohraničení z P dostaneme podmienky pre jednotlivé premenné y_1, y_2, y_3. Prvé ohraničenie v D bude typu „$\geqq$“, keďže $x_1 \geqq 0$. Ostatné ohraničenia budú v tvare rovnosti, pretože $x_2, x_3 \in (-\infty, \infty)$:

$$\begin{array}{rrrl} & 6y_2 & -8y_3 & \to \min \\ y_1 & +2y_2 & +y_3 & \geqq 2 \\ 3y_1 & +2y_2 & -y_3 & = -1 \\ -2y_1 & +4y_2 & -y_3 & = 4 \\ & & y_1 & \leqq 0 \\ & & y_2 & \geqq 0 \\ & & y_3 & \in (-\infty, \infty). \end{array}$$

3.2 Vzťahy medzi riešeniami primárno – duálnej dvojice úloh

Veta 3.2.1 *(Slabá veta o dualite)*
Ak $\boldsymbol{x}$ je ľubovoľné prípustné riešenie primárnej úlohy 3.1 a $\boldsymbol{y}$ je ľubovoľné prípustné riešenie duálnej úlohy 3.2, tak platí:

$$\boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{y}^\top \cdot \boldsymbol{b}.$$

Dôsledok 3.2.1 *Ak $\boldsymbol{x}$ je ľubovoľné prípustné riešenie primárnej úlohy 3.1, $\boldsymbol{y}$ je ľubovoľné prípustné riešenie duálnej úlohy 3.2 a platí:*

$$\boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top \cdot \boldsymbol{b},$$

tak tieto riešenia $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ sú optimálne.

Dôsledok 3.2.2 *Ak množina prípustných riešení F_D duálnej úlohy 3.2 je neprázdna a jej účelová funkcia je zhora neohraničená na F_D, tak množina prípustných riešení F_P primárnej úlohy 3.1 je prázdna.*

Dôsledok 3.2.3 *Ak množina prípustných riešení F_P primárnej úlohy 3.1 je neprázdna a jej účelová funkcia je zdola neohraničená na F_P, tak množina prípustných riešení F_D duálnej úlohy 3.2 je prázdna.*

Veta 3.2.2 *(Silná veta o dualite)*

1. *Ak jedna z dvojice úloh P – D má optimálne riešenie, potom má optimálne riešenie aj druhá ÚLP a optimálne hodnoty ich účelových funkcií sa rovnajú.*

2. *Ak jedna z dvojice úloh P – D je prípustná, ale neohraničená, tak druhá ÚLP je neprípustná.*

Schématický prehľad rôznych možností pre riešenia dvojice P – D:

$P \backslash D$	má optimum	príp. neohraničená	neprípustná
má optimum	$\surd$	–	–
príp. neohraničená	–	–	$\surd$
neprípustná	–	$\surd$	$\surd$

Veta 3.2.3 *(O komplementarite)*
Nech je daná dvojica P – D, nech $\boldsymbol{x}$ je ľubovoľné prípustné riešenie primárnej úlohy a $\boldsymbol{y}$ je ľubovoľné prípustné riešenie duálnej úlohy. Táto dvojica prípustných riešení je optimálna práve vtedy, ak platí:

$$\begin{aligned} y_i(\boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{x} - b_i) &= 0 \quad \textit{pre } i = 1, \dots, m, \\ (c_j - \boldsymbol{y}^\top \cdot A_j)x_j &= 0 \quad \textit{pre } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

To znamená, že ak poznám riešenie jednej z dvojice P – D úloh, viem určiť aj riešenie druhej úlohy z tejto dvojice.

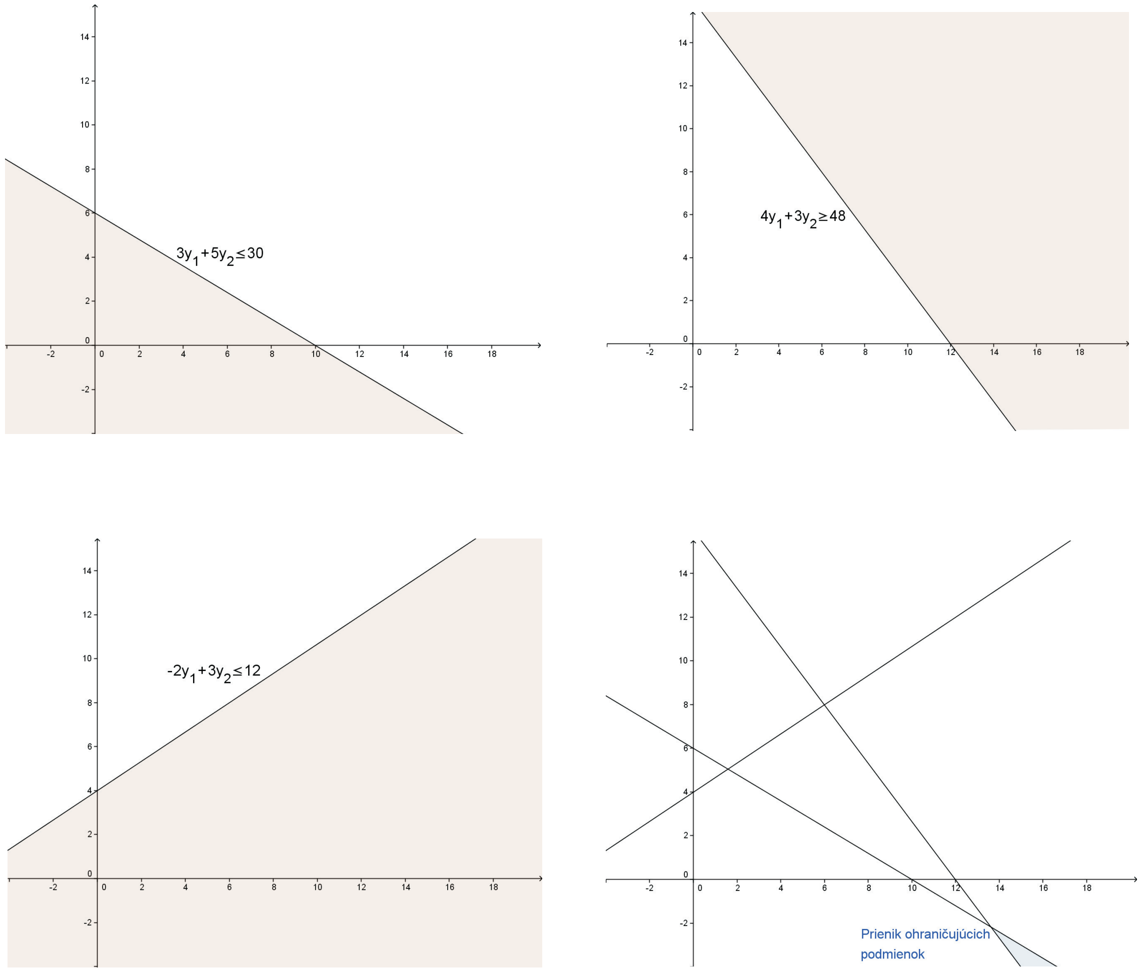
Príklad 3.2.1 *Nájdite optimálne riešenie nasledujúcej úlohy lineárneho programovania:*

$$\begin{aligned} 30x_1 + 48x_2 + 12x_3 &\to \min \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\geqq -2 \\ x_1, x_3 &\geqq 0 \\ x_2 &\leqq 0 \end{aligned}$$

Riešenie: K tejto úlohe vieme nájsť duálnu úlohu, ktorá bude mať dve premenné a tri ohraničujúce podmienky. ÚLP s dvomi premennými vieme vyriešiť graficky. Takže najprv si zapíšeme duálnu úlohu k danej úlohe:

$$\begin{aligned} y_1 - 2y_2 &\to \max \\ 3y_1 + 5y_2 &\leqq 30 \\ 4y_1 + 3y_2 &\geqq 48 \\ -2y_1 + 3y_2 &\leqq 12 \\ y_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Znázorníme si jednotlivé ohraničenia ako polroviny v $\mathbb{R}^2$. Na obrázku 3.1 sú znázornené jednotlivé ohraničenia aj ich prienik. Keď k tomu prieniku pridáme ešte podmienku nezápornosti pre premennú y_2, dostaneme prázdnu množinu prípustných riešení. Keďže duálna úloha je neprípustná, podľa vety 3.2.2 vieme povedať, že primárna úloha nemá optimálne riešenie.



Obr. 3.1: Ohraničenia pre duálnu úlohu.

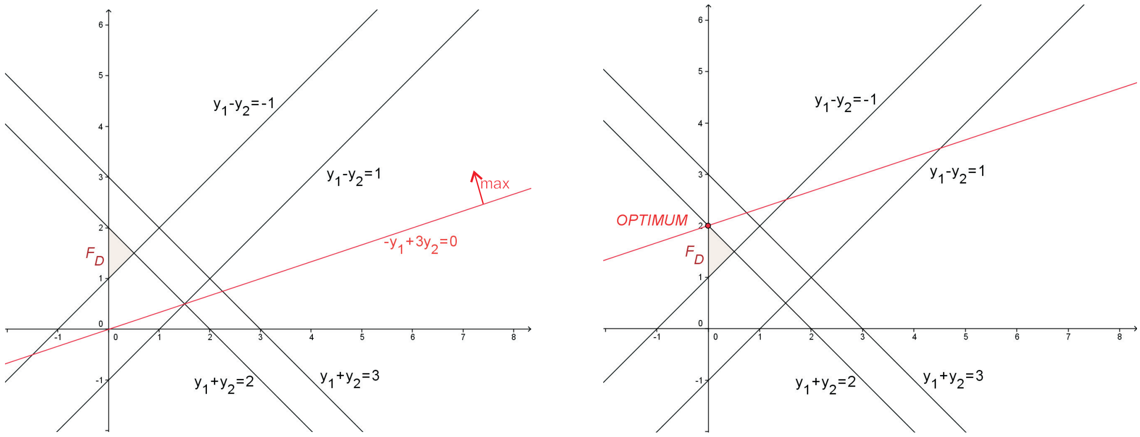
Príklad 3.2.2 *Nájdite optimálne riešenie nasledujúcej úlohy lineárneho programovania. Použite podobný postup ako v príklade 3.2.1:*

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &\to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geqq -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\geqq 3 \\ x_{1-4} &\geqq 0 \end{aligned}$$

Riešenie: Podobne, ako v príklade 3.2.1 máme v tejto úlohe dve ohraničenia, čo znamená, že duálna úloha bude mať dve premenné a budeme ju vedieť vyriešiť graficky. Matematický model duálnej úlohy je takýto:

$$
\begin{aligned}
-y_1 + 3y_2 &\to \max \\
y_1 + y_2 &\leqq 3 \\
y_1 - y_2 &\leqq -1 \\
y_1 + y_2 &\leqq 2 \\
y_1 - y_2 &\leqq 1 \\
y_1, y_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

Graficky znázorníme množinu prípustných riešení a vrstevnicu účelovej funkcie duálnej úlohy.



Obr. 3.2: Grafické riešenie duálnej úlohy.

Vrstevnicu účelovej funkcie posúvame v smere maximalizácie a dostaneme optimálne riešenie. Dosadením toho riešenia do účelovej funkcie dostaneme hodnotu účelovej funkcie v optime: $\boldsymbol{y}^{opt} = (0,2)^\top$, $f_D^{opt}(\boldsymbol{y}) = 6$. Podľa silnej vety o dualite je hodnota účelovej funkcie primárnej úlohy $f_P^{opt}(\boldsymbol{x}) = f_D^{opt}(\boldsymbol{y}) = 6$.
Na nájdenie optimálneho riešenia primárnej úlohy použijeme vetu o komplementarite. Najprv dosadíme $\boldsymbol{y}^{opt}$ do všetkých ohraničení duálnej úlohy a zistíme, ktorá nerovnosť sa nadobúda ako ostrá nerovnosť:

$$
\begin{array}{lll}
0+2 & \leqq 3 & \quad 2 \quad < 3 \\
0-2 & \leqq -1 & \quad -2 \quad < -1 \\
0+2 & \leqq 2 & \quad 2 \quad \leqq 2 \\
0-2 & \leqq 1 & \quad -2 \quad < 1
\end{array}
$$

Vieme, že z vety o komplementarite má platiť $(c_j - \boldsymbol{y}^\top \cdot A_j)x_j = 0$. Pre ohraničenia, ktoré sa nadobúdajú ostro, je $(c_j - \boldsymbol{y}^\top \cdot A_j) \neq 0$ a teda musí byť príslušné $x_j = 0$. Tak dostávame, že $x_1 = x_2 = x_4 = 0$.

Teraz použijeme druhú časť vety o komplementarite a to, že $y_i(\boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{x} - b_i) = 0$. V optimálnom riešení duálnej úlohy vidíme, že $y_2 \neq 0$, takže druhé ohraničenie primárnej úlohy sa musí nadobúdať ako rovnosť. Do neho teda dosadíme $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ a vypočítame x_3.

$$\begin{aligned} 0 - 0 + x_3 - 0 &= 3 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Optimálne riešenie primárnej úlohy je $\boldsymbol{x}^{opt} = (0, 0, 3, 0)^\top$.

Kapitola 4

Simplexová metóda

4.1 Prechod medzi bázickými prípustnými riešeniami

Nech je daná úloha lineárneho programovania v štandardnom tvare (2.5) s n-premennými a m-ohraničujúcimi podmienkami:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n}(c_j \cdot x_j) \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) = b_i, \quad \text{pre } i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geqq 0, \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, n.$$

Majme nejakú bázu $\mathcal{B} = \{A_{B(1)}, A_{B(2)}, \dots, A_{B(m)}\}$ matice ohraničení $\boldsymbol{A}$ a nech $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}}$ je bázické prípustné riešenie prislúchajúce tejto báze, ktorého bázické zložky sú $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}$ (nebázické sú nulové). Platí:

$$\sum_{i=1}^{m}(x_{i0} \cdot A_{B(i)}) = \boldsymbol{b}. \tag{4.1}$$

Keďže $\mathcal{B}$ je báza matice $\boldsymbol{A}$, tak každý stĺpec A_j; $j = 1, 2, \dots, n$, matice $\boldsymbol{A}$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia bázových stĺpcov:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m}(x_{ij} \cdot A_{B(i)}),$$

teda

$$\sum_{i=1}^{m}(x_{ij} \cdot A_{B(i)}) - A_j = \mathbf{0}, \tag{4.2}$$

kde x_{ij} je i-tá súradnica stĺpca A_j v báze $\mathcal{B}$.
Na základe toho je možné dokázať nasledujúcu vetu (jej dôkaz neuvádzame):

Veta 4.1.1 *Nech je dané nejaké bázické prípustné riešenie $\boldsymbol{x}$ sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ prislúchajúce báze $\mathcal{B} = \{A_{B(1)}, A_{B(2)}, \ldots, A_{B(m)}\}$. Nech A_j je taký stĺpec matice $\boldsymbol{A}$, že $A_j \notin \mathcal{B}$. Potom riešenie $\boldsymbol{x}_0'$ určené nasledovne:*

$$x_{i0}' = \begin{cases} x_{i0} - \lambda \cdot x_{ij}; & \textit{pre } i \neq k, \\ \lambda; & \textit{pre } i = k, \end{cases}$$

kde

$$\lambda = \frac{x_{k0}}{x_{kj}} = \min\left\{\frac{x_{i0}}{x_{ij}};\ \textit{pre } i \textit{ také, že } x_{ij} > 0\right\}, \tag{4.3}$$

je prípustným bázickým riešením s bázickými zložkami x_{i0}', pre $i = 1, 2, \ldots, m$, prislúchajúce báze $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{A_j'\} - \{A_k'\}$. Symbol A_j' označuje aktuálny j-tý stĺpec, ktorý do bázy vstupuje a A_k' označuje aktuálny k-tý stĺpec, ktorý z bázy vystupuje.

Definícia 4.1.1 *Prvok x_{kj}, definovaný v predchádzajúcej vete, nazývame pivot a prechod medzi bázickými prípustnými riešeniami nazývame pivotovanie.*

Príklad 4.1.1 *Je daná sústava lineárnych rovníc $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nasledujúcim predpisom:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nájdite bazické prípustné riešenie prislúchajúce báze, ktorá obsahuje štvrtý stĺpec (ak také existuje).

Danú úlohu môžeme zapísať do tabuľky podľa nasledujúcej predlohy:

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}
	x_{30}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}

Ľahko možno vidieť, že v matici A máme bázu $\mathcal{B}$ tvorenu jednotkovou podmaticou, teda stĺpcami A_1, A_2, A_3. Keďže ide o normálnu bázu, tak hodnoty x_{10}, x_{20}, x_{30} budú prvky pravej strany a zároveň je to bazické prípustné riešenie prislúchajúce báze $\mathcal{B}$ pre nenulové premenné x_1, x_2, x_3. Z toho istého dôvodu sú hodnoty x_{ij} pre $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$ zhodné z hodnotami a_{ij}. Po vyplnení vyzerá táto tabuľka takto:

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	6	1	0	0	-2	2
x_2	1	0	1	0	1	1
x_3	3	0	0	1	1	3

Podľa zadania chceme, aby do bázy vstúpil stĺpec A_4. Zistíme, pre ktoré i sú hodnoty x_{i4} kladné. Je to pre $i = 2, i = 3$.

$$i = 2 \quad \dots \quad \frac{x_{20}}{x_{24}} = \frac{1}{1} = 1$$
$$i = 3 \quad \dots \quad \frac{x_{30}}{x_{34}} = \frac{3}{1} = 3$$

Ako vidíme, minimom je $\lambda = 1$, $k = 2$, teda z bázy vystúpi druhý stĺpec a $j = 4$, čo znamená, že do bázy vstúpi štvrtý stĺpec. Pivotom je prvok $x_{24} = 1$.
Teraz chceme nájsť bazické prípustné riešenie prislúchajúce novej báze $\mathcal{B}'$, tvorenej stĺpcami A_1, A_4, A_3. Urobíme to tak, že zo štvrtého stĺpca vytvoríme stĺpec s nulami, len na mieste pivota bude jednotka. Ak je potrebné zmeniť pivota, tak pivotový riadok predelíme pivotom a na ďalšie úpravy používame riadkové úpravy pomocou pivotového riadku. Po pivotovaní bude tabuľka vyzerať takto:

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	8	1	2	0	0	4
x_4	1	0	1	0	1	1
x_3	2	0	-1	1	0	2

Bazické prípustné riešenie prislúchajúce báze $\mathcal{B}'$ nájdeme v stĺpci označenom x_0 aj s označením, ktoré hodnoty prislúchajú ktorej premennej: $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}'} = (8, 0, 2, 1, 0)^\top$.

Nech je daná úloha lineárneho programovania v štandardnom tvare s n-premennými a m-ohraničujúcimi podmienkami v maticovom tvare:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{j=1}^{n} (c_j \cdot x_j) \to \min \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geqq \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

a nech $\boldsymbol{x_0} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ je nejakým bázickým prípustným riešením ohraničení tejto ÚLP. Hodnotu účelovej funkcie v tomto bázickom prípustnom riešení vypočítame:

$$u_0 = \sum_{j=1}^{n} (x_j \cdot c_j).$$

Definícia 4.1.2 *Pre každé $j = 1, 2, \dots, n$ definujeme číslo u_j nasledovne:*

$$u_j = \sum_{i=1}^{m} (x_{ij} \cdot c_j).$$

Číslo $\overline{c_j} = c_j - u_j$ nazývame relatívna cena stĺpca A_j.

Veta 4.1.2 *Ak v bázickom prípustnom riešení* $\boldsymbol{x}_0$ *urobíme pivotovanie, pri ktorom stĺpec* A_j *vstúpi do bázy, účelová funkcia sa zmení o hodnotu*

$$\lambda \cdot \overline{c_j} = \lambda(c_j - u_j).$$

Ak pre každé $j = 1, 2, \ldots, n$ *je* $\overline{c_j} = (c_j - u_j)$ *nezáporné, tak dané bázické prípustné riešenie* $\boldsymbol{x}_0$ *je optimálne.*

Veta 4.1.3 *Ak existuje* j *také, že nasledujúce podmienky:*

1. $\overline{c_j} < 0$,

2. $x_{ij} \leqq 0$ *pre všetky* $i = 1, 2, \ldots, m$,

platia súčasne, tak táto ÚLP je prípustná neohraničená.

4.2 Primárny algoritmus simplexovej metódy

Majme danú úlohu lineárneho programovania v štandardnom tvare (2.5) s n-premennými a m-ohraničujúcimi podmienkami:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{j=1}^{n} (c_j \cdot x_j) \to \min \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geqq \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

Majme nejakú bázu $\mathcal{B} = \{A_{B(1)}, A_{B(2)}, \ldots, A_{B(m)}\}$ matice ohraničení $\boldsymbol{A}$. Ako bolo uvedené v kapitole 2.6, každý stĺpec A_j; $j = 1, 2, \ldots, n$ matice $\boldsymbol{A}$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia bázových stĺpcov a teda:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} (x_{ij} \cdot A_{B(i)}),$$

Nech $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ je bázické prípustné riešenie prislúchajúce báze $\mathcal{B}$. Platí pre neho, že $x_j = 0$ pre všetky j také, že $A_j \notin \mathcal{B}$ a tiež:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j \cdot A_j) = \sum_{i=1}^{m} (x_{i0} \cdot A_{B(i)}) = \boldsymbol{b},$$

kde symbolom x_{i0} označujeme také x_j, že $A_j = A_{B(i)}$.
Hodnotu učelovej funkcie pre dané bázické prípustné riešenie vypočítame takto:

$$u_0 = \sum_{j=1}^{n} (x_j \cdot c_j) = \sum_{i=1}^{m} (x_{i0} \cdot c_{B(i)}).$$

Simplexová tabuľka

Pri riešení sústav lineárnych rovníc väčšinou používame len maticový zápis, nepoužívame symboly premenných. Podobne aj pri riešení úloh lineárneho programovania je kvôli prehľadnosti lepšie nepoužívať symboly premenných, stačí zapisovať maticu koeficientov. Túto maticu budeme zapisovať do *simplexovej tabuľky*.

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
—	$-f$	$\bar{c}_1 = x_{01}$	$\bar{c}_2 = x_{02}$	$\dots$	$\bar{c}_n = x_{0n}$
$x_{B(1)}$	x_{10}	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n}
$x_{B(2)}$	x_{20}	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$x_{B(m)}$	x_{m0}	x_{m1}	x_{m2}	$\dots$	x_{mn}

Nech je báza $\mathcal{B}$ tvorená stĺpcami jednotkovej matice rozmeru $m \times m$.

- V stĺpci označenom „$\mathcal{B}$“ sa budú nachádzať označenia tých premenných, ktorým prislúchajú bázické stlpce.
- V stĺpci označenom „x_0“ sú (okrem okienka „$-f$“) hodnoty príslušného bázického riešenia, teda príslušné prvky pravých strán ohraničení.
- V stĺpci označenom „x_j“ sú súradnice stĺpca A_j v báze $\mathcal{B}$. (Ak pôjde o normálnu bázu, tak v stĺpcoch „x_1“ – „x_n“ budú koeficienty matice ohraničení $\boldsymbol{A}$).
- V riadku označenom „–“ do okienka „$-f$“ zapíšeme nulu a do ostatných okienok koeficienty účelovej funkcie. Hneď pri štartovaní riadkovými úpravami upravíme tento riadok tak, aby nad bázickými stĺpcami boli nuly. Takto v okienku „$-f$“ dostaneme hodnotu účelovej funkcie pre príslušné bázické riešenie a v ostatných okienkach toho riadku hodnoty zodpovedajúcich relatívnych cien.

Veta 4.2.1 *Ak pivotujeme simplexovú tabuľku podľa prvku x_{kj} určeného vzorcom (4.3), tak pre všetky $i = 1, 2, \dots, m$ a $l = 0, 1, \dots, n$ sa prvky simplexovej tabuľky zmenia takto:*

$$x'_{il} = \begin{cases} \frac{x_{il}}{x_{kj}}; & \text{pre } i = k, \\ x_{il} - \frac{x_{ij}}{x_{kj}} \cdot x_{kl}; & \text{pre } i \neq k. \end{cases}$$

Definícia 4.2.1 *Nech je daná simplexová tabuľka úlohy lineárneho programovania. Hovoríme, že táto simplexová tabuľka je primárne prípustná, ak $x_{i0} \geqq 0$ pre každé $i = 1, 2, \dots, m$. Hovoríme, že táto simplexová tabuľka je duálne prípustná, ak $x_{0j} \geqq 0$ pre každé $j = 1, 2, \dots, n$.*

Definícia 4.2.2 *Hovoríme, že simplexová tabuľka úlohy lineárneho programovania je optimálna, ak je primárne aj duálne prípustná,.*

Príklad 4.2.1 *Pomocou simplexovej metódy vyriešte nasledujúci problém:*

$$
\begin{aligned}
15x_1 + 10x_2 &\to \max \\
2x_1 + 4x_2 &\leqq 12 \\
4x_1 + 2x_2 &\leqq 16 \\
2x_1 + 2 &\geqq 2x_2 \\
2x_2 &\leqq 4 \\
x_1, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

Riešenie: Prevedieme danú úlohu do štandardného tvaru, aby sme mohli vyplniť simplexovú tabuľku.

$$
\begin{aligned}
-15x_1 - 10x_2 &\to \min \\
2x_1 + 4x_2 + s_1 &= 12 \\
4x_1 + 2x_2 + s_2 &= 16 \\
-2x_1 + 2x_2 + s_3 &= 2 \\
2x_2 + s_4 &= 4 \\
x_1,\ x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

Úloha v štandardnom tvare má 4 ohraničenia a 6 premenných. Vyplníme simplexovú tabuľku, ktorá ma 6 riadkov a 8 stĺpcov.

B	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
—	0	-15	-10	0	0	0	0
s_1	12	2	4	1	0	0	0
s_2	16	4	2	0	1	0	0
s_3	2	- 2	2	0	0	1	0
s_4	4	0	2	0	0	0	1

Stĺpce s_1, s_2, s_3 a s_4 tvoria bázické stĺpce a v tabuľke ich vidíme ako jednotkovú podmaticu typu 4×4. V nultom stĺpci sa nachádzajú hodnoty pravých strán, ktoré musia byť nezáporné, aby tabuľka bola primárne prípustná,a v nultom riadku sú relatívne ceny, pričom v bázickými stĺpcoch musia byť relatívne ceny nulové. Ak simplexová tabuľka spĺňa všetky tieto podmienky, tak táto tabuľka je pripravená na spustenie simplexovho algoritmu.

Podľa algoritmu, potrebujeme nájsť pivota, ktorý nám určí, ako bude vyzerať nová tabuľka v novej báze. Ten nájdeme tak, že v nultom riadku hľadáme stĺpce so zápornou relatívnou cenou. V našej tabľke to sú stĺpce x_1 a x_2. Vyberieme si stĺpec x_2 a v ňom vypočítame všetky podiely medzi nultým stĺpcom a stĺpcom x_2 pre všetky kladné hodnoty, ktoré sú v stĺpci x_2. Z nich vyberieme minimum, t.j. $\min\{\frac{12}{2}, \frac{16}{4}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}\} = 1$ pre hodnotu v druhom riadku. Hodnota x_{22} je pivotom, čo znamená, že stĺpec s_1 z bázy odchádza a stĺpec x_2 do bázy vstupuje. Prepočítame danú tabuľku podľa pivota x_{22} a dostávame novú simplexovú tabuľku.

B	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
—	80	5	0	0	5	0	0
s_1	20	6	0	1	2	0	0
x_2	8	2	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
s_3	14	6	0	0	1	1	0
s_4	12	4	0	0	1	0	1

V tejto novej tabuľke sa už nenachádzajú v nultom riadku žiadne záporné relatívne ceny, takže sme dostali optimálnu simplexovú tabuľku a môžme napísať optimálne riešenie nášho problému: $\boldsymbol{x}^{opt} = (0, 20)^\top$. Hodnota účelovej funkcie je $f^{opt} = 80$.

Príklad 4.2.2 *Pomocou simplexovej metódy vyriešte nasledujúci problém:*

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - x_6 &\to \min \\
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 4 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 &= 3 \\
x_{1-6} &\geqq 0
\end{aligned}
$$

Riešenie: Daná úlohu je v štandardnom tvare. Môžeme vyplniť simplexovú tabuľku. Úloha v štandardnom tvare má 2 ohraničenia a 6 premenných. Vyplníme simplexovú tabuľku, ktorá ma 4 riadky a 8 stĺpcov.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
—	0	1	2	−1	−2	1	−1
x_5	4	1	1	−1	1	1	0
x_6	3	1	−1	2	−1	0	1

Jednotková podmatica je tvorená stĺpcami x_5 a x_6, ale relatívne ceny v týchto stĺpcoch nie sú nulové. Preto musíme najprv upraviť túto simplexovú tabuľku tak, aby tam boli nulové relatívne ceny, a potom bude simplexová tabuľka pripravená na spustenie algoritmu, ktorý nájde optimálne riešenie, ak existuje.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
—	−1	1	0	2	−4	0	0
x_5	4	1	1	−1	1	1	0
x_6	3	1	−1	2	−1	0	1

V nultom riadku máme len jednu zápornú relatívnu cenu (-4) a v tomto stĺpci hľadáme pivota. Tu sa nachádza len jedno kladné číslo (1), to je pivotom. Prepočítame tabuľku vzhľadom na tohto pivota a dostávame novú simplexovú tabuľku.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
—	15	5	4	-2	0	4	0
x_5	4	1	1	-1	1	1	0
x_6	7	2	0	1	0	1	1

Ďalšieho pivota nájdeme v stĺpci x_3 a opäť to je jediné kladné číslo v tomto stĺpci (1). Prepočítame tabuľku vzhľadom na tohto pivota a dostávame novú simplexovú tabuľku.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
—	29	9	4	0	0	6	2
x_5	11	3	1	0	1	2	1
x_6	7	2	0	1	0	1	1

Táto simplexová tabuľka je optimálna, lebo v nultom riadku sa už nenachádzajú žiadne záporné relatívne ceny. Optimálne riešenie nášho problému je $\boldsymbol{x}^{opt} = (0,0,0,0,7,11)^\top$ a hodnota účelovej funkcie je $f^{opt} = -29$.

Príklad 4.2.3 *Pomocou simplexovej metódy vyriešte nasledujúci problém:*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7 &\to \min \\ 3x_3 + x_5 + x_6 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 10 \\ -x_1 + x_6 &= 0 \\ x_3 + x_6 + x_7 &= 6 \\ x_{1-7} &\geqq 0 \end{aligned}$$

Riešenie: Daná úlohu je v štandardnom tvare, môžeme vyplniť simplexovú tabuľku. Úloha v štandardnom tvare má 4 ohraničenia a 7 premenných. Simplexová tabuľka ma 6 riadkov a 9 stĺpcov.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
—	0	1	-1	1	-3	1	-1	-3
	6	0	0	3	0	1	1	0
	10	0	1	2	-1	0	0	0
	0	-1	0	0	0	0	1	0
	6	0	0	1	0	0	1	1

Táto simplexová tabuľka neobsahuje jednotkovú podmaticu, preto nemôžeme spustiť simplexov algoritmus. Stĺpec x_1 by mohol nahradiť chýbajúci stĺpec jednotkovej podmatice, ale na tretej pozícii sa nachádza hodnota -1 namieso hodnoty 1. To môžeme upraviť po vynásobení tretieho riadku číslom (-1), zároveň ostane simplexová tabuľka primárne prípustná.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
—	0	1	-1	1	-3	1	-1	-3
x_5	6	0	0	3	0	1	1	0
x_2	10	0	1	2	-1	0	0	0
x_1	0	1	0	0	0	0	-1	0
x_7	6	0	0	1	0	0	1	1

Po tejto úprave už máme v simplexovej tabuľke jednotkovú podmaticu, ktorá je tvorená stĺpcami x_5, x_2, x_1 a x_7, ale relatívne ceny v týchto stĺpcoch nie sú nulové. Tabuľku upravíme tak, aby tam boli nulové relatívne ceny.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
—	22	0	0	3	-4	0	2	0
x_5	6	0	0	3	0	1	1	0
x_2	10	0	1	2	-1	0	0	0
x_1	0	1	0	0	0	0	-1	0
x_7	6	0	0	1	0	0	1	1

V nultom riadku sa nachádza len jedna záporná relatívna cena. V stĺpci x_4 so zápornou relatívnou cenou nevieme nájsť pivota, lebo všetky hodnoty v tomto stĺpci sú nekladné. Preto simplexov algoritmus končí a výstupom je, že daná úloha LP je síce prípustná, no neohraničená.

4.3 Dvojfázový algoritmus simplexovej metódy

Ako sme v predchádzajúcej časti mohli vidieť, pomocou simplexovej metódy môžeme riešiť také úlohy lineárneho programovania v štandardnom tvare, ktorých simplexová tabuľka je primárne prípustná (teda v 0-tom stĺpci sú nezáporné hodnoty) a matica ohraničení $\boldsymbol{A}$ obsahuje m-rozmernú jednotkovú podmaticu, ktorá tvorí normálnu bázu.
Ak matica $\boldsymbol{A}$ neobsahuje jednotkovú podmaticu, používame dvojfázový algoritmus simplexovej metódy za použitia tzv. pomocnej úlohy. Nech je daná ÚLP v štandardnom tvare (2.5):

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n}(c_j \cdot x_j) \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j) = b_i, \quad \text{pre } i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geqq 0, \quad \text{pre } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Prvá fáza: Pozostáva z toho, že riešime pomocnú úlohu:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} p_i \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot x_j + p_i) = b_i, \quad \text{pre } i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geqq 0, \quad \text{pre } j = 1, 2, \ldots, n$$

$$p_i \geqq 0, \quad \text{pre } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Poznámka: Pomocné premenné p_i stačí pridať do tých ohraničení, kde nám chýba bázový vektor.

Veta 4.3.1 *Pomocná úloha má vždy optimálne riešenie.*

Veta 4.3.2 *Ak v optimálnom riešení pomocnej úlohy je $\varphi^{opt} \neq 0$, tak pôvodná ÚLP nemá prípustné riešenie.*

Druhá fáza: Ak v optimálnom riešení pomocnej úlohy je $\varphi^{opt} = 0$, tak môžu nastať dva prípady:

1. V optimálnej báze ostala pomocná premenná – vyriešime to tak, že v riadku prislúchajúcom pomocnej premennej nájdeme nejaké nenulové číslo (ak tam žiadne nie je, tak daný riadok môžeme škrtnúť), označíme ho ako pivot a pomocou neho pivotujeme tabuľku. Tak nahradíme pomocnú premennú pôvodnou. Ďalej pokračujeme ako v 2.

2. V optimálnej báze neostala pomocná premenná – máme teda bázické prípustné riešenie pôvodnej ÚLP. Riadok relatívnych cien nahradíme koeficientami pôvodnej účelovej funkcie, stĺpce pre pomocné premenné vypustíme z tabuľky a pokračujeme simplexovou metódou ďalej.

Príklad 4.3.1 *Pomocou simplexovej metódy vyriešte nasledujúci problém:*

$$-x_1 - x_2 + x_3 \to \max$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_{1-3} \geqq 0$$

Riešenie: Danú úlohu prevedieme do štandardného tvaru, aby sme mohli vyplniť simplexovú tabuľku.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\to \min \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_{1-3} &\geqq 0 \end{aligned}$$

Úloha v štandardnom tvare má dve ohraničenia a tri premenné. Vyplníme simplexovú tabuľku, ktorá ma štyri riadky a päť stĺpcov.

B	x_0	x_1	x_2	x_3
—	0	2	1	-1
	2	1	-1	1
	4	-2	1	1

V tejto simplexovej tabuľke sa nenachádza jednotková podmatica a ani ju nevieme získať žiadnou jednoduchou úpravou. Preto musíme najprv vyriešiť pomocnú úlohu, ktorá nám určí bázické stĺpce. Potrebujeme pridať dve pomocné premenné p_1 a p_2. Pomocná úloha má tvar:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &\to \min \\ x_1 - x_2 + x_3 + p_1 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + p_2 &= 4 \\ x_{1-3}, p_{1-2} &\geqq 0 \end{aligned}$$

K tejto pomocnej úlohe v štandardnom tvare zostavíme simplexovú tabuľku:

B	x_0	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2
—	0	0	0	0	1	1
p_1	2	1	-1	1	1	0
p_2	4	-2	1	1	0	1

Túto pomocnú úlohu riešime rovnakým simplexovým algoritmom, ako v príklade 4.2.2. Najprv v stĺpcoch nad jednotkovou podmaticou potrebujeme vytvoriť nulové relatívne ceny.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2
—	-6	1	0	-2	0	0
p_1	2	1	-1	1	1	0
p_2	4	-2	1	1	0	1

V stĺpci x_3 je záporná relatívna cena, preto budeme hľadať pivota tam. Vypočítame $\min\{\frac{2}{1}, \frac{4}{1}\} = 2$. Z bázy odchádza p_1 a do bázy vstúpi x_3. Pivotujeme túto tabuľku a dostávame:

B	x_0	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2
—	-2	3	-2	0	2	0
x_3	2	1	-1	1	1	0
p_2	2	-3	2	0	-1	1

V nultom riadku hľadáme zápornú relatívnu cenu. V stĺpci x_2 je záporná relatívna cena. V tomto stĺpci je len jedna kladná hodnota, preto je pivot daný jednoznačne. Z bázy odchádza p_2 a do bázy vstúpi x_2. Pivotujeme túto tabuľku a dostávame novú simplexovú tabuľku.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2
—	0	0	0	0	1	1
x_3	3	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	1	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dostali sme optimálnu tabuľku, v ktorej pomocné premenné už nie sú v báze a hodnota účelovej funkcie je 0. Zároveň máme aj jednotkovú podmaticu v tabuľke bez posledných dvoch stĺpcov, ktoré zodpovedajú pomocným premenným. To znamená, že končíme pomocnú úlohu a začíname riešiť našu pôvodnú úlohu zo zadania. Vytvoríme si novú simplexovú tabuľku, ktorá už nebude obsahovať posledné dva stĺpce s pomocnými premennými a nultý riadok bude obsahovať koeficienty účelovej funkcie úlohy v štandardnom tvare.

B	x_0	x_1	x_2	x_3
—	0	2	1	-1
x_3	3	$-\frac{1}{2}$	0	1
x_2	1	$-\frac{3}{2}$	1	0

V tejto tabuľke už máme jednotkovú podmaticu, ktorá je tvorená stĺpcami x_3 a x_2, ale po doplnení koeficientov pôvodnej účelovej funkcie do nulého riadku nie sú relatívne ceny v týchto stĺpcoch nulové. Preto najprv upravíme túto simplexovú tabuľku tak, aby tam boli nulové relatívne ceny.

B	x_0	x_1	x_2	x_3
—	2	3	0	0
x_3	3	$-\frac{1}{2}$	0	1
x_2	1	$-\frac{3}{2}$	1	0

Táto simplexová tabuľka je už optimálna, lebo v nultom riadku sa nenachádzajú žiadne záporné relatívne ceny. Optimálne riešenie nášho problému je $\boldsymbol{x}^{opt} = (0, 1, 3)^\top$ a hodnota účelovej funkcie je $f^{opt} = -2$.

Príklad 4.3.2 *Pomocou simplexovej metódy vyriešte nasledujúci problém:*

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &\to \max \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_{1-3} &\geqq 0 \end{aligned}$$

Riešenie: Prevedieme danú úlohu do štandardného tvaru, aby sme mohli vyplniť simplexovú tabuľku.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\to \min \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_{1-3} &\geqq 0 \end{aligned}$$

Úloha v štandardnom tvare má dve ohraničenia a tri premenné. Vyplníme simplexovú tabuľku, ktorá ma štyri riadky a päť stĺpcov.

B	x_0	x_1	x_2	x_3
—	0	1	−2	3
	2	−2	1	3
	1	2	3	4

Podobne, ako v príklade 4.3.2, ani v tejto simplexovej tabuľke sa nenachádza jednotková podmatica. Najprv zostavíme pomocnú úlohu, ktorá nám určí bázické stĺpce. V našom prípade pridáme dve pomocné premenné p_1 a p_2. Pomocná úloha má tvar:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &\to \min \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + p_1 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + p_2 &= 1 \\ x_{1-3}, p_1, p_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

K tejto pomocnej úlohe v štandardnom tvare vytvoríme simplexovú tabuľku.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2
—	0	0	0	0	1	1
p_1	2	−2	1	3	1	0
p_2	1	2	3	4	0	1

Túto pomocnú úlohu riešime rovnakým simplexovým algoritmom, ako v predošlých príkladoch. Najprv nad jednotkovou podmaticou potrebujeme vytvoriť nulové relatívne ceny:

B	x_0	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2
—	-3	0	-4	-7	0	0
p_1	2	-2	1	3	1	0
p_2	1	2	3	4	0	1

V nultom riadku máme dve záporné relatívne ceny. Vyberieme si stĺpec x_3 a určíme pivota. Vypočítame $\min\{\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\} = \frac{1}{4}$. Z bázy odchádza p_2 a do bázy vstúpi x_3. Pivotujeme túto tabuľku vzhľadom na určeného pivota.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2
—	$-\frac{5}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{7}{4}$
p_1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$
p_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$

Dostali sme optimálnu tabuľku pomocnej úlohy, v ktorej jedna pomocná premenná už nie je v báze, ale druhá pomocná premenná p_1 v báze ostala t. j. je $\boldsymbol{x}^{pom} = (0, 0, \frac{1}{4}, \frac{5}{4})^T$ a hodnota účelovej funkcie je $f^{pom} = -\frac{5}{4} \neq 0$. To znamená, že v pôvodnej úlohe nemáme bázické prípustné riešenie, teda daná ÚLP je neprípustná.

4.4 Duálny algoritmus simplexovej metódy

Duálny algoritmus simplexovej metódy používame na riešenie primárnej úlohy lineárneho programovania. No zatiaľ čo pri primárnom algoritme musí byť simplexová tabuľka primárne prípustná, duálny algoritmus používame, ak tabuľka nie je primárne prípustná (nie je možné použiť primárny algoritmus), no je duálne prípustná. Oproti primárnemu algoritmu akoby koeficienty účelovej funkcie $\boldsymbol{c}$ a pravých strán ohraničení $\boldsymbol{b}$ mali vymenenú úlohu. Tiež prechádzame od jedného bázického riešenia k inému, no snažíme sa zachovať duálnu prípustnosť. Pivota však volíme iným spôsobom:

- Pivota vyberáme v i-tom riadku, kde je hodnota $x_{i0} < 0$.
- Pre všetky $x_{ij} < 0$ tom riadku vypočítame podiel $\frac{x_{0j}}{x_{ij}}$ a určíme λ.

$$\lambda = \frac{x_{0k}}{x_{ik}} = \max\left\{\frac{x_{0j}}{x_{ij}};\ \text{pre } j \text{ také, že } x_{ij} < 0\right\}.$$

- Takto určené x_{ik} je pivotom a tabuľku ďalej pivotujeme rovnakým spôsobom ako pri primárnom simplexovom algoritme.

Vyberanie pivota v primárnom a duálnom algoritme simplexovej metódy

Primárny algoritmus SM	Duálny algoritmus SM
vybrať j-tý stĺpec do bázy tak, že $x_{0j} < 0$	vybrať i-tý riadok von bázy tak, že $x_{i0} < 0$
vypočítať $\frac{x_{i0}}{x_{ij}}$, $\forall x_{ij} > 0$ v j-tom stĺpci	vypočítať $\frac{x_{0j}}{x_{ij}}$, $\forall x_{ij} < 0$ v i-tom riadku
$\frac{x_{k0}}{x_{kj}} = \min\left\{\frac{x_{i0}}{x_{ij}};\ \text{pre } i \text{ také, že } x_{ij} > 0\right\}$	$\frac{x_{0k}}{x_{ik}} = \max\left\{\frac{x_{0j}}{x_{ij}};\ \text{pre } j \text{ také, že } x_{ij} < 0\right\}$
pivotom je prvok x_{kj} (musí byť kladný)	pivotom je prvok x_{ik} (musí byť záporný)
ak v každom stĺpci, kde $x_{0j} < 0$, je každé $x_{ij} \leqq 0$, tak ÚLP je neohraničená	ak v každom riadku, kde $x_{i0} < 0$, je každé $x_{ij} \geqq 0$, tak ÚLP je neprípustná

Príklad 4.4.1 *Pomocou simplexovej metódy vyriešte nasledujúci problém:*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\to \min \\ x_1 - x_2 - x_3 &\geqq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geqq 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\geqq 1 \\ x_{1-3} &\geqq 0 \end{aligned}$$

Riešenie: Danú úlohu prevedieme do štandardného tvaru.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\to \min \\ x_1 - x_2 - x_3 - s_1 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - s_2 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - s_3 &= 1 \\ x_{1-3}, s_{1-3} &\geqq 0 \end{aligned}$$

Úloha v štandardnom tvare má tri ohraničenia a šesť premenných. Vyplníme simplexovú tabuľku, ktorá ma päť riadkov a osem stĺpcov.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
—	0	3	2	3	0	0	0
	2	1	-1	-1	-1	0	0
	4	1	1	1	0	-1	0
	1	1	-2	1	0	0	-1

V tejto tabuľke nemáme jednotkovú podmaticu. Vynásobením každého riadku číslom (-1) by sme jednotkovu podmaticu dostali, ale simplexová tabuľka by nebola primárne prípustná.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
—	0	3	2	3	0	0	0
s_1	-2	-1	1	1	1	0	0
s_2	-4	-1	-1	-1	0	1	0
s_3	-1	-1	2	-1	0	0	1

Táto tabuľka je však duálne prípustná. Na riešenie použijeme *Duálnu simplexovú metódu.* V nultom stĺpci si vyberiem zápornú hodnotu. Ak v takomto riadku nájdem pivota, potom stĺpec, ktorý zodpovedá tejto premennej, pôjde z bázy von a do bázy vstúpi stĺpec, v ktorom sme našli pivota. Vyberme si posledný riadok a v ňom máme určiť pivota. Vypočítame $\max\{\frac{3}{-1}, \frac{3}{-1}\} = -3$. Zvoľme pivota v prvom stĺpci x_1. Pivotujeme tabuľku vzhľadom na určeného pivota a dostávame novú simplexovú tabuľku, ktorá je ešte stále primárne neprípustná, ale duálne prípustná. Znovu vyberiame pivota podľa duálnej simplexovej metódy.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
—	-3	0	8	0	0	0	3
s_1	-1	0	-1	2	1	0	-1
s_2	-3	0	-4	0	0	1	-1
x_1	1	1	-2	1	0	0	-1

Nájdeme zápornú hodnotu v nultom stĺpci a v tomto riadku určíme pivota. Nech je to druhý riadok, v ktorom určíme pivota. Vypočítame $\max\{\frac{8}{-4}, \frac{3}{-1}\} = -2$. Do bázy vstúpi x_2 a z bázy odíde s_2. Prepočítame tabuľku vzhľadom na určeného pivota.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
—	-9	0	0	0	0	2	1
s_1	$-\frac{1}{4}$	0	0	2	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
x_2	$\frac{3}{4}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

V nultom stĺpci už máme len jednu zápornú hodnotu. V prvom riadku určíme pivota. Vypočítame $\max\{\frac{2}{-\frac{1}{4}}, \frac{1}{-\frac{3}{4}}\} = -\frac{4}{3}$. Do bázy vstúpi s_3 a z bázy oddíde s_1.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
—	$-\frac{28}{3}$	0	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	0
s_1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
x_2	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
x_1	$\frac{8}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

Dostali sme optimálnu tabuľku s optimálnym riešením ÚLP: $\boldsymbol{x}^{opt} = (\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 0)^\top$ a hodnota účelovej funkcie je $f^{opt} = \frac{28}{3}$.

Kapitola 5

Celočíselné lineárne programovanie

5.1 Úloha celočíselného lineárneho programovania

Definícia 5.1.1 *Úlohu lineárneho programovania v nasledujúcom tvare:*

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} \to \min\ (\max)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{x} \left\{ \begin{array}{c} \leqq \\ = \\ \geqq \end{array} \right\} \boldsymbol{b} \tag{5.1}$$

$$x_j \lesseqqgtr 0; \qquad x_j \in \mathbb{Z}; \qquad j = 1, 2, \ldots, n\ ,\ kde$$

koeficienty účelovej funkcie, koeficienty pravých strán a prvky matice ohraničení sú celočíselné, nazývame úlohou celočíselného lineárneho programovania (ÚCLP).

Poznámka: Maticový zápis ÚCLP s n premennými a m ohraničujúcimi podmienkami v štandardnom tvare je takýto:

$$\begin{aligned}
& f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} \to \min \\
& \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \quad x_i \geqq 0; \qquad x_j \in \mathbb{Z}; \quad \text{pre } j = 1, 2, \ldots, n, \\
& \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}; \qquad \boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^n; \qquad \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m.
\end{aligned}$$

Definícia 5.1.2 *Ak z úlohy celočíselného lineárneho programovania (5.1) vynecháme podmienku celočíselnosti premenných ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$), dostaneme úlohu lineárneho programovania, ktorú nazývame relaxáciou ÚCLP (5.1).*

Veta 5.1.1 *Ak optimálne riešenie relaxácie úlohy celočíselného lineárneho programovania (5.1) je celočíselné, tak je to aj optimálnym riešením úlohy celočíselného lineárneho programovania (5.1).*

Príklad 5.1.1 *Potrebujeme kúpiť skrinky na zakladanie šanónov. K dispozícii sú dva typy – S40 a Sk60. Typ S40 stojí 10 € za kus, na jej umiestnenie potrebujeme 0,55 m^2 podlahovej plochy a skrinka poskytuje 0,22 m^3 odkladacieho priestoru. Typ Sk60 stojí 20 € za kus, na jej umiestnenie potrebujeme 0,74 m^2 podlahovej plochy a skrinka poskytuje 0,56 m^3 odkladacieho priestoru. Na zakúpenie skriniek máme rozpočet maximálne 140 €. V kancelárii je na umiestnenie skriniek najviac ak 6,6 m^2 podlahovej plochy. Koľko kusov z jednotlivých druhov skriniek je potrebné objednať, aby sme získali čo najväčší odkladací priestor?*

Riešenie: Zapíšeme matematický model danej úlohy, kde počet objednaných kusov skriniek S40 označíme premennou x_1 a počet objednaných kusov skriniek Sk20 označíme premennou x_2:

$$\begin{aligned} 0,22x_1 + 0,56x_2 &\to \max \\ 10x_1 + 20x_2 &\leqq 140 \\ 0,55x_1 + 0,74x_2 &\leqq 6,6 \\ x_1, x_2 &\geqq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Účelovú funkciu aj ohraničenia predelíme, alebo vynásobíme vhodným číslom, aby sme dostali celočíselné koeficienty:

$$\begin{aligned} 11x_1 + 28x_2 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 &\leqq 14 \\ 55x_1 + 74x_2 &\leqq 660 \\ x_1, x_2 &\geqq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Dostali sme ÚCLP. Vynecháme podmienku $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^n$, dostaneme relaxáciu danej ÚCLP a tú prepíšeme do štandardného tvaru:

$$\begin{aligned} -11x_1 - 28x_2 &\to \min \\ x_1 + 2x_2 + s_1 &= 14 \\ 55x_1 + 74x_2 + s_2 &= 660 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Danú ulohu vyriešime simplexovou metódou:

B	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2
—	0	-11	-28	0	0
s_1	14	1	2	1	0
s_2	660	55	74	0	1

Tabuľka nie je optimálna, budeme ju pivotovať, pivotom bude 2:

B	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2
—	196	3	0	19/2	0
x_2	7	1/2	1	1/2	0
s_2	142	18	0	−37	1

Optimálnym riešením relaxácie danej ÚCLP je $\boldsymbol{x}^{opt} = (0, 7)^\top$; $f^{opt} = -196 : (-50) = 3,92$. Keďže toto $\boldsymbol{x}^{opt} = (0, 7) \in \mathbb{Z}^2$, tak je to zároveň optimálnym riešením pôvodnej ÚCLP. Najvhodnejšie bude objednať 7 kusov skrinky typu Sk60 a získame tým $3,92\ m^3$ odkladacieho priestoru.

5.2 Grafické znázornenie úlohy celočíselného lineárneho programovania v $\mathbb{R}^2$

V tejto časti je uvedených niekoľko príkladov úlohy celočíselného programovania a ich znázornenie v $\mathbb{R}^2$.
V nasledujúcich príkladoch graficky znázornite množinu prípustných riešení, optimálne riešenie relaxácie danej úlohy a tiež množinu prípustných riešení a optimálne riešenie danej úlohy.

Príklad 5.2.1 *ÚCLP je daná takto:*

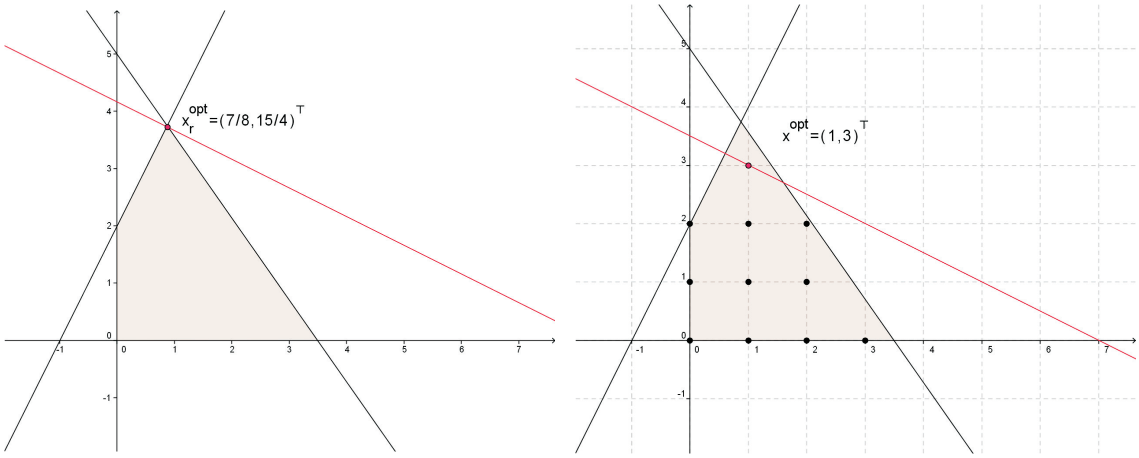
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\to \max \\ 10x_1 + 7x_2 &\leqq 35 \\ -2x_1 + x_2 &\leqq 2 \\ x_1, x_2 &\geqq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Riešenie: Na obrázku 5.1 vľavo vidieť znázornenú množinu prípustných riešení relaxácie danej úlohy CLP. Relaxácia má jedno optimálne riešenie $\boldsymbol{x}_r^{opt} = (7/8, 15/4)^\top$, ktoré nie je celočíselné, takže nie je zároveň optimálnym riešením riešením ÚCLP. Množinu prípustných riešení ÚCLP vidieť na obrázku 5.1 vpravo (je to množina vyznačených bodov). Optimálne riešenie danej ÚCLP je jedno a to $\boldsymbol{x}^{opt} = (1, 3)^\top$.

Príklad 5.2.2 *ÚCLP je daná takto:*

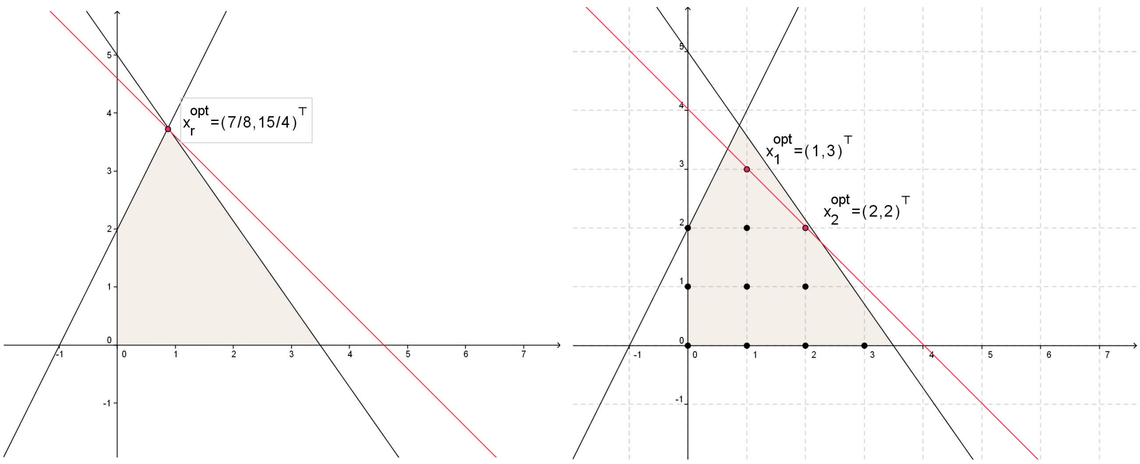
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max \\ 10x_1 + 7x_2 &\leqq 35 \\ -2x_1 + x_2 &\leqq 2 \\ x_1, x_2 &\geqq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Riešenie: Keďže ohraničujúce podmienky tejto ÚCLP sú tie isté ako v príklade 5.2.1, tak množina prípustných riešení relaxácie danej úlohy CLP, aj množina prípustných riešení



Obr. 5.1: Grafické znázornenie riešenia ÚCLP z príkladu 5.2.1.

ÚCLP sú také isté ako v príklade 5.2.1. Relaxácia má jedno optimálne riešenie a je také ako v príklade 5.2.1: $\boldsymbol{x}_r^{opt} = (7/8, 15/4)^\top$ (obrázok 5.2 vľavo). Daná ÚCLP má však dve optimálne riešenia: $\boldsymbol{x}_1^{opt} = (1,3)^\top$ a $\boldsymbol{x}_2^{opt} = (2,2)^\top$ (obrázok 5.2 vpravo).

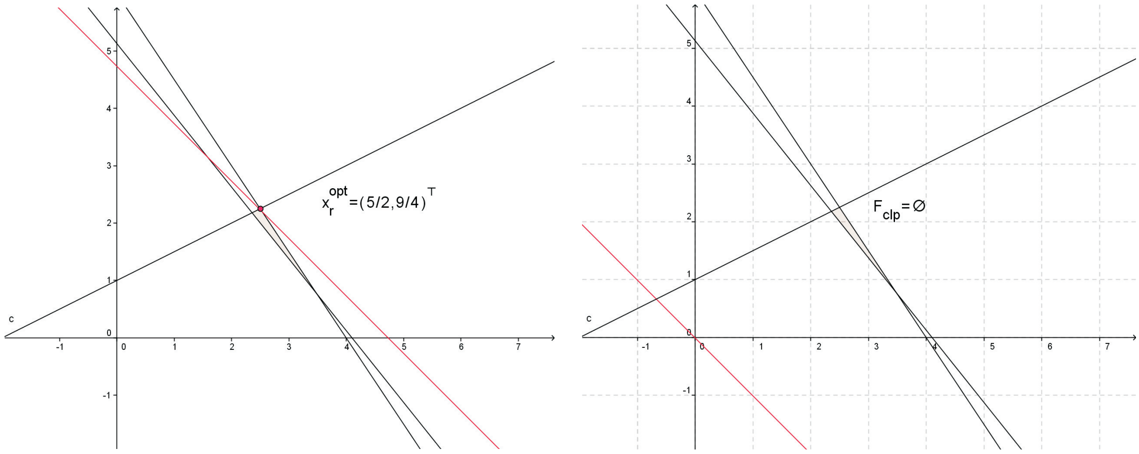


Obr. 5.2: Grafické znázornenie riešenia ÚCLP z príkladu 5.2.2.

Príklad 5.2.3 *ÚCLP je daná takto:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max \\ 10x_1 + 8x_2 &\geqq 41 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqq 12 \\ -x_1 + 2x_2 &\leqq 2 \\ x_1, x_2 &\geqq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Riešenie: Na obrázku 5.3 vľavo je znázornená množina prípustných riešení relaxácie danej úlohy CLP. Relaxácia má jedno optimálne riešenie $\boldsymbol{x}_r^{opt} = (5/2, 9/4)^\top$, ktoré nie je zároveň optimálnym riešením riešením ÚCLP. Na tom istom obrázku vpravo môžeme vidieť, že množina prípustných riešení danej ÚCLP je prázdna a teda napriek tomu, že relaxácia ÚCLP má optimálne riešenie, táto ÚCLP je neprípustná.



Obr. 5.3: Grafické znázornenie riešenia ÚCLP z príkladu 5.2.3.

Príklad 5.2.4 *ÚCLP je daná takto:*

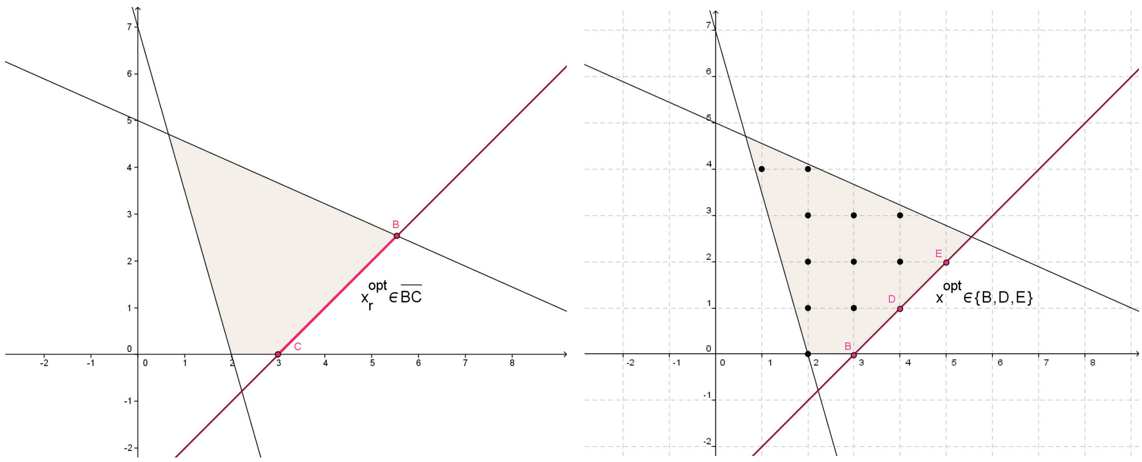
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\to \max \\ 10x_1 + 8x_2 &\geqq 41 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqq 12 \\ -x_1 + 2x_2 &\leqq 2 \\ x_1, x_2 &\geqq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Riešenie: Množina prípustných riešení relaxácie danej úlohy CLP je znázornená na obrázku 5.4 vľavo. Relaxácia má viac ako jedno (nekonečne veľa) optimálne riešenie. Množinou optimálnych riešení relaxácie je celá úsečka $\overline{BC}$. Množina prípustných riešení danej úlohy CLP je znázornená na obrázku 5.4 vpravo. Daná ÚCLP má tiež viac ako jedno (tri) optimálne riešenie $\boldsymbol{x}^{opt} \in \{(3,0)^\top, (4,1)^\top, (5,2)^\top\}$.

Príklad 5.2.5 *ÚCLP je daná takto:*

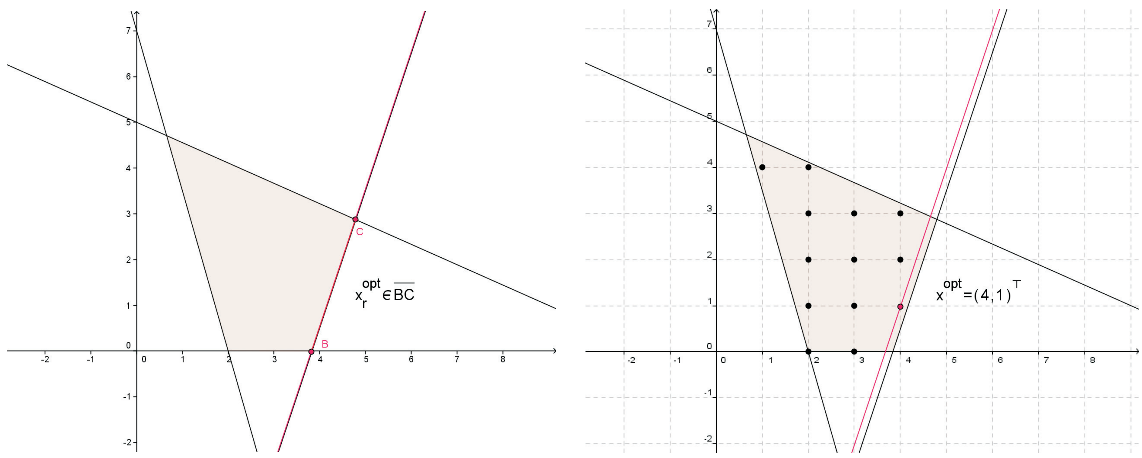
$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &\to \min \\ 7x_1 + 2x_2 &\geqq 14 \\ 4x_1 + 9x_2 &\leqq 45 \\ 6x_1 - 2x_2 &\leqq 23 \\ x_1, x_2 &\geqq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Riešenie: Množina prípustných riešení relaxácie danej úlohy CLP je znázornená na obrázku 5.5 vľavo. Relaxácia má podobne ako v príklade 5.2.4 viac ako jedno (nekonečne



Obr. 5.4: Grafické znázornenie riešenia ÚCLP z príkladu 5.2.4.

veľa) optimálne riešenie, množinou optimálnych riešení relaxácie je úsečka $\overline{BC}$. Množina prípustných riešení danej úlohy CLP je znázornená na obrázku 5.5 vpravo. Daná ÚCLP má len jedno optimálne riešenie $\boldsymbol{x}^{opt} = (4, 1)^\top$.

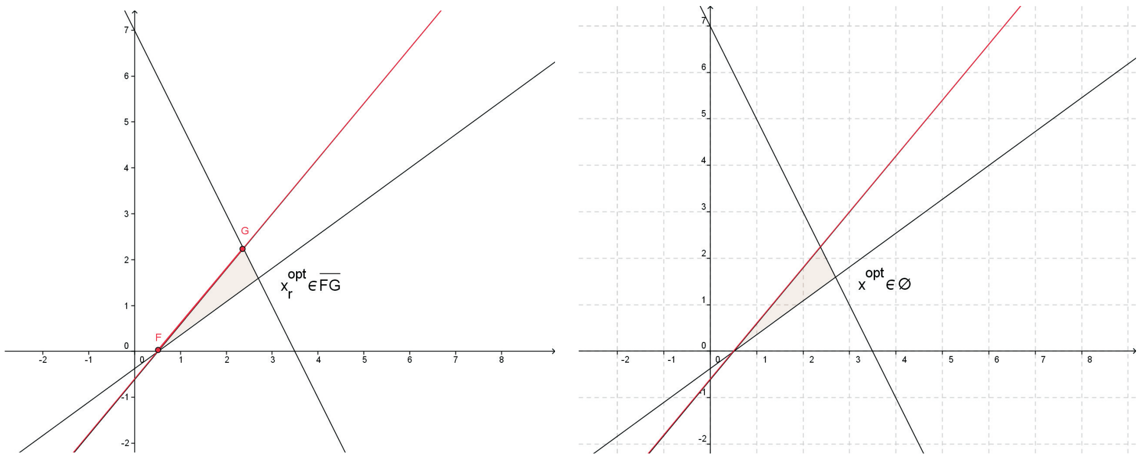


Obr. 5.5: Grafické znázornenie riešenia ÚCLP z príkladu 5.2.5.

Príklad 5.2.6 *ÚCLP je daná takto:*

$$
\begin{aligned}
-3x_1 + x_2 &\to \min \\
7x_1 + 2x_2 &\geqq 14 \\
4x_1 + 9x_2 &\leqq 45 \\
6x_1 - 2x_2 &\leqq 23 \\
x_1, x_2 &\geqq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Riešenie: Relaxácia má podobne ako v príkladoch 5.2.4 a 5.2.5 nekonečne veľa optimálnych riešení, množinou optimálnych riešení relaxácie je úsečka $\overline{FG}$ (viď obrázok 5.6 vľavo). Na obrázku 5.6 vpravo však možno vidieť, že množina prípustných riešení danej úlohy CLP je prázdna a daná ÚCLP nemá optimálne riešenie, teda ÚCLP je neprípustná.



Obr. 5.6: Grafické znázornenie riešenia ÚCLP z príkladu 5.2.6.

Príklad 5.2.7 *ÚCLP je daná takto:*

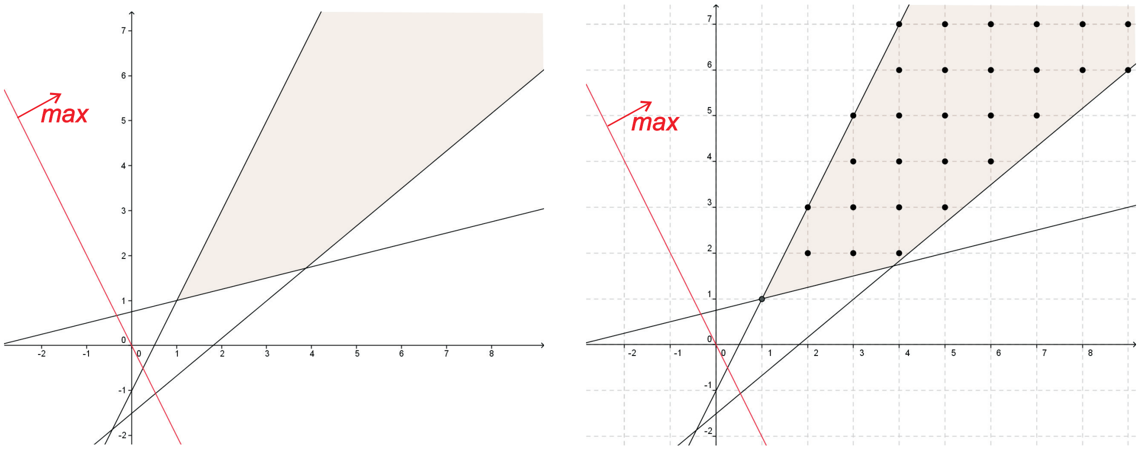
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\to \max \\ x_1 - 4x_2 &\leqq -3 \\ -2x_1 + x_2 &\leqq -1 \\ -5x_1 + 6x_2 &\geqq -9 \\ x_1, x_2 &\geqq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Riešenie: Relaxácia tejto ÚCLP je prípustná neohraničená – pozri obrázok 5.7 vľavo. Podobne aj samotná CLP je prípustná neohraničená, ako to zobrazuje obrázok 5.7 vpravo.

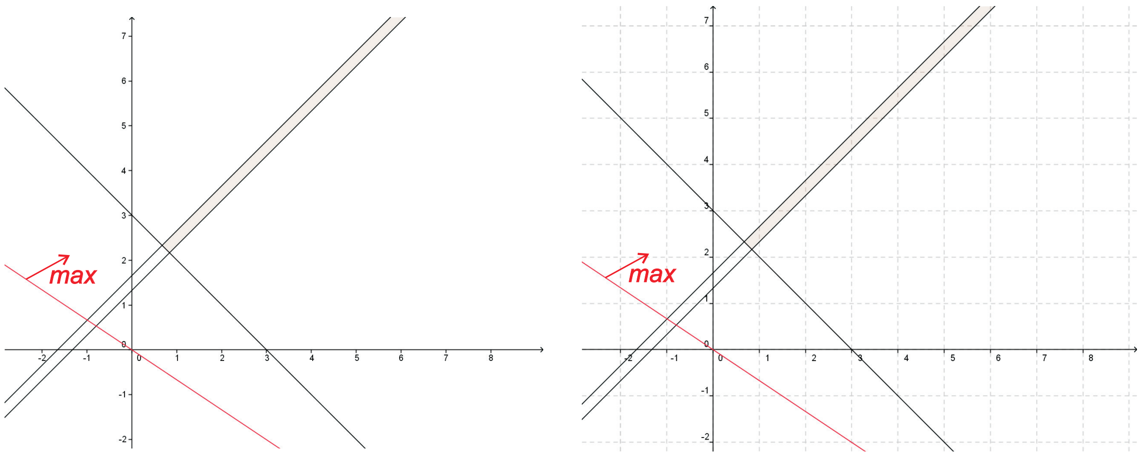
Príklad 5.2.8 *ÚCLP je daná takto:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to \max \\ 3x_1 - 3x_2 &\geqq -5 \\ 3x_1 - 3x_2 &\leqq -4 \\ x_1 + x_2 &\geqq 3 \\ x_1, x_2 &\geqq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Riešenie: Relaxácia tejto ÚCLP je tak ako v príklade 5.2.7 prípustná neohraničená – obrázok 5.8 vľavo. Na obrázku 5.8 vpravo však možno vidieť, že ÚCLP je neprípustná.



Obr. 5.7: Grafické znázornenie riešenia ÚCLP z príkladu 5.2.7.

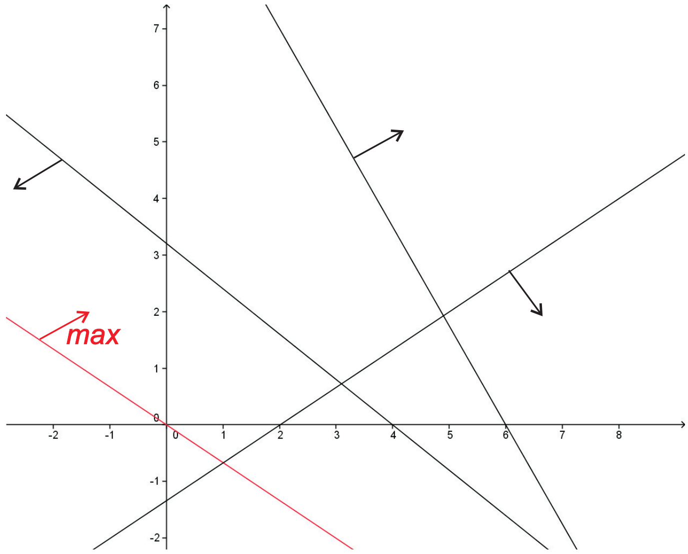


Obr. 5.8: Grafické znázornenie riešenia ÚCLP z príkladu 5.2.8.

Príklad 5.2.9 *ÚCLP je daná takto:*

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &\to \min\\ 4x_1 + 5x_2 &\leqq 16\\ 7x_1 + 4x_2 &\geqq 42\\ -2x_1 + 3x_2 &\leqq -4\\ x_1, x_2 &\geqq 0; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Riešenie: Ako je znázornené na obrázku 5.9, relaxácia danej ÚCLP je neprípustná, to znamená, že daným ohraničujúcim podmienkam nevyhovuje žiadne $\boldsymbol{x}$. Keďže platí, že množina prípustných riešení ÚCLP je podmnožinou množiny prípustných riešení jej relaxácie, tak aj daná ÚCLP je neprípustná.



Obr. 5.9: Grafické znázornenie riešenia ÚCLP z príkladu 5.2.9.

Pozorovanie:
V predchádzajúcich príkladoch sme si mohli všimnúť, že množina prípustných riešení relaxácie ÚCLP môže byť prázdna, neprázdna ohraničená a neprázdna neohraničená, to isté platí aj pre množinu prípustných riešení ÚCLP. Počet optimálnych riešení relaxácie ÚCLP môže byť nula, jedno a viac ako jedno (nekonečne veľa). Počet optimálnych riešení ÚCLP môže byť nula, jedno a viac ako jedno. Nasledujúca tabuľka prehľadne znázorňuje, ktoré možnosti kombinácie „relaxácia ÚCLP – ÚCLP“ sú možné (označené: $\surd$) a ktoré nie (označené: –).

relaxácia ÚCLP\ÚCLP	má 1 opt.	má >1 opt.	príp. neohran.	neprípustná
má jedno optimum	$\surd$	$\surd$	–	$\surd$
má viac ako jedno optimum	$\surd$	–	$\surd$	$\surd$
prípustná neohraničená	–	–	$\surd$	$\surd$
neprípustná	–	–	–	$\surd$

5.3 Gomoryho zlomkový algoritmus

Úlohy celočíselného lineárneho programovania s dvomi premennými môžeme s istými obmedzeniami vyriešiť graficky. Čo však v prípade, keď ÚCLP má viac ako 2 rozhodovacie premenné? V podkapitole 5.1 je uvedený príklad 5.1.1, ktorý je riešený simplexovou metódou. Keďže relaxácia danej úlohy mala celočíselné riešenie, bolo zároveň riešením ÚCLP. V prípade, že relaxácia ÚCLP nemá celočíselné riešenie, pri jej riešení používame takzvanú metódu rezných nadrovín, ináč tiež nazývanú *Gomoryho zlomkový algoritmus*. Najprv sa pomocou simplexovej metódy vyrieši relaxácia danej ÚCLP. Gomoryho zlomkový algoritmus pridáva k úlohe lineárneho programovania také ohraničenia – *Gomoryho rezy*, ktoré zužujú množinu prípustných riešení o niektoré okrajové časti neobsahujúce body s celočíselnými hodnotami. Na riešenie úlohy rozšírenej o takýto rez je výhodné použiť duálnu simplexovú metódu.

Nech je daná úloha celočíselného lineárneho programovania v štandardnom tvare:

$$
\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\top \cdot \boldsymbol{x} \to \min \\
&\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
&\quad x_i \geqq 0; \qquad x_j \in \mathbb{Z}; \quad \text{pre } j = 1, 2, \ldots, n, \\
&\quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}; \qquad \boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^n; \qquad \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m.
\end{aligned}
$$

Nech máme optimálnu tabuľku pre relaxáciu danej ÚCLP. Prvky optimálnej tabuľky budeme označovať γ_{ij}.

Veta 5.3.1 *Nech v optimálnej simplexovej tabuľke existuje také $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, pre ktoré $\gamma_{i0} \notin \mathbb{Z}$. Ak k tabuľke pridáme rovnicu*

$$\sum_{j=1}^{n} \{\gamma_{ij}\} \cdot x_j - g = \{\gamma_{i0}\}, \qquad g \geqq 0,$$

tak žiadne celočíselné prípustné riešenie ÚCLP sa nevylúči a nová simplexová tabuľka bude primárne neprípustná, duálne prípustná a bazická.

Gomoryho zlomkový algorizmus:

1. Vyriešime relaxáciu danej úlohy. Ak je jej riešenie optimálne, je zároveň aj riešením danej úlohy. Ak nie, pokračujeme ďalej.
2. Keďže relaxácia ÚCLP nemá celočíselné riešenie, existuje nejaké $\gamma_{i0} \notin \mathbb{Z}$. Podľa toho riadku pridáme nové ohraničenie – Gomoryho rez:

$$\sum_{j=1}^{n} \{\gamma_{ij}\} \cdot x_j - g = \{\gamma_{i0}\}, \qquad g \geqq 0$$

3. Do tabuľky (optimálnej tabuľky pre relaxáciu) pridáme jeden stĺpec pre premennú g a riadok pre Gomoryho rez.
4. Pomocou duálnej simplexovej metódy nájdeme nové optimum. Ak je celočíselné, je to optimom pôvodnej ÚCLP. Ak nie, vratime sa k bodu 2.

Označenie:

- Symbolom $\{a\}$ označujeme *zlomkovú časť* čísla a. Platí, že $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$.

- Symbolom $\lfloor a \rfloor$ označujeme *dolnú celú časť* čísla a, teda najbližšie menšie alebo rovné celé číslo k číslu a.

Príklad 5.3.1 *Stolárska dielňa vyrába tri typy stolov. Na ich výrobu používajú tri rôzne druhy drevených dosák. Spotreba týchto dosák na výrobu jedného stola rôznych druhov, zásoby dosák a zisk z predaja jedného stola sú dané v nasledujúcej tabuľke:*

stoly\dosky	D_1	D_2	D_3	*zisk (€)*
S_1	2	4	0	8
S_2	1	0	1	10
S_3	1	2	1	12
zásoby	80	50	40	—

Navrhnite výrobný plán pre stolársku dielňu tak, aby bol zisk maximálny.

Riešenie: Zapíšeme matematický model danej úlohy v štandardnom tvare:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 10x_2 + 12x_3 &\to \max \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 &= 80 \\ 4x_1 + 2x_3 + s_2 &= 50 \\ x_2 + x_3 + s_3 &= 40 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geqq 0; &\quad x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Úlohu zapíšeme do simplexovej tabuľky.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
—	0	-4	-5	-6	0	0	0
s_1	80	2	1	1	1	0	0
s_2	50	4	0	2	0	1	0
s_3	40	0	1	1	0	0	1

Tabuľka je bázická, primárne prípustná, no nie optimálna. Budeme ju pivotovať, pivotom bude prvok $x_{32} = 1$. Pivotovaním dostaneme tabuľku:

B	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
—	200	-4	0	-1	0	0	5
s_1	40	2	0	0	1	0	-1
s_2	50	4	0	2	0	1	0
x_2	40	0	1	1	0	0	1

Znova pivotujeme tabuľku, tentokrát je pivotom $x_{23} = 2$.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
—	225	-2	0	0	0	1/2	5
s_1	40	2	0	0	1	0	-1
x_3	25	2	0	1	0	1/2	0
x_2	15	-2	1	0	0	-1/2	1

Keďže ani táto tabuľka nie je optimálna, pivotujeme ju a pivotom bude $x_{21} = 2$.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
—	250	0	0	1	0	1	5
s_1	15	2	0	0	1	0	-1
x_1	25/2	1	0	1/2	0	1/4	0
x_2	40	0	1	1	0	0	1

Táto simplexová tabuľka je optimálna a riešenie relaxácie danej úlohy je $x_r^{opt} = (25/2, 40, 0)^\top$. Keďže riešenie relaxácie nie je celočíselné, nie je to riešením ÚCLP. Hodnota premennej x_1 je neceločíselná a tak pridáme Gomoryho rez podľa riadku simplexovej tabuľky, ktorý jej prislúcha:

$$\{1\} \cdot x_1 + \{0\} \cdot x_2 + \{1/2\} \cdot x_3 + \{0\} \cdot s_1 + \{1/4\} \cdot s_2 + \{0\} \cdot s_3 - g = \{25/2\}.$$

Úpravou dostaneme:

$$-1/2 \cdot x_3 - 1/4 \cdot s_2 + g = -1/2.$$

Do tabuľky doplníme stĺpec pre g a riadok pre Gomoryho rez:

B	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	g
—	250	0	0	1	0	1	5	0
s_1	15	2	0	0	1	0	-1	0
x_1	25/2	1	0	1/2	0	1/4	0	0
x_2	40	0	1	1	0	0	1	0
g	-1/2	0	0	-1/2	0	-1/4	0	1

Získaná simplexová tabuľka je primárne neprípustná, ale duálne prípustná a bazická. Použijeme duálny simplexov algoritmus a pivotovať je budeme podľa pivota $x_{43} = -1/2$.

B	x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	g
—	249	0	0	0	0	1/2	5	2
s_1	16	0	0	0	1	0	-1	-2
x_1	12	1	0	0	0	0	0	1
x_2	39	0	1	0	0	-1/2	1	2
x_3	1	0	0	1	0	1/2	0	-2

Ako možno vidieť, táto simplexová tabuľka je optimálna a riešenie je navyše celočíselné. Takže riešením úlohy celočíselného lineárneho programovania je $\boldsymbol{x}^{opt} = (12, 39, 1)^\top$ a $f^{opt} = 249$. Maximálny zisk bude mať stolárska dielňa, ak vyrobí 12 kusov stola prvého druhu, 39 kusov stola druhého typu a 1 stôl tretieho typu. V takom prípade bude zisk z predaja vyrobených stolov 249 eur.

Kapitola 6

Dopravný problém

Dopravný problém (DP), spolu s priraďovacím problémom a problémom o toku, patrí medzi takzvané distribučné modely. Sú to špeciálne typy matematických lineárnych modelov a odlišujú sa od úloh výrobného plánovania. Základný model dopravnej úlohy je uvedený už v časti 2.2.4. Sformulujme teraz detailnejšie dopravný problém.

6.1 Definovanie dopravného problému

Nech je daných m dodávateľov $D_1, D_2, \ldots, D_m$ (sklady, výrobné podniky,...), ktoré majú k dispozícii určitý druh tovaru v množstvách $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jednotiek. Tento tovar má byť dopravený do n odberateľských pobočiek $O_1, O_2, \ldots, O_n$ (spotrebitelia, obchody, ďalšie spracovateľské podniky,...), ktorých požiadavky na množstvo daného tovaru sú $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jednotiek. Taktiež sú známe prepravné náklady c_{ij} na prepravu jednotky tovaru medzi i-tým dodávateľom a j-tým odberateľom. Tieto náklady sú konštantné a sú priamo úmerné prepravovanému množstvu tovaru. Často je namiesto prepravných nákladov uvedená vzdialenosť medzi jednotlivými odberateľmi a dodávateľmi. Úlohou je zostaviť taký prepravný plán tovaru od dodávateľov k odberateľom, aby platilo:

- požiadavky odberateľov sú splnené,
- kapacity dodávateľov sú neprekročené,
- celkové prepravné náklady sú minimálne.

Každý dopravný problém je možné riešiť simplexovou metódou. Napíšme si štandardný tvar úlohy LP, ktorý je dopravným problémom

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \to \min \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \text{pre } i = 1,2,\ldots,m \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{pre } j = 1,2,\ldots,n \\
&\qquad\quad x_{ij} \geqq 0 \quad \text{pre } i = 1,2,\ldots,m \text{ a pre } j = 1,2,\ldots,n,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

pričom $\boldsymbol{X} = \{x_{ij}\}$ je matica neznámych prepravovaných množstiev tovaru od i-tého dodávateľa k j-tému odberateľovi.

Definícia 6.1.1 *Nech je daný dopravný problém (6.1). Ak je navyše splnená podmienka:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

kde $a_i > 0$ pre $i = 1,2,\ldots,m$ a $b_j > 0$ pre $j = 1,2,\ldots,n$, tak daný dopravný problém sa nazýva vybalansovaný, v opačnom prípade ho nazývame nevybalansovaný.

Veta 6.1.1 *Bázické prípustné riešenie vybalansovaného dopravného problému obsahuje maximálne $m+n-1$ nenulových hodnôt x_{ij}, pre $i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$.*

Definícia 6.1.2 *Nech je daný dopravný problém (6.1), ktorý je vybalansovaný. Ak v nejakom bázickom prípustnom riešení toho DP je počet nenulových hodnôt pre x_{ij} rovný $m+n-1$, tak dané riešenie sa nazýva nedegenerované. Ak je počet nenulových hodnôt pre x_{ij} menší ako $m+n-1$, tak dané riešenie sa nazýva degenerované.*

Simplexová tabuľka pre dopravný problém

Vzhľadom na formuláciu dopravného problému, veľký počet premenných a riedku maticu ohraničení je výhodnejšie riešiť dopravný problém pomocou modifikovanej dvojrozmernej simplexovej tabuľky.

Vytvoríme tabuľku, ktorá má rozmer $(m+2)\times(n+2)$.

- Do prvého riadku a do prvého stĺpca zapíšeme mená odberateľov O_j a dodávateľov D_i.
- Posledný stĺpec obsahuje kapacity dodávateľov a_i a posledný riadok obsahuje požiadavky odberateľov b_j.

– Políčko na pozícii $(m+2) \times (n+2)$ obsahuje prepravnú kapacitu vybalansovaného dopravného problému.

– Do pravého horného rohu políčka napíšeme menším fontom jednotkovú cenu c_{ij} za prepravu tovaru od i-tého dodávateľa D_i k j-tému odberateľovi O_j.

– Vnútorné políčka tabuľky (bez prvého a posledného riadku a stĺpca) vyplníme tak, že v strede každého políčka sa nachádza nenulové množstvo prepravovanej komodity x_{ij} od i-tého dodávateľa D_i k j-tému odberateľovi O_j.

– V ľavom dolnom rohu týchto políčok v prvom riadku a prvom stĺpci budeme písať hodnoty pomocných premenných (u_i a v_j), vypočítaných pri teste optimality riešenia dopravnej úlohy.

– Do ľavého dolného rohu zapíšemie (tiež menším fontom) relatívne ceny c'_{ij}, ktoré dostaneme takto: $c'_{ij} = u_i + v_j$.

– Do pravého dolného rohu políčka napíšeme menším fontom diferencie $d_{ij} = c'_{ij} - c_{ij}$.

—	O_1 v_1	O_2 v_2	$\dots$	O_n v_n	a_i
D_1 u_1	c_{11} x_{11} c'_{11} d_{11}	c_{12} x_{12} c'_{12} d_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n} c'_{1n} d_{1n}	a_1
D_2 u_2	c_{21} x_{21} c'_{21} d_{21}	c_{22} x_{22} c'_{22} d_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n} c'_{2n} d_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
D_m u_m	c_{m1} x_{m1} c'_{m1} d_{m1}	c_{m2} x_{m2} c'_{m2} d_{m1}	$\dots$	c_{mn} x_{mn} c'_{mn} d_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	$\dots$	b_n	SUM

Na začiatku riešenia dopravného problému do tabuľky vpisujeme len hodnoty c_{ij}, a_i, b_j, pre všetky $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, m$. Ostatné hodnoty sa dopíšu až počas štartovania a testu optimality.

Základnú myšlienku hľadania riešenia dopravného problému možno zapísať do nasledujúcich krokov:

- Dopravný problém zapíšeme do modifikovnej simplexovej tabuľky.
- Pomocou niektorej zo štartovacích metód nájdeme nejaké bázické prípustné riešenie, tzv. naštartovanie riešenia úlohy.
- Prípustné riešenie, ktoré sme našli niektorou zo štartovacích metód, alebo pivotovaním, otestujeme, či je optimálne.
- Ak riešenie je optimálne, tak skončíme, ak nie je optimálne, pivotujeme tabuľku a znova urobíme test optimality. Toto opakujeme dovtedy, kým nedostaneme optimálne riešenie.

6.2 Štartovacie metódy riešenia dopravného problému

Je daný vybalansovaný dopravný problém s m dodávateľmi a n odberateľmi. Potom pre nájdenie počiatočného prípustného riešenia môžeme použiť nasledujúce štartovacie metódy:

- metóda severozápadného rohu
- indexová metóda (nebudeme sa ňou zaoberať)
- Vogelova aproximačná metóda

Pri hľadaní optimálneho riešenia vychádzame zo spomenutej dvojrozmernej tabuľky a do príslušných políčok tejto tabuľky zapisujeme kladné hodnoty premenných x_{ij}. Pokiaľ sú hodnoty x_{ij} nulové, tak ich nezapisujeme, políčko ostáva voľné. Políčko, v ktorom je hodnota premennej kladná, sa nazýva obsadené políčko.

Metóda severozápadného rohu

1. Polož $i = 1 \wedge j = 1$.
2. Ak $i = m \wedge j = n$ STOP, inak choď na krok 3.
3. Obsaď políčko na pozícii $i \times j$ maximálnou kapacitou x_{ij}.
4. Ak $x_{ij} < a_1 \wedge x_{ij} = b_1$, potom sa posuň o jedno políčko doprava $j := j + 1$.
5. Ak $x_{ij} = a_1 \wedge x_{ij} < b_1$, potom sa posuň o jedno políčko dole $i := i + 1$.

6. Ak $x_{ij} = a_1 \wedge x_{ij} = b_1$, potom sa posuň o jedno políčko dole a o jedno políčko doprava $i := i + 1 \wedge j := j + 1$.

7. Vráť sa späť na krok 3.

Vogelova aproximačná metóda

1. V každom riadku a stĺpci vypočítaj prvé diferencie (I) (t.j. rozdiely medzi najmenšou a druhou najmenšou cenou v príslušnom riadku, resp. stĺpci) a zapíš ich do stĺpca a riadku označeného (I).

2. Vyber stĺpec resp. riadok, v ktorom je diferencia najväčšia a snaž sa maximálne vyhovieť požiadavkám tak, aby to bolo čo najvýhodnejšie (maximálne obsadzuješ políčka s najnižšou cenou) a uspokojený stĺpec resp. riadok vyškrtneme a pokračujeme na ďalší krok.

3. Ak si vynechal stĺpec, tak prepočítaj nové diferencie v riadkoch, čím vytvoríš nový stĺpec diferencií (II). Ak si vynechal riadok, tak prepočítaj nové druhé diferencie v stĺpcoch a vytvor nový riadok diferencií (II). Pri výpočte nových diferencií už nemôžeš brať do úvahy hodnoty vynechaného stĺpca resp. vynechaného riadka.

4. Tento postup pridávania ďalších diferencií (v riadkoch resp. v stĺpcoch) vykonávaj dovtedy, kým nedostaneš prípustné riešenie.

5. Ak pri výpočte diferencií dostaneme rovnaké najväčšie diferencie vo viacerých riadkoch, či stĺpcoch, tak v nich hľadáme sedlový bod, t.j. políčko s najnižšou cenou z hľadiska riadkov aj stĺpcov a to obsadíme maximálnym množstvom prepravovaného tovaru.

6. Ak pri výpočte máme naraz viac sedlových bodov, tak sa rozhodneme pre ten, pre ktorý je súčet riadkových a stĺpcových diferencií najväčší.

Príklad 6.2.1 *Určitý prepravca chce porozvážať múku z troch mlynov, ktorých kapacity sú 10 t do štyroch skladov. Požiadavky jednotlivých skladov sú 6, 9, 7 a 8 t múky. Prepravné náklady v stovkách Sk na prepravu jednej tony múky z jednotlivých mlynov do jednotlivých skladov sú uvedené v nasledujúcej tabuľke. Uvedené množstvo múky chce prepravca porozvážať tak, aby celkové náklady na dopravu boli minimálne.*

	O_1	O_2	O_3	O_4
D_1	*6*	*2*	*1*	2,5
D_2	*3*	*9*	*7*	3,5
D_3	*4*	*5*	6,5	*11*

Riešenie: Vybalansovaný dopravný problém je daný nasledujúcou tabuľkou:
Tabuľka:

—	O_1 v_1	O_2 v_2	O_3 v_3	O_4 v_4	a_i
D_1 u_1	6	2	1	2,5	10
D_2 u_2	3	9	7	3,5	10
D_3 u_3	4	5	6,5	11	10
b_j	6	9	7	8	30

Najprv naštartujeme túto dopravnú úlohu metódou severozápadného rohu. Postupne budeme obsadzovať políčka z ľavého horného rohu až k pravému dolnému rohu. Po zbehnutí dostaneme nasledujúcu tabuľku, v ktorej môžme vidieť, že je tam práve 6 obsadených políčok. Máme $m = 3$ dodávateľov a $n = 4$ odberateľov. Riešenie nie je degenerované, lebo $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$, čo je počet obsadených políčok v tabuľke. Hodnota účelovej funkcie pre toto prípustné riešenie je $f = 225$.

—	O_1 v_1	O_2 v_2	O_3 v_3	O_4 v_4	a_i
D_1 u_1	6 6	2 4	1	2,5	10
D_2 u_2	3	9 5	7 5	3,5	10
D_3 u_3	4	5	6,5 2	11 8	10
b_j	6	9	7	8	30

Nájdenie počiatočného riešenia pomocou Vogelovej aproximačnej metódy.

—	O_1 v_1	O_2 v_2	O_3 v_3	O_4 v_4	a_i	I
D_1 u_1	6	2	1 7	2,5	10	1
D_2 u_2	3	9	7	3,5	10	0,5
D_3 u_3	4	5	6,5	11	10	1
b_j	6	9	7	8	30	
I	1	3	5,5	1		

—	O_1 v_1	O_2 v_2	O_3 v_3	O_4 v_4	a_i	I	II
D_1 u_1	6	2 3	7	2,5	10	1	0,5
D_2 u_2	3	9		3,5	10	0,5	0,5
D_3 u_3	4	5		11	10	1	1
b_j	6	9	7	8	30		
I	1	3	$\times$	1			

—	O_1 v_1	O_2 v_2	O_3 v_3	O_4 v_4	a_i	I	II
D_1 u_1		3	7		10	×	×
D_2 u_2	^{3}	^{9}		^{3,5} 8	10	0,5	0,5
D_3 u_3	^{4}	^{5}		^{11}	10	1	1
b_j	6	9	7	8	30		
I	1	3	×	1			
II	1	4	×	7,5			

—	O_1 v_1	O_2 v_2	O_3 v_3	O_4 v_4	a_i	I	II	III
D_1 u_1		3	7		10	×	×	×
D_2 u_2	^{3} 2	^{9}		8	10	0,5	0,5	6
D_3 u_3	^{4}	^{5}			10	1	1	1
b_j	6	9	7	8	30			
I	1	3	×	×				
II	1	4	×	×				

—	O_1 v_1	O_2 v_2	O_3 v_3	O_4 v_4	a_i
D_1 u_1	^{6}	^{2} 3	^{1} 7	^{2,5}	10
D_2 u_2	^{3} 2	^{9}	^{7}	^{3,5} 8	10
D_3 u_3	^{4} 4	^{5} 6	^{6,5}	^{11}	10
b_j	6	9	7	8	30

6.3 Test optimality a pivotovanie

Každé prípustné riešenie je nutné otestovať, či je alebo nie je optimálne. Test optimality robíme v nasledujúcich krokoch:

1. Pre každé obsadené (bázické) políčko zostavíme rovnicu $u_i+v_j = c_{ij}$. Tieto rovnice vytvárajú sústavu $m+n-1$ rovníc s $m+n$ neznámymi premennými $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$. Jedna z premenných musí byť parameter, takže si ju ľubovoľne zvolíme (napr. $u_1 = 0$). Riešenie tejto sústavy zapíšeme do nultého riadku a nultého stĺpca.

2. Vypočítame všetky relatívne ceny c'_{ij}.

3. Vypočítame všetky diferencie d_{ij} (zapisujeme ich do pravého dolného rohu tabuľky).

4. Ak všetky diferencie $d_{ij} \leqq 0$, potom STOP - máme optimálne riešenie, inak sa vrátime na krok 5.

   Prechod k novému bázickému prípustnému riešeniu:
   Ak je niektorá diferencia d_{ij} kladná, potrebujeme pivotovať danú tabuľku tak, aby sme našli lepšie bázické prípustné riešenie.

5. Do neobsadeného políčka s najväčšou diferenciou pridáme do ľavého horného rohu znamienko $\oplus$.

6. Vytvoríme cyklus striedavých znamienok tak, že začneme vo vyznačenom políčku $\oplus$ a po tabuľke sa môžeme pohybovať len v pravouhlých smeroch (hore, dole, doľava a doprava). Zmenu smeru môžeme vykonať len na obsadenom políčku a postupne do týchto obsadených políčok, na ktorých sme zmenili smer, pridáme do ľavého horného rohu nasledujúce znamienko $\oplus$ alebo $\ominus$, až sa vrátime späť do políčka, z ktorého sme začínali vytvárať cyklus.

7. Z mínusových políčok vezmeme minimum a to distribuujeme po cykle podľa znamienok, teda k daným hodnotám toto minimum buď pripočítame, alebo odpočítame.

8. Dostávame nové bázické prípustné riešenie, ktoré znova otestujeme.

Príklad 6.3.1 *Vykonajme test optimality pre riešenia z predošlého príkladu 6.2.1.*

Riešenie: Najprv overíme riešenie, ktoré sme dostali pomocou Vogelovej aproximačnej metódy. Výsledná tabuľka obsahuje prípustné riešenie a našou úlohou je zistiť, či to je optimum. Vyriešime sústavu 6-tich rovníc so 7-mi neznámymi premennými a vypočítame relatívne ceny c'_{ij}, pre $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Vypočítame všetky diferencie d_{ij}, pre $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$..

—	O_1 v_1	O_2 v_2	O_3 v_3	O_4 v_4
D_1 u_1	^{6}	^{2} 3	^{1} 7	^{2,5}
D_2 u_2	^{3} 2	^{9}	^{7}	^{3,5} 8
D_3 u_3	^{4} 4	^{5} 6	^{6,5}	^{11}

$$
\begin{aligned}
u_1 + v_2 &= 2 & \Longrightarrow \quad & u_1 = 0 \wedge v_2 = 2 \\
u_1 + v_3 &= 1 & \Longrightarrow \quad & v_3 = 1 \\
u_2 + v_1 &= 3 & \Longrightarrow \quad & u_2 = 2 \\
u_2 + v_4 &= 3{,}5 & \Longrightarrow \quad & v_4 = 1{,}5 \\
u_3 + v_1 &= 4 & \Longrightarrow \quad & v_1 = 1 \\
u_3 + v_2 &= 5 & \Longrightarrow \quad & v_3 = 3
\end{aligned}
$$

—	O_1 1	O_2 2	O_3 1	O_4 1,5
D_1 0	6 1 −5	2 3 2 0	1 7 1 0	2,5 1,5 −1
D_2 2	3 2 3 0	9 4 −5	7 3 −4	3,5 8 3,5 0
D_3 3	4 4 4 0	5 6 5 0	6,5 4 −2,5	11 4,5 −6,5

Vidíme, že všetky diferencie sú nekladné, to znamená, že máme optimálne riešenie s hodnotou účelovej funkcie $f^{opt} = 93$.

Rovnako môžeme vykonať test optimality aj pre prípustné riešenie z príkladu 6.2.1, ktoré sme získali metódou severozápadného rohu. Prípustné riešenie je v nasledujúcej tabuľke, hodnota účelovej funkcie pre toto prípustné riešenie je $f = 6{\cdot}6+4{\cdot}2+5{\cdot}9+5{\cdot}7+2{\cdot}6{,}5+8{\cdot}11 = 225$.

—	O_1 v_1	O_2 v_2	O_3 v_3	O_4 v_4
D_1 u_1	6 6	2 4	1	2,5
D_2 u_2	3	9 5	7 5	3,5
D_3 u_3	4	5	6,5 2	11 8

Overíme, či toto prípustné riešenie je optimom našej úlohy. Zostavíme sústavu 6-tich rovníc so 7-mi neznámymi premennými:

$$
\begin{array}{lll}
u_1 + v_1 = 6 & \Longrightarrow & u_1 = 0 \wedge v_1 = 6 \\
u_1 + v_2 = 2 & \Longrightarrow & v_2 = 2 \\
u_2 + v_2 = 9 & \Longrightarrow & u_2 = 7 \\
u_2 + v_3 = 7 & \Longrightarrow & v_3 = 0 \\
u_3 + v_3 = 6{,}5 & \Longrightarrow & u_3 = 6{,}5 \\
u_3 + v_4 = 11 & \Longrightarrow & v_4 = 4{,}5
\end{array}
$$

Zvolíme $u_1 = 0$ a vypočítame sústavu. Na základe toho určíme všetky hodnoty c'_{ij} a všetky diferencie d_{ij}, pre $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Výsledky sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

—	O_1 6	O_2 2	O_3 0	O_4 4,5
D_1 0	$\ominus$ 6 6 6 0	$\oplus$ 2 4 2 0	1 0 −1	2,5 4,5 2
D_2 7	$\oplus$ 3 13 10	$\ominus$ 9 5 9 0	7 5 7 0	3,5 11,5 8
D_3 6,5	4 12,5 8,5	5 8,5 3,5	6,5 2 6,5 0	11 8 11 0

Niektoré diferencie sú kladné, čo znamená, že uvedené prípustné riešenie nie je optimálne riešenie tejto dopravnej úlohy. Musíme nájsť nové prípustné riešenie, ktoré bude optimálne, alebo bude bližšie k optimálnemu riešeniu. Označme znamienkom $\oplus$ políčko s maximálnou diferenciou. Nájdime cyklus, po ktorom distribuujeme múku tak, že získame nové bázické prípustné riešenie (pomocou znamienok je cyklus vyznačený v predchádzajúcej tabuľke). Jediný možný cyklus v našom prípade je $x_{21} \mapsto x_{11} \mapsto x_{12} \mapsto x_{22} \mapsto x_{21}$. Z mínusových políčok vezmeme minimum a to distribuujeme po cykle podľa znamienok. Dostávame nové bázické prípustné riešenie, ktoré otestujeme na optimalitu. Toto riešnie aj výsledok testu optimality je v nasledujúcej tabuľke.

—	O_1 6	O_2 2	O_3 10	O_4 14,5
D_1 0	$\ominus$ 6 1 6 0	2 9 2 0	1 10 9	$\oplus$ 2,5 14,5 12
D_2 -3	$\oplus$ 3 5 3 0	9 -1 -10	$\ominus$ 7 5 7 0	3,5 11,5 8
D_3 $-3{,}5$	4 2,5 $-1{,}5$	5 $-1{,}5$ $-6{,}5$	$\oplus$ 6,5 2 6,5 0	$\ominus$ 11 8 11 0

Tabuľka nie je optimálna, preto nájdeme nový cyklus pre zlepšenie riešenia (vyznačený znamienkami v predchádzajúcej tabuľke). Pre nové bázické riešenie vykonáme test optimality, jeho výsledok je v nasledujúcej tabuľke.

—	O_1 -6	O_2 2	O_3 -2	O_4 2,5
D_1 0	6 -6 -12	2 9 2 0	1 -2 -3	2,5 1 2,5 0
D_2 9	3 6 3 0	9 11 2	$\ominus$ 7 4 7 0	$\oplus$ 3,5 11,5 8
D_3 8,5	4 2,5 $-1{,}5$	5 10,5 5,5	$\oplus$ 6,5 3 6,5 0	$\ominus$ 11 7 11 0

Tabuľka obsahuje kladné hodnoty pre d_{ij}, takže ani toto riešenie nie je optimálne. Hľadáme nový cyklus počnúc políčkom, kde je táto diferencia najväčšia, teda $d_{24} = 8$ (znamienkami vyznačený v predchádzajúcej tabuľke). Pre vzniknuté riešenie urobíme test optimality a výsledok zapíšeme do nasledujúcej tabuľky.

—	O_1 2	O_2 2	O_3 -2	O_4 2,5
D_1 0	6 2 -4	2 9 2 0	1 -2 -3	2,5 1 2,5 0
D_2 1	$\ominus$ 3 6 3 0	9 3 -6	7 -1 -8	$\oplus$ 3,5 4 3,5 0
D_3 8,5	$\oplus$ 4 10,5 6,5	5 10,5 5,5	6,5 7 6,5 0	$\ominus$ 11 3 11 0

Ani toto riešenie nie je optimálne, preto ideme hľadať ďalší cyklus pre zlepšenie riešenia. Začíname v políčku s $d_{31} = 6{,}5$ (predchádzajúca tabuľka). V tomto cykle distribuujeme hodnotu 3. Takto vzniknuté riešenie otestujeme na optimalitu (nasledujúca tabuľka).

—	O_1 2	O_2 2	O_3 4,5	O_4 2,5
D_1 0	6 2 -4	2 9 2 0	$\oplus$ 1 4,5 3,5	$\ominus$ 2,5 1 2,5 0
D_2 1	$\ominus$ 3 3 3 0	9 3 -6	7 5,5 $-1{,}5$	$\oplus$ 3,5 7 3,5 0
D_3 2	$\oplus$ 4 3 4 0	5 4 -1	$\ominus$ 6,5 7 6,5 0	11 4,5 $-6{,}5$

V tejto tabuľke máme už len jednu kladnú diferenciu $d_{13} = 3{,}5$, no to znamená neoptimálnosť riešenia. V rámci cyklu $x_{13} \mapsto x_{14} \mapsto x_{24} \mapsto x_{21} \mapsto x_{31} \mapsto x_{33} \mapsto x_{13}$ premiestnime jednu jednotku podľa označených znamienok $\oplus$ a $\ominus$ v predchádzajúcej tabuľke. Dostaneme nové riešenie. Vypočítame nové relatívne ceny a diferencie (zapísané v nasledujúcej tabuľke).

—	O_1 $-1{,}5$	O_2 2	O_3 1	O_4 -1
D_1 0	6 $-1{,}5$ $\quad$ $-7{,}5$	$\ominus$ $\quad$ 2 9 2 $\quad$ 0	$\oplus$ $\quad$ 1 1 1 $\quad$ 0	$2{,}5$ -1 $\quad$ $-3{,}5$
D_2 $4{,}5$	3 2 3 $\quad$ 0	9 $6{,}5$ $\quad$ $-2{,}5$	7 $5{,}5$ $\quad$ $-1{,}5$	$3{,}5$ 8 $3{,}5$ $\quad$ 0
D_3 $5{,}5$	4 4 4 $\quad$ 0	$\oplus$ $\quad$ 5 $7{,}5$ $\quad$ $2{,}5$	$\ominus$ $\quad$ $6{,}5$ 6 $6{,}5$ $\quad$ 0	11 $4{,}5$ $\quad$ $-6{,}5$

Znova ostala jedna kladná diferencia $d_{32} = 2{,}5$. Označíme toto políčko symbolom $\oplus$ a vytvoríme cyklus: $x_{32} \mapsto x_{12} \mapsto x_{13} \mapsto x_{33} \mapsto x_{32}$. V tomto cykle sa nachádzajú dva záporné symboly $\ominus$ s hodnotami $x_{12} = 9$ a $x_{33} = 6$. Minimum je $x_{33} = 6$. Hodnotu 6 prevedieme cez celý cyklus podľa zadaných znamienok. Dostávame nové bázické prípustné riešenie a overíme, či je optimálne.

$$
\begin{aligned}
u_1 + v_2 &= 2 & &\Longrightarrow & &u_1 = 0 \wedge v_2 = 2 \\
u_1 + v_3 &= 1 & &\Longrightarrow & &v_3 = 1 \\
u_2 + v_1 &= 3 & &\Longrightarrow & &u_2 = 2 \\
u_2 + v_4 &= 3{,}5 & &\Longrightarrow & &v_4 = 1{,}5 \\
u_3 + v_1 &= 4 & &\Longrightarrow & &v_1 = 1 \\
u_3 + v_2 &= 5 & &\Longrightarrow & &u_3 = 3
\end{aligned}
$$

Výsledok testu zapíšeme do nasledujúcej tabuľky.

—	O_1 1	O_2 2	O_3 1	O_4 1,5
D_1 0	6 1 -5	2 3 2 0	1 7 1 0	2,5 1,5 -1
D_2 2	3 2 3 0	9 4 -5	7 3 -4	3,5 8 3,5 0
D_3 3	4 4 4 0	5 6 5 0	6,5 4 $-2{,}5$	11 4,5 $-6{,}5$

Žiadna z diferencií nie je kladná, takže toto riešenie je optimálne: $x_{12} = 3$, $x_{13} = 7$, $x_{21} = 2$, $x_{24} = 8$, $x_{31} = 4$ a $x_{32} = 6$. Hodnota účelovej funkcie je $f^{opt} = 93$.

6.4 Nevybalansovaný dopravný problém

Doteraz sme predpokladali, že dopravný problém je vybalansovaný, teda platí, že

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Dopravný problém je nevybalansovaný, ak nastane jedna z možností:

1. Ak platí, že
$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$
t. j. celkové požiadavky odberateľov sú väčšie ako celkové kapacity dodávateľov. V takomto prípade pridáme fiktívneho dodávateľa FD $= D_{m+1}$ s kapacitou
$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$
a všetky ceny $c_{m+1,j} = 0$, pre $j = 1, 2, \ldots, n$.

2. Ak platí, že
$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

t. j. celkové kapacity dodávateľov prevyšujú celkové požiadavky odberateľov. V takomto prípade pridáme fiktívneho odberateľa FO $= O_{n+1}$ s požiadavkou

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

a všetky ceny $c_{i,n+1} = 0$, pre $i = 1, 2, \ldots, m$.

Dostávame vybalansovanú úlohu, ktorú riešime podľa vyššie popísaných postupov. Obe situácie sú vyobrazená v nasledujúcich dvoch tabuľkách:

—	O_1 v_1	$\ldots$	O_n v_n	a_i
D_1 u_1	c_{11} x_{11} c'_{11} d_{11}	$\ldots$	c_{1n} x_{1n} c'_{1n} d_{1n}	a_1
D_2 u_2	c_{21} x_{21} c'_{21} d_{21}	$\ldots$	c_{2n} x_{2n} c'_{2n} d_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
D_m u_m	c_{m1} x_{m1} c'_{m1} d_{m1}	$\ldots$	c_{mn} x_{mn} c'_{mn} d_{mn}	a_m
D_{m+1} u_{m+1}	$c_{m+1,1}$ $x_{m+1,1}$ $c'_{m+1,1}$ $d_{m+1,1}$	$\ldots$	$c_{m+1,n}$ $x_{m+1,n}$ $c'_{m+1,n}$ $d_{m+1,n}$	a_{m+1}
b_j	b_1	$\ldots$	b_n	SUM

— 	O_1 v_1	$\dots$	O_n v_n	O_{n+1} v_{n+1}	a_i
D_1 u_1	c_{11} x_{11} c'_{11} d_{11}	$\dots$	c_{1n} x_{1n} c'_{1n} d_{1n}	$c_{1,n+1}$ $x_{1,n+1}$ $c'_{1,n+1}$ $d_{1,n+1}$	a_1
D_2 u_2	c_{21} x_{21} c'_{21} d_{21}	$\dots$	c_{2n} x_{2n} c'_{2n} d_{2n}	$c_{2,n+1}$ $x_{2,n+1}$ $c'_{2,n+1}$ $d_{2,n+1}$	a_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
D_m u_m	c_{m1} x_{m1} c'_{m1} d_{m1}	$\dots$	c_{mn} x_{mn} c'_{mn} d_{mn}	$c_{m,n+1}$ $x_{m,n+1}$ $c'_{m,n+1}$ $d_{m,n+1}$	a_m
b_j	b_1	$\dots$	b_n	b_{n+1}	SUM

6.5 Degenerované riešenie

Podľa definície 6.1.2, degenerované prípustné riešenie dopravnej úlohy je riešenie, ktoré má menej ako $m + n - 1$ obsadených políčok. To zodpovedá menej ako $m + n - 1$ rovniciam v sústave pri teste optimality. Preto je potrebné doplniť obsadené políčka nulami tak, aby ich bolo práve $m + n - 1$ a navyše, ak úloha nie je optimálna, a je potrebné nájsť nové bázické prípustné riešenie, tak v príslušnom cykle musia byť obsadené políčka s nulami na pozícii kladného znamienka, t.j. musia byť v cykle označené symbolom $\oplus$.

Príklad 6.5.1 *Nájdi optimálne riešenie dopravnej úlohy zadanej nasledujúcou tabuľkou:*

—	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
D_1	6	2	1	2	*20*
D_2	3	9	7	5	*10*
D_3	4	5	6	11	*20*
b_j	*15*	*9*	*16*	*10*	*50*

Riešenie: Súčet požiadaviek odberateľov sa rovná súčtu kapacít dodávateľov, preto DP je vybalansovaný a nepotrebujeme pridať FO, ani FD. Nájdeme nejaké prípustné riešenie daného vybalansovaného dopravného problému.

—	O_1	O_2	O_3	O_4	a_i
D_1	11 (6)	9 (2)	(1)	(2)	20
D_2	(3)	(9)	(7)	10 (5)	10
D_3	4 (4)	(5)	16 (6)	(11)	20
b_j	15	9	16	10	50

Testom optimality overíme, či dané prípustné riešenie je optimálne. V tejto tabuľke je obsadených 5 políčok, ale na test optimality potrebujeme $m+n-1 = 3+4-1 = 6$ obsadených políčok. Dané prípustné riešenie je degenerované, preto potrebujeme obsadiť jedno neobsadené políčko nulou. Zvolíme také políčko, aby v cykle bolo označené znamienkom $\oplus$ a zároveň tvorilo cyklus. Aby sústava bola riešiteľná, tak musíme obsadiť políčko vo štvrtom stĺpci alebo druhom riadku. Položme $x_{14} = 0$.

—	O_1 6	O_2 2	O_3 8	O_4 2
D_1 0	$\ominus$ 6 11 6 0	2 9 2 0	$\oplus$ 1 8 7	2 0 2 0
D_2 3	3 9 6	9 5 −4	7 11 4	5 10 5 0
D_3 −2	$\oplus$ 4 4 4 0	5 0 −5	$\ominus$ 6 16 6 0	11 0 −11

$$
\begin{aligned}
u_1 + v_1 &= 6 & &\Longrightarrow & u_1 &= 0 \wedge v_1 = 6\\
u_1 + v_2 &= 2 & &\Longrightarrow & v_2 &= 2\\
u_1 + v_4 &= 2 & &\Longrightarrow & v_4 &= 2\\
u_2 + v_4 &= 5 & &\Longrightarrow & u_2 &= 3\\
u_3 + v_1 &= 4 & &\Longrightarrow & u_3 &= -2\\
u_3 + v_3 &= 6 & &\Longrightarrow & v_3 &= 8
\end{aligned}
$$

Tabuľka nie je optimálna, pretože tri hodnoty d_{ij} sú kladné, najväčšia z nich je $d_{13} = 7$. Vytvoríme cyklus (vyznačený v predchádzajúcej tabuľke) s novým prípustným riešením (nasledujúca tabuľka) a otestujeme ho na optimalitu.

$$\begin{aligned}
u_1 + v_2 &= 2 && \Longrightarrow && u_1 = 0 \wedge v_2 = 2\\
u_1 + v_3 &= 1 && \Longrightarrow && v_3 = 1\\
u_1 + v_4 &= 2 && \Longrightarrow && v_4 = 2\\
u_2 + v_4 &= 5 && \Longrightarrow && u_2 = 3\\
u_3 + v_1 &= 4 && \Longrightarrow && v_1 = -1\\
u_3 + v_3 &= 6 && \Longrightarrow && u_3 = 5
\end{aligned}$$

—	O_1 -1	O_2 2	O_3 1	O_4 2
D_1 0	6 -1 $\quad -7$	$\ominus$ $\quad 2$ 9 2 $\quad 0$	$\oplus$ $\quad 1$ 11 1 $\quad 0$	2 0 2 $\quad 0$
D_2 3	3 2 $\quad -1$	9 5 $\quad -4$	7 4 $\quad -3$	5 10 5 $\quad 0$
D_3 5	4 15 4 $\quad 0$	$\oplus$ $\quad 5$ 7 $\quad 2$	$\ominus$ $\quad 6$ 5 6 $\quad 0$	11 7 $\quad -4$

Ani toto riešenie nie je optimálne riešenie, no kladná je už len jedna diferencia, takže jej zodpovedajúce políčko bude pivotom. Pozdĺž takto vzniknutého cyklu distribuujeme hodnotu 5, dostávame ďalšie prípustné riešenie a urobíme pre neho test optimality (nasl. tabuľka). Toto riešenie je tiež degenerované, keďže počet nenulových hodnôt pre x_{ij} je menší ako $3 + 4 - 1$. No nula je mimo cyklu, takže jej pozícia sa nemení a ostáva v bázickom prípustnom riešení.

$$\begin{aligned}
u_1 + v_2 &= 2 && \Longrightarrow && u_1 = 0 \wedge v_2 = 2\\
u_1 + v_3 &= 1 && \Longrightarrow && v_3 = 1\\
u_1 + v_4 &= 2 && \Longrightarrow && v_4 = 2\\
u_2 + v_4 &= 5 && \Longrightarrow && u_2 = 3\\
u_3 + v_1 &= 4 && \Longrightarrow && v_1 = 1\\
u_3 + v_2 &= 5 && \Longrightarrow && u_3 = 3
\end{aligned}$$

—	O_1 1	O_2 2	O_3 1	O_4 2
D_1 0	6 1 -5	$\ominus$ 2 4 2 0	1 16 1 0	$\oplus$ 2 0 2 0
D_2 3	$\oplus$ 3 4 1	9 5 -4	7 4 -3	$\ominus$ 5 10 5 0
D_3 3	$\ominus$ 4 15 4 0	$\oplus$ 5 5 5 0	6 4 -2	11 5 -6

V tejto tabuľke je kladná diferencia $d_{21} = 1$. Z toho políčka a obsadených políčok vytvoríme cyklus $x_{21} \mapsto x_{31} \mapsto x_{32} \mapsto x_{12} \mapsto x_{14} \mapsto x_{24} \mapsto x_{21}$ a pozdĺž neho distribuujeme hodnotu 4. Pre vzniknuté riešenie urobíme test optimality.

$$\begin{aligned}
u_1 + v_3 &= 1 &\implies\quad & u_1 = 0 \wedge v_3 = 1\\
u_1 + v_4 &= 2 &\implies\quad & v_4 = 2\\
u_2 + v_1 &= 3 &\implies\quad & v_1 = 0\\
u_2 + v_4 &= 5 &\implies\quad & u_2 = 3\\
u_3 + v_1 &= 4 &\implies\quad & u_3 = 4\\
u_3 + v_2 &= 5 &\implies\quad & v_2 = 1
\end{aligned}$$

—	O_1 0	O_2 1	O_3 1	O_4 2
D_1 0	6 0 -6	2 1 -1	1 16 1 0	2 4 2 0
D_2 3	3 4 3 0	9 5 -4	7 4 -3	5 6 5 0
D_3 4	4 11 4 0	5 9 5 0	6 5 -1	11 6 -5

Žiadna diferencia nevyšla kladná, takže dostali sme optimálnu tabuľku. Čitateľ si ľahko vypíše hodnoty optimálneho riešenia a vypočíta hodnotu účelovej funkcie pre toto optimálne riešenie sám.

Register

Literatúra

[1] I. Brezina, Z. Ivaničová, J. Pekár, Operačná analýza, Bratislava : Iura Edition (1999), 243s, ISBN 978-80-8078-176-7.

[2] J. Dudorkin, Operační výskum, Fakulta elektrotechnická - Vydavatelství ČVUT : Praha (2002), 296s, Štvrté vydanie, ISBN 80-01-02469-5.

[3] K. Cechlárová, G. Semanišin, Lineárna optimalizácia, Košice : UPJŠ (1999), 98s, ISBN 80-7079-385-4.

[4] J. Jablonský, Operační výskum - kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování, Professional publishing : Praha (2007), 323s, Tretie vydanie, ISBN 978-80-86946-44-3.

[5] S. I. Gass, Lineárne programovanie, Bratislava : Alfa (1972), 400s.

[6] J. Plesník, J. Dupačová, M. Vlach, Lineárne programovanie, Bratislava : Alfa (1990), 320s, ISBN 80-05-00679-9.

[7] D. Rosinová, M. Dúbravská, Optimalizácia, Slovenská technická univerzita : Bratislava (2007), 195s, ISBN 978-80-227-2795-2.

[8] J. Strádalová, Užití některých matematických metod v ekonomické praxi, Nakladatelství Univerzity Karlovy - Karolinum : Praha (1999), 261s, ISBN 80-7184-800-X.

[9] J. Štecha, Optimální rozhodování a řízení, Fakulta elektrotechnická - Vydavatelství ČVUT : Praha (2002), 242s, Prvé vydanie, ISBN 80-01-02083-5.

Názov: LINEÁRNE PROGRAMOVNIE

Autori: © RNDr. Štefan BEREŽNÝ, PhD., 2012
© RNDr. Daniela KRAVECOVÁ, PhD., 2012

Recenzovali: prof. RNDr. Jozef DŽURINA, CSc.
prof. RNDr. Michal TKÁČ, CSc.

Vydavateľ: Katedra matematiky a teoretickej informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach
Miesto vydania: Košice
Rok vydania: 2012
Vydanie: Prvé
Rozsah: 108 strán

ISBN: 978-80-553-0910-1