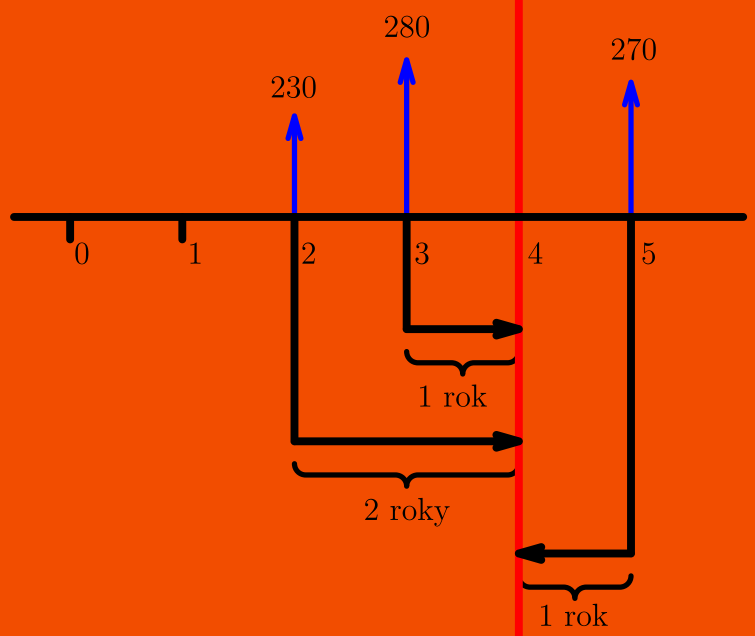


MATEMATIKA I
a jej využitie v ekonómii

Monika Molnárová

Košice 2013

MATEMATIKA I
a jej využitie v ekonómii

Monika Molnárová

Košice 2013

RECENZOVALI: doc. RNDr. Jozef Bucko, PhD.
doc. RNDr. Viktor Pirč, CSc.
RNDr. Libuša Réveszová, PhD.

Vydavateľ: EQUILIBRIA, s.r.o., Letná 42, Košice

2. prepracované vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedá autor.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-8143-123-4

Obsah

Úvod **6**

1 Funkcia a jej aplikácie v ekonómii **7**
1.1 Cieľ . . . 7
1.2 Otázky . . . 7
1.3 Pojem funkcie . . . 8
1.4 Základné vlastnosti funkcií . . . 8
1.5 Zložená funkcia . . . 10
1.6 Inverzná funkcia . . . 10
1.7 Elementárne funkcie . . . 10
1.8 Funkcie ekonomickej analýzy . . . 14
1.9 Úlohy . . . 17

2 Základy lineárnej algebry **19**
2.1 Cieľ . . . 19
2.2 Otázky . . . 19
2.3 Algebrické rovnice . . . 20
2.4 Racionálne funkcie a ich rozklad na parciálne zlomky . . . 22
2.5 Aritmetické vektory a matice . . . 26
2.6 Sústavy lineárnych algebrických rovníc . . . 35
2.7 Úlohy . . . 38

3 Limita a spojitosť funkcie **45**
3.1 Cieľ . . . 45
3.2 Otázky . . . 45
3.3 Limita funkcie . . . 45
3.4 Spojitosť funkcie . . . 48
3.5 Vlastnosti spojitých funkcií na uzavretom intervale . . . 50
3.6 Asymptoty grafu funkcie . . . 50
3.7 Postupnosti . . . 51
3.8 Úlohy . . . 53

4 Derivácia funkcie **54**
4.1 Cieľ . . . 54
4.2 Otázky . . . 54
4.3 Pojem derivácie funkcie . . . 54
4.4 Výpočet derivácie funkcie . . . 56
4.5 Derivácie vyšších rádov . . . 59
4.6 Diferenciál funkcie . . . 59
4.7 L´Hospitalovo pravidlo . . . 61
4.8 Úlohy . . . 61

5 Aplikácie derivácie v ekonómii **64**
5.1 Cieľ 64
5.2 Otázky 64
5.3 Marginálna analýza 64
5.4 Percentuálna miera zmeny hodnoty funkcie 65
5.5 Elasticita funkcie 66
5.6 Elasticita funkcie dopytu a funkcie ponuky 68
5.7 Úlohy 70

6 Priebeh funkcie **72**
6.1 Cieľ 72
6.2 Otázky 72
6.3 Monotónnosť funkcie a lokálne extrémy 72
6.4 Konvexnosť a konkávnosť funkcie 75
6.5 Priebeh funkcie 77
6.6 Exponenciálne modely 79
6.7 Úlohy 85

7 Optimalizácia funkcií ekonomickej analýzy **87**
7.1 Cieľ 87
7.2 Otázky 87
7.3 Minimalizácia nákladov 87
7.4 Maximalizácia príjmu a zisku 90
7.5 Úlohy 93

8 Úrokovanie **95**
8.1 Cieľ 95
8.2 Otázky 95
8.3 Pojem úrokovania 96
8.4 Jednoduché úrokovanie 97
8.5 Zložené úrokovanie 102
8.6 Zmiešané úrokovanie 106
8.7 Spojité úrokovanie 107
8.8 Princíp finančnej ekvivalencie 109
8.9 Inflácia 111
8.10 Úlohy 113

9 Rentový a umorovací počet **115**
9.1 Cieľ 115
9.2 Otázky 115
9.3 Rentový počet 116
9.3.1 Pojem renty 116
9.3.2 Polehotná renta s konštantnou splátkou 117

9.3.3 Polehotná renta s rovnomerne rastúcou splátkou 124
9.3.4 Predlehotná renta s konštantnou splátkou 126
9.3.5 Odložená renta s konštantnou splátkou 130
9.3.6 Prerušená renta s konštantnou splátkou 134
9.3.7 Večná renta 138
9.3.8 Renta so spojitým úrokovaním 140
9.4 Umorovanie 142
9.4.1 Pojem umorovania 142
9.4.2 Pôžičky s povinným jednorazovým splatením 143
9.4.3 Pôžičky s postupným splácaním 145
9.5 Úlohy 157

10 Finančné toky 160
10.1 Cieľ 160
10.2 Otázky 160
10.3 Pojem finančného toku 161
10.4 Diskrétne a spojité finančné toky 161
10.5 Hodnotenie investičných projektov 163
10.6 Úlohy 172

Úvod

Táto učebnica je určená v prvom rade študentom prvého ročníka bakalárskeho štúdia odboru Hospodárska informatika na Fakulte elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach. Reprezentuje študijný materiál, ktorý im pomôže zvládnuť predmet Matematika I po teoretickej aj praktickej stránke. Publikácia obsahuje poznatky z oblasti matematickej analýzy, základov lineárnej algebry a finančnej matematiky a môže byť nápomocná aj študentom iných zameraní.

Obsah je rozdelený do desiatich kapitol, ktoré sú členené do podkapitol. Kapitoly svojim obsahom zodpovedajú problematike preberanej v prvom semestri v predmete Matematika I na odbore Hospodárska informatika. Každá kapitola začína podkapitolou, ktorá formuluje cieľ danej kapitoly a pokračuje podkapitolou, v ktorej sú formulované otázky z problematiky danej kapitoly. Nasledujú časti s teoretickými poznatkami doplnené o postupy riešenia praktických úloh v riešených príkladoch. Na záver každej kapitoly je podkapitola obsahujúca neriešené úlohy s uvedenými výsledkami.

Vzhľadom na veľký rozsah preberanej problematiky, učebnica neuvádza pri všetkých problémoch podrobné postupy a je preto potrebné ju považovať za doplnok ku prednáškam a cvičeniam uvedeného predmetu. Ďalším predpokladom úspešného zvládnutia štúdia sú aj vedomosti zo základov stredoškolskej matematiky. Túto učebnicu dopĺňa učebnica *MATEMATIKA I a jej využitie v ekonómii (Zbierka riešených a neriešených úloh)*[7], v ktorej čitateľ nájde ďalšie úlohy z danej problematiky. V literatúre uvedenej na záver má navyše možnosť študovať témy jednotlivých častí tejto učebnice podrobnejšie.

Autor vyslovuje vďaku recenzentom doc. RNDr. Jozefovi Buckovi, PhD., doc. RNDr. Viktorovi Pirčovi, CSc. a RNDr. Libuši Réveszovej, PhD. za cenné pripomienky a odporúčania, ktoré viedli ku skvalitneniu učebnice po obsahovej i formálnej stránke. Zároveň autor ďakuje RNDr. Jánovi Bušovi, CSc. a mgr. Jánovi Bušovi, PhD. za pomoc pri zvládnutí úskalí textového editora TEX.

Autor.

1 Funkcia a jej aplikácie v ekonómii

1.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmom funkcie jednej reálnej premennej, jej základnými vlastnosťami a niektorými funkciami ekonomickej analýzy.

1.2 Otázky

- Definujte funkciu jednej reálnej premennej.
- Definujte rastúcu (klesajúcu) funkciu a ilustrujte grafom.
- Definujte funkciu zhora (zdola) ohraničenú na množine S a ilustrujte grafom.
- Definujte maximum a minimum funkcie na množine S a ilustrujte grafom.
- Definujte bijektívnu funkciu na množine S a ilustrujte grafom.
- Definujte inverznú funkciu.
- Definujte zloženú funkciu.
- Definujte párnu (nepárnu) funkciu a ilustrujte grafom.
- Definujte periodickú funkciu a ilustrujte grafom.
- Nakreslite grafy elementárnych funkcií a popíšte ich vlastnosti.
- Definujte funkciu celkových nákladov a funkciu priemerných nákladov.
- Definujte funkciu celkových príjmov a funkciu priemerných príjmov.
- Definujte funkciu celkového zisku a funkciu priemerného zisku.
- Definujte bod zlomu a sformulujte podmienku, kedy je výroba zisková.
- Definujte funkciu dopytu a sformulujte zákon dopytu.
- Definujte funkciu ponuky a sformulujte zákon ponuky.
- Definujte rovnovážny stav trhu.

1.3 Pojem funkcie

Skôr ako zavedieme pojem funkcie jednej premennej, povedzme si, že sa budeme zaoberať len funkciami na množine reálnych čísel. Pripomeňme teda základné označenie. Množinu všetkých konečných reálnych čísel budeme označovať $\mathbb{R}$, rozšírenú množinu reálnych čísel $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Množinu všetkých prirodzených čísel označujeme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, množinu všetkých celých čísel označíme $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ a množinu všetkých racionálnych čísel $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{R};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\right\}$.

Definícia 1.1 *Nech A, $B \subset \mathbb{R}$ sú dve neprázdne množiny a f je pravidlo, ktoré každému $x \in A$ priradí práve jeden prvok $f(x) \in B$. Predpis f nazývame* ***funkciou****, ktorá zobrazuje množinu A do množiny B.*
Zápis:

$$f : A \longrightarrow B$$

Množinu $D(f) = A$ nazývame **definičným oborom funkcie** f, číslo $f(x)$ **hodnotou funkcie** f **v bode** $x \in A$ a množinu $H(f) = \{f(x); x \in A\}$ **oborom hodnôt funkcie** f.

Grafom funkcie f nazývame množinu $G(f) = \{[x, f(x)] \in A \times B;\ x \in A\}$, kde $A \times B = \{(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}$ je kartézsky súčin množín A a B, pričom (a, b) je usporiadaná dvojica.

Pod definičným oborom funkcie rozumieme množinu všetkých reálnych čísel, pre ktoré predpis $y = f(x)$ "dáva zmysel", ak nie je v konkrétnom prípade uvedené inak. Pravidlá na určovanie definičného oboru uvedieme v časti Elementárne funkcie.

1.4 Základné vlastnosti funkcií

Definícia 1.2 *Funkciu f nazývame* ***zhora (zdola) ohraničenou*** *na množine $S \subset D(f)$, ak je zhora (zdola) ohraničená jej množina funkčných hodnôt $f(S) = \{f(x); x \in S\}$, t. j. existuje $K \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{R}$) také, že pre všetky $x \in S$ je*

$$f(x) \leq K \quad (f(x) \geq k).$$

Ak je funkcia f na množine S ohraničená zhora aj zdola, tak hovoríme, že je na množine S ***ohraničená****.*

Definícia 1.3 *Ak existuje najväčší prvok (najmenší prvok) množiny $f(S) = \{f(x); x \in S\}$, t. j. $M \in f(S)$ ($m \in f(S)$) také, že pre všetky $x \in S$ je*

$$f(x) \leq M \quad (f(x) \geq m),$$

tak ho nazývame ***najväčšou (najmenšou) hodnotou funkcie*** *f na množine $S \subset D(f)$.*

Zápis:

$$\begin{aligned} M &= \max_{x \in S} f(x) \\ m &= \min_{x \in S} f(x) \end{aligned}$$

Definícia 1.4 *Funkciu f nazývame* ***rastúcou (klesajúcou)*** *na množine $S \subset D(f)$, ak pre každé dva body x_1, $x_2 \in S$, také že $x_1 < x_2$, platí*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

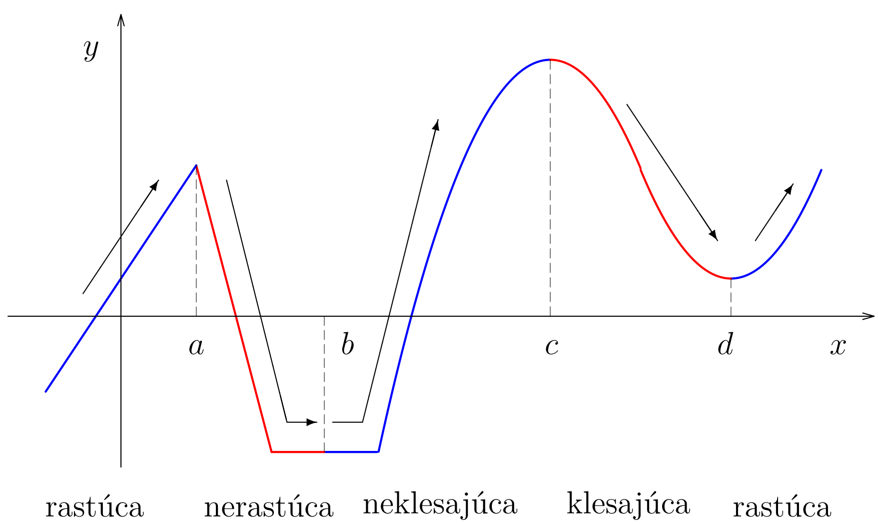
Rastúce a klesajúce funkcie nazývame ***rýdzo monotónne funkcie****.*

Definícia 1.5 *Funkciu f nazývame* ***neklesajúcou (nerastúcou)*** *na množine $S \subset D(f)$, ak pre každé dva body x_1, $x_2 \in S$, také že $x_1 < x_2$, platí*

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Nerastúce a neklesajúce funkcie nazývame ***monotónne funkcie****.*

Je zrejmé, že rastúce a klesajúce funkcie sú monotónne.



Obr. 1: Monotónnosť funkcie

Definícia 1.6 *Funkciu f nazývame* ***párnou (nepárnou)****, ak pre každý bod $x \in D(f)$ je $-x \in D(f)$ a platí*

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Grafy párnych funkcií sú symetrické vzhľadom na os y. Grafy nepárnych funkcií sú symetrické vzhľadom na začiatok súradného systému.

Definícia 1.7 *Funkciu f nazývame* ***periodickou****, ak existuje také reálne číslo $p > 0$, že pre každý bod $x \in D(f)$ je $x+p \in D(f)$ a $x-p \in D(f)$ a platí*

$$f(x) = f(x+p).$$

Najmenšie číslo p s uvedenou vlastnosťou nazývame ***periódou funkcie*** *f.*

1.5 Zložená funkcia

Väčšina funkcií, ktorými sa budeme zaoberať, nie sú elementárne (viď podkapitola 1.7) ale zložené funkcie.

Definícia 1.8 *Nech $g : A \longrightarrow B$, $f : B \longrightarrow C$. Funkciu $f \circ g : A \longrightarrow C$ nazývame **zloženou funkciou**. Funkciu $u = g(x)$ nazývame **vnútornou (vedľajšou)** a funkciu $y = f(u)$ **vonkajšou (hlavnou) zložkou** zloženej funkcie.*
Zápis:

$$y = f\left(g(x)\right).$$

1.6 Inverzná funkcia

Definícia 1.9 *Nech $f : A \longrightarrow B$. Hovoríme, že funkcia je*

- ***injektívna**, ak pre každé dva body x_1, $x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$,*
- ***surjektívna**, ak pre každý bod $y \in B$ existuje také $x \in A$, že $y = f(x)$, t. j. $H(f) = B$,*
- ***bijektívna**, ak je injektívna a surjektívna.*

Definícia 1.10 *Nech $f : A \longrightarrow B$ je bijektívna funkcia. **Inverznou funkciou** k funkcii f nazývame funkciu $f^{-1} : B \longrightarrow A$ práve vtedy, ak každému bodu $y \in B$ priradí také $x \in A$, že $y = f(x)$.*
Zápis:

$$f^{-1}(y) = x.$$

Veta 1.1 *Nech $f : A \longrightarrow B$ je bijektívna funkcia. Nech $f^{-1} : B \longrightarrow A$ je k nej inverzná funkcia. Potom platí*

- *$\forall x \in A$: $f^{-1}(f(x)) = x$,*
- *$\forall y \in B$: $f(f^{-1}(y)) = y$.*

1.7 Elementárne funkcie

V tejto podkapitole uvádzame základné vlastnosti, príp. grafy elementárnych funkcií.

Konštantná funkcia: $f(x) = c$ pre $c \in \mathbb{R}$.
$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = c$. Grafom je priamka rovnobežná s osou x.

Mocninová funkcia: $f(x) = x^n$ pre $n \in \mathbb{N}$.
$D(f) = \mathbb{R}$. Pre n

- párne je $H(f) =< 0, \infty)$,
- nepárne je $H(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia n-tá odmocnina: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ pre $n \in \mathbb{N}$.
Pre n

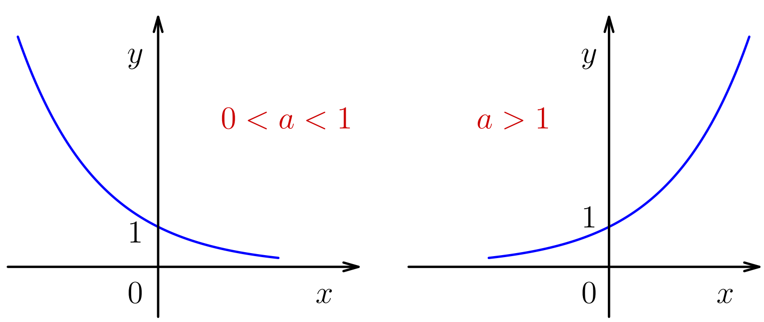
- párne je $D(f) = H(f) =< 0, \infty)$,
- nepárne je $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$.

Algebrický polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$: pre $a_0 \neq 0$
$f(x) = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$.
$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sú koeficienty polynómu. $D(f) = \mathbb{R}$.

Racionálna funkcia: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy.
$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ Q(x) \neq 0\}$.

Exponenciálna funkcia: $f(x) = a^x$ pre $a > 0$, $a \neq 1$.
$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \infty)$.
Rozlišujeme prípady:

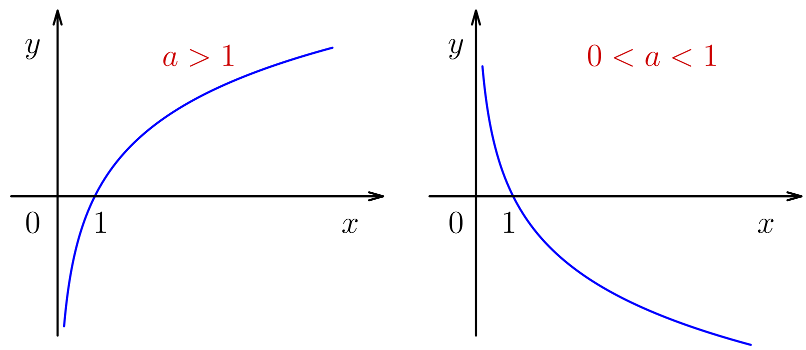
- ak $a > 1$, tak je funkcia rastúca,
- ak $0 < a < 1$, tak je funkcia klesajúca.



Obr. 2: Exponenciálna funkcia

Logaritmická funkcia: $f(x) = \log_a x$ pre $a > 0$, $a \neq 1$.
$D(f) = (0, \infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$.
Rozlišujeme prípady:

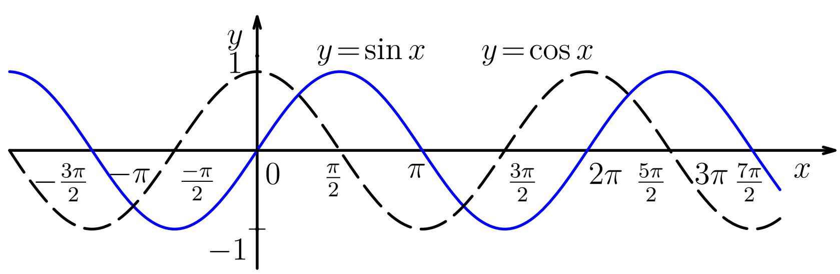
- ak $a > 1$, tak je funkcia rastúca,
- ak $0 < a < 1$, tak je funkcia klesajúca.



Obr. 3: Logaritmická funkcia

Funkcia sínus: $f(x) = \sin x$.
$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) =< -1, 1 >$. Funkcia je periodická s periódou $p = 2\pi$, nepárna.

Funkcia kosínus: $f(x) = \cos x$.
$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) =< -1, 1 >$. Funkcia je periodická s periódou $p = 2\pi$, párna.

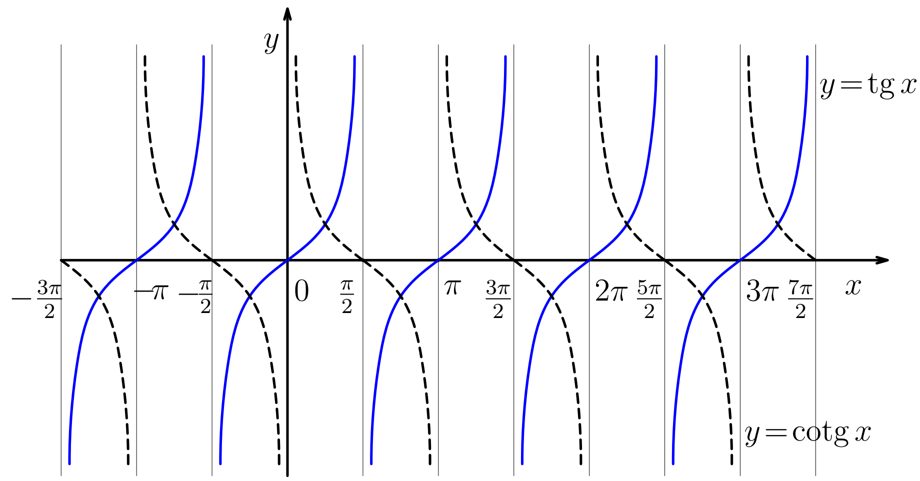


Obr. 4: Funkcie $\sin x$ a $\cos x$

Funkcia tangens: $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$. Funkcia je periodická s periódou $p = \pi$, nepárna.

Funkcia kotangens: $f(x) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ \sin x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$. Funkcia je periodická s periódou $p = \pi$, nepárna.

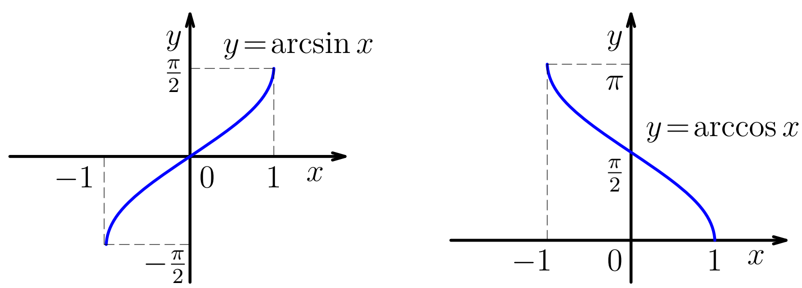
Funkcia: $f(x) = \arcsin x$
je inverznou funkciou k funkcii sínus zúženej na interval $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$, kde je $y = \sin x$ bijektívna a teda existuje k nej inverzná funkcia.
$D(f) =< -1, 1 >$, $H(f) =< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$. Funkcia je nepárna.



Obr. 5: Funkcie $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$

Funkcia: $f(x) = \arccos x$

je inverznou funkciou k funkcii kosínus zúženej na interval $\langle < 0, \pi > \rangle$, kde je $y = \cos x$ bijektívna a teda existuje k nej inverzná funkcia. $D(f) =< -1, 1 >$, $H(f) =< 0, \pi >$.



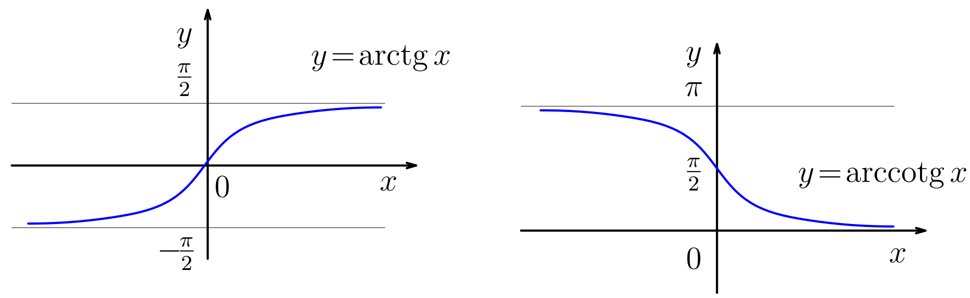
Obr. 6: Funkcie $\arcsin x$ a $\arccos x$

Funkcia: $f(x) = \operatorname{arctg} x$

je inverznou funkciou k funkcii tangens zúženej na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, kde je $y = \operatorname{tg} x$ bijektívna a teda existuje k nej inverzná funkcia. $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funkcia je nepárna.

Funkcia: $f(x) = \operatorname{arccotg} x$

je inverznou funkciou k funkcii kotangens zúženej na interval $(0, \pi)$, kde je $y = \operatorname{cotg} x$ bijektívna a teda existuje k nej inverzná funkcia. $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \pi)$.



Obr. 7: Funkcie $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$

1.8 Funkcie ekonomickej analýzy

Funkcie, ktoré predstavíme v tejto časti, sú nepostrádateľné pri popise a analýze ekonomických procesov. Opakovane sa nimi budeme zaoberať v nasledujúcich kapitolách.

Definícia 1.11 ***Funkcia celkových nákladov (total cost function)*** *určuje celkové náklady TC na množstvo vyrobených jednotiek x, $TC = C(x)$. Pozostáva z* ***fixných nákladov*** *K, ktoré nezávisia na počte vyrobených jednotiek a* ***variabilných nákladov*** *$V(x)$, ktoré vyjadrujú bezprostredné výrobné náklady na výrobu x výrobkov.*
Zápis:

$$C(x) = K + V(x).$$

Definícia 1.12 ***Funkcia priemerných nákladov (average cost function)*** *určuje priemerné náklady na jednotku produkcie AC, ak sa vyrobí x výrobkov.*
Zápis:

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Definícia 1.13 ***Funkcia celkových príjmov (total revenue function)*** *určuje celkové príjmy TR z množstva predaných výrobkov x, $TR = R(x)$.*

Definícia 1.14 ***Funkcia priemerných príjmov (average revenue function)*** *určuje priemerný príjem AR pripadajúci na jednotku produkcie, ak sa predá x výrobkov.*
Zápis:

$$AR(x) = \frac{R(x)}{x}.$$

Definícia 1.15 *Hodnotu x, ktorá udáva množstvo výrobkov, kedy sú celkové náklady rovné celkovým príjmom, $C(x) = R(x)$, nazývame* ***bod zlomu*** *(**break-even point**).*

Ak sú príjmy vyššie ako náklady, tak je výroba zisková. Platí teda:

- ak $\mathbf{C}(\mathbf{x}) < \mathbf{R}(\mathbf{x})$, tak je **výroba zisková**,
- ak $\mathbf{C}(\mathbf{x}) > \mathbf{R}(\mathbf{x})$, tak je **výroba stratová**.

Definícia 1.16 ***Funkcia celkového zisku (total profit function)*** *určuje celkový zisk TP z výroby a predaja x výrobkov, $TP = P(x) = R(x) - C(x)$.*

Definícia 1.17 ***Funkcia priemerného zisku (average profit function)*** *určuje priemerný zisk AP pripadajúci na výrobu a predaj jednotky produkcie, ak sa vyrobí a predá x výrobkov.*
Zápis:

$$AP(x) = \frac{P(x)}{x}.$$

Príklad 1.8.1 *Počas leta stavala skupina študentov kajaky v prenajatých priestoroch. Nájom predstavoval 240 eur a materiál na stavbu jedného kajaku 10 eur. Kajak sa dá predať za 70 eur.*

a) *Koľko kajakov musia predať, aby boli ziskoví?*

b) *Koľko kajakov musia predať, aby bol zisk 180 eur?*

Riešenie.

a) Zostrojíme funkcie celkových nákladov a celkových príjmov.

$$\begin{aligned} C(x) &= 240 + 10x \\ R(x) &= 70x. \end{aligned}$$

Vypočítame, kedy sú príjmy vyššie ako náklady.

$$\begin{aligned} 70x &> 240 + 10x \\ x &> 4. \end{aligned}$$

Musia predať viac ako štyri kajaky.

b) Zostrojíme funkciu celkového zisku.

$$P(x) = R(x) - C(x) = 60x - 240.$$

Vypočítame, kedy je zisk rovný hodnote 180 eur.

$$\begin{aligned} 60x - 240 &= 180 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Ak predajú sedem kajakov, dosiahnu zisk 180 eur. ♡

Definícia 1.18 ***Funkcia dopytu*** *(**demand function**) vyjadruje vzťah medzi množstvom q jednotiek produkcie, o ktorú vyjadrujú spotrebitelia záujem na trhu, a cenou p za jednotku produkcie.*
Zápis:
$$q = D(p).$$

Veta 1.2 (zákon dopytu) *Ak cena výrobku stúpa, množstvo zakúpených výrobkov klesá.*

Funkcia dopytu je preto klesajúca, z čoho vyplýva, že k nej existuje inverzná funkcia $p = d(q)$.

Definícia 1.19 ***Funkcia ponuky*** *(**supply function**) vyjadruje vzťah medzi množstvom q jednotiek produkcie, ktorú je ochotný producent vyrobiť a dodať na trh, a cenou p za jednotku produkcie.*
Zápis:
$$q = S(p).$$

Veta 1.3 (zákon ponuky) *Ak cena výrobku stúpa, množstvo vyrobených a ponúkaných výrobkov stúpa.*

Funkcia ponuky je preto rastúca, z čoho vyplýva, že k nej existuje inverzná funkcia $p = s(q)$.

Definícia 1.20 ***Rovnovážny stav*** *(**market equilibrium**) je taký stav trhu, keď sa ponuka rovná dopytu. Cena zodpovedajúca rovnovážnemu stavu je **rovnovážna cena** p_E a množstvo zodpovedajúce rovnovážnemu stavu je **rovnovážne množstvo** q_E. Bod, v ktorom nastáva rovnovážny stav je **rovnovážnym bodom** (**equilibrium point**).*
Zápis:
$$D(p) = S(p), \quad \text{resp.} \quad d(q) = s(q).$$

Príklad 1.8.2 *Tovar má funkciu dopytu $D(p) = \dfrac{5\ 600}{p}$ a funkciu ponuky $S(p) = p - 10$ tisíc kusov, ak je cena tovaru v eurách. Určme rovnovážnu cenu.*

Riešenie. Vyriešime rovnicu $D(p) = S(p)$.
$$\begin{aligned} \frac{5\ 600}{p} &= p - 10 \\ p^2 - 10p - 5\ 600 &= 0 \\ (p - 80)(p + 70) &= 0. \end{aligned}$$
Keďže cena je veličina, ktorá nemôže nadobúdať záporné hodnoty, rovnovážny stav nastane pri cene 80 eur. ♡

1.9 Úlohy

1.1 Určte definičný obor funkcií

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 24}$,

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$,

c) $f(x) = \ln(6 + x - x^2)$,

d) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \sqrt{6 - 2x} - 3\log\dfrac{x+4}{x-2}$.

1.2 Výskumom bolo zistené, že krajčírka, ktorá začne pracovať o 7,00 hodine, bude mať o x hodín ušitých $f(x) = 32x - 2x^2$ blúzok.

a) Koľko blúzok bude mať ušitých o 10,00 hodine?

b) Koľko blúzok ušije medzi 10,00 a 11,00 hodinou?

c) Koľko blúzok ušije medzi 11,00 a 12,00 hodinou?

1.3 Tovar má funkciu dopytu $q = 120 + 16p - p^2$ a funkciu ponuky $q = 56 + 4p$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

1.4 Tovar má funkciu dopytu $p = \dfrac{21}{q-7}$ a funkciu ponuky $p = q - 3$, ak q je množstvo tovaru v kusoch. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

1.5 Celkové týždenné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 0{,}1x^2 + x + 300$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x) = 38x - 400$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

1.6 Celkové mesačné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 2x + 72$. Predajná cena bola stanovená na $7{,}8 - 0{,}1x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových mesačných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

Výsledky:

1.1

a) $D(f) = (-\infty, -4 > \cup < 6, \infty)$,

b) $D(f) = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$,

c) $D(f) = (-2, 3)$,

d) $D(f) = (-\infty, -4) \cup (2, 3 >$.

1.2

a) 78 blúzok,

b) 18 blúzok,

c) 14 blúzok.

1.3 $p_E = 16$

1.4 $p_E = 7$

1.5 $x_1 = 20;\ x_2 = 350;\ (20, 350)$

1.6 $x_1 = 18;\ x_2 = 40;\ (18, 40)$

2 Základy lineárnej algebry

2.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmom algebrická rovnica, koreň algebrickej rovnice, rýdzoracionálna funkcia a jej rozklad na elementárne zlomky na množine reálnych čísel. Oboznámiť s pojmami matica, operácie s maticami, hodnosť matice, determinant matice, inverzná matica a algoritmami ich výpočtov. Oboznámiť s technikami riešenia sústav lineárnych algebrických rovníc.

2.2 Otázky

- Definujte algebrickú rovnicu a koreň algebrickej rovnice.
- Definujte rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov na $\mathbb{R}$.
- Uveďte postup nájdenia racionálnych koreňov algebrickej rovnice s celočíselnými koeficientami.
- Uveďte postup výpočtu hodnoty polynómu v bode pomocou Hornerovej schémy.
- Definujte rýdzoracionálnu funkciu.
- Definujte elementárny zlomok na množine $\mathbb{R}$ a uveďte postup rozkladu racionálnej funkcie na elementárne zlomky na $\mathbb{R}$.
- Popíšte metódy výpočtu koeficientov pri rozklade racionálnej funkcie na elementárne zlomky na množine $\mathbb{R}$.
- Definujte pojem matice, štvorcovej matice, lichobežníkovej matice a stupňovitej matice.
- Definujte súčet, násobenie skalárom, súčin matíc a mocninu matice.
- Uveďte spôsoby výpočtu determinantu matice.
- Vymenujte ekvivalentné riadkové úpravy a popíšte ich vplyv na hodnotu determinantu.
- Definujte inverznú maticu a uveďte spôsoby jej výpočtu.
- Definujte sústavu lineárnych algebrických rovníc a sformulujte Frobeniovu vetu o jej riešiteľnosti.
- Popíšte Gaussovu eliminačnú metódu.
- Popíšte výpočet riešenia sústavy lineárnych algebrických rovníc pomocou Cramerovho pravidla.

2.3 Algebrické rovnice

Definícia 2.1 *Nech $n \in \mathbb{N}$. **Algebrickou rovnicou** s reálnymi koeficientami nazývame rovnicu*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{1}$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ pre $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Definícia 2.2 *Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je **koreňom (riešením) rovnice** (1), ak $P(\alpha) = 0$.*

Veta 2.1 *Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je koreňom rovnice (1), ak polynóm $x-\alpha$ delí polynóm $P(x)$ bezo zvyšku.*

Polynóm $x - \alpha$ nazývame koreňovým činiteľom polynómu $P(x)$ prislúchajúcim koreňu α.

Definícia 2.3 *Nech $p, s, n \in \mathbb{N}$. Nech $k_1, \ldots, k_p, l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{N}$ také, že $k_1 + k_2 + \ldots + k_p + 2(l_1 + l_2 + \ldots + l_s) = n$. Hovoríme, že polynóm $P(x)$ je **v tvare súčinu koreňových činiteľov** (v tvare kanonického rozkladu) na množine $\mathbb{R}$, ak $P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \ldots (x-\alpha_p)^{k_p}(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}$, kde $x^2 + p_i x + q_i$, pre $i = 1, 2, \ldots, s$, sú kvadratické trojčleny s reálnymi koeficientami, ktoré nemajú reálne korene.*

Príklad 2.3.1 *Nájdime kanonický rozklad polynómu $P(x) = x^7 - x^6 - x^4 + x^3$ na množine $\mathbb{R}$.*

Riešenie. Pomocou úprav dostávame:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^7 - x^6 - x^4 + x^3 = x^3(x^4 - x^3 - x + 1) = \\ &= x^3\left[x^3(x-1) - (x-1)\right] = x^3(x-1)(x^3-1) \\ &= x^3(x-1)^2(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Keďže hľadáme len reálne korene rovnice $P(x) = 0$, vo výpočte nepokračujeme. ♡

Pri hľadaní koreňov algebrickej rovnice s celočíselnými koeficientami sa nezaobídeme bez nasledujúcej vety.

Veta 2.2 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_i \in \mathbb{Z}$, pre $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, a nech $a_n \neq 0$. Ak $\alpha = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pre p, q nesúdeliteľné, je koreňom rovnice*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{2}$$

tak je koeficient a_n deliteľný číslom q a koeficient a_0 deliteľný číslom p.

Nasledujúci princíp známy ako **Hornerova schéma** sa používa na výpočet hodnoty polynómu v bode. Polynóm $P(x)$ môžeme totiž prepísať nasledovným spôsobom

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\ &= ((\ldots((a_n)_1 x + a_{n-1})_2 x + \ldots + a_1)_n x + a_0)_{n+1}, \end{aligned}$$

kde index za zátvorkou znamená poradové číslo zátvorky. Výpočet hodnoty $P(\alpha)$ pomocou Hornerovej schémy sa dá zapísať do jednoduchej tabuľky:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & b_{n-1}\cdot\alpha & b_{n-2}\cdot\alpha & \ldots & b_1\cdot\alpha & b_0\cdot\alpha \\ \hline & a_n & b_{n-1}\alpha + a_{n-1} & b_{n-2}\alpha + a_{n-2} & \ldots & b_1\alpha + a_1 & b_0\alpha + a_0 \\ & = b_{n-1} & = b_{n-2} & = b_{n-3} & \ldots & = b_0 & = P(\alpha) \end{array}$$

Koeficienty b_i, pre $i = 0, 1, \ldots, n-1$, reprezentujú polynóm stupňa $n-1$, ktorý rovnako ako polynóm $x - \alpha$ delí pôvodný polynóm. Teda

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Príklad 2.3.2 *Pre polynóm $P(x) = 2x^5 + x^4 - x^2 - 8x - 6$ nájdime kanonický rozklad na množine $\mathbb{R}$.*

Riešenie. Ak položíme $P(x) = 0$, jedná sa o algebrickú rovnicu s celočíselnými koeficientami. Na určenie množiny možných racionálnych koreňov použijeme vzťahy medzi koeficientami a riešením rovnice (viď veta 2.2).

$$a_n = 2 \quad \wedge \quad q|a_n \quad \Rightarrow \quad q \in \{\pm 1, \pm 2\}.$$

$$a_0 = -6 \quad \wedge \quad p|a_0 \quad \Rightarrow \quad p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}.$$

Do úvahy teda prichádzajú korene

$$\alpha = \frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\} =: M.$$

Sčítaním koeficientov zistíme, že číslo 1 nie je koreňom polynómu $P(x)$. Pomocou Hornerovej schémy budeme postupne overovať ďalšie čísla z horeuvedenej množiny M. Zistime, či je koreňom $\alpha = -1$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & 1 & 0 & -1 & -8 & -6 \\ -1 & & -2 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -2 & -6 & |0 \end{array}$$

Hodnota polynómu $P(x)$ v bode $\alpha = -1$ je $P(-1) = 0$, číslo $\alpha = -1$ je teda koreňom daného polynómu. Navyše platí

$$P(x) = (x - (-1)) \cdot (2x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 6).$$

Keďže stupeň koreňa $\alpha = -1$ môže byť viac ako jedna, pokračujeme vo výpočte overovaním, či je koreňom polynómu $Q(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 6$. Tento postup opakujeme dovtedy, kým hodnota polynómu nebude rôzna od nuly. Môžeme pritom pokračovať v Hornerovej schéme bez prerušenia.

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & 2 & -1 & 1 & -2 & -6 \\
-1 & & -2 & 3 & -4 & 6 \\
\hline
 & 2 & -3 & 4 & -6 & |0 \\
-1 & & -2 & 5 & -9 & \\
\hline
 & 2 & -5 & 9 & |-15 &
\end{array}$$

Zistili sme, že stupeň koreňa $\alpha = -1$ je 2 a teda

$$P(x) = (x+1)^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 6).$$

Zoberieme nasledujúce číslo z množiny M a pokračujeme vo výpočte. Napokon dostávame

$$P(x) = 2\,(x+1)^2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x^2 + 2\right).$$

♡

2.4 Racionálne funkcie a ich rozklad na parciálne zlomky

Definícia 2.4 *Nech $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy na $\mathbb{R}$, nech $Q(x)$ nie je nulový polynóm. Nech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sú všetky navzájom rôzne reálne korene polynómu $Q(x)$. Každú funkciu tvaru*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} : \quad \mathbb{R} - \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nazývame ***reálnou racionálnou funkciou****.*
Ak je stupeň polynómu $P(x)$ menší než stupeň polynómu $Q(x)$, tak $R(x)$ je rýdzoracionálna funkcia.

Veta 2.3 *Každá racionálna funkcia sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie.*

Príklad 2.4.1 *Napíšme racionálnu funkciu $R(x)$ v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie*

$$R(x) = \frac{2x^5 + 3x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 1}{2x^4 - x^3 + 2x - 1}.$$

Riešenie. Po vydelení čitateľa menovateľom dostávame

$$R(x) = \frac{2x^5 + 3x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 1}{2x^4 - x^3 + 2x - 1} = x + 2 + \frac{x^3 + 5x^2 - 2x + 3}{2x^4 - x^3 + 2x - 1}.$$

♡

Definícia 2.5 *Každú rýdzoracionálnu funkciu $R(x) : \mathbb{R} - \{\alpha\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tvaru*

$$R(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^k}, \qquad \text{kde } A,\ \alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N},$$

alebo $R(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$R(x) = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \qquad \text{kde } M,\ N,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$$

*a polynóm x^2+px+q nemá reálne korene, nazývame **reálnym elementárnym (parciálnym) zlomkom**.*

Veta 2.4 *Každá reálna rýdzoracionálna funkcia sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare súčtu reálnych elementárnych zlomkov.*

Príklad 2.4.2 *Bez počítania koeficientov napíšme racionálnu funkciu*

$$R(x) = \frac{x^3+5x^2-2x+3}{2x^4-x^3+2x-1}$$

v tvare súčtu elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie. Po nájdení reálnych koreňov menovateľa vieme funkciu na množine $\mathbb{R}$ prepísať do tvaru:

$$R(x) = \frac{x^3+5x^2-2x+3}{2(x-\frac{1}{2})(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Každému z reálnych koreňov prislúcha jeden parciálny zlomok. V prípade kvadratického trojčlena (reprezentuje dvojicu komplexne združených koreňov) to bude jeden zlomok s lineárnym dvojčlenom v čitateli:

$$R(x) = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

♡

Metódy výpočtu koeficientov elementárnych zlomkov:

(i) porovnávacia metóda,

(ii) dosadzovacia metóda.

Nasledujúce príklady ilustrujú podstatu a spôsob použitia týchto metód.

Príklad 2.4.3 *Rozložme racionálnu funkciu*

$$R(x) = \frac{x^3+5x^2-2x+3}{2(x-\frac{1}{2})(x+1)(x^2-x+1)}$$

na súčet elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie. Príklad 2.4.2 riešil rozklad tejto funkcie bez počítania koeficientov:

$$\frac{x^3+5x^2-2x+3}{2(x-\frac{1}{2})(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Na výpočet neznámych koeficientov použijeme **porovnávaciu metódu**. Prenásobme teraz túto rovnicu menovateľom ľavej strany. Dostávame:
$x^3+5x^2-2x+3 =$
$= 2A(x+1)(x^2-x+1)+2B(x-\frac{1}{2})(x^2-x+1)+2(Mx+N)(x+1)(x-\frac{1}{2})$.
Následne roznásobme pravú stranu a usporiadajme ju podľa mocnín premennej x. Dostávame rovnosť dvoch polynómov stupňa tri:
$x^3+5x^2-2x+3 =$
$= x^3(2A+2B+2M)+x^2(-3B+M+2N)+x(3B-M+N)+x^0(2A-B-N)$.
Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách x na oboch stranách rovnice získame systém štyroch lineárnych algebrických rovníc o štyroch premennných:

$$\begin{array}{rrclll} x^3: & 1 & = & 2A & +2B & +2M & \\ x^2: & 5 & = & & -3B & +M & +2N \\ x^1: & -2 & = & & 3B & -M & +N \\ x^0: & 3 & = & 2A & -B & & -N, \end{array}$$

ktorý vyriešime napr. Gaussovou eliminačnou metódou (viď podkapitola 2.6) s výsledkom $A=\frac{3}{2}$, $B=-1$, $M=0$ a $N=1$. Rozklad funkcie môžeme napokon zapísať v tvare:

$$R(x) = \frac{3}{2(x-\frac{1}{2})} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}.$$

♡

Príklad 2.4.4 *Rozložme racionálnu funkciu*

$$R(x) = \frac{5x^2-5x+14}{(x-2)(x^2+4)}$$

na súčet elementárnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$.

Riešenie. Rozklad tejto funkcie na parciálne zlomky pomocou neurčitých koeficientov má tvar:

$$\frac{5x^2-5x+14}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Tentokrát použijeme na výpočet neznámych koeficientov **dosadzovaciu metódu**. Prenásobme poslednú rovnicu najskôr menovateľom ľavej strany t. j. spoločným menovateľom pravej strany. Dostávame rovnosť:
$5x^2-5x+14 = A(x^2+4)+(Mx+N)(x-2)$.

Vidíme, že po dosadení $x = 2$ do tejto rovnice sa druhý sčítanec vynuluje. Môžeme teda bezprostredne vyčísliť hodnotu koeficientu A:

$$\begin{aligned} x = 2 \implies \quad 24 &= 8A \\ A &= 3. \end{aligned}$$

Analogicky by sme pokračovali v prípade, keby menovateľ mal okrem $x = 2$ ďalší reálny koreň. Keďže menovateľ už nemá reálne korene, dosadíme postupne ľubovoľné dve reálne čísla (okrem už použitej hodnoty $x = 2$). Dostaneme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych M a N, ktorú vyriešime. Špeciálne ak dosadíme $x = 0$ vypadne koeficient M, takže bezprostredne môžeme určiť hodnotu N bez zostavovania sústavy rovníc. Každopádne predtým vyčíslené koeficienty dosadíme tiež.

$$\begin{aligned} x = 0 \implies \quad 14 &= 12 + N(-2) \\ 2N &= -2 \\ N &= -1. \end{aligned}$$

Dosaďme napokon napr. $x = 1$ a vypočítajme hodnotu M:

$$\begin{aligned} x = 1 \implies \quad 14 &= 15 + (M-1)(-1) \\ 14 &= 16 - M \\ M &= 2. \end{aligned}$$

Výsledný rozklad má tvar:

$$R(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{2x-1}{x^2+4}.$$

♡

Algoritmus pre rozklad racionálnej funkcie na súčet parciálnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$

1. Zistíme, či je funkcia rýdzoracionálna. Ak nie je, prepíšeme ju pomocou delenia na súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie. Vo výpočte pokračujeme s rýdzoracionálnou funkciou.

2. Položíme menovateľ rovný nule a vyriešime vzniknutú algebrickú rovnicu na množine $\mathbb{R}$.

3. Vyjadríme rozklad rýdzoracionálnej funkcie na súčet parciálnych zlomkov na množine $\mathbb{R}$ pomocou neurčitých koeficientov.

4. Pomocou niektorej z metód vypočítame koeficienty.

2.5 Aritmetické vektory a matice

Pri praktických výpočtoch je niekedy výhodné matematický model riešenej úlohy, ktorý sme vytvorili, nahradiť zápisom pomocou matíc. V nasledujúcej časti predstavíme pojem matice, špeciálne typy matíc a operácie s nimi.

Definícia 2.6 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Usporiadanú n-ticu čísel $a_1, a_2, ..., a_n$ nazývame n-rozmerným* ***aritmetickým vektorom****. Čísla $a_1, a_2, ..., a_n$ nazývame zložkami alebo súradnicami aritmetického vektora.*
Zápis:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Definícia 2.7 *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Nech $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$,...,$\bar{a}_m$ sú n-rozmerné vektory.* ***Lineárnou kombináciou vektorov*** *$\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$,...,$\bar{a}_m$ nazývame vektor $\bar{x} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \bar{a}_m$. Konštanty α_1, α_2,...,α_m nazývame kombinačnými koeficientami.*

Definícia 2.8 *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Vektory $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$,...,$\bar{a}_m$ (n-rozmerné) sú* ***lineárne závislé****, ak existujú čísla α_1, α_2,...,$\alpha_m \in \mathbb{R}$, aspoň jedno rôzne od nuly, také, že platí $\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \bar{a}_m = \bar{0}$ $(= (0, 0, \ldots, 0))$. Ak vektory nie sú lineárne závislé, hovoríme, že sú* ***lineárne nezávislé****.*

Definícia 2.9 ***Maticou*** *typu $m \times n$ nazývame množinu prvkov zapísaných do tabuľky s m riadkami a n stĺpcami, pre $m, n \in \mathbb{N}$:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Zápis: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

V nasledujúcich riadkoch definujeme špeciálne typy matíc.

1. **Riadková matica** (riadkový vektor): $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
2. **Stĺpcová matica** (stĺpcový vektor): $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
3. **Transponovaná matica** k matici $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ je matica $\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{B} = (b_{ij})$ typu $n \times m$, kde $b_{ij} = a_{ji}$, pre $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

   Príklad:

   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. **Štvorcová matica** $(m = n)$: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$

Nasledujú špeciálne typy štvorcových matíc:

5. **Diagonálna matica**: $\boldsymbol{D} = (d_{ij})$, kde pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$

   $$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad i \neq j, \\ \text{ľubovoľné} & \text{pre} \quad i = j. \end{cases}$$

   Zápis: $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$.

   Príklad:

   $$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(3, 2, 1).$$

6. **Jednotková matica**: $\boldsymbol{E} = (e_{ij})$, kde pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$

   $$e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{pre} \quad i = j. \end{cases}$$

   Príklad:

   $$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. **Nulová matica**: $\boldsymbol{O} = (o_{ij})$, kde $o_{ij} = 0$, pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

   Príklad:

   $$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. **Horná (dolná) trojuholníková matica**: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = 0$, pre $i > j$ $(i < j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

   Príklad:

   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{horná}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{dolná}.$$

V prípade, ak sa nejedná o štvorcové matice, ale prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule, dostávame nasledujúce typy matíc.

9. **Lichobežníková matica**: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = 0$, pre $i > j$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

   Príklad:

   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. **Stupňovitá (Gaussova) matica**: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ je lichobežníková matica, v ktorej každý nasledujúci riadok obsahuje aspoň o jednu nulu zľava viac ako predchádzajúci riadok.
    Príklad:
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definícia 2.10 ***Súčtom matíc*** $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *typu* $m \times n$ *nazývame maticu* $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$*, pre ktorú* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$*, pre* $i = 1, 2, \ldots, m$*;* $j = 1, 2, \ldots, n$.
Zápis*:* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Definícia 2.11 *Nech* $k \in \mathbb{R}$ *je konštanta,* ***k-násobkom matice A*** *typu* $m \times n$ *nazývame maticu* $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$*, pre ktorú* $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$*, pre* $i = 1, 2, \ldots, m$*;* $j = 1, 2, \ldots, n$.
Zápis*:* $\boldsymbol{C} = k \cdot \boldsymbol{A}$.

Pre horedefinované operácie s maticami platia nasledujúce vzťahy.

Veta 2.5 *Nech* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$*,* $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$*,* $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *sú matice rovnakého typu a* k*,* l *sú konštanty. Platia rovnosti:*

(i) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$,

(ii) $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$,

(iii) $k \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k \cdot \boldsymbol{A} + k \cdot \boldsymbol{B}$.

Definícia 2.12 *Nech* $m, n, r \in \mathbb{N}$*. Nech* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *je matica typu* $m \times r$ *a* $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ *je matica typu* $r \times n$*.* ***Súčinom matíc A, B*** *nazývame maticu* $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$*, kde pre* $i = 1, 2, \ldots, m$*;* $j = 1, 2, \ldots, n$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ir} \cdot b_{rj} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Zápis*:* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Pre súčin matíc platia pravidlá formulované v nasledujúcej vete. Na rozdiel od súčtu matíc pre súčin neplatí komutatívny zákon.

Veta 2.6 *Nech* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$*,* $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$*,* $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *sú matice typov, ktoré dovolia doleuvedené operácie a* $k \in \mathbb{R}$ *je konštanta. Platia rovnosti:*

(i) $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$,

(ii) $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$,

(iii) $k \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (k \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \cdot k) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot (k \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot k$.

Definícia 2.13 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ je štvorcová matica rádu n. Maticu $\boldsymbol{A}^r$*

$$\boldsymbol{A}^r = \begin{cases} \boldsymbol{E} & r = 0, \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{r-1} & r = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

nazývame ***r-tou mocninou matice A****.*

Príklad 2.5.1 *Pre matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

vypočítajme

a) $2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, b) $3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{C}$, c) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, d) $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$,

e) $\boldsymbol{A}^2$, f) $\boldsymbol{B}^2$, g) $\boldsymbol{A}^\top$, h) $\boldsymbol{B}^\top$.

Riešenie.

a) $2\boldsymbol{A} = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$

$$-\boldsymbol{B} = -\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Keďže sčítavať môžme len matice rovnakého rozmeru, $2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ neexistuje.

b) Na rozdiel od predchádzajúceho príkladu sú v tomto prípade obe matice rovnakého rozmeru, čiže všetky operácie môžeme uskutočniť.

$$3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{C} = 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

c) Podmienkou existencie súčinu dvoch matíc je, aby počet stĺpcov prvej matice bol rovný počtu riadkov druhej matice. Keďže pre $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ je

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$$

dostávame

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + 0\cdot 1 - 1\cdot 0, & 2\cdot 2 + 0\cdot 0 - 1\cdot 2, & 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) - 1\cdot 3 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 1 + 0\cdot 0, & 3\cdot 2 + 2\cdot 0 + 0\cdot 2, & 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 17 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Počet stĺpcov matice $\boldsymbol{B}$ sa nerovná počtu riadkov matice $\boldsymbol{A}$, teda $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ neexistuje. Všimnime si, že v našom prípade $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

e) Jednoduchým dôsledkom podmienky existencie súčinu dvoch matíc je, že $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$ sa dá vypočítať len v prípade štvorcovej matice, teda $\boldsymbol{A}^2$ neexistuje.

f) $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 27 & 12 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$

g) Transponovaná matica k danej matici vzniká zámenou riadkov a stĺpcov. Z prvého riadku sa tak stáva prvý stĺpec a naopak, atď.

$$\boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

h) $\boldsymbol{B}^\top = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

♡

Definícia 2.14 *Nech $m, n \in \mathbb{N}$.* ***Hodnosťou matice $\boldsymbol{A}$*** *typu $m \times n$ nazývame maximálny počet lineárne nezávislých aritmetických vektorov tvoriacich riadky resp. stĺpce matice $\boldsymbol{A}$.*
Zápis*:* $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$*.*

Poznámka 2.1 *Z horeuvedenej definície vyplýva, že* $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) \leq \min\{m, n\}$*.*

Definícia 2.15 (ERÚ) ***Ekvivalentnou riadkovou úpravou matice*** *nazývame každú z nasledujúcich úprav:*

(i) zmena poradia riadkov,

(ii) vynásobenie riadku nenulovou konštantou,

(iii) pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov k niektorému riadku.

Definícia 2.16 *Dve* ***matice*** *budeme nazývať* ***ekvivalentné****, ak sa jedna z matíc dá upraviť na druhú pomocou ekvivalentných riadkových úprav.*
Zápis*:* $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$*.*

Nasledujúca veta je nápomocná pri určovaní hodnosti matice.

Veta 2.7 *Pre ľubovoľnú maticu A platia nasledujúce tvrdenia.*

(i) *Nech matica* $\boldsymbol{A}$ *je ekvivalentná s maticou* $\boldsymbol{B}$, *tak* $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{B})$.

(ii) *Každú maticu možno pomocou ekvivalentných úprav upraviť na ekvivalentnú stupňovitú (Gaussovu) maticu.*

(iii) *Nech* $m \in \mathbb{N}$. *Nech* $\boldsymbol{A}$ *je stupňovitá matica s* m *nenulovými riadkami, tak* $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = m$.

Dôsledkom predchádzajúcej vety je jednoduchý **algoritmus na určenie hodnosti matice**.

1. K danej matici $\boldsymbol{A}$ nájdeme ekvivalentnú stupňovitú maticu $\boldsymbol{B}$.

2. $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$ je rovná počtu nenulových riadkov matice $\boldsymbol{B}$.

Príklad 2.5.2 *Určme hodnosť matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav dostaneme stupňovitú maticu

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ktorá je ekvivalentná s maticou A. Počet nenulových riadkov udáva hodnosť matice, teda $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 2$. ♡

Definícia 2.17 *Nech* $n \in \mathbb{N}$. *Nech* $\boldsymbol{A}$ *je štvorcová matica rádu* n. *Nech* $\boldsymbol{M}_{ij}$ *je štvorcová matica rádu* $n-1$, *ktorá vznikla z matice* $\boldsymbol{A}$ *vynechaním* i*-tého riadku a* j*-tého stĺpca v prípade, ak* $n \geq 2$. ***Determinantom matice A*** *nazývame číslo* $\det \boldsymbol{A}$, *pre ktoré platí:*

(i) $\det \boldsymbol{A} = a_{11}$, *pre* $n = 1$,

(ii) $\det \boldsymbol{A} = a_{11} \det \boldsymbol{M}_{11} - a_{12} \det \boldsymbol{M}_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det \boldsymbol{M}_{1n}$, *pre* $n \geq 2$.

Zápis*:* $\det \boldsymbol{A}$, *resp.* $|\boldsymbol{A}|$.

Jednoduchým spôsobom výpočtu determinantu matice rádu nanajvýš tri je takzvané **krížové pravidlo** nazývané tiež **Sarusovo pravidlo**:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - \\ -(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}). \end{array}$$

Príklad 2.5.3 *Vypočítajme determinanty matíc*

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Riešenie.

a) Matica je stupňa 2, môžeme použiť krížové (Sarusovo) pravidlo

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5.$$

b) Matica je stupňa 3, môžeme opäť použiť krížové pravidlo.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - (4 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 1) =$$
$$= 4 + 18 - (4 + 15) = 22 - 19 = 3.$$

♡

Pre matice rádu vyššieho ako tri krížové pravidlo neplatí. Pri výpočte determinantov takýchto matíc používame **rozvoj podľa i-tého riadku**, resp. **rozvoj podľa j-tého stĺpca**.

Veta 2.8 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu $n \geq 2$. Platí*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det \boldsymbol{M}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det \boldsymbol{M}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Poznámka 2.2 *Číslo A_{ij} vystupujúce v predchádzajúcej vete nazývame algebrickým doplnkom matice $\boldsymbol{A}$ prislúchajúcim prvku a_{ij}.*

V nasledujúcich vetách je formulovaný **vplyv ekvivalentných úprav na hodnotu determinantu**.

Veta 2.9 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu $n \geq 2$. Nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ výmenou dvoch riadkov (stĺpcov), tak*

$$\det \boldsymbol{B} = -\det \boldsymbol{A}.$$

Veta 2.10 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu n. Nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikla vynásobením i-tého riadku (j-tého stĺpca) matice $\boldsymbol{A}$ konštantou c, tak*

$$\det \boldsymbol{B} = c \cdot \det \boldsymbol{A}.$$

Veta 2.11 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu $n \geq 2$. Nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikla pripočítaním lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k nejakému riadku (stĺpcu) matice $\boldsymbol{A}$, tak*

$$\det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{A}.$$

Algoritmus na výpočet determinantu matice rádu vyššieho ako tri

1. Použitím ERÚ s prihliadnutím na horeuvedené vety (viď veta 2.9, veta 2.10 a veta 2.11) vytvoríme riadok (stĺpec), v ktorom sa nachádza jeden nenulový člen.
2. Urobíme rozvoj podľa riadku (stĺpca) vytvoreného v bode 1.
3. Postup opakujeme, kým nemáme výsledok alebo neznížime rád na hodnotu nanajvýš tri a použijeme krížové pravidlo.

Príklad 2.5.4 *Vypočítajme determinant matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -R_2 \\ -4R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -[-4 - 6 + 9 - (6 - 9 - 4)] = -6.$$

♡

Definícia 2.18 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu n a $\boldsymbol{E}$ jednotková matica rovnakého rádu. Maticu $\boldsymbol{A}^{-1}$ nazveme* ***inverznou maticou*** *k matici $\boldsymbol{A}$ práve vtedy, ak $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.*

Veta 2.12 *Ak k matici $\boldsymbol{A}$ existuje inverzná matica, tak je jediná.*

Definícia 2.19 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu n. Maticu $\boldsymbol{A}$ nazveme* ***regulárnou (singulárnou)*** *maticou práve vtedy, ak* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ *(*$\det \boldsymbol{A} = 0$*).*

Definícia 2.20 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu n. Maticu $\boldsymbol{B}$ nazveme* ***adjungovanou maticou*** *k matici $\boldsymbol{A}$ práve vtedy, ak $b_{ij} = A_{ji}$ (algebrický doplnok prvku a_{ji}), pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*
Zápis*:*

$$\operatorname{adj} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\top}.$$

Nasledujúca veta popisuje jednu z možností ako **nájsť inverznú maticu** k regulárnej matici a síce **pomocou adjungovanej matice**.

Veta 2.13 *Nech $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica. Potom k nej existuje inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$ a platí*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \cdot (\operatorname{adj} \boldsymbol{A}).$$

Ďalšou možnosťou ako **nájsť inverznú maticu** k regulárnej matici je **pomocou ekvivalentných riadkových úprav** a to nasledujúcim spôsobom.

1. Zostrojíme blokovú maticu $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{E})$.

2. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav prevedieme na tvar s hornou trojuholníkovou maticou na ľavej strane. Ak boli riadky matice lineárne závislé (aspoň jeden riadok matice $\boldsymbol{A}$ sa vynuloval), je matica singulárna a inverzná matica k nej neexistuje.

3. Ak je matica regulárna, upravíme pomocou ekvivalentných riadkových úprav na diagonálnu maticu na ľavej strane.

4. Predelením diagonálnymi členmi upravíme na blokovú maticu $(\boldsymbol{E} \,|\, \boldsymbol{A}^{-1})$.

2.6 Sústavy lineárnych algebrických rovníc

Definícia 2.21 *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Sústavu rovníc*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

nazývame ***sústavou lineárnych algebrických rovníc****. Čísla a_{ij} nazývame koeficientami sústavy, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazývame neznámymi a $b_1, b_2, \ldots, b_m$ absolútnymi členmi (pravými stranami) sústavy.*

Definícia 2.22 *Maticu utvorenú z koeficientov*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame ***maticou sústavy****. Maticu utvorenú z matice sústavy $\boldsymbol{A}$ a vektora pravej strany $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)^\top$*

$$\boldsymbol{A}^\star = (\boldsymbol{A} \,|\, \bar{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazývame ***rozšírenou maticou sústavy****.*
Zápis sústavy (1) v maticovom tvare*:*

$$\boldsymbol{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}.$$

Definícia 2.23 ***Riešením sústavy*** *lineárnych algebrických rovníc (1) nazývame taký vektor $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^\top$, ktorý vyhovuje rovnici $\boldsymbol{A} \cdot \bar{\alpha} = \bar{b}$.*

Z hľadiska riešiteľnosti sústavy môžu nastať prípady:

- sústava má práve jedno riešenie,
- sústava má nekonečne veľa riešení,
- sústava nemá riešenie.

Ktorý z horeuvedených prípadov nastal, vieme určiť na základe Frobeniovej vety.

Veta 2.14 (Frobeniova veta) *Nech $\boldsymbol{A}$ je matica sústavy a $\boldsymbol{A}^\star$ je rozšírená matica sústavy (1). Sústava (1) má riešenie vtedy a len vtedy, ak* $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{A}^\star)$. *Ďalej platí:*

(i) Sústava (1) má práve jedno riešenie vtedy a len vtedy, ak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{A}^\star) = n$.

(ii) Sústava (1) má nekonečne veľa riešení vtedy a len vtedy, ak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{A}^\star) < n$.

V prípade ak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) \neq \mathrm{h}(\boldsymbol{A}^\star)$, sústava (1) nemá riešenie. V prípade, ak má sústava nekonečne veľa riešení, je počet tzv. voľných premenných $n - \mathrm{h}(\boldsymbol{A})$.

V nasledujúcich odsekoch sa budeme venovať jednotlivým metódam riešenia sústav lineárnych algebrických rovníc.

Gaussova eliminačná metóda

Táto metóda spočíva v postupnom eliminovaní neznámych v nasledujúcich rovniciach. Zjednodušene by sme princíp výpočtu mohli zhrnúť do nasledujúcich bodov.

1. Nahradíme sústavu lineárnych algebrických rovníc rozšírenou maticou sústavy.
2. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme maticu na stupňovitý tvar.
3. Na základe Frobeniovej vety rozhodneme o riešiteľnosti sústavy.
4. Ak existuje riešenie sústavy, vyjadríme ho v tvare vektora.

Príklad 2.6.1 *Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešme sústavu lineárnych algebrických rovníc nad* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 13x_5 & = & 9 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array}.$$

Riešenie. Pomocou ekvivalentných riadkových úprav upravíme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -3R_1 \\ -2R_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \\ -R_2 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftrightarrows \\ \leftrightarrows \end{array} \approx \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Keďže hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{A}^\star) = 3$, sústava má riešenie. Zároveň počet neznámych je väčší ako hodnosť matice $n = 5 > \mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 3$, z toho vyplýva, že sústava má nekonečne veľa riešení. Počet voľných premenných určíme na základe vzťahu $n - \mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 5 - 3 = 2$. Upravená sústava po prepise do tvaru rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 3 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0. \end{array}$$

Pri voľbe $x_5 = t$ a $x_1 = s$ dostávame riešenie $\overline{x} = (s,\, 1 - t + 2s,\, 3 - 4t,\, 0,\, t)^\top$ pre $s,\, t \in \mathbb{R}$.

♡

Cramerovo pravidlo

Pre $n \in \mathbb{N}$ majme sústavu n algebrických rovníc o n neznámych

$$\begin{array}{rcrcccrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{2}$$

Veta 2.15 *Sústava (2) má práve jedno riešenie vtedy a len vtedy, ak je matica sústavy regulárna.*

Nech je matica sústavy (2) regulárna. Z toho vyplýva, že deteminant matice sústavy je rôzny od nuly. Na nájdenie riešenia takejto sústavy použijeme **Cramerovo pravidlo**.

Veta 2.16 (Cramerovo pravidlo) *Nech $D \neq 0$ je deteminant matice sústavy (2). Nech D_i je deteminant matice, ktorá vznikla z matice sústavy nahradením i-tého stĺpca vektorom pravej strany. Riešením sústavy (2) je vektor $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top$, kde*

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad \textit{pre} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Príklad 2.6.2 *Pomocou Cramerovho pravidla riešme sústavu lineárnych algebrických rovníc nad $\mathbb{R}$*

$$\begin{array}{rcrcrcl} 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 9 \end{array}.$$

Riešenie. Matica sústavy je štvorcová, vypočítajme teda determinant matice sústavy D

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -35.$$

Keďže determinant matice sústavy je rôzny od nuly, je táto matica regulárna. Môžeme teda použiť Cramerovo pravidlo. Nahradením prvého stĺpca stĺpcom pravej strany dostaneme determinant D_1. Analogicky vypočítame D_2 a D_3

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -35, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -70,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -175.$$

Sústava má práve jedno riešenie $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, kde

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-35}{-35} = 1,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-70}{-35} = 2,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-175}{-35} = 5.$$

♡

2.7 Úlohy

2.1 Rozložte dané polynómy na súčin koreňových činiteľov nad množinou $\mathbb{R}$:

a) $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$,

b) $4x^3 - 2x^2 + 2x - 1$,

c) $3x^5 + 17x^4 - 6x^3 - 96x^2 + 32x$,

d) $2x^5 + 9x^4 + 6x^3 - 81$,

e) $5x^5 + 32x^4 + 72x^3 + 64x^2 + 16x$,

f) $2x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 20x^2$.

2.2 Dané racionálne funkcie rozložte na súčet reálnych elementárnych zlomkov:

a) $\dfrac{6\,x^4 - 12\,x^3 - 11\,x^2 + 17\,x + 4}{x^3 - 2\,x^2 - x + 2}$, e) $\dfrac{x^3 + 6x^2 - 6x + 7}{x^3 - x^2 + x - 6}$,

b) $\dfrac{6\,x^2 - 22\,x + 18}{x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6}$, f) $\dfrac{5x^2 - 5x + 9}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}$.

c) $\dfrac{3\,x^5 - 15\,x^4 + 21\,x^3 + 4\,x^2 - 28\,x + 12}{x^4 - 5\,x^3 + 8\,x^2 - 4\,x}$,

d) $\dfrac{-2\,x^3 - 6}{x^4 + 2\,x^3 + 4\,x^2 + 6\,x + 3}$,

2.3 Vypočítajte pre dané matice

a) $3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B}$, b) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, c) $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$,

d) $\boldsymbol{A}^2$, e) $\boldsymbol{B}^2$, f) $\boldsymbol{A}^\top$,

ak

1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.4 Určte hodnosť matice

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 18 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 27 & 26 & 25 \\ 19 & 18 & 17 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$ d) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

2.5 Vypočítajte determinanty matíc

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$,

b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$,

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -2 & 10 \\ -5 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

2.6 Vypočítajte inverznú maticu k danej matici

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, c) $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, d) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.7 Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte sústavu lineárnych algebrických rovníc

a) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 40 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 37 \end{array}$,

b) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \end{array}$,

c) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \end{array}$,

d) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 9x_1 & - & x_2 & + & 15x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \end{array},$

e) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 8x_1 & + & 12x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & - & 7x_4 & = & 3 \end{array},$

f) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 12 \end{array}.$

2.8 Pomocou Cramerovho pravidla riešte sústavy lineárnych algebrických rovníc

a) $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \end{array},$

b) $\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & = & -6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 18 \end{array},$

c) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array},$

d) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array},$

e) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 40 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 37 \end{array},$

f) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \end{array}.$

2.9 V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu a náklady na materiál pri výrobe dvoch modelov DVD prehrávačov.

náklady	A	B
pracovná sila	12 €	16 €
materiál	21 €	30 €

Vypočítajte koľko prehrávačov modelu A a koľko prehrávačov modelu B je potrebné vyrobiť za deň, keď na pracovnú silu máme denne k dispozícii 920 €, na materiál 1 680 € a chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

2.10 V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu, náklady na materiál a náklady na reklamu pri výrobe troch modelov hodiniek.

model	pracovná sila	materiál	reklama
A	10 €	15 €	5 €
B	8 €	6 €	2 €
C	12 €	16 €	8 €

a) Vypočítajte koľko kusov hodiniek modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď na pracovnú silu máme týždenne k dispozícii 620 €, na materiál 750 € a na reklamu 330 €, pričom chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

b) Ako by sa zmenila výroba, ak peniaze na reklamu využijeme na iný účel?

Výsledky:

2.1

a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)$,

b) $(2x-1)(2x^2+1)$,

c) $3(x-\frac{1}{3})(x+4)^2(x-2)x$,

d) $2(x-\frac{3}{2})(x+3)^2(x^2+3)$,

e) $5(x+\frac{2}{5})(x+2)^3x$,

f) $2(x-\frac{5}{2})(x+2)^2x^2$.

2.2

a) $6\,x-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$,

b) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$,

c) $3\,x+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{(x-2)^2}-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{3}{x}$,

d) $\dfrac{3}{x^2+3}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$,

e) $1+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4x-2}{x^2+x+3}$,

f) $\dfrac{2x+1}{x^2+4}+\dfrac{3}{x-3}$.

2.3

1) a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, b) neexistuje, c) neexistuje, d) neexistuje, e) neexistuje, f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) a) neexistuje, b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) neexistuje, d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, e) neexistuje, f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) a) neexistuje, b) neexistuje, c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, d) neexistuje, e) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2, 1 \end{pmatrix}$.

2.4

a) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 3$, b) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 2$, c) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 3$, d) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 2$.

2.5

a) $|\boldsymbol{A}| = -35$, b) $|\boldsymbol{B}| = -35$, c) $|\boldsymbol{C}| = -570$, d) $|\boldsymbol{D}| = 12$, e) $|\boldsymbol{F}| = -48$, f) $|\boldsymbol{G}| = 223$.

2.6

a) $\boldsymbol{A}^{-1}$ neexistuje,

b) $\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{1}{63}\begin{pmatrix} 14 & -7 & 7 \\ 8 & 14 & -5 \\ -5 & 7 & 11 \end{pmatrix}$,

d) $\boldsymbol{G}^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -11 & -1 & 9 \\ -17 & -6 & 5 \\ 26 & -11 & 1 \end{pmatrix}$.

2.7

a) $\overline{x} = (1, 2, 2, 0)^\top$,

b) $\overline{x} = (-2, 0, 1, -1)^\top$,

c) sústava nemá riešenie,

d) sústava nemá riešenie,

e) $\overline{x} = (\frac{5}{8} - 3t - s, 2t, 8s, -\frac{1}{4}+10s)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$,

f) $\overline{x} = (6-26t+17s, -1+7t-5s, t, s)^\top \; s, t \in \mathbb{R}$.

2.8

a) $x_1 = \frac{-3}{-1},\ x_2 = \frac{-1}{-1} \Rightarrow \overline{x} = (3,1)^\top$,

b) $x_1 = \frac{48}{24},\ x_2 = \frac{72}{24} \Rightarrow \overline{x} = (2,3)^\top$,

c) $x_1 = \frac{-36}{-12},\ x_2 = \frac{12}{-12},\ x_3 = \frac{-24}{-12} \Rightarrow \overline{x} = (3,-1,2)^\top$,

d) $x_1 = \frac{56}{28},\ x_2 = \frac{28}{28},\ x_3 = \frac{-28}{28} \Rightarrow \overline{x} = (2,1,-1)^\top$,

e) $x_1 = \frac{-3}{-3},\ x_2 = \frac{-6}{-3},\ x_3 = \frac{-6}{-3},\ x_4 = \frac{0}{-3} \Rightarrow \overline{x} = (1,2,2,0)^\top$,

f) $x_1 = \frac{-28}{14},\ x_2 = \frac{0}{14},\ x_3 = \frac{14}{14},\ x_4 = \frac{-14}{14} \Rightarrow \overline{x} = (-2,0,1,-1)^\top$.

2.9 A=30 kusov, B=35 kusov

2.10

a) A=10 kusov, B=20 kusov, C=30 kusov,

b) $(-46+28t, t, 90-3t),\ t \in < 17, 30 >$.

3 Limita a spojitosť funkcie

3.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmom limita funkcie, so základnými vlastnosťami limity a technikami ich výpočtu. Oboznámiť s pojmom spojitosť funkcie a vlastnosťami spojitých funkcií na uzavretom intervale. Oboznámiť s pojmom asymptota grafu funkcie bez smernice a so smernicou.

3.2 Otázky

- Definujte pojem limity.
- Uveďte vlastnosti limity v prípade konečných (vlastných) limít.
- Uveďte vlastnosti limity v prípade nekonečných (nevlastných) limít.
- Definujte limitu sprava, resp. limitu zľava funkcie v bode.
- Definujte pojem spojitosť funkcie v bode.
- Klasifikujte body nespojitosti funkcie.
- Sformulujte tvrdenia o vlastnostiach funkcií spojitých na uzavretom intervale.
- Definujte asymptotu bez smernice funkcie.
- Definujte asymptoty so smernicou funkcie.
- Uveďte vzťahy na výpočet asymptot so smernicou funkcie.
- Definujte limitu postupnosti.

3.3 Limita funkcie

Definícia 3.1 *Nech $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$.*
*Interval $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\, a + \varepsilon)$, nazývame **$\varepsilon$-ovým okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$.*
*Interval $O_\varepsilon^+(a) = (a,\, a+\varepsilon)$, nazývame **pravým ε-ovým okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$.*
*Interval $O_\varepsilon^-(a) = (a - \varepsilon,\, a)$, nazývame **ľavým ε-ovým okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$.*
*Množinu $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\, a + \varepsilon) - \{0\}$, nazývame **prstencovým ε-ovým okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$.*
*Interval $O_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon},\, \infty\right)$, nazývame **$\varepsilon$-ovým okolím bodu** ∞.*

Definícia 3.2 *Nech $A \subset \mathbb{R}$ a nech $a \in \mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Bod a nazývame **hromadným bodom množiny** A, keď každé prstencové okolie $\overset{\circ}{O}(a)$ obsahuje aspoň jeden bod $x \in A$. Bod $x \in A$, ktorý nie je hromadným bodom množiny A, nazývame **izolovaným bodom množiny** A.*

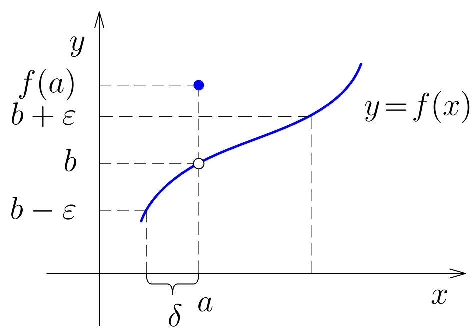
Definícia 3.3 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^\star$ a nech a je hromadným bodom množiny A. Hovoríme, že **funkcia f má v bode a limitu b** práve vtedy, ak pre každé $O_\epsilon(b)$ existuje také prstencové okolie $O_\delta^\circ(a)$, že $f(O_\delta^\circ(a) \cap A) \subset O_\epsilon(b)$ (viď Obr. 8).*

Symbolický zápis:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow (\forall O_\epsilon(b))\ (\exists O_\delta^\circ(a)) : f(O_\delta^\circ(a) \cap A) \subset O_\epsilon(b).$$

Zápis pomocou absolútnej hodnoty:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta) :\ |f(x) - b| < \epsilon.$$



Obr. 8: Limita funkcie

Limita funkcie, ak existuje, je jednoznačná.

Veta 3.1 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a nech a je hromadným bodom množiny A. Ak $\lim_{x \to a} f(x) = b_1$ a $\lim_{x \to a} f(x) = b_2$, tak $b_1 = b_2$.*

Definícia 3.4 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a nech a je hromadným bodom množín $C =< a, \infty) \cap A$, $D = (-\infty, a > \cap A$ a množiny A. Hovoríme, že **funkcia f má v bode a limitu sprava** b práve vtedy, ak pre každé $O_\epsilon(b)$ existuje také okolie $O_\delta^+(a)$, že $f(O_\delta^+(a) \cap A) \subset O_\epsilon(b)$. Hovoríme, že **funkcia f má v bode a limitu zľava** b práve vtedy, ak pre každé $O_\epsilon(b)$ existuje také okolie $O_\delta^-(a)$, že $f(O_\delta^-(a) \cap A) \subset O_\epsilon(b)$.*

Zápis:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a^+} f(x) &= b, \\ \lim_{x \to a^-} f(x) &= b. \end{aligned}$$

Veta 3.2 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a nech a je hromadným bodom množín C, D. Potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ práve vtedy, keď*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Vlastnosti limít pre základné operácie s funkciami v prípade vlastných limít uvádza nasledujúca veta.

Veta 3.3 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech a je hromadným bodom množiny A a nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$. Potom*

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$,
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$,
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c$,
- *ak pre každé $x \in O(a) \cap A$ je $g(x) \neq 0$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \neq 0$, tak $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.*

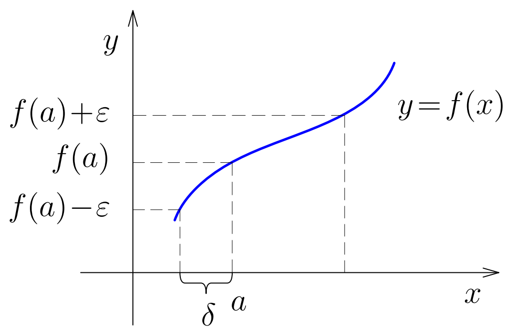
Niektoré vlastnosti nevlastných limít formulujú nasledujúce vety.

Veta 3.4 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech a je hromadným bodom množiny A a nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \{\pm\infty\}$. Potom*

- $\lim\limits_{x\to a} [-f(x)] = -b$,
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$,
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Veta 3.5 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech a je hromadným bodom množiny A a nech pre každé $x \in A$ je $f(x) > 0$ a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, tak $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.*

Poznámka 3.1 *Dá sa ukázať, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, čo je užitočné pre výpočet limít z goniometrických funkcií.*



Obr. 9: Spojitosť funkcie

3.4 Spojitosť funkcie

Definícia 3.5 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech f je definovaná v okolí bodu $a \in A$. Hovoríme, že* ***funkcia*** f ***je spojitá v bode*** a*, ak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ *(viď Obr. 9).*

Zápis:

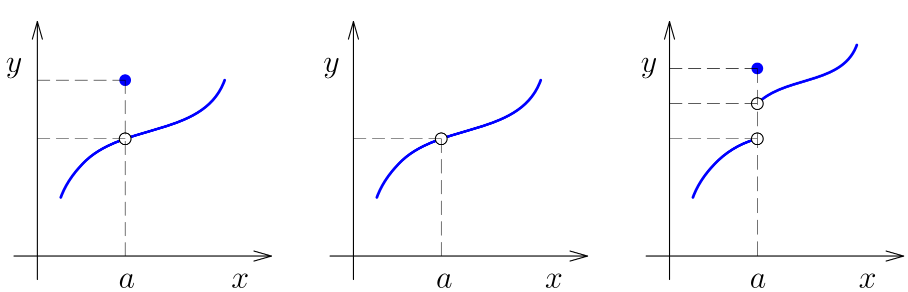
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A, |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Definícia 3.6 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, nech f je definovaná v pravom (ľavom) okolí bodu $a \in A$. Hovoríme, že* ***funkcia*** f ***je spojitá v bode*** a ***sprava (zľava)****, ak* $\lim\limits_{x \to a^{+(-)}} f(x) = f(a)$.

Definícia 3.7 *Hromadné body definičného oboru funkcie f, v ktorých funkcia f nie je spojitá, nazývame* ***body nespojitosti funkcie*** f.

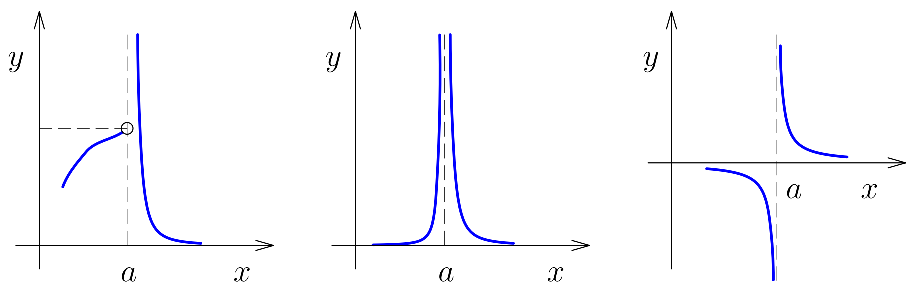
Klasifikácia bodov nespojitosti a funkcie f:

- Ak existujú vlastné jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, tak a je **bodom nespojitosti prvého druhu** (viď Obr. 10).



Obr. 10: Nespojitosť prvého druhu

- Ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná tak a je **bodom nespojitosti druhého druhu** (viď Obr. 11).



Obr. 11: Nespojitosť druhého druhu

Príklad 3.4.1 *Nájdite a klasifikujte body nespojitosti funkcie*

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4}.$$

Riešenie. Keďže menovateľ nesmie byť rovný nule, bodmi nespojitosti tejto funkcie sú $x = \pm 2$. Kvôli ich klasifikácii vypočítame postupne limity, resp. jednostranné limity v týchto bodoch.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x(x-3)}{x+2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to -2^+} \frac{x(x-3)}{x+2} = \infty \\ \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to -2^-} \frac{x(x-3)}{x+2} = -\infty\end{aligned}$$

Bod $x = 2$ je bodom nespojitosti prvého druhu. V prípade bodu $x = -2$ neexistuje limita funkcie, keďže sa jednostranné limity nerovnajú. Navyše sú nevlastné a jedná sa teda o bod nespojitosti druhého druhu.

♡

Definícia 3.8 *Nech* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *Hovoríme, že* ***funkcia*** f ***je spojitá na otvorenom intervale*** (a, b), *ak je spojitá v každom bode tohto intervalu. Hovoríme, že* ***funkcia*** f ***je spojitá na uzavretom intervale*** $< a, b >$, *ak je spojitá v každom bode intervalu* (a, b) *a naviac je spojitá v bode* a *sprava a spojitá v bode* b *zľava.*

3.5 Vlastnosti spojitých funkcií na uzavretom intervale

Vlastnosti, ktoré vyplývajú zo spojitosti funkcie na uzavretom intervale, majú široké uplatnenie a stretneme sa s nimi v ďalších kapitolách.

Veta 3.6 *Nech* $f : < a, b > \longrightarrow \mathbb{R}$ *je spojitá. Potom* f *nadobúda na* $< a, b >$ *minimum aj maximum.*

Z vety 3.6 vyplýva, že spojitá funkcia f je na intervale $< a, b >$ aj ohraničená.

Pri hľadaní hladinových kriviek, ktoré si neskôr predstavíme, budeme potrebovať nasledujúcu vetu.

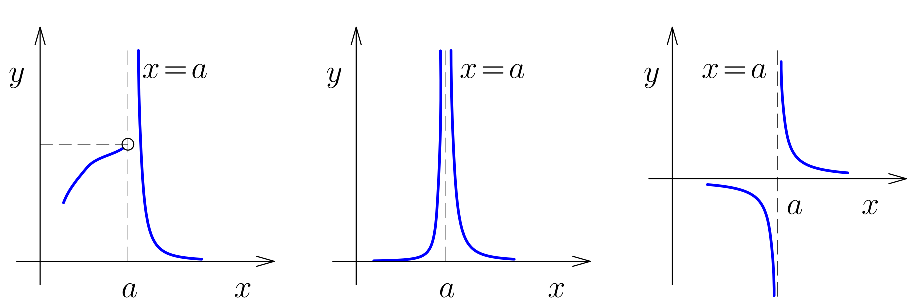
Veta 3.7 *Nech* $f : < a, b > \longrightarrow \mathbb{R}$ *je spojitá. Nech* c *je ľubovoľné číslo z intervalu* $< \min\limits_{x \in <a,b>} f(x), \max\limits_{x \in <a,b>} f(x) >$*. Potom existuje aspoň jedno číslo* $x_0 \in < a, b >$ *také, že* $f(x_0) = c$*.*

Veta 3.8 *Nech* $f : < a, b > \longrightarrow \mathbb{R}$ *je spojitá. Nech* $f(a) \cdot f(b) < 0$*. Potom existuje aspoň jedno číslo* $x_0 \in (\, a, b\,)$ *také, že* $f(x_0) = 0$*.*

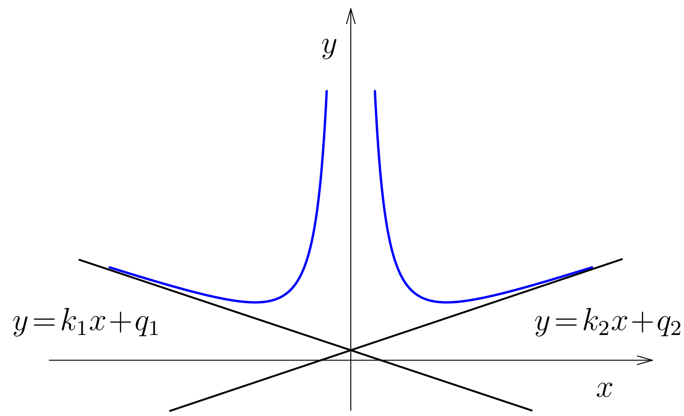
3.6 Asymptoty grafu funkcie

Jednou z možností využitia limít je aj určenie tzv. asymptot grafu funkcie, pomocou ktorých vieme určiť správanie sa funkcie v okolí bodov nespojitosti a pre "veľmi veľké"($x \to \infty$), resp. "veľmi malé"($x \to -\infty$) hodnoty.

Definícia 3.9 *Nech funkcia* f *je definovaná na istom okolí* $O^{\circ}(a)$ *bodu* a*. Priamka* $x = a$ *sa nazýva* ***asymptota bez smernice*** *grafu funkcie, ak funkcia* f *má v bode* a *aspoň jednu nevlastnú jednostrannú limitu (viď Obr. 12).*



Obr. 12: Asymptota bez smernice



Obr. 13: Asymptoty so smernicou

Definícia 3.10 *Nech funkcia f je definovaná na intervale $(-\infty, a)$, resp. (a, ∞). Ak existuje taká priamka $y = kx + q$, že $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx - q) = 0$, resp. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-q) = 0$, tak ju nazývame **asymptotou so smernicou** grafu funkcie f v nevlastnom bode $-\infty$, resp. $+\infty$ (viď Obr. 13).*

Veta 3.9 *Priamka $y = k_1x + q_1$ je asymptota grafu funkcie f pre bod $+\infty$ práve vtedy, keď*

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad a \quad q_1 = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) \in \mathbb{R}.$$

Priamka $y = k_2x + q_2$ je asymptota grafu funkcie f pre bod $-\infty$ práve vtedy, keď

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad a \quad q_2 = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) \in \mathbb{R}.$$

3.7 Postupnosti

Definícia 3.11 *Funkciu $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazývame **postupnosťou reálnych čísel**. Číslo $a_n = f(n)$ nazývame n**-tý člen postupnosti**.*
Zápis*:*

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \quad alebo \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Uvádzame príklady postupností, s ktorými sa budeme stretávať pri ekonomických aplikáciách.

- **Geometrická postupnosť:** $a_n = \ a_{n-1} \cdot q$

  Ďalej platí:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1}, \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

- **Aritmetická postupnosť:** $a_n = a_{n-1} + d$

  Ďalej platí:
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d, \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

Definícia 3.12 *Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **neklesajúcou (nerastúcou)**, ak $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) pre každé $n \in \mathbb{N}$. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **rastúcou (klesajúcou)**, ak $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) pre každé $n \in \mathbb{N}$.*

Definičným oborom postupností je množina prirodzených čísel, ktorá má jediný hromadný bod $a = \infty$. Preto definujeme limitu postupnosti len v tomto bode.

Definícia 3.13 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ *práve vtedy, keď ku každému $O_\epsilon(b)$ existuje také n_0, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, platí $a_n \in O_\epsilon(b)$.*

Zápis:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \Longleftrightarrow (\forall O_\epsilon(b))\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N},\, n > n_0) : a_n \in O_\epsilon(b).$$

Definícia 3.14 *Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je postupnosť reálnych čísel. Hovoríme, že postupnosť je **konvergentná**, ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \in \mathbb{R}$. V prípade, ak limita neexistuje alebo je rovná ∞, resp. $-\infty$, hovoríme, že postupnosť je **divergentná**.*

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je postupnosť reálnych čísel, kde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Limita tejto postupnosti existuje, označíme ju e (**Eulerovo číslo**):
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \doteq 2{,}718218\ldots.$$

Príklad 3.7.1 *Vypočítajme limitu*
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{5n}.$$

Riešenie.
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{5n} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{3\cdot 5} = \left[\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{15} = \mathrm{e}^{15}$$

♡

Ľahko sa aplikovaním postupu z predchádzajúceho príkladu dokáže, že pre ľubovoľné $k \in \mathbb{R}$ platí vzťah:
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^k.$$

Poznámka 3.2 *Analogický vzťah platí pre limitu funkcie:*
$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \mathrm{e}^k.$$

3.8 Úlohy

3.1 Vypočítajte limity

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x-12}$,

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$,

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x$,

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+4}{x-3}\right)^{2x-5}$,

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^2+2x-8}{3x^2+4x-12}$,

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^2+2x-8}{4x-12}$,

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x-8}{3x^2+4x-12}$,

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 3x}$.

3.2 Nájdite a klasifikujte body nespojitosti funkcie $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^3-4x}$.

3.3 Nájdite asymptoty grafu danej funkcie a načrtnite ich

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{9-x^2}$,

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$,

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{9-x}$,

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$.

Výsledky:

3.1

a) $\dfrac{3}{4}$,

b) $\dfrac{1}{4}$,

c) e^{-4},

d) e^{14},

e) 2,

f) ∞,

g) 0,

h) $\dfrac{4}{3}$.

3.2 $x=2$ je bod nespojitosti 1. druhu; $x=0$ a $x=-2$ sú body nespojitosti 2. druhu.

3.3

a) ABS: $x=\pm 3$; ASS: $y=-1$.

b) ABS: $x=0$; ASS: $y=x$.

c) ABS: $x=9$; ASS: $y=-x-9$.

d) ABS: $x=1$; ASS: neexistuje.

4 Derivácia funkcie

4.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmom derivácia funkcie, so základnými vlastnosťami derivácií a výpočtom derivácií. Oboznámiť s použitím derivácie pri hľadaní smernice dotyčnice ku grafu funkcie a výpočte limít pomocou L´Hospitalovho pravidla. Oboznámiť s pojmom diferenciál funkcie a jeho využitím pri približných výpočtoch.

4.2 Otázky

- Definujte pojem derivácie funkcie v bode a ilustrujte ho pomocou geometrického významu derivácie.
- Uveďte pravidlá pre derivovanie súčinu skalára a funkcie, súčtu, súčinu a podielu dvoch funkcií a deriváciu zloženej funkcie.
- Uveďte vzťahy pre deriváciu elementárnych funkcií.
- Definujte diferenciál funkcie v bode.
- Uveďte vzťahy na odhad hodnoty funkcie a odhad prírastku hodnoty funkcie pomocou diferenciálu.
- Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie s použitím derivácie.
- Sformulujte L´Hospitalovo pravidlo.

4.3 Pojem derivácie funkcie

V nasledujúcich riadkoch zavedieme pojem derivácie funkcie. Z hľadiska aplikácií v rôznych oblastiach nielen matematiky sa derivácia radí medzi najdôležitejšie spomedzi matematických pojmov.

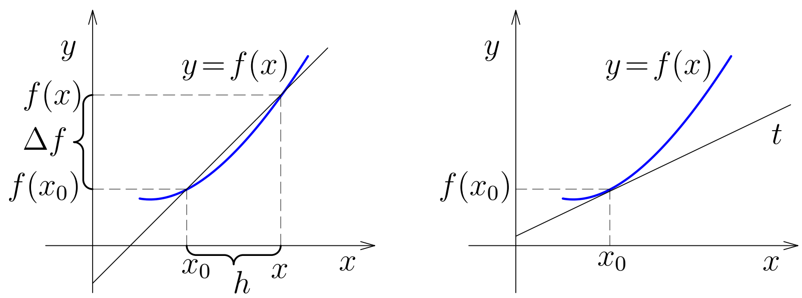
Definícia 4.1 *Hovoríme, že* ***funkcia*** f ***má v bode*** $x_0 \in D(f)$ ***deriváciu****, ak je definovaná v okolí bodu* x_0 *a existuje limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right).$$

Túto limitu nazývame ***deriváciou funkcie*** f ***v bode*** x_0*.*

Zápis:

$$f'(x_0), \quad [f(x)]'_{x=x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}.$$



Obr. 14: Geometrický význam derivácie funkcie

Ak existuje derivácia funkcie $f'(x_0)$, tak existuje dotyčnica ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $P = [x_0, f(x_0)]$ (viď Obr. 14):

- **rovnica dotyčnice:** $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Ak navyše $f'(x_0) \neq 0$, tak existuje normála ku grafu funkcie funkcie $y = f(x)$ v bode $P = [x_0, f(x_0)]$:

- **rovnica normály:** $y - f(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.

Podobne ako jednostranné limity v bode definujeme aj jednostranné derivácie funkcie v bode.

Definícia 4.2 *Hovoríme, že* ***funkcia*** f ***má v bode*** $x_0 \in D(f)$ ***deriváciu zľava (sprava)****, ak je definovaná v ľavom (pravom) okolí bodu* x_0 *a existuje limita*

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \left(\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right).$$

Túto limitu nazývame ***deriváciou zľava (sprava) funkcie*** f ***v bode*** x_0*.*

Zápis:

$$f'_-(x_0) \qquad (f'_+(x_0)).$$

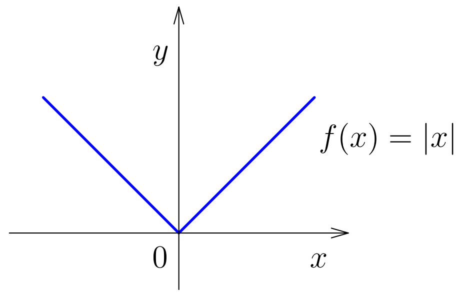
Vzťah derivácie funkcie a jednostranných derivácií v danom bode je analogický ako v prípade limity.

Veta 4.1 *Funkcia* f *má v bode* x_0 *(vnútorný bod* $D(f)$*) deriváciu* $f'(x_0)$ *práve vtedy, keď má v bode* x_0 *deriváciu zľava* $f'_-(x_0)$*, deriváciu sprava* $f'_+(x_0)$ *a platí*

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

Veta 4.2 *Ak má funkcia* f *v bode* x_0 *deriváciu, tak je v bode* x_0 *spojitá.*

Dôkazom toho, že neplatí opačné tvrdenie je funkcia $f(x) = |x|$. Pomocou definície sa ľahko ukáže, že hoci je funkcia v bode $x_0 = 0$ spojitá (viď Obr. 15), nemá tam deriváciu (jednostranné derivácie sa nerovnajú).



Obr. 15: Spojitá funkcia s neexistujúcou deriváciou

4.4 Výpočet derivácie funkcie

Pravidlá derivovania základných operácií s funkciami uvádza nasledujúca veta.

Veta 4.3 *Nech funkcie f a g majú v bode x_0 derivácie $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$. Nech $c \in \mathbb{R}$. Potom existujú derivácie funkcií $c \cdot f$, $f+g$, $f \cdot g$, a ak $g(x_0) \neq 0$, tak aj $\frac{f}{g}$ v bode x_0, pre ktoré platí:*

- $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$,
- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Bez formuly na výpočet derivácie zloženej funkcie by sme prakticky nevedeli derivovať väčšinu funkcií.

Veta 4.4 *Nech funkcia $f(g(x))$ je definovaná na okolí bodu x_0. Nech funkcia g má v bode x_0 deriváciu $g'(x_0)$ a nech funkcia f má v bode $g(x_0)$ deriváciu $f'(g(x_0))$. Potom má funkcia $f(g(x))$ deriváciu v bode x_0*

$$[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Za predpokladu, že derivujeme funkciu na definičnom obore, platia nasledujúce vzťahy pre derivácie elementárnych funkcií.

Derivácia elementárnych funkcií:

- $c' = 0$ $\quad c \in \mathbb{R}$,
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $\quad n \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $\quad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$,
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ $\quad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$,
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Príklad 4.4.1 *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x) = \sin(1-x^2)$.

Riešenie.

$f'(x) = \cos(1-x^2) \cdot (1-x^2)' = -2x\cos(1-x^2)$.

♡

Pre deriváciu funkcie, v ktorej sa premenná nachádza v základe aj v exponente, použijeme prepis pomocou logaritmickej funkcie. Tomuto princípu hovoríme **logaritmická derivácia**:

$$[f^g]'(x_0) \quad = \quad \left[\mathrm{e}^{\ln f^g}\right]'(x_0) = \left[\mathrm{e}^{g \cdot \ln f}\right]'(x_0).$$

Príklad 4.4.2 *Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie* $f(x) = x \ln x$

a) *v bode* $P = [\mathrm{e}^2, ?]$,

b) *ak je dotyčnica rovnobežná s priamkou* $y - 2x + 1 = 0$.

Riešenie.

a) Druhú súradnicu bodu dotyku určíme ako hodnotu funkcie v bode x_0, t. j. $f(\mathrm{e}^2) = 2\,\mathrm{e}^2$. Smernicu dotyčnice vypočítame ako deriváciu funkcie $f(x) = x \ln x$ v bode $x = \mathrm{e}^2$:
$$f'(x) = \ln x + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x_0) = f'(\mathrm{e}^2) = 3.$$
Dotyčnica: $y - 2\,\mathrm{e}^2 = 3(x - \mathrm{e}^2)$.

Normála: $y - 2\,\mathrm{e}^2 = -\frac{1}{3}(x - \mathrm{e}^2)$.

b) Priamku $y - 2x + 1 = 0$ upravíme do smernicového tvaru $y = 2x - 1$. Určíme smernicu $k = 2$ tejto priamky, ktorá je zároveň smernicou hľadanej dotyčnice, keďže tieto priamky sú rovnobežné. Pomocou smernice vypočítame bod dotyku dotyčnice:
$$\begin{aligned} f'(x_0) &= 2 \\ \ln x_0 + 1 &= 2 \\ x_0 &= \mathrm{e} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_0) = \mathrm{e}\,. \end{aligned}$$
Dotyčnica: $y - \mathrm{e} = 2(x - \mathrm{e})$.

Normála: $y - \mathrm{e} = -\frac{1}{2}(x - \mathrm{e})$.

♡

Poznámka 4.1 *Derivácia funkcie* $f(x)$ *predstavuje okamžitú rýchlosť zmeny hodnoty tejto funkcie.*

Príklad 4.4.3 *Výška nákladu miestnych novín o* t *rokov odteraz bude* $C(t) = 50t^2 + 100t + 10\ 000$ *kusov.*

a) *Akým tempom bude rásť náklad novín po* t *rokoch odteraz?*

b) *Odhadnime tempo rastu nákladu novín počas šiesteho roka.*

Riešenie.

a) Jedná sa o rýchlosť zmeny funkcie (o koľko kusov sa zmení náklad za jeden rok), t. j. vypočítame prvú deriváciu funkcie:
$$C'(t) = 100t + 100.$$

b) Tentokrát sa jedná o rýchlosť zmeny nákladu po uplynutí piatich rokov:
$$C'(5) = 100 \cdot 5 + 100 = 600.$$
Náklad novín vzrastie počas šiesteho roka o 600 kusov.

♡

4.5 Derivácie vyšších rádov

Opakované derivovanie funkcie tzv. vyššie derivácie budeme potrebovať napríklad pri vyšetrovaní priebehu funkcie alebo optimalizačných úlohách.

Definícia 4.3 *Nech existuje derivácia funkcie $f(x)$ v bode $x_0 \in D(f)$. Nech existuje derivácia funkcie $f'(x)$ v bode $x_0 \in D(f)$. Potom túto deriváciu nazývame* ***deriváciou druhého rádu*** *alebo* ***druhou deriváciou funkcie*** *$f(x)$* ***v bode*** *x_0.*
Zápis*:*

$$f''(x_0) \qquad \text{alebo} \qquad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

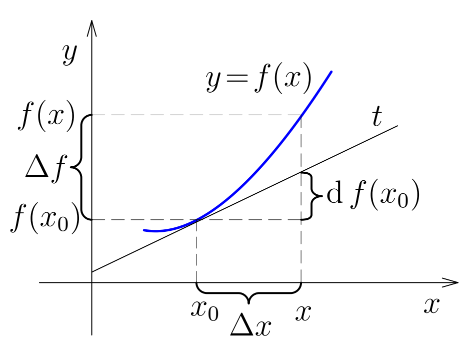
Analogickým spôsobom môžeme definovať aj deriváciu n-tého rádu funkcie pre ľubovoľné $n \geq 2$ ako deriváciu $(n-1)$-vej derivácie funkcie.

4.6 Diferenciál funkcie

Pri približných výpočtoch a odhadoch hodnôt funkcií ekonomickej analýzy sa niekedy nezaobídeme bez pojmu diferenciál funkcie.

Definícia 4.4 *Nech je funkcia f definovaná v okolí bodu x_0. Nech má funkcia f v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)$. Potom hovoríme, že je v bode x_0* ***diferencovateľná****. Výraz $f'(x_0) \cdot \Delta x$ nazývame* ***diferenciálom funkcie*** *f* ***v bode*** *x_0* ***pre prírastok*** *$\Delta x = x - x_0$.*
Zápis*:*

$$\mathrm{d}\, f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$



Obr. 16: Diferenciál funkcie

Pre x v blízkom okolí bodu x_0 platí:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ f'(x_0) &\doteq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x} \\ f'(x_0)\cdot \Delta x &\doteq f(x)-f(x_0) \\ \Longrightarrow \qquad \mathrm{d} f(x_0) &\doteq \Delta f(x_0). \end{aligned}$$

To znamená, že rozdiel funkčných hodnôt sa približne rovná diferenciálu v bode x_0 pre prírastok Δx (viď Obr. 16). Tento vzťah môžeme použiť na odhad zmeny hodnoty funkcie pomocou diferenciálu hlavne pri aplikačných úlohách. Navyše môžeme túto súvislosť použiť na odvodenie vzťahu pre odhad hodnoty funkcie v bode x:

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_0) &\doteq \mathrm{d} f(x_0) \\ \Longrightarrow \qquad f(x) &\doteq f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x \\ f(x) &\doteq f(x_0) + \mathrm{d} f(x_0). \end{aligned}$$

Príklad 4.6.1 *Výška nákladu miestnych novín bude o t rokov odteraz $C(t) = 50t^2 + 100t + 10\,000$ kusov. Odhadnime pomocou diferenciálu, o koľko vzrastie náklad novín počas*

a) *nasledujúcich* 6 *mesiacov,*

b) *prvých* 3 *mesiacov* 6. *roka.*

Riešenie.

a) Jedná sa o odhad zmeny hodnoty funkcie, ak nárast premennej z hodnoty 0 predstavuje 0,5 roka. Počítame teda diferenciál funkcie v bode $t_0 = 0$ pre $\Delta t = 0{,}5$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, C &= C'(t)\cdot \Delta t = (100t + 100)\cdot \Delta t \\ \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\, C(t_0) &= (100\cdot 0 + 100)\cdot 0{,}5 = 50. \end{aligned}$$

Náklad novín vzrastie počas nasledujúcich šiestich mesiacov o 50 kusov.

b) Tentokrát sa jedná o šiesty a nie nasledujúci rok. Odhadujeme preto zmenu hodnoty funkcie pre nárast premennej z hodnoty 5 a to o 0,25 roka. Počítame teda diferenciál funkcie v bode $t_0 = 5$ pre $\Delta t = 0{,}25$:

$$\mathrm{d}\, C(t_0) = (100\cdot 5 + 100)\cdot 0{,}25 = 150.$$

Náklad novín vzrastie počas prvých troch mesiacov šiesteho roka o 150 kusov. ♡

4.7 L´Hospitalovo pravidlo

Ďalšou oblasťou, kde nám derivácia môže mnohokrát uľahčiť postup, je výpočet limít.

Veta 4.5 *Nech funkcie f a g majú derivácie v prstencovom okolí bodu $a \in \mathbb{R}^\star$. Nech*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ *alebo* $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \infty$,
2. *existuje* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tak existuje aj $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Príklad 4.7.1 *Vypočítajme limitu*

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot (\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

♡

4.8 Úlohy

4.1 Vypočítajte prvú deriváciu nasledujúcich funkcií

a) $f(x) = 3x^2 + 2^x - \frac{2}{x}$,

b) $f(x) = x \cdot \ln x$,

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

d) $f(x) = \sqrt{1 + 2\mathrm{tg}\, x}$,

e) $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$,

f) $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$,

g) $f(x) = x^{3x}$,

h) $f(x) = (\sin x)^x$.

4.2 Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$ v bode dotyku $P = [x_0, f(x_0)]$

a) $f(x) = x^3 + 9x + 2$; $P = [0, ?]$,

b) $f(x) = 2x \cdot \ln x$; $P = [1, ?]$,

c) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$; $P = [0, ?]$,

d) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2} + 1$; $P = [0, ?]$.

4.3 Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítajte limity

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x-12}$,

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+x-8}{3x^2+4x-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$,

d) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

4.4 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 441\sqrt[3]{L}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 343 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu, ako sa zmení denná produkcia, ak:

a) zvýšime počet odpracovaných hodín na 350,

b) znížime počet odpracovaných hodín na 322.

4.5 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 540\sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu, ako sa zmení denná produkcia, ak:

a) zvýšime kapitál o 15 000 eur,

b) znížime kapitál o 5 000 eur.

4.6 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 540\sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu, ako sa musí zmeniť kapitálová investícia, aby sa denná produkcia zvýšila o 70 tisíc jednotiek.

4.7 Podľa štúdie produktivity práce v podniku, priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 7.00 hod., bude mať poskladaných $f(x) = x^3 + 6x^2 + 8x$ výrobkov o x hodín neskôr. Približne koľko výrobkov vyrobí pracovník:

a) medzi 8.00 a 8.15 hod.,

b) medzi 12.00 a 12.30 hod.?

Výsledky:

4.1

a) $f'(x) = 6x + 2^x \ln 2 + \dfrac{2}{x^2}$,

b) $f'(x) = \ln x + 1$,

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{1 + 2\mathrm{tg}\, x}}$,

e) $f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2x \cos x^2$,

f) $f'(x) = -2x\, \mathrm{e}^{1-x^2}$,

g) $f'(x) = x^{3x}\, (3 \ln x + 3)$,

h) $f'(x) = (\sin x)^x\, (\ln \sin x + x\mathrm{cotg}\, x)$.

4.2

a) $t:\ 9x - y + 2 = 0$; $n:\ x + 9y - 18 = 0$,

b) $t:\ 2x - y - 2 = 0$; $n:\ x + 2y - 1 = 0$,

c) $t:\ 2x - y + 1 = 0$; $n:\ x + 2y - 2 = 0$,

d) $t:\ x - 2y + 3 = 0$; $n:\ 4x + 2y - 3 = 0$.

4.3

a) $\dfrac{3}{4}$,

b) $\dfrac{2}{3}$,

c) $\dfrac{1}{6}$,

d) 0.

4.4

a) 21,

b) -63.

4.5

a) 150,

b) -50.

4.6 736 tisíc eur

4.7

a) $\dfrac{23}{4}$,

b) $\dfrac{143}{2}$.

5 Aplikácie derivácie v ekonómii

5.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmami marginálna veličina, relatívna zmena hodnoty funkcie a percentuálna miera zmeny hodnoty funkcie. Oboznámiť s pojmom elasticita funkcie a jej vlastnosťami. Oboznámiť s pojmom elasticita funkcie ponuky a dopytu a s vplyvom elasticity dopytu na celkové príjmy.

5.2 Otázky

- Definujte pojem marginálna veličina, marginálne náklady a marginálne príjmy.
- Definujte pojem relatívna zmena hodnoty funkcie a percentuálna miera zmeny hodnoty funkcie.
- Definujte pojem elasticita funkcie.
- Sformulujte tvrdenie o vplyve znamienka elasticity na zmenu hodnoty funkcie.
- Popíšte vplyv elasticity funkcie na rast, resp. klesanie priemernej veličiny.
- Definujte pojem elasticita funkcie dopytu a funkcie ponuky.
- Klasifikujte funkciu dopytu na základe elasticity.
- Popíšte vplyv elasticity dopytu na celkové príjmy.

5.3 Marginálna analýza

V nasledujúcich riadkoch sa budeme zaoberať marginálnou analýzou, t. j. aproximačnou metódou, ktorá využíva deriváciu funkcie na určenie zmeny hodnoty funkcie $f(x)$ vyvolanej zmenou hodnoty premennej z x na $x+1$. V takom prípade je totiž $\Delta x = 1$ a keďže $f'(x) \doteq \dfrac{f(x+1)-f(x)}{\Delta x}$, dostávame $f'(x) \doteq f(x+1) - f(x)$.

Definícia 5.1 *Nech funkcia $TV = f(x)$ je ľubovoľná ekonomická totálna veličina.* ***Marginálna veličina*** *je prírastok celkovej veličiny TV, ktorý pripadá na prírastok premennej x o jednu jednotku.*

Zápis:

$$MTV(x) = f'(x).$$

Uvádzame definície marginálnych veličín pre najviac frekventované funkcie ekonomickej analýzy.

Definícia 5.2 *Ak $TV = C(x)$ je funkcia celkových nákladov, tak $C'(x)$ je funkcia* ***marginálnych nákladov****, t. j. odhad nákladov na $(x+1)$-vý výrobok.*

Zápis:

$$MC(x) = C'(x).$$

Definícia 5.3 *Ak $TV = R(x)$ je funkcia celkových príjmov, tak $R'(x)$ je funkcia* ***marginálnych príjmov****, t. j. odhad príjmov z $(x+1)$-vého výrobku.*

Zápis:

$$MR(x) = R'(x).$$

Príklad 5.3.1 *Celkové mesačné náklady na výrobu x kusov tovaru sa dajú vyjadriť funkciou $C(x) = x^2 + 15x + 5\ 000$ eur.*

a) *Použime marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 14. výrobku.*

b) *Vypočítajme náklady na výrobu 14. výrobku priamo z funkcie nákladov.*

Riešenie.

a) Vypočítame deriváciu funkcie celkových nákladov pre "pôvodnú" hodnotu, t. j. $x = 13$:

$$\begin{aligned} C'(x) &= 2x + 15 \\ \Longrightarrow\quad C'(13) &= 41. \end{aligned}$$

Náklady na výrobu 14. výrobku odhadujeme na 41 eur.

b) Skutočné náklady vypočítame ako rozdiel funkčných hodnôt:

$$C(14) - C(13) = 42.$$

Skutočné náklady na výrobu 14. výrobku sú 42 eur.

♡

5.4 Percentuálna miera zmeny hodnoty funkcie

Ak hľadáme odpoveď na otázky typu, aká je percentuálna miera rastu alebo poklesu určitej veličiny, napr. hrubého domáceho produktu, potrebujeme najskôr definovať pojem relatívnej hodnoty funkcie.

Definícia 5.4 *Nech funkcia $f(x)$ má v bode x deriváciu $f'(x)$.* ***Relatívnou zmenou hodnoty funkcie*** *$f(x)$ nazývame výraz $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.*

Definícia 5.5 *Nech funkcia $f(x)$ má v bode x deriváciu $f'(x)$.* ***Percentuálnou mierou zmeny hodnoty funkcie*** *$f(x)$ nazývame výraz $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100\ \%$.*

Ak predpokladáme, že sa premenná x zmení na hodnotu $x+1$, tak platí

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100\ \% \doteq \frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)} \cdot 100\ \%,$$

t. j. percentuálna miera zmeny hodnoty funkcie udáva, o koľko percent sa zmení hodnota funkcie, ak sa hodnota premennej x zvýši o jednotku.

5.5 Elasticita funkcie

V tejto kapitole sa budeme zaoberať odpoveďou na otázku, o koľko percent sa zmení hodnota funkcie $f(x)$, ak zmeníme hodnotu premennej o jedno percento. Ukážeme, že tento údaj má široké uplatnenie pre funkcie ekonomickej analýzy.

Predpokladajme, že $f(x) > 0$ pre $x > 0$. Nech existuje derivácia $f'(x)$ v bode $x_0 \in (0, \infty)$. Vieme, že pre dostatočne malú hodnotu $h \in \mathbb{R}$ platí

$$\Longrightarrow \quad f'(x_0) \quad \doteq \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Nech h predstavuje jedno percento z hodnoty x_0, t. j. $h = \dfrac{x_0}{100}$. Použitím predchádzajúceho vzťahu dostávame

$$\begin{aligned} f'(x_0) \quad &\doteq \quad \frac{f(x_0+\frac{x_0}{100})-f(x_0)}{\frac{x_0}{100}} \\ \Longrightarrow \quad \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 \quad &\doteq \quad \frac{f(x_0+\frac{x_0}{100})-f(x_0)}{f(x_0)} \cdot 100. \end{aligned}$$

Pravá strana predstavuje percentuálnu mieru zmeny hodnoty funkcie, ak sa premenná zmení o jedno percento. Z hore ukázaného teda vyplýva, že ju pre účely odhadov môžeme nahradiť približnou hodnotou $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0$.

Definícia 5.6 *Nech $f(x) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$ a nech existuje derivácia $f'(x)$ pre $x \in (0, \infty)$. Nech $x_0 \in (0, \infty)$. Číslo $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0$, ktoré vyjadruje, o koľko percent sa zmení hodnota funkcie $f(x_0)$ pri zvýšení hodnoty premennej x_0 o 1 %, nazývame* ***elasticitou funkcie*** *$f(x)$* ***v bode*** *x_0.*

Zápis:

$$\eta(f(x_0)) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0.$$

Keďže je premenná ako aj funkčná hodnota kladná, tak znamienko elasticity je vždy rovnaké ako znamienko derivácie funkcie. Ak použijeme navyše súvislosť (budeme sa jej obšírnejšie venovať v nasledujúcej kapitole), že ak je prvá derivácia funkcie kladná (záporná), tak je funkcia rastúca (klesajúca), tak dostaneme nasledujúce tvrdenie.

Veta 5.1 *Nech $f(x) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$ a nech existuje $f'(x)$ pre $x \in (0, \infty)$. Potom platí*

1. *Ak $\eta(f(x)) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$, tak zvýšenie (zníženie) hodnoty premennej x o 1 percento znamená zvýšenie (zníženie) hodnoty funkcie $f(x)$ o $\eta(f(x_0))$ percent.*

2. *Ak $\eta(f(x)) < 0$ pre $x \in (0, \infty)$, tak zvýšenie (zníženie) hodnoty premennej x o 1 percento znamená zníženie (zvýšenie) hodnoty funkcie $f(x)$ o $|\eta(f(x_0))|$ percent.*

Príklad 5.5.1 *Denná produkcia podniku je $Q(K) = 1\ 200 \cdot \sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. O koľko percent vzrastie produkcia, ak sa kapitálová investícia zvýši o 1 percento?*

Riešenie. Vypočítame elasticitu produkčnej funkcie:

$$\eta(Q(K)) = \frac{Q'(K)}{Q(K)} \cdot K = \frac{1\ 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot K^{-\frac{1}{2}}}{1\ 200 \cdot K^{\frac{1}{2}}} \cdot K = \frac{1}{2}.$$

Produkcia vzrastie o $\frac{1}{2}$ %.

♡

Elasticita funkcie je v podstate pomer marginálnej a priemernej veličiny danej funkcie:

$$\eta(f(x_0)) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 = \frac{f'(x_0)}{\frac{f(x_0)}{x_0}} = \frac{Mf(x_0)}{Af(x_0)}.$$

Z tejto súvislosti vyplýva zaujímavý dôsledok pre rast, resp. klesanie uvažovanej priemernej veličiny v závislosti na hodnote elasticity. Uvažujme napríklad príjmovú funkciu $R(x)$:

1. Ak $\eta(R(x_0)) > 1 \quad \Longrightarrow \quad MR(x_0) > AR(x_0)$,
   t. j. každé zvýšenie predaja z hodnoty x_0 o jednu jednotku vyvolá nárast príjmov väčší ako sú priemerné príjmy pri predaji x_0 jednotiek. S rastúcim predajom **priemerné príjmy rastú**.

2. Ak $\eta(R(x_0)) = 1 \quad \Longrightarrow \quad MR(x_0) = AR(x_0)$,
   t. j. každé zvýšenie predaja z hodnoty x_0 o jednu jednotku vyvolá nárast príjmov rovný priemerným príjmom pri predaji x_0 jednotiek. S rastúcim predajom **sa priemerné príjmy nemenia**.

3. Ak $\eta(R(x_0)) < 1 \quad \Longrightarrow \quad MR(x_0) < AR(x_0)$,
   t. j. každé zvýšenie predaja z hodnoty x_0 o jednu jednotku vyvolá nárast príjmov menší ako sú priemerné príjmy pri predaji x_0 jednotiek. S rastúcim predajom **priemerné príjmy klesajú**.

5.6 Elasticita funkcie dopytu a funkcie ponuky

Vzhľadom na to, že je funkcia dopytu klesajúca, nadobúda elasticita tejto funkcie zápornú hodnotu. Aby sme sa vyhli absolútnej hodnote pri určovaní percentuálnej zmeny funkcie, je zvykom definovať elasticitu funkcie dopytu s opačným znamienkom.

Definícia 5.7 *Nech $q = D(p)$ je funkciou dopytu, kde $p > 0$ je cena výrobku na trhu a $q > 0$ je dopyt po tomto výrobku. Nech existuje $D'(p)$ pre $p \in (0, \infty)$. Číslo $-\dfrac{D'(p_0)}{D(p_0)} \cdot p_0$, ktoré vyjadruje o koľko percent sa zníži dopyt $D(p)$ po výrobku pri zvýšení ceny p_0 o 1 %, nazývame **elasticitou funkcie dopytu v bode** p_0.*

Zápis:

$$E_D = \eta(D(p_0)) = -\frac{D'(p_0)}{D(p_0)} \cdot p_0.$$

Elasticita funkcie dopytu nám môže pomôcť pri určovaní vhodnej ceny výrobku na trhu, ak chceme dopyt po sledovanom výrobku regulovať.

Klasifikácia funkcie dopytu na základe elasticity:

1. Ak $E_D = 1$, tak funkcia dopytu má **jednotkovú elasticitu**,
   t. j. jednopercentné zvýšenie (zníženie) ceny vyvolá jednopercentné zníženie (zvýšenie) dopytu.

2. Ak $E_D > 1$, tak funkcia dopytu je **elastická**,
   t. j. jednopercentné zvýšenie (zníženie) ceny vyvolá viac ako jednopercentné zníženie (zvýšenie) dopytu.

3. Ak $E_D < 1$, tak funkcia dopytu je **neelastická**,
   t. j. jednopercentné zvýšenie (zníženie) ceny vyvolá menej ako jednopercentné zníženie (zvýšenie) dopytu.

Príklad 5.6.1 *Predpokladajme, že pri cene p určitej komodity je dopyt po nej vyjadrený vzťahom $q = 240 - 2p$, pre $0 \leq p \leq 120$.*

a) *Vyjadrime elasticitu dopytu ako funkciu premennej p.*

b) *Vypočítajme elasticitu dopytu pre $p = 100$. Interpretujme výsledok.*

c) *Vypočítajme elasticitu dopytu pre $p = 50$. Interpretujme výsledok.*

d) *Pri akej cene je elasticita dopytu rovná 1? Aký je ekonomický význam tejto ceny?*

Riešenie.

a) Elasticita funkcie dopytu:

$$E_D = -\frac{D'(p_0)}{D(p_0)} \cdot p_0 = -\frac{-2}{240-2p} \cdot p = \frac{p}{120-p}.$$

b) Elasticita pre cenu $p = 100$:

$$E_D(100) = \frac{100}{120-100} = 5.$$

Funkcia dopytu je elastická, čo znamená, že 1% nárast ceny vyvolá 5% pokles dopytu.

c) Elasticita pre cenu $p = 50$:

$$E_D(50) = \frac{50}{120-50} \doteq 0{,}71.$$

Funkcia dopytu je neelastická, čo znamená, že 1% nárast ceny vyvolá 0,71% pokles dopytu.

d) Vyriešime rovnicu $E_D = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{p}{120-p} &= 1 \\ p &= 120-p \\ p &= 60. \end{aligned}$$

Funkcia dopytu má jednotkovú elasticitu pri cene $p = 60$, čo znamená, že 1% nárast ceny vyvolá 1% pokles dopytu. ♡

Elasticita funkcie dopytu má vplyv na funkciu celkových príjmov. Platí totiž:

$$\begin{aligned} R(p) &= p \cdot q = p \cdot D(p) \\ \Longrightarrow \quad R'(p) &= D(p) + p \cdot D'(p) = D(p)\left[1 + p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)}\right] \\ &= D(p)\left[1 - E_D\right]. \end{aligned}$$

Vplyv elasticity dopytu na celkové príjmy:

1. Ak $E_D = 1 \quad \Longrightarrow \quad R'(p) = 0$,
   t. j. celkové príjmy sa so zmenou ceny nemenia - **neutrálny dopyt**.

2. Ak $E_D < 1 \quad \Longrightarrow \quad R'(p) > 0$,
   t. j. celkové príjmy rastú s rastúcou cenou - **neelastický dopyt**.

3. Ak $E_D > 1 \quad \Longrightarrow \quad R'(p) < 0$,
   t. j. celkové príjmy klesajú s rastúcou cenou - **elastický dopyt**.

Na rozdiel od funkcie dopytu je funkcia ponuky rastúca, elasticita funkcie ponuky vyjadruje, o koľko percent sa zvýši ponuka pri zvýšení ceny o 1 percento.

Definícia 5.8 *Nech $q = S(p)$ je funkciou ponuky, kde $p > 0$ je cena výrobku na trhu a $q > 0$ je ponuka tohto výrobku. Nech existuje $S'(p)$ pre $p \in (0, \infty)$. Číslo $\dfrac{S'(p_0)}{S(p_0)} \cdot p_0$, ktoré vyjadruje o koľko percent sa zvýši ponuka $S(p)$ výrobku pri zvýšení ceny p_0 o 1 %, nazývame* ***elasticitou funkcie ponuky v bode*** *p_0.*

Zápis:

$$E_S = \eta(S(p_0)) = \frac{S'(p_0)}{S(p_0)} \cdot p_0.$$

5.7 Úlohy

5.1 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 441\sqrt[3]{L}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 343 hodín. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 pracovná hodina navyše.

5.2 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 540\sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 tisíc eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 000 eur navyše.

5.3 Podľa štúdie produktivity práce v podniku, priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 7.00 hod., bude mať poskladaných $f(x) = x^3 + 6x^2 + 8x$ výrobkov o x hodín neskôr. Približne koľko výrobkov vyrobí pracovník počas 4. hodiny?

5.4 Predpokladáme, že celkové náklady na výrobu q výrobkov sú $C(q) = 3q^2 + 6q + 50$ eur.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 15. výrobku.

b) Vypočítajte náklady na výrobu 15. výrobku priamo z funkcie nákladov.

5.5 $D(p) = 1\ 500 - 0{,}2p^2$ pre $0 \le p \le 50\sqrt{3}$ eur je rovnica dopytu určitého tovaru.

a) Vyjadrite elasticitu dopytu ako funkciu ceny tovaru p.

b) Vypočítajte elasticitu dopytu pri cene $p = 15$ eur.

c) Pri akej cene je elasticita dopytu rovná 1?

5.6 Rovnica dopytu určitého tovaru je $D(p) = 1\ 225 - p^2$ pre $0 \leq p \leq 35$ eur.

a) Určte, kde je dopyt elastický, neelastický a kde má jednotkovú elasticitu vzhľadom na cenu.

b) Využite výsledok a) na to, aby ste určili intervaly rastu a klesania funkcie celkových príjmov $R(p)$ a cenu, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

c) Vyjadrite explicitne funkciu celkových príjmov a použite prvú deriváciu na určenie intervalov rastu a klesania a určenie ceny, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

Výsledky:

5.1 Nárast produkcie o 3 jednotky.

5.2 Nárast produkcie o 10 jednotiek.

5.3 Vyrobí 104 výrobkov.

5.4

a) 60 eur,

b) 93 eur.

5.5

a) $E_D(p) = \dfrac{2p^2}{1\ 225 - p^2}$,

b) $E_D(15) = 0{,}45$,

c) $p = 20{,}21$ eur.

5.6

a) $(0, 50)$ neelastický; $(50, 50\sqrt{3})$ elastický; 50 jednotková elasticita,

b) $(0, 50)$ rastúce; $(50, 50\sqrt{3})$ klesajúce; 50 maximálne,

c) $(0, 50)$ rastúce; $(50, 50\sqrt{3})$ klesajúce; 50 maximálne.

6 Priebeh funkcie

6.1 Cieľ

Oboznámiť s využitím derivácie pri vyšetrovaní vlastností funkcií.

6.2 Otázky

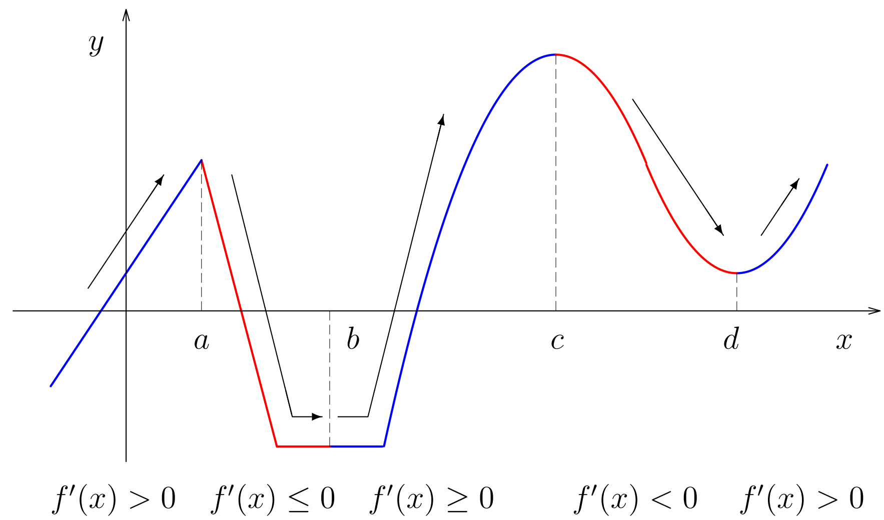
- Sformulujte postačujúcu podmienku monotónnosti funkcie.
- Definujte lokálne extrémy funkcie.
- Sformulujte nutnú podmienku existencie lokálneho extrému.
- Definujte stacionárny bod a kritické body funkcie.
- Sformulujte postačujúcu podmienku existencie lokálneho extrému.
- Uveďte postup na určenie lokálnych extrémov funkcie pomocou monotónnosti funkcie.
- Uveďte postup na určenie globálnych extrémov funkcie.
- Definujte konvexnosť a konkávnosť funkcie.
- Definujte inflexný bod funkcie.
- Sformulujte postačujúcu podmienku konvexnosti a konkávnosti funkcie.

6.3 Monotónnosť funkcie a lokálne extrémy

Monotónnosť funkcie, ktorú sme definovali v úvodnej kapitole, sa dá skúmať pomocou derivácie (viď Obr. 17), ak táto existuje.

Veta 6.1 (Postačujúca podmienka monotónnosti)
Nech funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $I \subset < a, b >$ a má deriváciu rovnakého znamienka na intervale (a, b). Potom

- *ak $f'(x) > 0$, tak f je rastúca na I,*
- *ak $f'(x) < 0$, tak f je klesajúca na I,*
- *ak $f'(x) \geq 0$, tak f je neklesajúca na I,*
- *ak $f'(x) \leq 0$, tak f je nerastúca na I.*



Obr. 17: Monotónnosť funkcie pomocou derivácie

Príklad 6.3.1 *Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia* $f(x) = x^4 - 4x^3$ *rýdzomonotónna.*

Riešenie. Funkcia je definovaná na množine všetkých reálnych čísel. Vypočítame jej deriváciu a určíme jej znamienka:

$$\begin{array}{rcccl} f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2 \cdot (x-3) & > & 0 & \Leftrightarrow & x > 3 \\ & < & 0 & \Leftrightarrow & x < 3 \ \wedge \ x \neq 0 \end{array}$$

Funkcia je rastúca na intervale $(3, \infty)$, klesajúca na množine $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$.
♡

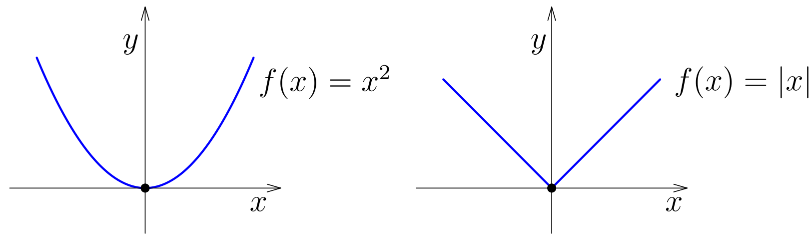
Definícia 6.1 *Hovoríme, že* ***funkcia*** $f(x)$ ***má v bode*** $x_0 \in (a, b)$ ***lokálny extrém****, ak existuje také prstencové okolie* $O^{\circ}(x_0)$*, že pre všetky* $x \in O^{\circ}(a)$ *platí jeden z prípadov:*

- $f(x) \leq f(x_0)$ *lokálne maximum v bode* x_0*,*
- $f(x) \geq f(x_0)$ *lokálne minimum v bode* x_0*,*
- $f(x) < f(x_0)$ *ostré lokálne maximum v bode* x_0*,*
- $f(x) > f(x_0)$ *ostré lokálne minimum v bode* x_0*.*

Veta 6.2 (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému)
Nech existuje derivácia $f'(x_0)$*. Ak má funkcia* $f(x)$ *v bode* x_0 *lokálny extrém, tak* $f'(x_0) = 0$*.*

Poznámka 6.1 *Obrátené tvrdenie neplatí. Ak* $f'(x_0) = 0$*, to neznamená, že má funkcia v bode* x_0 *lokálny extrém. Na druhej strane z tohto tvrdenia vyplýva, že funkcia môže mať lokálny extrém aj v bode, kde nemá deriváciu.*

Definícia 6.2 *Bod x_0, v ktorom má funkcia deriváciu, a platí $f'(x_0) = 0$, nazývame* ***stacionárnym bodom funkcie*** *$f(x)$. Stacionárne body a body, v ktorých funkcia nemá deriváciu, budeme nazývať* ***kritickými bodmi funkcie*** *$f(x)$ (viď Obr. 18).*



Obr. 18: Kritické body funkcie

Na určenie extrému funkcie v stacionárnom bode môžeme použiť vyššie derivácie funkcie. Najčastejšie postačuje už druhá derivácia.

Veta 6.3 (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) *Nech funkcia $f(x)$ má v bode $x_0 \in (a, b)$ deriváciu $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, pre $n \geq 2$. Nech $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Potom platí*

1. *Ak je n párne a*
   - *$f^{(n)}(x_0) > 0$, tak má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne minimum,*
   - *$f^{(n)}(x_0) < 0$, tak má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne maximum.*
2. *Ak je n nepárne, tak funkcia f nemá v bode x_0 lokálny extrém (v x_0 je inflexia).*

Príklad 6.3.2 *Nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x) = x^4 - 4x^3$.*

Riešenie. Funkcia je definovaná na množine všetkých reálnych čísel. Vypočítame jej prvú deriváciu a určíme stacionárne body:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2 \cdot (x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \ \vee \ x = 0.$$

Vypočítame druhú deriváciu funkcie a určíme jej hodnotu v stacionárnych bodoch:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad f''(3) = 36 > 0.$$

Funkcia nadobúda v bode $x = 3$ lokálne minimum. V prípade bodu $x = 0$ je $f''(0) = 0$. Vypočítame teda tretiu deriváciu, kde je hodnota rôzna od nuly:

$$f'''(x) = 24x - 24 \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -24.$$

Keďže sa jedná o tretiu deriváciu, funkcia nemá v bode $x = 0$ extrém. ♡

V kritickom bode často využívame zmenu monotónnosti funkcie na určenie extrému. Čo v prípade, že má funkcia v okolí bodu x_0 deriváciu, znamená zmenu znamienka derivácie v tomto bode.

Určenie extrému pomocou monotónnosti funkcie

Vzhľadom na znamienko prvej derivácie pred bodom x_0 a za bodom x_0 môžu nastať tieto prípady:

1. ak má derivácia rovnaké znamienko, tak funkcia nemá v bode x_0 lokálny extrém,

2. ak derivácia mení znamienko z kladného na záporné, tak funkcia má v bode x_0 lokálne maximum,

3. ak derivácia mení znamienko zo záporného na kladné, tak funkcia má v bode x_0 lokálne minimum.

V aplikačných úlohách potrebujeme často určiť najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie na nejakom intervale. Hľadáme tzv. absolútne (globálne) maximum, resp. minimum funkcie.

Určenie globálnych extrémov funkcie na uzavretom intervale

Ak má funkcia $f(x)$ na intervale $< a, b >$ lokálne extrémy len v bodoch $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in< a, b >$, tak pre globálne extrémy funkcie na intervale $< a, b >$ platí:

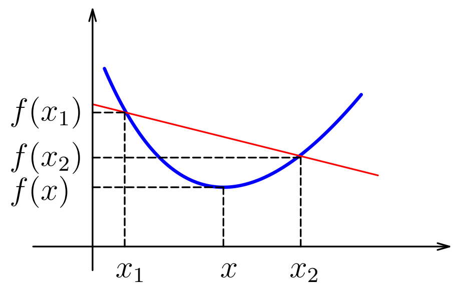
1. **globálne minimum**
$$\min_{x\in<a,b>} f(x) = \min\{f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(a),\ f(b)\},$$

2. **globálne maximum**
$$\max_{x\in<a,b>} f(x) = \max\{f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(a),\ f(b)\}.$$

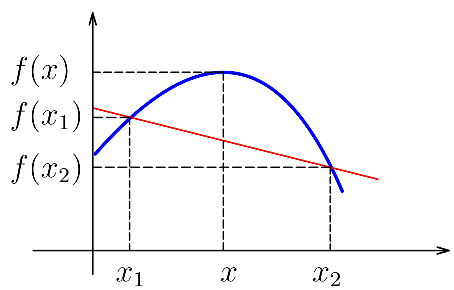
6.4 Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Definícia 6.3 *Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na intervale (a, b). Hovoríme, že* ***funkcia*** *$f(x)$* ***je konvexná (konkávna)*** *na (a, b), ak pre každú trojicu bodov $x_1,\ x,\ x_2 \in (a, b)$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod (nad) priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$ alebo leží na tejto priamke.*

Definícia 6.4 *Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na intervale (a, b). Hovoríme, že* ***funkcia*** *$f(x)$* ***je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna)*** *na (a, b), ak pre každú trojicu bodov $x_1,\ x,\ x_2 \in (a, b)$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod (nad) priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$ (viď Obr. 19 a Obr. 20).*



Obr. 19: Rýdzo konvexná funkcia



Obr. 20: Rýdzo konkávna funkcia

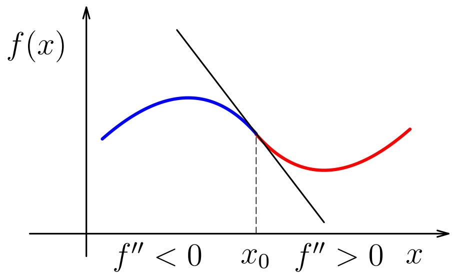
Veta 6.4 (Postačujúca podmienka konvexnosti/konkávnosti)
Nech je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale $I \subset < a, b >$ a má druhú deriváciu rovnakého znamienka na intervale (a, b). Potom platí

- *ak $f''(x) > 0$, tak $f(x)$ je rýdzo konvexná na I,*
- *ak $f''(x) < 0$, tak $f(x)$ je rýdzo konkávna na I,*
- *ak $f''(x) \geq 0$, tak $f(x)$ je konvexná na I,*
- *ak $f''(x) \leq 0$, tak $f(x)$ je konkávna na I.*

Definícia 6.5 *Hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode $x_0 \in I \subset < a, b >$* ***inflexiu****, ak je funkcia v nejakom ľavom okolí bodu x_0 rýdzo konkávna (rýdzo konvexná) a v nejakom pravom okolí bodu x_0 rýdzo konvexná (rýdzo konkávna). Bod $[x_0, f(x_0)]$ nazývame* ***inflexným bodom funkcie*** *$f(x)$ (viď Obr. 21).*

Veta 6.5 (Nutná podmienka existencie inflexného bodu)
Nech existuje druhá derivácia $f''(x_0)$ funkcie $f(x)$ v x_0. Ak má funkcia $f(x)$ v x_0 inflexiu, tak $f''(x_0) = 0$.

Obrátené tvrdenie neplatí. Ak $f''(x_0) = 0$, to neznamená, že v x_0 má funkcia inflexiu.



Obr. 21: Inflexný bod

Príklad 6.4.1 *Vyšetrime konvexnosť/konkávnosť a nájdime inflexné body funkcie* $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Riešenie. Vypočítame druhú deriváciu funkcie a jej nulové body:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x \cdot (x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \ \vee x = 0.$$

Metódou nulových bodov určíme znamienko druhej derivácie na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lllll} f''(x) & > & 0 & \text{konvexná} & \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty). \\ f''(x) & < & 0 & \text{konkávna} & \Leftrightarrow \quad x \in (0, 2). \end{array}$$

Inflexnými bodmi funkcie sú body $[0, 0]$ a $[2, -16]$.

♡

6.5 Priebeh funkcie

S využitím znalostí z predchádzajúcich kapitol a hlavne použitím derivácií vieme vyšetriť vlastnosti danej funkcie a nakresliť jej graf.

Algoritmus na určenie priebehu funkcie:

1. Nájdeme $D(f)$ (príp. $H(f)$).
2. Určíme priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami.
3. Vyšetríme párnosť - nepárnosť funkcie.
4. Overíme periodičnosť funkcie.
5. Stanovíme body nespojitosti funkcie.
6. Nájdeme asymptoty grafu funkcie.
7. Vypočítame stacionárne body a intervaly, na ktorých je funkcia rýdzo-monotónna.
8. Rozhodneme o lokálnych (príp. globálnych) extrémoch funkcie.

9. Určíme intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, resp. konkávna.

10. Stanovíme inflexné body funkcie.

11. Nakreslíme graf funkcie.

Príklad 6.5.1 *Vyšetrime priebeh a nakreslime graf funkcie* $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Riešenie. Počas výpočtov budeme postupne získavať významné body grafu funkcie, ktoré nám výrazne pomôžu pri jeho kreslení.

1. $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Vypočítame priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami. Graf pretína os y, ak $x = 0$, dostávame teda prvý bod $P_1 = [0, 0]$. Graf pretína os x, ak $y = 0$ a to je práve vtedy, ak $f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3 \cdot (x - 4) = 0$, teda $x = 0$ alebo $x = 4$. Dostávame ďalší významný bod $P_2 = [4, 0]$.

3. Funkcia je definovaná na celom $\mathbb{R}$ môžeme teda pre každé x nájsť $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3$. Keďže sa tento výraz nerovná ani $f(x)$ ani $-f(x)$, funkcia nie je ani párna ani nepárna.

4. Jedná sa o polynomickú funkciu, ktorá je neperiodická.

5. Funkcia je definovaná na celom $\mathbb{R}$, nemá body nespojitosti.

6. Keďže funkcia nemá body nespojitosti, nemá jej graf asymptoty bez smernice. Asymptoty so smernicou určíme pomocou vzťahov, ktoré sme uviedli pri limitách. Nech priamka $y = k_1 x + q_1$ je asymptota grafu funkcie f pre bod $+\infty$, tak
$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 4x^3}{x} = \infty.$$
Nejedná sa o konečnú hodnotu, funkcia nemá asymptotu so smernicou pre bod $+\infty$. Rovnako je to aj pre bod $-\infty$.

7.-8. Príklad 6.3.1 riešil monotónnosť tejto funkcie a príklad 6.3.2 jej stacionárne body a lokálne extrémy. Zhrnieme si tieto výsledky do tabuľky:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-	$\searrow$	l. min.	$\nearrow$

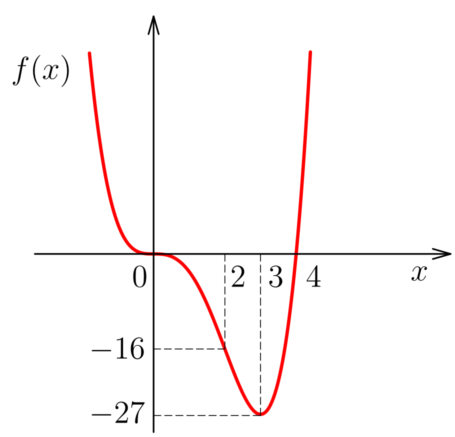
Funkcia nadobúda v bode $x = 3$ lokálne minimum $f(3) = -27$, teda $P_3 = [3, -27]$.

9.-10. Príklad 6.4.1 riešil konvexnosť, resp. konkávnosť tejto funkcie. Zhrnieme si to opäť do tabuľky:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	bod inf.	$\cap$	bod inf.	$\cup$

Funkcia nadobúda v bode $x = 2$ funkčnú hodnotu $f(2) = -16$, teda $P_4 = [2, -16]$.

11. Nakoniec nakreslíme graf tejto funkcie (viď Obr. 22).



Obr. 22: Priebeh funkcie $y = x^4 - 4x^3$

♡

6.6 Exponenciálne modely

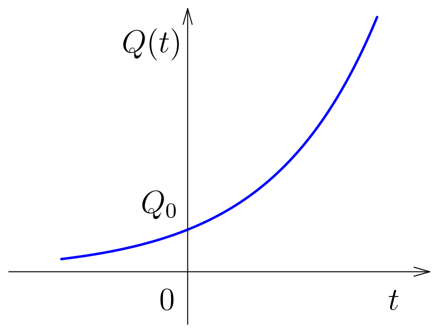
Postup, ktorý sme si ukázali pri vyšetrovaní priebehu funkcie, môžeme použiť na funkcie, ktoré súborne označujeme pojmom exponenciálne modely. Niektoré z nich, vrátane možností ich použitia, si teraz predstavíme.

1. Exponenciálny rast

Definícia 6.6 *Nech* $Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{kt}$*, kde* k, $Q_0 \in (0, \infty)$*. Potom hovoríme, že **funkcia** $Q(t)$ **rastie exponenciálne** (viď Obr. 23).*

Vlastnosti tejto funkcie zhrnieme do bodov:

1. $D(Q) = \mathbb{R}$ a $H(Q) = (0, \infty)$,
2. $Q(0) = Q_0$,



Obr. 23: Exponenciálny rast

3. $Q'(t) = k \cdot Q_0 \cdot \mathrm{e}^{kt} = k \cdot Q(t)$,
   t. j. miera rastu funkcie je priamo úmerná pôvodnej funkcii s konštantou úmernosti k,
4. $Q'(t) > 0$, teda $Q(t)$ je rastúca na $D(f)$,
5. $k = \dfrac{Q'(0)}{Q_0}$.

Niektoré z možností použitia funkcie exponenciálneho rastu:

- rast populácie (počtu ochorení, počtu baktérií) bez vonkajších vplyvov,
- spojité úrokovanie.

Príklad 6.6.1 *Biológovia zistili, že za ideálnych podmienok, počet baktérií rastie v kultúre exponenciálne. Predpokladajme, že na počiatku bolo 2 000 baktérii v určitej kultúre a že po 20 minútach ich bolo 6 000. Koľko baktérií bude po 1 hodine?*

Riešenie. Funkcia, ktorá bude vyjadrovať počet baktérií po t minútach, bude mať tvar $Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{kt}$. Postupne použijeme údaje o rastúcom počte baktérií s rastúcim časom.

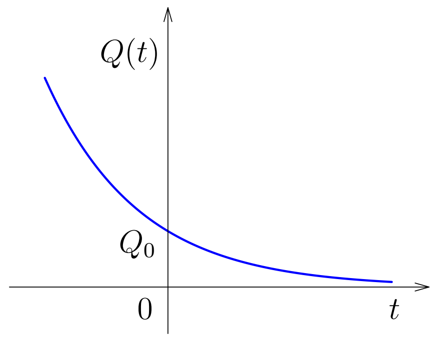
$$\begin{array}{rrcl} & Q_0 & = & Q(0) = 2\ 000 \\ \Longrightarrow & Q(20) & = & 2\ 000 \cdot \mathrm{e}^{k\cdot 20} = 6\ 000 \\ \Longleftrightarrow & \mathrm{e}^{k\cdot 20} & = & 3 \\ \Longrightarrow & Q(60) & = & 2\ 000 \cdot \mathrm{e}^{k\cdot 60} = 2\ 000 \cdot (\mathrm{e}^{k\cdot 20})^3 = 2\ 000 \cdot 3^3 = 54\ 000. \end{array}$$

Počet baktérií po uplynutí jednej hodiny bude 54 000.

♡

2. Exponenciálne klesanie

Definícia 6.7 *Nech $Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$, kde k, $Q_0 \in (0, \infty)$. Potom hovoríme, že* ***funkcia*** *$Q(t)$* ***klesá exponenciálne*** *(viď Obr. 24).*



Obr. 24: Exponenciálne klesanie

Vlastnosti tejto funkcie zhrnieme do bodov:

1. $D(Q) = \mathbb{R}$ a $H(Q) = (0, \infty)$,
2. $Q(0) = Q_0$,
3. $Q'(t) = -k \cdot Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt} = -k \cdot Q(t)$,
   t. j. miera klesania funkcie je priamo úmerná pôvodnej funkcii s konštantou úmernosti k,
4. $Q'(t) < 0$, teda $Q(t)$ je klesajúca na $D(f)$,
5. $k = -\dfrac{Q'(0)}{Q_0}$,
6. $\lim\limits_{t \to \infty} Q(t) = 0$.

Niektoré z možností použitia funkcie exponenciálneho klesania:

- rozpad rádioaktívnych látok,
- predaj tovaru, ak sa preruší reklama.

Príklad 6.6.2 *Polčas rozpadu rádioaktívnej substancie je čas potrebný na rozpad polovice pôvodnej hmotnosti. Množstvo rádioaktívnej substancie, ktorá zostane po t rokoch, je dané funkciou* $Q(t) = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}003t}$*. Nájdime polčas rozpadu substancie.*

Riešenie. Množstvo rádioaktívnej substancie vyjadrenej funkciou $Q(t)$ sa rovná polovici pôvodného množstva.

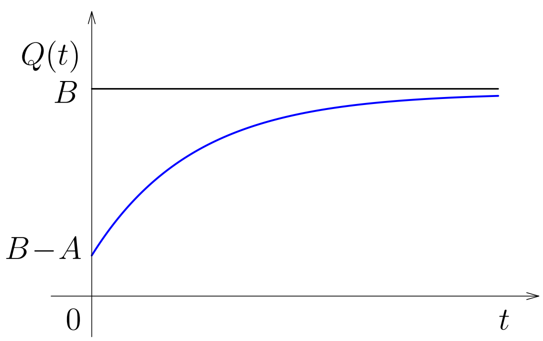
$$\begin{aligned} Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}003t} &= \tfrac{Q(0)}{2} \\ \mathrm{e}^{-0{,}003t} &= \tfrac{1}{2} \\ \iff \qquad t &= \tfrac{1\,000}{3} \ln 2 \doteq 231{,}05. \end{aligned}$$

Polčas rozpadu je 231,05 rokov.

♡

3. Krivka učenia sa

Definícia 6.8 *Nech $Q(t) = B - A \cdot \mathrm{e}^{-kt}$, kde A, B, $k \in (0, \infty)$, $B > A$. Graf funkcie $Q(t)$ (viď Obr. 25) nazývame* ***krivka učenia sa****.*



Obr. 25: Krivka učenia sa

Vlastnosti tejto funkcie zhrnieme do bodov:

1. $D(Q) = \mathbb{R}$,
2. $Q(0) = B - A$,
3. $Q'(t) = k \cdot A \cdot \mathrm{e}^{-kt} < 0$, teda $Q(t)$ je klesajúca na $D(f)$,
4. $Q''(t) = -k^2 \cdot A \cdot \mathrm{e}^{-kt} < 0$, teda $Q(t)$ je konkávna na $D(f)$,
5. $\lim\limits_{t \to \infty} Q(t) = B$, teda funkcia je zhora ohraničená konštantou B.

Funkciu, ktorej grafom je krivka učenia sa, používame pri skúmaní výkonnosti pri rôznych činnostiach (učenie sa, práca, …). Konštanta B môže predstavovať kapacitu mozgu alebo maximálny výkon.

Príklad 6.6.3 *Podľa štúdie efektívnosti práce vo výrobnej firme platí pre priemerného nového pracovníka nasledujúci odhad výkonnosti:*

počet mesiacov praxe	*0*	*6*
hodinová výkonnosť	*300*	*410*

Výkonnosť v závislosti podľa počtu mesiacov praxe sa riadi funkciou $Q(t) = 500 - A \cdot \mathrm{e}^{-kt}$. *Nájdime neznáme koeficienty funkcie* $Q(t)$.

Riešenie. Dosadíme ako zvyčajne najskôr hodnotu 0, aby sme eliminovali konštantu k a mohli vypočítať konštantu A.

$$\begin{array}{rrcl} & Q(0) = 500 - A\,\mathrm{e}^0 & = & 300 \\ \Longrightarrow & A & = & 200. \end{array}$$

Funkcia má po dosadení konštanty A tvar $Q(t) = 500 - 200\,\mathrm{e}^{-kt}$. Použijeme údaje o výkonnosti po šiestich mesiacoch praxe:

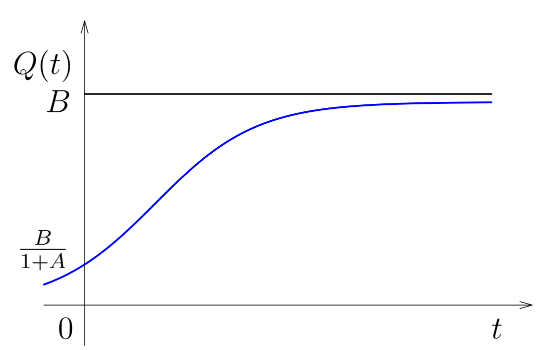
$$\begin{array}{rrcl} & Q(6) = 500 - 200\,\mathrm{e}^{-k6} & = & 410 \\ \Longrightarrow & k & = & -\frac{1}{6} \cdot \ln \frac{9}{20} \doteq 0{,}13308. \end{array}$$

Hľadaná funkcia má tvar $Q(t) = 500 - 200\,\mathrm{e}^{-0{,}13308t}$.

♡

4. Logistická krivka

Definícia 6.9 *Nech* $Q(t) = \dfrac{B}{1 + A \cdot \mathrm{e}^{-Bkt}}$, *kde* A, B, $k \in (0, \infty)$. *Graf funkcie* $Q(t)$ *(viď Obr. 26) nazývame* ***logistická krivka*** *(sigmoidálna krivka).*



Obr. 26: Logistická krivka

Vlastnosti tejto funkcie zhrnieme do bodov:

1. $D(Q) = \mathbb{R}$,
2. $Q(0) = \frac{B}{1+A}$,
3. $Q'(t) = \dfrac{B^2 \cdot k \cdot A \cdot \mathrm{e}^{-Bkt}}{(1 + A \cdot \mathrm{e}^{-Bkt})^2} > 0$, teda $Q(t)$ je rastúca na $D(f)$,
4. $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = B$, teda funkcia je zhora ohraničená konštantou B,
5. $\lim\limits_{t\to-\infty} Q(t) = 0$, teda funkcia je zdola ohraničená konštantou 0.

Niektoré z možností použitia funkcie, ktorej grafom je logistická krivka:

- rast populácie pod vonkajšími vplyvmi,
- šírenie sa epidémie.

Príklad 6.6.4 *Odhaduje sa, že o t rokov odteraz bude počet obyvateľov krajiny $P(t) = \dfrac{20}{2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}06t}}$ miliónov.*

a) *Aký je súčasný počet obyvateľov?*

b) *Ak by trend pokračoval podľa uvedenej funkcie, k akej hranici by sa priblížil celkový počet obyvateľov?*

c) *Koľko obyvateľov bude mať krajina o 15 rokov?*

Riešenie.

a) Aby sme vypočítali súčasný stav počtu obyvateľov, dosadíme $t = 0$:
$$P(0) = \frac{20}{2+3} = 4.$$
Súčasný počet obyvateľov je 4 milióny.

b) Hľadáme počet obyvateľov v ďalekej budúcnosti:
$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{20}{2 + 3\,\mathrm{e}^{-0{,}06t}} = \frac{20}{2} = 10.$$
Počet obyvateľov krajiny sa priblíži k hranici 10 miliónov.

c) Dosadíme hodnotu $t = 15$, aby sme určili počet obyvateľov po 15 rokoch:
$$P(15) = \frac{20}{2 + 3\,\mathrm{e}^{-0{,}06\cdot 15}} \doteq 6{,}2117.$$
Predpokladaný počet obyvateľov krajiny po 15 rokoch bude 6,2117 miliónov.

♡

6.7 Úlohy

6.1 Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia $f(x)$ rýdzomonotónna a určte jej lokálne extrémy.

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 100$,

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$,

c) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$,

d) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

6.2 Vyšetrite konvexnosť/konkávnosť a nájdite inflexné body funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$,

b) $f(x) = \dfrac{10x}{(2+x)^2}$,

c) $f(x) = \ln(1 + x^2)$,

d) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

6.3 Vyšetrite priebeh a nakreslite graf funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$,

b) $f(x) = \dfrac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2}$,

c) $f(x) = x \ln x$,

d) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Výsledky:

6.1

a) rastie na $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
klesá na $(0, 4)$
lokálne minimum -156 v $x = 4$
lokálne maximum 100 v $x = 0$,

b) rastie na $(0, 2) \cup (2, \infty)$
klesá na $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
lokálne minimum 0 v $x = 0$,

c) rastie na (e, ∞)
klesá na $(0, 1) \cup (1, \mathrm{e})$
lokálne minimum e v $x = \mathrm{e}$,

d) rastie na $(-\infty, 1)$
klesá na $(1, \infty)$
lokálne maximum e^{-1} v $x = 1$.

6.2

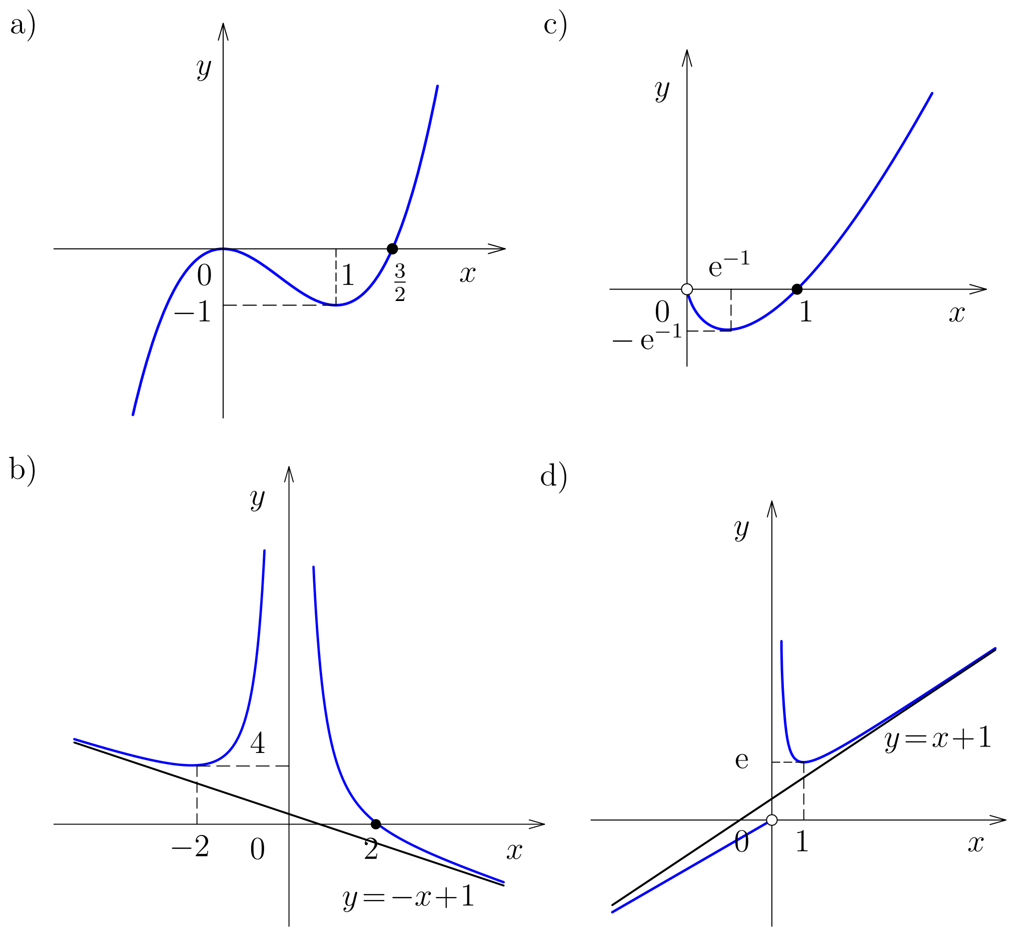
a) konvexná na $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$
konkávna na $(\frac{1}{3}, 1)$
inflexné body v $x = \frac{1}{3}$ a $x = 1$,

b) konvexná na $(4, \infty)$
konkávna na $(-\infty, -2) \cup (-2, 4)$
inflexný bod v $x = 4$,

c) konvexná na $(-1, 1)$
konkávna na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
inflexné body v $x = -1$ a $x = 1$,

d) konvexná na $(2, \infty)$
konkávna na $-\infty, 2)$
inflexný bod v $x = 2$.

6.3



7 Optimalizácia funkcií ekonomickej analýzy

7.1 Cieľ

Oboznámiť s využitím derivácie pri hľadaní extrémov funkcií ekonomickej analýzy.

7.2 Otázky

- Sformulujte vetu o stacionárnom bode funkcie priemerných nákladov.
- Sformulujte vetu o monotónnosti funkcie priemerných nákladov.
- Sformulujte vetu o monotónnosti priemernej veličiny.
- Sformulujte vetu o maximalizácii celkového zisku.

7.3 Minimalizácia nákladov

Pri optimalizácií výroby máme záujem, aby sme minimalizovali náklady. Ukážeme, že nie je možné, aby sme dosiahli stav, kedy sú minimálne priemerné náklady ako aj celkové náklady.

Veta 7.1 (Stacionárne body funkcie priemerných nákladov)
Nech $TC(x)$ je funkcia celkových nákladov a $AC(x) = \dfrac{TC(x)}{x}$ funkcia priemerných nákladov na výrobu x kusov tovaru. Bod x_0 je stacionárnym bodom funkcie priemerných nákladov práve vtedy, ak sa v bode x_0 priemerné náklady rovnajú marginálnym nákladom.

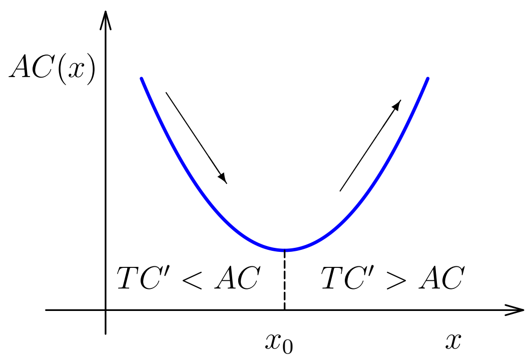
Platí totiž

$$
\begin{aligned}
AC'(x) = \frac{TC'(x) \cdot x - TC(x)}{x^2} = 0 &\iff TC'(x_0) \cdot x_0 - TC(x_0) = 0 \\
&\iff TC'(x_0) = \frac{TC(x_0)}{x_0} \\
&\iff MC(x_0) = AC(x_0).
\end{aligned}
$$

V praxi po spustení výroby nastáva väčšinou stav, kedy sú priemerné náklady pomerne vysoké a postupne klesajú na určitú hodnotu. Následne začnú opäť rásť (viď Obr. 27). Pre funkciu priemerných nákladov platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 7.2 (Monotónnosť funkcie priemerných nákladov)
Nech funkcia $TC(x)$ je spojitá na intervale (a, b). Nech funkcia $AC(x) = \dfrac{TC(x)}{x}$ je definovaná na (a, b). Nech $x_0 \in (a, b)$. Nech funkcia $TC(x)$ má deriváciu na intervale (a, b) a nemení znamienko derivácie na intervale (a, x_0) a nemení znamienko derivácie na intervale (x_0, b). Potom

- *ak $TC'(x) < AC(x)$ pre $x < x_0$, tak $AC(x)$ je klesajúca na (a, x_0),*
- *ak $TC'(x) > AC(x)$ pre $x > x_0$, tak $AC(x)$ je rastúca na (x_0, b),*
- *ak $TC'(x_0) = AC(x_0)$, pričom $TC'(x) < AC(x)$ pre $x < x_0$ a pre $x > x_0$ $TC'(x) > AC(x)$, tak $AC(x)$ má v bode x_0 lokálne minimum.*



Obr. 27: Minimalizácia priemerných nákladov

Príklad 7.3.1 *Predpokladáme, že náklady na výrobu q kusov tovaru sú $C(q) = 3q^2 + q + 48$.*

a) *Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus minimálne?*

b) *Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?*

c) *Nakreslite grafy funkcií priemerných nákladov a marginálnych nákladov v jednom systéme súradníc.*

Riešenie.

a) Zostrojíme funkciu priemerných nákladov a vypočítame jej deriváciu:

$$\begin{array}{rrcl} & AC(q) & = & \dfrac{3q^2 + q + 48}{q} \\ \Longrightarrow & AC'(q) & = & \dfrac{(6q+1)q - (3q^2 + q + 48)}{q^2} = 0 \\ \Longleftrightarrow & (6q+1)q & = & 3q^2 + q + 48 \\ \Longleftrightarrow & q & = & \pm 4. \end{array}$$

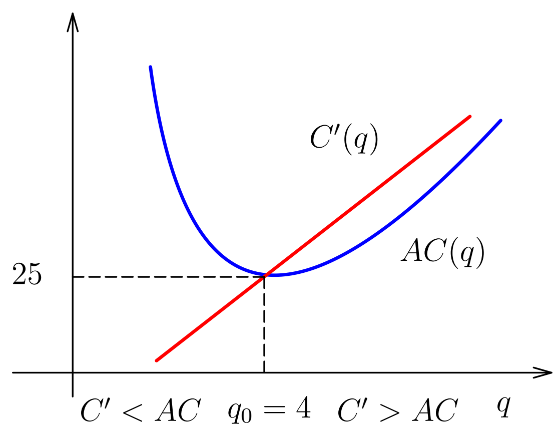
Keďže definičným oborom funkcie priemerných nákladov je množina kladných reálnych čísel, vypočítame hodnotu druhej derivácie v bode $q = 4$. $AC''(q) = \dfrac{96}{q^3}$ a teda $AC''(4) = \dfrac{96}{4^3} > 0$. Priemerné náklady sú minimálne pri výrobe štyroch kusov tovaru.

b) Ak dáme do rovnosti priemerné a marginálne náklady, dostaneme pochopiteľne rovnakú rovnicu ako pri predošlom výpočte:

$$\begin{array}{rrcl} & MC(q) & = & AC(q) \\ \Longleftrightarrow & 6q+1 & = & \dfrac{3q^2+q+48}{q} \\ \Longleftrightarrow & q & = & \pm 4. \end{array}$$

Priemerné náklady sú rovné marginálnym nákladom pri výrobe štyroch kusov tovaru.

c) Načrtneme grafy oboch funkcií do jedného súradného systému (viď Obr. 28).



Obr. 28: Minimalizácia priemerných nákladov - príklad

♡

Poznámka 7.1 *Z predchádzajúcich úvah vyplynulo, že pre stacionárny bod funkcie priemerných nákladov platí:*

$$AC'(x_0) = 0 \Longleftrightarrow TC'(x_0) = \frac{TC(x_0)}{x_0}.$$

Ak teda $TC'(x_0) = 0$ *(stacionárny bod funkcie celkových nákladov) a súčasne* $AC'(x_0) = 0$ *(stacionárny bod funkcie priemerných nákladov), tak* $TC(x_0) = 0$. *Čo znamená, že neexistuje úroveň produkcie* $x_0 > 0$, *pri ktorej sú minimálne celkové náklady aj priemerné náklady.*

Veta 7.2 sa dá jednoducho zovšeobecniť pre ľubovoľnú totálnu veličinu $Tf(x)$.

Veta 7.3 (Monotónnosť priemernej veličiny) *Nech totálna veličina $Tf(x)$ je spojitá na intervale (a, b). Nech priemerná veličina $Af(x) = \dfrac{Tf(x)}{x}$ je definovaná na (a, b). Nech $x_0 \in (a, b)$. Nech funkcia $Tf(x)$ má deriváciu na intervale (a, b) a nemení znamienko derivácie na intervale (a, x_0) a nemení znamienko derivácie na intervale (x_0, b). Potom*

- *ak $Tf'(x) < Af(x)$ pre $x < x_0$ ($x > x_0$), tak $Af(x)$ je klesajúca na (a, x_0) ((x_0, b)),*
- *ak $Tf'(x) > Af(x)$ pre $x > x_0$ ($x < x_0$), tak $Af(x)$ je rastúca na (x_0, b) ((a, x_0)),*
- *ak $Tf'(x_0) = Af(x_0)$, pričom $Tf'(x) < Af(x)$ pre $x < x_0$ ($x > x_0$) a $Tf'(x) > Af(x)$ pre $x > x_0$ ($x < x_0$), tak $Af(x)$ má v bode x_0 lokálne minimum (maximum).*

7.4 Maximalizácia príjmu a zisku

Veta 7.3 nám umožňuje podobnými úvahami ako v predchádzajúcej časti popísať vzťah medzi marginálnymi príjmami a priemernými príjmami. Rozdiel je v tom, že funkcia priemerných príjmov sa zvyčajne správa opačne, t. j. priemerné príjmy po spustení výroby najskôr rastú a potom začnú klesať. V takom prípade v uvažovanom stacionárnom bode, kedy sú marginálne príjmy rovné priemerným príjmom, funkcia priemerných príjmov nadobúda lokálne maximum.

Príklad 7.4.1 *Predpokladáme, že totálny príjem z predaja q kusov tovaru je $R(q) = -2q^2 + 68q - 128$.*

a) *Pri akej výške predaja je priemerný príjem na jeden kus tovaru rovnaký ako marginálny príjem?*

b) *Dokážme, že priemerný príjem rastie, ak úroveň predaja je nižšia ako úroveň z časti a) a klesá, ak úroveň predaja je vyššia ako úroveň z časti a).*

c) *Nakreslime grafy funkcií priemerných príjmov a marginálnych príjmov v jednom systéme súradníc.*

Riešenie.

a) Zostrojíme funkciu priemerných príjmov a položíme do rovnosti s marginálnymi príjmami:

$$\begin{aligned} AR(q) &= \frac{-2q^2+68q-128}{q} \\ AR(q) &= R'(q) \\ \iff \quad \frac{-2q^2+68q-128}{q} &= -4q+68 \\ \iff \quad q &= \pm 8. \end{aligned}$$

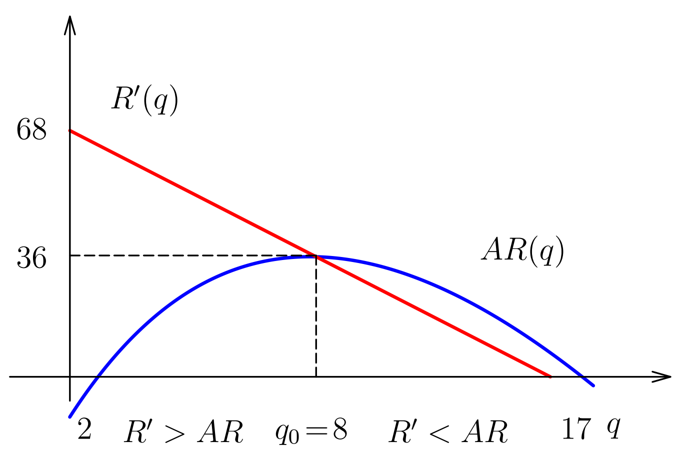
Keďže definičným oborom funkcie priemerných príjmov je množina kladných reálnych čísel, priemerné príjmy sa rovnajú marginálnym pri predaji ôsmych kusov tovaru.

b) Pomocou znamienka prvej derivácie funkcie priemerných príjmov určíme jej monotónnosť:

$$AR'(q) \quad = \quad \frac{(-4q+68)q-(-2q^2+68q-128)}{q^2} = 2\frac{64-q^2}{q^2}.$$

Funkcia priemerných príjmov rastie na intervale (0.8) a klesá na intervale $(8,\infty)$.

c) Načrtneme grafy oboch funkcií do jedného súradného systému (viď Obr. 29).



Obr. 29: Maximalizácia priemerných príjmov - príklad

♡

Poznámka 7.2 *Podobne ako pri funkcii nákladov aj pri funkcii príjmov platí, že neexistuje úroveň predaja, pri ktorom funkcia celkových príjmov aj funkcia priemerných príjmov zároveň nadobúdajú maximum.*

Funkciu celkových príjmov vytvoríme pomocou funkcie dopytu jedným z nasledujúcich spôsobov:

- Ak je funkcia dopytu daná $q = D(p)$, tak funkcia celkových príjmov je
$$TR(p) = p \cdot D(p).$$
- Ak je funkcia dopytu daná $p = d(q)$, tak funkcia celkových príjmov je
$$TR(q) = q \cdot d(q).$$

Lokálne extrémy funkcie celkových príjmov nájdeme potom pomocou derivácie podľa danej premennej.

Funkciu celkového zisku vytvoríme pomocou funkcie celkových príjmov a celkových nákladov. Zderivujeme, aby sme našli stacionárne body:

$$\begin{array}{rrcl} & TP(q) & = & TR(q) - TC(q) \\ & TP'(q) & = & TR'(q) - TC'(q) = 0 \\ \iff & TR'(q) & = & TC'(q) \\ \iff & MR(q) & = & MC(q). \end{array}$$

Platí teda nasledujúca veta.

Veta 7.4 (Maximalizácia celkového zisku) *Nech $TP(q)$ ($TP(p)$) je funkcia celkového zisku. Ak je celkový zisk maximálny, tak sa marginálne príjmy $MR(q)$ ($MR(p)$) rovnajú marginálnym nákladom $MC(q)$ ($MC(p)$).*

Príklad 7.4.2 *Spoločnosť má fixné mesačné náklady na výrobu q kusov výrobku 28 000 \$ a variabilné mesačné náklady $0{,}4q + 222$ \$ na jeden vyrobený kus. Predajná cena jedného výrobku je $p = 1\ 250 - 0{,}6q$. Určme*

a) *kedy je výroba zisková,*

b) *ponuku, ktorá maximalizuje mesačné príjmy,*

c) *úroveň produkcie, pri ktorej firma dosahuje maximálny zisk.*

Riešenie.

a) Zostrojíme funkciu celkových príjmov a funkciu celkových nákladov a vyriešime nerovnosť:

$$\begin{array}{rrcl} & R(q) & > & C(q) \\ & 1\ 250q - 0{,}6q^2 & > & 28\ 000 + 0{,}4q^2 + 222q \\ \iff & q^2 - 1\ 028q + 28\ 000 & < & 0 \\ \iff & (q-28)(q-1\ 000) & < & 0. \end{array}$$

Výroba je zisková pre $q \in (28, 1\ 000)$.

b) Pomocou prvej derivácie funkcie celkových príjmov určíme jej stacionárne body:

$$\begin{aligned} R'(q) &= 1\ 250q - 1{,}2q = 0 \\ \Longleftrightarrow \qquad q &= 1\ 041{,}6667. \end{aligned}$$

Pomocou druhej derivácie určíme extrém. $R''(q) = -1{,}2 < 0$, funkcia celkových príjmov nadobúda lokálne maximum v bode $q = 1\ 041{,}6667$. Uvedomme si, že výroba nie je v tomto prípade zisková.

c) Pomocou funkcie celkového príjmu a celkových nákladov vytvoríme funkciu celkového zisku. Zderivujeme a určíme stacionárne body:

$$\begin{aligned} P(q) &= R(q) - C(q) = \\ &= 1\ 250q - 0{,}6q^2 - (28\ 000 + 0{,}4q^2 + 222q) = \\ &= -q^2 + 1\ 280q - 28\ 000 \\ \Longrightarrow \quad P'(q) &= -2q + 1\ 028 = 0 \\ \Longleftrightarrow \qquad q &= 514. \end{aligned}$$

Pomocou druhej derivácie určíme extrém. $P''(q) = -2 < 0$, funkcia celkového zisku nadobúda lokálne maximum v bode $q = 514$. ♡

7.5 Úlohy

7.1 Pestovateľ citrusov odhaduje, že ak má zasadených 40 stromov mandarínok, priemerná úroda z jedného stromu je 600 plodov mandarínok. Každý dodatočne zasadený strom znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 6 plodov mandarínok. Koľko stromov by mal pestovateľ zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

7.2 Predajca áut nakupuje určitú značku áut po 3 800 eur a predáva ich po 6 400 eur. Pri tejto cene ich mesačne predá 10. Predajca áut zníži cenu a očakáva, že každé zníženie o 100 eur prinesie zvýšenie mesačného predaja o 1 auto. Pri akej cene za auto bude mesačný zisk maximálny?

7.3 Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 7\ 500 - 60x$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x) = 100x - x^2 + 2\ 700$. Nakreslite grafy oboch funkcií v jednom súradnicovom systéme a zistite, kedy je výroba zisková. Určte úroveň produkcie, pri ktorej firma dosahuje maximálny zisk.

7.4 Celkové mesačné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = x + 90$. Predajná cena bola stanovená na $2 - 0{,}001x$ eur za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.

b) Určte ponuku, ktorá maximalizuje mesačné výnosy.

c) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny zisk.

7.5 Predpokladáme, že náklady na výrobu q kusov tovaru sú $C(q) = q^2 + 13q + 625$.

a) Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus minimálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?

c) Nakreslite grafy funkcií priemerných nákladov a marginálnych nákladov v jednom systéme súradníc.

7.6 Celkové týždenné príjmy v eurách z predaja q kusov žehličiek sú $R(q) = -3q^2 + 102q - 300$.

a) Pri akej výške predaja sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus tovaru maximálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus rovné marginálnym príjmom?

c) Nakreslite grafy funkcií priemerných príjmov a marginálnych príjmov v jednom systéme súradníc.

Výsledky:

7.1 30 stromov

7.2 5 600 eur

7.3 $x \in (40, 120)$, $x = 80$

7.4

a) $x \in (100, 900)$, b) $x = 1\ 000$, c) $x = 500$.

7.5

a) $q = 25$, b) $q = 25$.

7.6

a) $q = 10$, b) $q = 10$.

8 Úrokovanie

8.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmom jednoduché úrokovanie, zložené úrokovanie, zmiešané úrokovanie a spojité úrokovanie. Oboznámiť s princípmi finančnej ekvivalencie. Oboznámiť s pojmom inflácia.

8.2 Otázky

- Vysvetlite pojem kapitál, úrok, úrokové obdobie, úroková perióda a úroková miera.
- Klasifikujte úrokovanie podľa termínu splatnosti úroku.
- Klasifikujte úrokovanie podľa dĺžky úrokového obdobia.
- Vysvetlite pojem jednoduché úrokovanie a uveďte vzťahy pre výpočet súčasnej a budúcej hodnoty kapitálu.
- Definujte matematický a obchodný diskont.
- Vysvetlite pojem zložené úrokovanie a uveďte vzťahy pre výpočet súčasnej a budúcej hodnoty kapitálu pri počte konverzií 1.
- Vysvetlite pojem zložené úrokovanie a uveďte vzťahy pre výpočet súčasnej a budúcej hodnoty kapitálu pri počte konverzií väčšom ako 1.
- Definujte efektívnu ročnú úrokovú sadzbu pri zloženom úrokovaní.
- Vysvetlite pojem zmiešané úrokovanie a uveďte vzťah pre výpočet budúcej hodnoty kapitálu.
- Vysvetlite pojem spojité úrokovanie a uveďte vzťah pre výpočet budúcej hodnoty kapitálu.
- Definujte efektívnu ročnú úrokovú sadzbu pri spojitom úrokovaní.
- Vysvetlite pojem optimálna doba vlastnenia.
- Definujte pojem princíp finančnej ekvivalencie, referenčný dátum a rovnica ekvivalencie.
- Definujte pojem inflácia, cenový index, miera inflácie a priemerná miera inflácie.
- Uveďte dva typy miery zisku vzhľadom na infláciu a sformulujte vzťah medzi nimi.

8.3 Pojem úrokovania

V tejto kapitole sa budeme zaoberať zjednodušene povedané ekonomickými procesmi, pri ktorých tovarom budú peniaze. Peniaze ako predmet obchodovania budeme nazývať **kapitálom**. Veriteľ poskytuje dlžníkovi kapitál na určité obdobie a za určitý poplatok, ktorý budeme nazývať **úrokom**. Najčastejšie sa tak deje v peňažných ústavoch. Obdobie, na ktoré sú peniaze poskytnuté, je **úrokové obdobie**. **Úroková perióda** je časové obdobie, za ktoré percentová miera určuje úrok. Úrok sa stanovuje ako percentová časť kapitálu za úrokové obdobie. Percentová miera prislúchajúca úrokovej perióde je **úroková miera**. Úroková miera vyjadrená v tvare desatinného čísla je **úroková sadzba**. Vzťah medzi nimi môžeme vyjadriť nasledovne

$$\textbf{úroková sadzba} = \frac{\textbf{úroková miera}}{100\ \%}.$$

Dĺžka úrokovej periódy môže byť:

- **per annum (p. a.)** - ročná,
- **per semestrum (p. s.)** - polročná,
- **per quartalem (p. q.)** - štvrťročná,
- **per mensem (p. m.)** - mesačná,
- **per septimanam (p. sept.)** - týždenná.

Podľa termínu splatnosti úroku klasifikujeme úrokovanie nasledovne:

- **dekurzívne (polehotné) úrokovanie** - úrok splatný na konci úrokovej periódy,
- **anticipatívne (predlehotné) úrokovanie** - úrok splatný na začiatku úrokovej periódy.

Podľa dĺžky úrokového obdobia klasifikujeme úrokovanie na:

- **jednoduché úrokovanie** - úrokové obdobie je kratšie ako úroková perióda,
- **zložené úrokovanie** - úrokové obdobie je dlhšie ako úroková perióda a je jej celočíselným násobkom,
- **zmiešané úrokovanie** - úrokové obdobie je dlhšie ako úroková perióda a nie je jej celočíselným násobkom.

8.4 Jednoduché úrokovanie

V tejto časti sa budeme zaoberať **jednoduchým dekurzívnym úrokovaním** a budeme pri tom používať nasledujúce skratky:

PV	začiatočná (súčasná) hodnota kapitálu,
FV	budúca hodnota kapitálu,
I	úrok,
t	dĺžka úrokového obdobia vyjadrená v jednotkách úrokovej periódy,
i	úroková sadzba,
i_d	sadzba dane zo zisku.

Pri vyjadrení úrokového obdobia t, ak je známy počet dní n, používame metódy:

- **banková metóda (ordinárna)**: $t = \frac{n}{360}$
  - počet dní v mesiaci 30,
- **exaktná metóda (presná)**: $t = \frac{n}{365}$, resp. $t = \frac{n}{366}$
  - skutočný počet dní v mesiaci.

Budúca hodnota a úrok

Ak úročíme kapitál vo výške PV pri úrokovej sadzbe i počas úrokového obdobia t, tak úrok vypočítame zo vzťahu

$$I = PV \cdot i \cdot t,$$

budúcu hodnotu kapitálu zo vzťahu

$$FV = PV + I = PV \cdot (\underbrace{1 + i \cdot t}_{\text{úročiteľ}})$$

a budúcu hodnotu kapitálu pri zdaňovaní úrokov zo vzťahu

$$FV = PV + I = PV + PV \cdot i \cdot (1 - i_d) \cdot t = PV \cdot [1 + i \cdot (1 - i_d) \cdot t].$$

Príklad 8.4.1 *Bankovou metódou vypočítajme budúcu hodnotu kapitálu vo výške 2 000 eur pri ročnej úrokovej miere 8 %, ak bude suma úročená 9 mesiacov.*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 2\ 000 \\ i & = & 0{,}08 \\ t & = & \frac{3}{4} \text{ roka} \\ \hline PV & = & ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet budúcej hodnoty pri jednoduchom úrokovaní:

$$FV = PV(1+it) = 2\,000(1+0{,}08\cdot\tfrac{3}{4}) = 2\,120.$$

♡

Ak je potrebné určiť počet dní úrokovania, používame rôzne štandardy zaužívané v niektorých krajinách:

spôsob	štandard	počet dní v mesiaci	počet dní v roku
nemecký	**30E/360**	30	360
francúzsky	**ACT/360**	skutočný	360
anglický	**ACT/365**	skutočný	skutočný

Spoločným princípom zostáva, že do úrokového obdobia nezapočítame prvý deň, ale započítame posledný deň.

Príklad 8.4.2 *Vypočítajme úrok z vkladu 2 000 eur za obdobie od 16. 3. 2006 do 10. 7. 2006 všetkými spôsobmi, ak ročná úroková miera je 8 %.*

Riešenie.

a) Pri nemeckom spôsobe vypočítame úrokové obdobie zaokrúhlením počtu dní v mesiaci aj roku. Dostávame teda $t = \frac{(30-16)+3\cdot 30+10}{360} = \frac{114}{360}$. Úrok potom vypočítame

$$I = PV\cdot i\cdot t = 2\,000\cdot 0{,}08\cdot\tfrac{114}{360} = 50{,}66.$$

b) Pri francúzskom spôsobe vypočítame úrokové obdobie zaokrúhlením počtu dní v roku, počet dní v jednotlivých mesiacoch je skutočný. Dostávame teda $t = \frac{(31-16)+30+31+30+10}{360} = \frac{116}{360}$. Úrok potom vypočítame

$$I = PV\cdot i\cdot t = 2\,000\cdot 0{,}08\cdot\tfrac{116}{360} = 51{,}55.$$

c) Pri anglickom spôsobe je počet dní v jednotlivých mesiacoch aj v roku skutočný. Úrokové obdobie je $t = \frac{(31-16)+30+31+30+10}{365} = \frac{116}{365}$ a úrok vypočítame

$$I = PV\cdot i\cdot t = 2\,000\cdot 0{,}08\cdot\tfrac{116}{365} = 50{,}85.$$

♡

Súčasná hodnota

Ak je známa budúca hodnota kapitálu FV, ročná úroková sadzba i a úrokové obdobie t, tak súčasnú hodnotu kapitálu vypočítame zo vzťahu:

$$PV = FV\cdot \underbrace{\frac{1}{1+i\cdot t}}_{\text{odúročiteľ}}$$

Príklad 8.4.3 *Petrovi sľúbili dodať o 10 mesiacov auto v hodnote 12 000 eur. Koľko musí teraz vložiť do banky pri 5% ročnej úrokovej miere, aby v čase dodávky auta mal k dispozícii potrebnú čiastku?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV & = & 12\ 000 \\ i & = & 0{,}05 \\ t & = & \dfrac{10}{12} \\ \hline PV & = & ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet súčasnej hodnoty pri jednoduchom úrokovaní a dostávame:

$$PV \quad = \quad FV \cdot \frac{1}{1+i\cdot t} = 12\ 000 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{10}{12}\right)^{-1} = 11\ 520.$$

Peter musí teraz vložiť do banky 11 520 eur. ♡

Matematický a obchodný diskont

Úrok (diskont), ak je zadaná budúca hodnota kapitálu, môžeme definovaný dvomi spôsobmi.

Definícia 8.1 ***Matematický diskont*** *je úrok zo súčasnej hodnoty kapitálu, vyjadrený pomocou budúcej hodnoty kapitálu pri danej úrokovej miere* $i \cdot 100$ %.
Zápis*:*

$$D_m = \frac{FV \cdot t \cdot i}{1 + t \cdot i}.$$

Poznámka 8.1 *Horeuvedený vzťah vyplýva z definície úroku:*

$$D_m = I = FV - PV = FV - \frac{FV}{1+t\cdot i} = \frac{FV \cdot t \cdot i}{1+t\cdot i}.$$

Príklad 8.4.4 *Petrovi sľúbili dodať o 10 mesiacov auto v hodnote 12 000 eur. Teraz vloží do banky určitú sumu pri 5% ročnej úrokovej miere, aby v čase dodávky auta mal k dispozícii potrebnú čiastku. O aký úrok narastie vložená suma?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV & = & 12\ 000 \\ i & = & 0{,}05 \\ t & = & \dfrac{10}{12} \\ \hline I(= D_m) & = & ? \end{array}$$

V skutočnosti počítame matematický diskont. Takže úrok, o ktorý narastie vložená suma bude:

$$I = D_m \quad = \quad \frac{FV \cdot t \cdot i}{1+t\cdot i} = \frac{12\ 000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{10}{12}}{1 + 0{,}05 \cdot \frac{10}{12}} = 480.$$ ♡

Je zvykom, že banky pri krátkodobých pôžičkách počítajú úrok, ktorý si ponechávajú, nie zo súčasnej ale budúcej hodnoty kapitálu.

Definícia 8.2 ***Obchodný diskont*** *je úrok z budúcej hodnoty kapitálu, vyjadrený pomocou budúcej hodnoty kapitálu pri danej diskontnej miere $d \cdot 100\,\%$.*
Zápis*:*

$$D_o = FV \cdot t \cdot d.$$

Súčasnú hodnotu kapitálu vypočítame v takom prípade pomocou vzťahu:

$$PV = FV \cdot (1 - t \cdot d).$$

Príklad 8.4.5 *Banka poskytuje na úvery 16% ročnú diskontnú mieru. Podnikateľ si zobral pôžičku, pričom o 6 mesiacov musí vrátiť 700 eur. Akú sumu dostal podnikateľ od banky?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV & = & 700 \\ d & = & 0{,}16 \\ t & = & \dfrac{1}{2} \\ \hline PV & = & ? \end{array}$$

Keďže je zadaná diskontná miera, jedná sa o obchodný diskont a súčasnú hodnotu kapitálu vypočítame zo vzťahu:

$$PV = FV \cdot (1 - t \cdot d) = 700 \left(1 - 0{,}16 \cdot \frac{1}{2}\right) = 644.$$

Podnikateľ dostal od banky 644 eur. ♡

Poznámka 8.2 *Odúročenie formou diskontovania uskutočňujeme, ak je zadaná diskontná miera. V takom prípade pod nominálnou hodnotou kapitálu rozumieme jeho budúcu hodnotu. Diskontovanie sa používa aj pri predaji zmeniek pred dobou splatnosti (tzv.* ***eskontovanie****).*

Príklad 8.4.6 *Obchodník 15. mája vystavil firme zmenku s nominálnou hodnotou 5 000 eur s 9% ročnou úrokovou mierou. Dátum splatnosti zmenky je 15. november. Dňa 1. júla firma eskontuje zmenku v banke, ktorá má 10% ročnú diskontnú mieru. Akú sumu banka vyplatí firme?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 5\,000 \\ i & = & 0{,}09 \\ d & = & 0{,}10 \\ t_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ t_2 & = & \dfrac{134}{360} \\ \hline X & = & ? \end{array}$$

Keďže je zadaná úroková miera, nominálna hodnota je súčasnou hodnotou kapitálu a jej budúcu hodnotu ku dňu splatnosti ľahko určíme

$$FV = PV \cdot (1 + t \cdot i) = 5\ 000 \left(1 + 0{,}09 \cdot \frac{1}{2}\right) = 5\ 225.$$

Eskontovaním zmenky dochádza k potrebe znížiť jej hodnotu ku dňu splatnosti o obchodný diskont:

$$PV = FV \cdot (1 - t_2 \cdot d) = 5\ 225 \cdot \left(1 - \frac{134}{360} \cdot 0{,}1\right) = 5\ 030{,}5.$$

Cena zmenky ku dňu 1. júl bude 5 030,5 eur. ♡

Ak $i = d$, tak $D_m = \dfrac{FV \cdot t \cdot i}{1 + t \cdot i} = \dfrac{D_o}{1 + t \cdot i}$. Z čoho vyplýva, že pri rovnakej úrokovej a diskontnej miere je obchodný diskont väčší ako matematický diskont. Položme si teraz opačnú otázku. Aké hodnoty úrokovej miery a diskontnej miery zodpovedajú rovnakej hodnote obchodného a matematického diskontu?

Definícia 8.3 ***Úroková sadzba*** *i a* ***diskontná sadzba*** *d sú* ***ekvivalentné****, ak vyhovujú rovniciam*

$$d = \frac{i}{1 + t \cdot i} \qquad (1),$$

$$i = \frac{d}{1 - t \cdot d} \qquad (2).$$

Poznámka 8.3 *Ekvivalentné sadzby dávajú rovnakú súčasnú hodnotu, ak sú rovnaké budúce hodnoty a obdobie odúročenia.*

Príklad 8.4.7 *Uvažujme o dvoch ročných pôžičkách s rovnakou splatnou sumou 200 eur. Prvá pôžička je založená na obchodnom diskonte s 7% ročnou diskontnou mierou a druhá na matematickom diskonte s 7% ročnou úrokovou mierou. Zistime:*

a) *aký je zisk veriteľa pri týchto pôžičkách,*

b) *aká je ročná úroková miera, ktorá zaručí veriteľovi rovnaký zisk ako 7% ročná diskontná miera.*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{aligned} FV &= 200 \\ d &= i = 0{,}07 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

a) Zisk veriteľa je rovný súčtu matematického a obchodného diskontu

$$\begin{aligned} D_m + D_o &= \frac{FV \cdot t \cdot i}{1 + t \cdot i} + FV \cdot t \cdot d = \frac{200 \cdot 1 \cdot 0{,}07}{1 + 1 \cdot 0{,}07} + 200 \cdot 1 \cdot 0{,}07 = \\ &= 13{,}084 + 14 = 27{,}084. \end{aligned}$$

Zisk veriteľa je 27,084 eur.

b) Vypočítame úrokovú mieru, ktorá je ekvivalentná so 7% ročnou diskontnou mierou

$$i = \frac{d}{1 - t \cdot d} = \frac{0{,}07}{1 - 1 \cdot 0{,}07} = 0{,}0753.$$

Ročná úroková miera, ktorá zaručí veriteľovi rovnaký zisk je 7,53 %.

♡

8.5 Zložené úrokovanie

Ak je úrokové obdobie dlhšie ako úroková perióda a je jej celočíselným násobkom, tak používame **zložené úrokovanie**. Úroky sa pripisujú opakovane v pravidelných intervaloch, pričom nové úroky sa počítajú už z kapitálu navýšeného o úroky z predchádzajúceho obdobia. Zjednodušene povedané, pri tomto úrokovaní úroky tvoria úroky. Budeme naďalej predpokladať, že sa úroky pripisujú na konci úrokového obdobia a budeme pri tom používať nasledujúce skratky:

PV	začiatočná (súčasná) hodnota kapitálu,
FV_n	budúca hodnota kapitálu po n rokoch,
n	dĺžka úrokového obdobia v rokoch,
m	počet úrokových periód (konverzií) za rok,
i	ročná úroková sadzba, ak $m = 1$,
j	ročná úroková sadzba, ak $m > 1$,
i_d	sadzba dane zo zisku.

Budúca hodnota

Predpokladajme, že úroková perióda je jeden rok, teda počet konverzií je jedna. Ak úročíme kapitál vo výške PV pri ročnej úrokovej sadzbe i počas n rokov, tak budúcu hodnotu kapitálu po prvom roku vypočítame

$$FV_1 = PV + PV \cdot i = PV \cdot (1 + i).$$

Táto hodnota je základom pre počítanie budúcej hodnoty kapitálu po druhom roku

$$FV_2 = PF_1 \cdot (1 + i) = PV \cdot (1 + i)^2.$$

Zovšeobecnení tohto postupu dostávame vzťah pre výpočet budúcej hodnoty kapitálu po n rokoch

$$FV_n = PV \cdot (1 + i)^n.$$

Príklad 8.5.1 *Do banky sme uložili 400 eur. Aká bude výška kapitálu po štyroch rokoch, ak je ročná úroková miera 8,5 %?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 400 \\ i & = & 0{,}085 \\ n & = & 4 \\ \hline FV_4 & = & ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet budúcej hodnoty po n rokoch pri zloženom úrokovaní a dostávame:

$$FV = FV_n = PV \cdot (1+i)^n = 400(1+0{,}085)^4 = 554{,}34348.$$

♡

Súčasná hodnota

Predpokladajme, že úroková perióda je jeden rok a ročná úroková sadzba je i. Zo vzťahu $FV_n = PV \cdot (1+i)^n$ pre výpočet budúcej hodnoty kapitálu po n rokoch vieme odvodiť vzťahy pre výpočet:

- **súčasnej hodnoty kapitálu**
$$PV = \frac{FV_n}{(1+i)^n},$$
- **úrokovej sadzby**
$$i = \sqrt[n]{\frac{FV_n}{PV}} - 1,$$
- **dĺžky úrokového obdobia**
$$n = \frac{\ln \frac{FV_n}{PV}}{\ln(1+i)}.$$

Príklad 8.5.2 *Vklad 2 000 eur vzrástol pri zloženom úrokovaní na dvojnásobok za 12 rokov. Akou ročnou úrokovou sadzbou bol úročený?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 2\,000 \\ FV_{12} & = & 2PV \\ n & = & 12 \\ \hline i & = & ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet úrokovej sadzby alebo vyriešime rovnicu:

$$\begin{array}{rcl} FV_{12} & = & PV \cdot (1+i)^{12} \\ 2PV & = & PV \cdot (1+i)^{12} \\ (1+i)^{12} & = & 2 \\ i & = & \sqrt[12]{2} - 1 \\ i & = & 0{,}06. \end{array}$$

♡

Diskontovanie

Ak budeme predpokladať, že dĺžka úrokového obdobia je jeden rok, tak pri odúročení (diskontovaní), teda počítaní súčasnej hodnoty z budúcej hodnoty, budeme budúcu hodnotu násobiť výrazom $v = \dfrac{1}{1+i}$, čo je tzv. **diskontný faktor**. Vo všeobecnosti platí $PV = FV_n \cdot v^n$.

Príklad 8.5.3 *Podnikateľ si na rozbehnutie výroby zobral pôžičku za predpokladu, že za osem rokov splatí 70 000 eur. Keďže sa mu dobre darilo, chce pôžičku splatiť za štyri roky. Koľko zaplatí pri 9% ročnej úrokovej miere?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV_8 & = & 70\ 000 \\ i & = & 0{,}09 \\ n & = & 8 \\ \hline FV_4 & = & ? \end{array}$$

Keďže splatí pôžičku o 4 roky skôr, budeme diskontovať cez obdobie štyroch rokov, t. j. budúcu hodnotu po ôsmych rokoch vynásobíme diskontným faktorom umocneným na štvrtú

$$FV_4 = FV_8 \cdot \frac{1}{(1+i)^4} = \frac{70\ 000}{(1+0{,}09)^4} = 49\ 589{,}76477.$$

♡

Zmena úrokového obdobia

Predpokladajme teraz všeobecnejší prípad, že totiž úroková perióda je menšia než jeden rok a **počet konverzií** (úrokových periód) za rok je teda $m > 1$. Ak označíme ročnú úrokovú sadzbu j, tak na jednu úrokovú periódu prislúcha úroková sadzba $\frac{j}{m}$. **Úročiteľ prislúchajúci na jeden rok** je potom $(1 + \frac{j}{m})^m$. Ak úročíme kapitál vo výške PV pri ročnej úrokovej sadzbe j počas n rokov a počte konverzií $m > 1$, tak budúcu hodnotu kapitálu po n rokoch vypočítame zo vzťahu

$$FV_n = PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

Príklad 8.5.4 *Vložili sme do banky 1 000 eur pri 6% ročnej úrokovej miere. Akú sumu dostaneme po troch rokoch, ak sa úroky pripisovali*

a) *raz do roka,*

b) *štvrťročne?*

Riešenie.

a) Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 1\ 000 \\ i & = & 0{,}06 \\ n & = & 3 \\ m & = & 1 \\ \hline FV_3 & = & ? \end{array}$$

Budúcu hodnotu vypočítame zo vzťahu pri počte konverzií $m = 1$

$$FV_n = PV \cdot (1+i)^n = 1\ 000 \cdot (1 + 0{,}06)^3 = 1\ 191{,}016.$$

b) Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 1\ 000 \\ j & = & 0{,}06 \\ n & = & 3 \\ m & = & 4 \\ \hline FV_3 & = & ? \end{array}$$

Budúcu hodnotu vypočítame zo vzťahu pri počte konverzií $m > 1$

$$FV_n = PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} = 1\ 000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 1\ 195{,}61817.$$

♡

Efektívna ročná úroková sadzba

Definícia 8.4 ***Efektívna ročná úroková sadzba*** *i^* je úroková sadzba, ktorá pri jednoduchom úrokovaní zabezpečí rovnaký úrok ako nominálna pri zloženom úrokovaní.*

Ak položíme $n = 1$, resp. $t = 1$, tak pre budúce hodnoty kapitálu dostaneme pri jednoduchom úrokovaní hodnotu $FV = PV \cdot (1 + i^* \cdot 1)$, resp. pri zloženom úrokovaní hodnotu $FV_1 = PV \cdot (1 + \frac{j}{m})^m$. Ak tieto hodnoty položíme do rovnosti, tak dostaneme vzťah pre efektívnu úrokovú sadzbu

$$\begin{aligned} PV \cdot (1 + i^* \cdot 1) &= PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \\ 1 + i^* &= \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \\ i^* &= \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1. \end{aligned}$$

Príklad 8.5.5 *Banka poskytuje na vklady 6,8% ročnú úrokovú mieru. Vypočítajme ročnú efektívnu úrokovú mieru v prípade*

a) *mesačného konvertovania,*

b) *polročného konvertovania.*

Riešenie.

a) Urobíme zápis:

$$\begin{array}{rcl} j & = & 0{,}068 \\ n & = & 1 \\ m & = & 12 \\ \hline i^* & = & ? \end{array}$$

Efektívnu ročnú úrokovú sadzbu pri počte konverzií $m = 12$ vypočítame

$$i^* = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0{,}068}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}07016.$$

Efektívna ročná úroková miera je 7,016 %.

b) urobíme zápis:

$$\begin{array}{rcl} j & = & 0{,}068 \\ n & = & 1 \\ m & = & 2 \\ \hline i^* & = & ? \end{array}$$

Efektívnu ročnú úrokovú sadzbu pri počte konverzií $m = 2$ vypočítame

$$i^* = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0{,}068}{2}\right)^{2} - 1 = 0{,}069156.$$

Efektívna ročná úroková miera je 6,9156 %. ♡

8.6 Zmiešané úrokovanie

Ak je úrokové obdobie dlhšie ako úroková perióda, ale nie je jej celočíselným násobkom, tak používame **zmiešané úrokovanie**. Úrokové obdobie môžeme v takom prípade vyjadriť ako súčet $n+t$. Znamená to, že pomocou zloženého úrokovania vypočítame budúcu hodnotu kapitálu po n rokoch, ktorú úročíme jednoduchým úrokovaním ešte obdobie t. Pre **budúcu hodnotu kapitálu** dostávame vzťah

$$FV = PV \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot t).$$

Príklad 8.6.1 *Koľko musíme dnes vložiť do banky, ktorá poskytuje 0,035 úrokovú sadzbu pri zmiešanom úrokovaní, keď o 2 roky a 58 dní potrebujeme mať nasporených 1 500 eur?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV & = & 1\,500 \\ i & = & 0{,}035 \\ n & = & 2 \\ t & = & \dfrac{58}{360} \\ \hline PV & = & ? \end{array}$$

Zo vzťahu $FV = PV \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot t)$ pre výpočet budúcej hodnoty pri zmiešanom úrokovaní vyjadríme súčasnú hodnotu:

$$\begin{aligned} PV &= \frac{FV}{(1+i)^n \cdot (1+i\cdot t)} = \frac{1\,500}{(1+0{,}035)^2 \cdot (1+0{,}035 \cdot \frac{58}{360})} = \\ &= 1\,392{,}41438. \end{aligned}$$

♡

8.7 Spojité úrokovanie

Ak sa dĺžka úrokovej periódy blíži k nule ($\Delta t \to 0$) a teda počet konverzií rastie do nekonečna ($m \to \infty$), tak sa pripisovanie úrokov deje spojite. Tento spôsob úročenia nazývame preto **spojité úrokovanie**. Využitím vzťahu pre budúcu hodnotu kapitálu pri zloženom úrokovaní môžeme pre budúcu hodnotu kapitálu pri spojitom úrokovaní písať

$$FV_t = \lim_{m\to\infty} PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m\cdot t}.$$

Použitím známej limity

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} = \mathrm{e}^j,$$

dostávame vzťah pre výpočet budúcej hodnoty kapitálu **s nominálnou úrokovou sadzbou** j

$$FV_t = PV \cdot \mathrm{e}^{j\cdot t}.$$

Príklad 8.7.1 *Za aký čas sa na účte strojnásobí vložená suma dolárov, ak nominálna ročná úroková miera je 10 % a úroky sa pripisujú*

a) *mesačne,*

b) *spojite?*

Riešenie.

a) Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} j & = & 0{,}1 \\ FV_n & = & 3PV \\ m & = & 12 \\ \hline n & = & ? \end{array}$$

V tomto prípade použijeme vzťah pre výpočet dĺžky úrokového obdobia pri zloženom úrokovaní alebo vyriešime exponenciálnu rovnicu

$$\begin{aligned} FV_n &= PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} \\ 3PV &= PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} \\ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} &= 3 \\ \left(1 + \frac{0{,}1}{12}\right)^{12 \cdot n} &= 3 \\ n &= 11{,}03. \end{aligned}$$

b) Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} j & = & 0{,}1 \\ FV_t & = & 3PV \\ m & \to & \infty \\ \hline t & = & ? \end{array}$$

Analogickým postupom zo vzťahu pre spojité úrokovanie vypočítame

$$\begin{aligned} FV_t &= PV \cdot \mathrm{e}^{j \cdot t} \\ 3PV &= PV \cdot \mathrm{e}^{j \cdot t} \\ \mathrm{e}^{0{,}1t} &= 3 \\ t &= 10{,}99. \end{aligned}$$

♡

Efektívna ročná úroková sadzba

Definícia 8.5 ***Efektívna ročná úroková sadzba*** *i^* je úroková sadzba, ktorá pri jednoduchom úrokovaní zabezpečí rovnaký úrok ako nominálna pri spojitom úrokovaní.*

Ak položíme $t = 1$ v oboch prípadoch, tak pre budúce hodnoty kapitálu dostaneme pri jednoduchom úrokovaní hodnotu $FV_1 = PV \cdot (1 + i^*)$, resp. pri spojitom úrokovaní hodnotu $FV_1 = PV \cdot \mathrm{e}^j$. Ak tieto hodnoty položíme do rovnosti, tak dostaneme vzťah pre efektívnu úrokovú sadzbu

$$\begin{aligned} PV \cdot (1 + i^* \cdot 1) &= PV \cdot \mathrm{e}^j \\ 1 + i^* &= \mathrm{e}^j \\ i^* &= \mathrm{e}^j - 1. \end{aligned}$$

Optimálna doba vlastnenia

So spojitým úrokovaním súvisí aj nasledujúci problém. Predpokladajme, že vlastníme cennú vec, ktorej hodnota s časom rastie a je vyjadrená funkciou $V(t)$. Predpokladajme ďalej, že existuje banka so spojitým úrokovaním s nominálnou intenzitou úrokovania δ. Zaujíma nás, čo je pre nás výhodnejšie: nechať si cennosť alebo ju predať a peniaze uložiť do banky. Inými slovami povedané nás zaujíma, či rastie rýchlejšie hodnota cennosti alebo hodnota kapitálu v banke. Keďže rast hodnoty môžeme vyjadriť ako pomer jej zmeny ku hodnote, platí:

$$\begin{array}{llll} \text{ak} & \dfrac{V'(t)}{V(t)} & > j, & \text{tak je výhodné si cennosť nechať,} \\ \text{ak} & \dfrac{V'(t)}{V(t)} & < j, & \text{tak je výhodné cennosť predať,} \\ \text{ak} & \dfrac{V'(t)}{V(t)} & = j, & \text{tak je rovnako výhodné si cennosť nechať i predať.} \end{array}$$

Príklad 8.7.2 *Predpokladajme, že vlastníme pozemok, ktorého cena o t rokov odteraz bude $V(t) = 8\ 000\,\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$. Ak by ročná úroková miera zostala na rovnakej úrovni 6 % a pripisovanie úrokov by bolo spojité, po akom čase by sa oplatilo pozemok predať a získané peniaze uložiť na účet?*

Riešenie. Vypočítame, ako rýchlo rastie hodnota pozemku:

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{8\ 000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}}{8\ 000 \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{t}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{t}}$$

a porovnáme, kedy je vypočítaná hodnota rovná úrokovej sadzbe

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{t}} &= 0{,}06 \\ t &= 69{,}44. \end{aligned}$$

Vzhľadom na to, že je funkcia $\dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{t}}$ klesajúca, po uplynutí 69,44 roka treba pozemok predať. ♡

8.8 Princíp finančnej ekvivalencie

Často je potrebné platby uskutočniť v inom termíne, než bolo dohodnuté. V takom prípade je potrebné nájsť tento termín, resp. určiť výšku platby k novému termínu.

Definícia 8.6 ***Princíp finančnej ekvivalencie*** *spočíva vo vyjadrení platieb k rovnakému dátumu nazývaného* ***porovnávací (referenčný) dátum (R.D.)****.* ***Ekvivalentné finančné operácie*** *sú operácie, ktoré dávajú k tomu istému dátumu platby rovnakej hodnoty.* ***Rovnica ekvivalencie (hodnotová rovnica)*** *vyjadruje rovnosť platieb ekvivalentných operácií.*

Pri princípe ekvivalencie musíme rozlišovať medzi jednoduchým a zloženým úrokovaním:

- jednoduché úrokovanie - ak R. D. existuje, tak je jednoznačný a len vtedy sú platby ekvivalentné,
- zložené úrokovanie - R. D. nie je jednoznačný a ak sú platby ekvivalentné, tak kedykoľvek.

K zostaveniu hodnotovej rovnice použijeme vzťahy pre výpočet budúcej, resp. súčasnej hodnoty kapitálu. Zostavenie hodnotovej rovnice pre

1. **jednoduché úrokovanie**:

   a) úrokovanie (i je nominálna úroková sadzba)
   $$FV = PV \cdot (1 + i \cdot t),$$
   b) diskontovanie (d je nominálna diskontná sadzba)
   $$PV = FV \cdot (1 - i \cdot d),$$

2. **zložené úrokovanie**:
   $$FV_n = PV \cdot (1 + i)^n.$$

Poznámka 8.4 *Nominálna hodnota je (viď poznámka 8.2)*

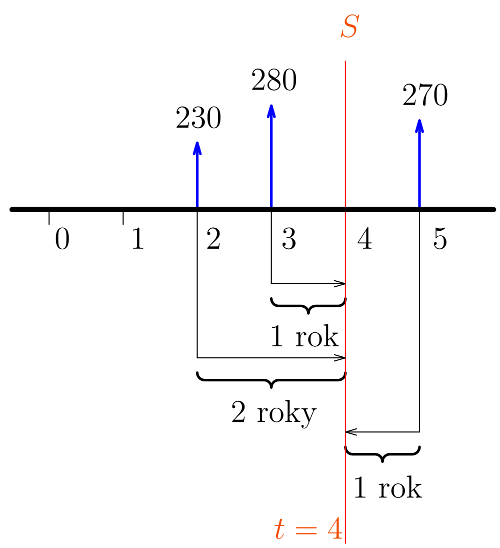
- *súčasná hodnota - ak je daná úroková miera,*
- *budúca hodnota - ak je daná diskontná miera.*

Príklad 8.8.1 *Máme dve zmenky v nominálnych hodnotách 190 eur a 192 eur s dobou splatnosti 16. 9. 2011 a 15. 10. 2011 pri 12% ročnej diskontnej miere. Určme dátum ekvivalencie týchto zmeniek.*

Riešenie. Keďže je zadaná diskontná miera, jedná sa o diskontovanie pri jednoduchom úrokovaní a použijeme teda vzťah $PV = FV \cdot (1 - i \cdot d)$. Ak označíme počet dní pred dátumom 16. 9. ako neznámu x, tak hodnotová rovnica má tvar:
$$\begin{aligned} 190 \cdot \left(1 - 0{,}12 \cdot \frac{x}{360}\right) &= 192 \cdot \left(1 - 0{,}12 \cdot \frac{x+29}{360}\right) \\ 95 \cdot \left(1 - \frac{x}{3\,000}\right) &= 96 \cdot \left(1 - \frac{x+29}{3\,000}\right) \\ 95 \cdot (3\,000 - x) &= 96 \cdot (2\,971 - x) \\ x &= 216. \end{aligned}$$
Vzhľadom na to, že 216 dní je 7 mesiacov a 6 dní, je referenčným dátumom 10. 2. 2011. ♡

Príklad 8.8.2 *Dlžník má veriteľovi zaplatiť nasledujúce platby 230 eur o 2 roky, 280 eur o 3 roky a 270 eur o 5 rokov. Avšak chce ich splatiť jednou ekvivalentnou platbou o 4 roky pri 8% ročnej úrokovej miere. Vypočítajme veľkosť splátky.*

Riešenie. Keďže je úrokové obdobie zadané v rokoch, jedná sa o zložené úrokovanie. Rovnicu ekvivalencie môžeme zostaviť k ľubovoľnému roku. Zvoľme v našom prípade dátum po uplynutí 4 rokov a znázornime si to graficky (viď Obr. 30).



Obr. 30: Rovnica ekvivalencie - príklad

Splátky 230 eur a 280 eur budeme úročiť o dva, resp. o jeden rok, zatiaľčo splátku 270 eur musíme odúročiť o jeden rok. Ak hľadanú sumu označíme S, tak rovnica ekvivalencie má tvar:

$$\begin{aligned} S &= 230 \cdot (1+i)^2 + 280 \cdot (1+i) + \frac{270}{1+i} = \\ &= 230 \cdot 1{,}08^2 + 280 \cdot 1{,}08 + \frac{270}{1{,}08} = 820{,}672. \end{aligned}$$

Veľkosť splátky bude 820,672 eur. ♡

8.9 Inflácia

Definícia 8.7 *Pokles (nárast) hodnoty peňazí oproti širokej skupine tovarov nazývame **inflácia** (**deflácia**). Ukazovateľom vzťahu hodnoty peňazí a skupiny tovarov je **cenový index**, ktorý predstavuje súhrnnú cenu týchto produktov v určených množstvách.*

Zaužívané sú cenové indexy:

- **index spotrebiteľských cien CPI** (Consumer Price Index),
- **index cien výrobcov PPI** (Producer Price Index),
- **deflátor HDP**.

Pri bežne používanom indexe spotrebiteľských cien sa určuje maloobchodná cena tzv. spotrebiteľského koša, v ktorom sú vybrané položky spotrebného tovaru a služieb s určitou váhou dôležitosti. Deflátor hrubého domáceho produktu vyjadruje pomer nominálneho a reálneho HDP a slúži na porovnanie stavu ekonomiky rôznych štátov.

Definícia 8.8 ***Miera inflácie*** *za obdobie* $< t_1, t_2 >$ *je relatívna zmena cenového indexu za toto obdobie.*
Zápis*:*

$$i_{infl} \cdot 100\,\% = \frac{CPI_{t_2} - CPI_{t_1}}{CPI_{t_1}} \cdot 100\ \%.$$

Definícia 8.9 ***Priemerná ročná miera inflácie*** *za obdobie* $< t, t+n >$ *je definovaná vzťahom*

$$CPI_{t+n} = CPI_t \cdot (1 + i_{infl})^n,$$

kde CPI_t *(*CPI_{t+n}*) je cenový index na začiatku (na konci) obdobia.*

Príklad 8.9.1 *Aká bola priemerná ročná miera inflácie v USA v období od konca roku 1965 do konca roku 1981 meraná indexom* CPI*, ak* $CPI_{1965} =$ 95,5 *a* $CPI_{1981} =$ 281,5*?*

Riešenie. Jedná sa o priemernú mieru inflácie za obdobie 16 rokov. Použijeme vzťah $CPI_{t+n} = CPI_t \cdot (1 + i_{infl})^n$ a vypočítame:

$$\begin{aligned} 281,5 &= 95,5 \cdot (1 + i_{infl})^{16} \\ (1 + i_{infl})^{16} &= 1{,}06999 \\ i_{infl} &= 0{,}06999. \end{aligned}$$

Miera inflácie je 6,999 %.

♡

Inflácia má vplyv na mieru zisku. Rozlišujeme dva typy:

- **nominálna miera zisku** $i_{nom} \cdot 100\ \%$**.**
  - nezohľadňuje infláciu,
- **reálna miera zisku** $i_{real} \cdot 100\ \%$**.**
  - zohľadňuje infláciu.

Vzťah medzi nimi vyjadruje Fischerova rovnica.

Veta 8.1 (Fisherova rovnica) *Nech* $i_{nom} \cdot 100$ % *je nominálna miera zisku,* $i_{real} \cdot 100$ % *je reálna miera zisku a* $i_{infl} \cdot 100$ % *je miera inflácie, tak platí*

$$1 + i_{nom} = (1 + i_{real}) \cdot (1 + i_{infl}).$$

Príklad 8.9.2 *Aká je očakávaná reálna miera zisku, ak je nominálna miera zisku 8 % a miera inflácie 2,5 %?*

Riešenie. Použijeme Fischerovu rovnicu

$$\begin{aligned} 1 + i_{nom} &= (1 + i_{real}) \cdot (1 + i_{infl}) \\ 1 + 0{,}08 &= (1 + i_{real}) \cdot (1 + 0{,}025) \\ i_{real} &= 0{,}053658. \end{aligned}$$

Reálna miera zisku je 5,37 %. ♡

8.10 Úlohy

8.1 Do banky si uložíte 7 000 €. Po 200 dňoch si vyberáte vklad aj s úrokom. Koľko vám banka vyplatí pri 2,5% ročnej úrokovej miere?

8.2 O pol roka máte vrátiť veriteľovi 8 080 € pri 2% ročnej úrokovej miere. Aká je výška pôžičky?

8.3 Čiastka 6 300 € bude mať v banke po uplynutí 5 mesiacov hodnotu 6 386,625 €. Akú ročnú úrokovú mieru ponúka banka v takomto prípade?

8.4 Dnes máte k dispozícii sumu 4 400 €. Ako dlho budete musieť čakať, aby ste z banky ponúkajúcej 3,4% ročnú úrokovú mieru mohli na nákup stavebného materiálu vybrať 4 474,8 €?

8.5 Zmenka s nominálnou hodnotou 5 000 € je bankou niekoľko dní pred dobou splatnosti vyplatená klientovi v hodnote 4 983,33 € pri ročnej diskontnej sadzbe 0,08. O koľko dní sa jedná?

8.6 Nájdite dátum ekvivalencie dvoch zmeniek s 12% ročnou diskontnou mierou, ak prvá z nich s nominálnou hodnotou 5 800 € je splatná 16. septembra a druhá s nominálnou hodnotou 5 850 € je splatná 10. októbra.

8.7 Na akú hodnotu sa v banke počas 6 rokov naakumuluje kapitál 4 000 € úročený 2% ročnou úrokovou mierou?

8.8 Podnikateľ si pri 6% ročnej úrokovej miere požičal kapitál, ktorý v dobe splatnosti o 10 rokov bude mať hodnotu 700 000 €. Vďaka úspešným obchodom vráti pôžičku už po 7 rokoch. Koľko zaplatí?

8.9 Za aký čas sa zdvojnásobí vklad uložený do banky pri 4% ročnej úrokovej miere?

8.10 Akú ročnú úrokovú mieru poskytuje banka, v ktorej vám počas troch rokov narástol kapitál 15 000 € na hodnotu 16 630,77 €?

8.11 Dlžník má veriteľovi zaplatiť pri 7% ročnej úrokovej miere nasledujúce platby: 800 € o 2 roky, 1 200 € o 3 roky a 1 800 € o 5 rokov a 2 000 € o 6 rokov. Chce ich nahradiť jedinou ekvivalentnou platbou o 5 rokov. Aká bude jej výška?

8.12 O 2 roky plánujete kúpiť stavebný pozemok v cene 40 000 €. Koľko musíte vložiť teraz do banky pri 2,5% nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úrokovaní, aby ste po uplynutí dvoch rokov mali pripravenú potrebnú hotovosť?

8.13 V banke si otvoríte účet s vkladom 20 000 €. Banka poskytuje 3% nominálnu úrokovú mieru pri polročnom úrokovaní. Na konci prvého a druhého roka zvýšite vždy vklad o ďalších 5 000 €. Akú sumu budete mať po uplynutí 7 rokov od prvého vkladu?

8.14 Banka poskytuje 1,5% ročný úrok pri zmiešanom úrokovaní. Koľko musíme vložiť dnes, ak potrebujeme 2 400 € o 2 roky a 4 mesiace?

8.15 Na termínovaný účet vložíte 2 500 €, ktoré banka úročí spojite nominálnou úrokovou intenzitou 0,034. Akú čiastku budete môcť vybrať po uplynutí troch rokov?

8.16 Predpokladajme, že vlastníte nehnuteľnosť, ktorej hodnota o t rokov odteraz bude $V(t) = 5\ 000 \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$ eur. Ak by ročná úroková miera ostala na rovnakej úrovni 5 % a pripisovanie úrokov by bolo spojité, po akom čase by sa oplatilo nehnuteľnosť predať a získané peniaze uložiť na účet?

Výsledky:

8.1	7 097,22 €	**8.9**	17,67 roka
8.2	8 000 €	**8.10**	3,5 %
8.3	3,3 %	**8.11**	6,023,07 €
8.4	6 mesiacov	**8.12**	38 055,10 €
8.5	15 dní	**8.13**	36 415,91 €
8.6	4. marec	**8.14**	2318 €
8.7	4 504,65 €	**8.15**	2 768,46 €
8.8	587 733,50 €	**8.16**	100 rokov

9 Rentový a umorovací počet

9.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmom renta, polehotná renta s konštantnou splátkou, polehotná renta s rovnomerne rastúcou splátkou, predlehotná renta s konštantnou splátkou, odložená renta s konštantnou splátkou, prerušená renta s konštantnou splátkou, večná renta, renta so spojitým úrokovaním. Oboznámiť s pojmom umorovanie, pôžička s povinným jednorazovým splatením, pôžičky s postupným splácaním, umorovací plán pôžičky.

9.2 Otázky

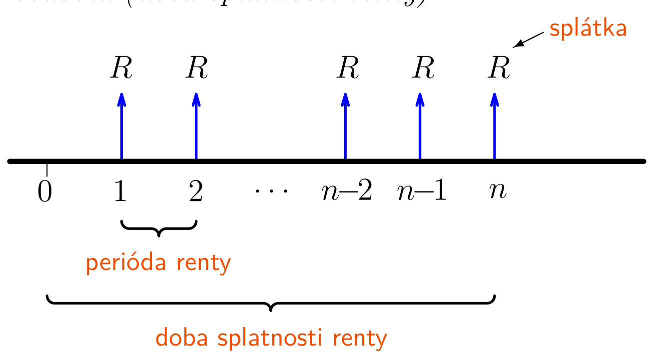
- Definujte pojmy finančná renta, perióda renty, doba splatnosti renty.
- Klasifikujte finančnú rentu podľa doby splatnosti a podľa počtu splátok za rok.
- Klasifikujte finančnú rentu podľa veľkosti splátok a podľa termínu splátky v časovej perióde splácania.
- Definujte polehotnú rentu s konštantnou splátkou a uveďte vzťahy pre výpočet budúcej a súčasnej hodnoty renty.
- Definujte polehotnú rentu s rovnomerne rastúcou splátkou a uveďte vzťahy pre výpočet budúcej a súčasnej hodnoty renty.
- Definujte predlehotnú rentu s konštantnou splátkou a uveďte vzťahy pre výpočet budúcej a súčasnej hodnoty renty.
- Definujte odloženú rentu s konštantnou splátkou a uveďte vzťahy pre výpočet budúcej a súčasnej hodnoty renty.
- Vysvetlite pojem prerušená renta s konštantnou splátkou a ilustrujte na príklade výpočet budúcej a súčasnej hodnoty renty.
- Definujte večnú rentu s konštantnou splátkou s diskrétnym úrokovaním a uveďte vzťahy pre výpočet budúcej a súčasnej hodnoty renty.
- Definujte konečnú rentu s konštantnou splátkou so spojitým úrokovaním a uveďte vzťahy pre výpočet budúcej a súčasnej hodnoty renty.
- Definujte večnú rentu s konštantnou splátkou so spojitým úrokovaním a uveďte vzťahy pre výpočet budúcej a súčasnej hodnoty renty.
- Definujte pojem umorovania a klasifikujte pôžičky podľa spôsobu umorovania.

- Objasnite pojem pôžička s povinným jednorazovým splatením a uveďte vzťahy potrebné k zostaveniu umorovacieho plánu.
- Objasnite pojem pôžička s postupným splácaním, uveďte vzťahy pre výpočet anuity, úmoru a zostatku dlhu a klasifikujte pôžičky s postupným splácaním.
- Objasnite pojem splátkové umorovanie a uveďte vzťahy potrebné k zostaveniu umorovacieho plánu.
- Objasnite pojem anuitné umorovanie a uveďte vzťahy potrebné k zostaveniu umorovacieho plánu.

9.3 Rentový počet

9.3.1 Pojem renty

Definícia 9.1 ***Finančnou rentou** (**dôchodkom**) nazývame postupnosť platieb (anuít, splátok) v rovnako veľkých časových intervaloch (perióda renty) počas určitého obdobia (doba splatnosti renty).*



Obr. 31: Finančná renta

Rentu môžeme klasifikovať rôznymi spôsobmi.

1. Klasifikácia podľa podmienok splácania:
   - **renta podmienená**
     - výplata je viazaná na splnenie určitých podmienok,
   - **renta nepodmienená**
     - výplata nie je viazaná na splnenie žiadnych podmienok.
2. Klasifikácia podľa doby splatnosti renty:
   - **renta konečná**
     - výplata je viazaná na konečný časový úsek,

- **renta nekonečná (večná)**
  - výplata nie je viazaná na časový úsek.

3. Klasifikácia podľa dĺžky periódy renty, resp. podľa počtu splátok za rok:

   - **ročná renta** $p = 1$,
   - **polročná renta** $p = 2$,
   - **štvrťročná renta** $p = 4$,
   - **mesačná renta** $p = 12$,
   - p**-termínová renta** p.

4. Klasifikácia podľa veľkosti splátok:

   - **renta konštantná**
     - výška splátky sa nemení,
   - **renta premenlivá**
     - výška splátky sa mení, najčastejšie rovnomerne rastie.

5. Klasifikácia podľa termínu splátky v časovej perióde splácania:

   - **polehotná renta** (**ordinárna**)
     - splátky na konci periódy renty,
   - **predlehotná renta** (**duálna**)
     - splátky na začiatku periódy renty.

6. Klasifikácia podľa termínu pripočítania úrokov v perióde úrokovania:

   - **renta s dekurzívnym úrokom**
     - úroky sa pripočítavajú na konci úrokovej periódy,
   - **renta s anticipatívnym úrokom**
     - úroky sa pripočítavajú na začiatku úrokovej periódy.

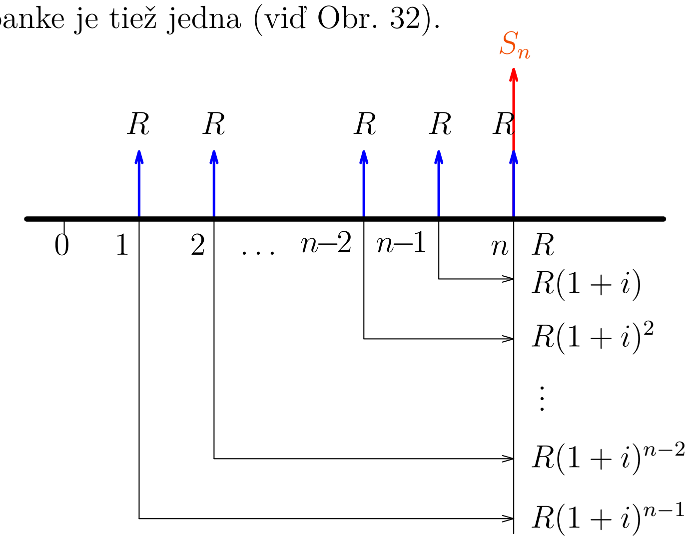
9.3.2 Polehotná renta s konštantnou splátkou

V tejto časti sa budeme zaoberať rentou, ktorá je nepodmienená, konečná, konštantná a polehotná. Budeme používať nasledujúce skratky:

A_n súčasná hodnota renty,
S_n budúca hodnota renty,
n doba splatnosti renty
R splátka (anuita),
p počet splátok za rok,
m počet úrokových periód (konverzií) za rok,
i ročná úroková sadzba, ak $m = 1$,
j nominálna úroková sadzba, ak $m > 1$.

Každá splátka narastie za príslušný počet periód o úroky na novú hodnotu. Súčet týchto nových hodnôt na konci doby splatnosti je **budúca hodnota polehotnej renty** S_n.

Uvažujme najskôr prípad, keď je počet splátok za rok rovný 1 a počet konverzií v banke je tiež jedna (viď Obr. 32).



Obr. 32: Budúca hodnota ročnej polehotnej renty

Budúca hodnota renty je v tomto prípade

$$S_n = R + R\cdot(1+i) + R\cdot(1+i)^2 + \cdots + R\cdot(1+i)^{n-2} + R\cdot(1+i)^{n-1},$$

kde na pravej strane je súčet prvých n členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q = 1+i$. Ak súčet nahradíme výrazom

$$a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1},$$

tak dostaneme nasledujúce tvrdenie.

Veta 9.1 *Budúcu hodnotu ročnej polehotnej renty s konštantnou splátkou pri ročnej úrokovej sadzbe i, s výškou splátky R a dobou splatnosti n vypočítame zo vzťahu*

$$S_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Definícia 9.2 ***Polehotným sporiteľom*** *nazývame výraz*

$$s_{n\backslash i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

ktorý udáva, koľkokrát sa zväčší pravidelne polehotne platená renta so splátkou $R = 1$ peňažnej jednotky za n periód pri úrokovej sadzbe i za jednu periódu.

Zápis:

$$\begin{aligned} S_n &= R \cdot \underbrace{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}_{s_{n\backslash i}}, \\ S_n &= R \cdot s_{n\backslash i}. \end{aligned}$$

Príklad 9.3.1 *Pán Oravec si chce našetriť na kúpu záhradky 10 000 eur. Rozhodol sa, že na konci každého roka uloží do banky 1 000 eur pri 6% ročnej úrokovej miere. Koľko platieb musí uložiť?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} S_n &=& 10\ 000 \\ R &=& 1\ 000 \\ i &=& 0{,}06 \\ \hline n &=& ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet budúcej hodnoty renty a vyriešime exponenciálnu rovnicu:

$$\begin{aligned} S_n &= R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ 10\ 000 &= 1\ 000 \cdot \frac{(1+0{,}06)^n - 1}{0{,}06} \\ 10 &= \frac{(1{,}06)^n - 1}{0{,}06} \\ 1{,}06^n &= 1{,}6 \\ n &= 8{,}066113. \end{aligned}$$

♡

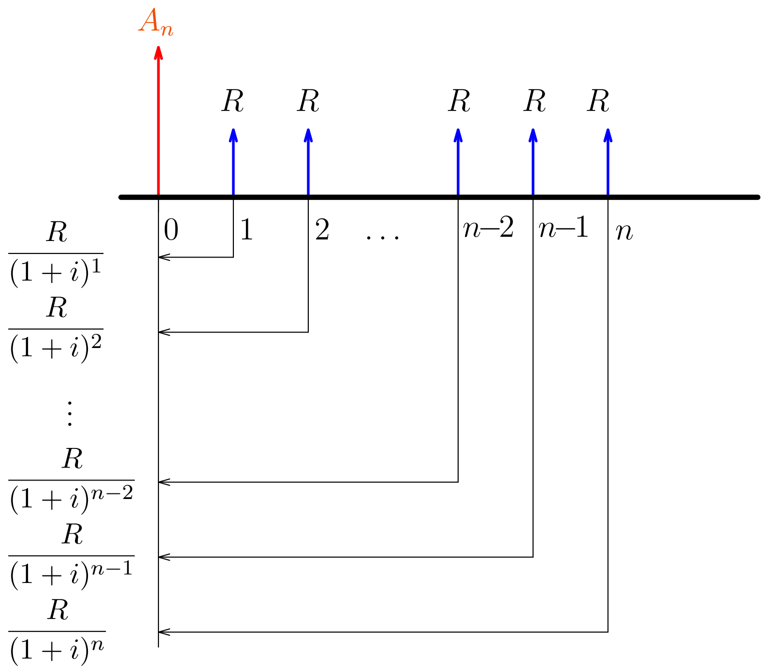
Uvažujme teraz, akú hodnotu by mala renta, ak by sme súčet splátok mali k dispozícii na začiatku. Súčasnú hodnotu každej splátky ku začiatku doby splatnosti renty dostaneme po odúročení za príslušné obdobie. Súčet súčasných hodnôt všetkých splátok ku začiatku doby splatnosti je **súčasná hodnota polehotnej renty** A_n (viď Obr. 33):

$$A_n = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R}{(1+i)^n},$$

kde na pravej strane je súčet prvých n členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q = \frac{1}{1+i}$. Ak súčet nahradíme výrazom

$$a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1},$$

tak dostaneme nasledujúce tvrdenie.



Obr. 33: Súčasná hodnota ročnej polehotnej renty

Veta 9.2 *Súčasnú hodnotu ročnej polehotnej renty s konštantnou splátkou pri ročnej úrokovej sadzbe i, s výškou splátky R a dobou splatnosti n vypočítame zo vzťahu*

$$A_n = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Definícia 9.3 ***Polehotným zásobiteľom*** *nazývame výraz*

$$a_{n\backslash i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

ktorý udáva, súčasnú hodnotu renty so splátkou $R = 1$ peňažnej jednotky za n periód pri úrokovej sadzbe i za jednu periódu.
Zápis*:*

$$A_n = R \cdot \underbrace{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}_{a_{n\backslash i}},$$

$$A_n = R \cdot a_{n\backslash i}.$$

Príklad 9.3.2 *Pán Podolník sa dohodol s pánom Podhorom, že dlžobu vyrovná piatimi splátkami po 200 eur koncom každého nasledujúceho roka pri 6% ročnej úrokovej miere. Koľko eur si pán Podolník požičal?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{rcl} R & = & 200 \\ i & = & 0{,}06 \\ n & = & 5 \\ \hline A_5 & = & ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet súčasnej hodnoty renty:

$$\begin{aligned} A_n &= R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\ A_5 &= 200 \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-5}}{0{,}06} = 842{,}47276. \end{aligned}$$

♡

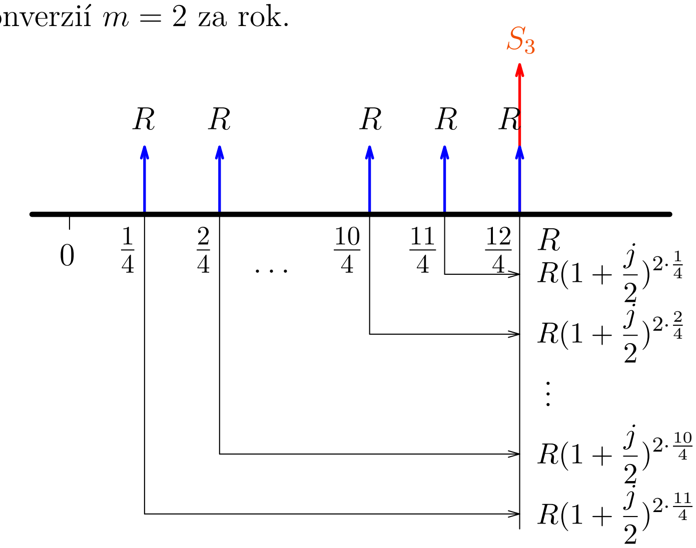
Vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou polehotnej renty vyjadruje nasledujúca veta.

Veta 9.3 *Nech A_n je súčasná a S_n budúca hodnota ročnej polehotnej renty s konštantnou splátkou pri ročnej úrokovej sadzbe i a dobou splatnosti n. Potom*

$$S_n = A_n \cdot (1+i)^n.$$

Zovšeobecnime teraz predchádzajúce úvahy na prípad, keď počet splátok za rok je väčší ako jedna a počet konverzií v banke tiež.

Na obrázku (viď Obr. 34) ilustrujeme budúcu hodnotu renty. Pre jednoduchosť znázornenia uvažujeme trojročnú rentu s počtom splátok $p = 4$ a počtom konverzií $m = 2$ za rok.



Obr. 34: Budúca hodnota polehotnej renty pre $p > 1$

Budúca hodnota renty pri počte splátok p a počte konverzií m je

$$S_n = R + R\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{p}} + R\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]^{\frac{2}{p}} + \cdots + R\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]^{n-\frac{1}{p}},$$

kde na pravej strane je súčet prvých $n \cdot p$ členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q = \left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{p}} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$. Ak súčet nahradíme výrazom $a_1 \cdot \dfrac{q^{n \cdot p}-1}{q-1}$, tak dostaneme nasledujúce tvrdenie.

Veta 9.4 *Budúcu hodnotu polehotnej renty s konštantnou splátkou pri nominálnej úrokovej sadzbe j, počte konverzií m, s počtom splátok p za rok, výškou splátky R a dobou splatnosti n vypočítame zo vzťahu*

$$S_n = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}.$$

Príklad 9.3.3 *Počas desiatich rokov si budeme mesačne polehotne ukladať 15 eur pri 10% nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úrokovaní. Akú sumu budeme mať na konte po poslednej splátke?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} R & = & 15 \\ j & = & 0{,}1 \\ p & = & 12 \\ m & = & 4 \\ n & = & 10 \\ \hline S_{10} & = & ? \end{array}$$

Použijeme všeobecný vzťah pre výpočet budúcej hodnoty renty:

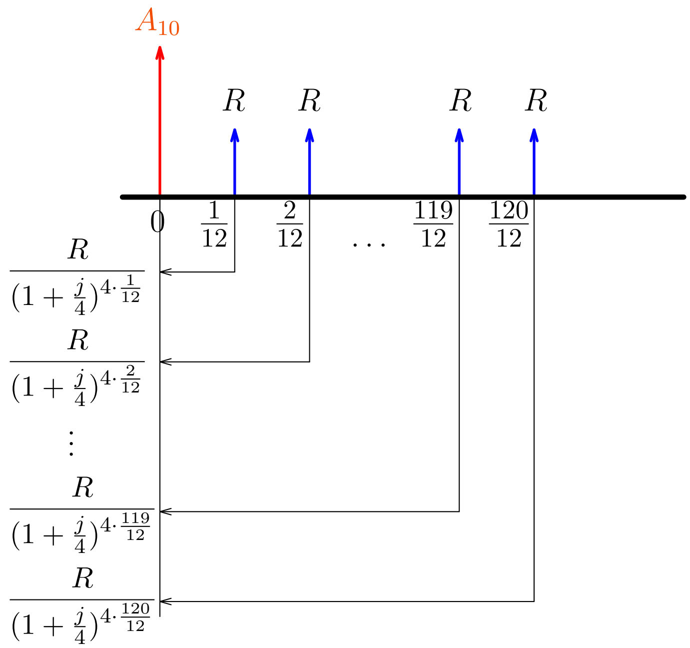
$$\begin{aligned} S_n &= R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \\ S_{10} &= 15 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{4 \cdot 10} - 1}{\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1} = 3\ 058{,}25217. \end{aligned}$$

♡

Tak ako pre budúcu hodnotu uvažujme súčasnú hodnotu vo všeobecnom prípade s ľubovoľným počtom splátok aj počtom konverzií do roka. Na obrázku (viď Obr. 35) je ilustrácia na konkrétnom prípade. Uvažujeme desaťročnú rentu s počtom splátok $p = 12$ a počtom konverzií $m = 4$ za rok.

Súčasná hodnota renty pri počte splátok p a počte konverzií m je

$$A_n = \frac{R}{\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{p}}} + \frac{R}{\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]^{\frac{2}{p}}} + \cdots + \frac{R}{\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]^{\frac{n \cdot p}{p}}},$$



Obr. 35: Súčasná hodnota polehotnej renty pre $p > 1$

kde na pravej strane je opäť súčet prvých $n\cdot p$ členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q = \dfrac{1}{\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{p}}} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}$. Ak súčet nahradíme výrazom $a_1 \cdot \dfrac{q^{n\cdot p}-1}{q-1}$, tak dostaneme nasledujúce tvrdenie.

Veta 9.5 *Súčasnú hodnotu polehotnej renty s konštantnou splátkou pri nominálnej úrokovej sadzbe j, počte konverzií m, s počtom splátok p za rok, výškou splátky R a dobou splatnosti n vypočítame zo vzťahu*

$$A_n = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

Príklad 9.3.4 *Koľko si budeme môcť mesačne polehotne vyberať počas nasledujúcich desiatich rokov z našetreného kapitálu 3 058,25217 eur pri 10% nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úrokovaní?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} A_{10} & = & 3\,058{,}25217 \\ j & = & 0{,}1 \\ p & = & 12 \\ m & = & 4 \\ n & = & 10 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$

Použijeme všeobecný vzťah pre výpočet súčasnej hodnoty renty:

$$\begin{aligned} A_n &= R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \\ R &= A_n \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}} \\ R &= 3\ 058{,}25217 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1}{1 - \left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{-4 \cdot 10}} \\ R &= 40{,}27596. \end{aligned}$$

♡

Vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou polehotnej renty vo všeobecnom prípade vyjadruje nasledujúca veta.

Veta 9.6 *Nech A_n je súčasná a S_n budúca hodnota polehotnej renty s konštantnou splátkou pri nominálnej úrokovej sadzbe j, počte konverzií m, s počtom splátok p za rok a dobou splatnosti n. Potom*

$$S_n = A_n \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

9.3.3 Polehotná renta s rovnomerne rastúcou splátkou

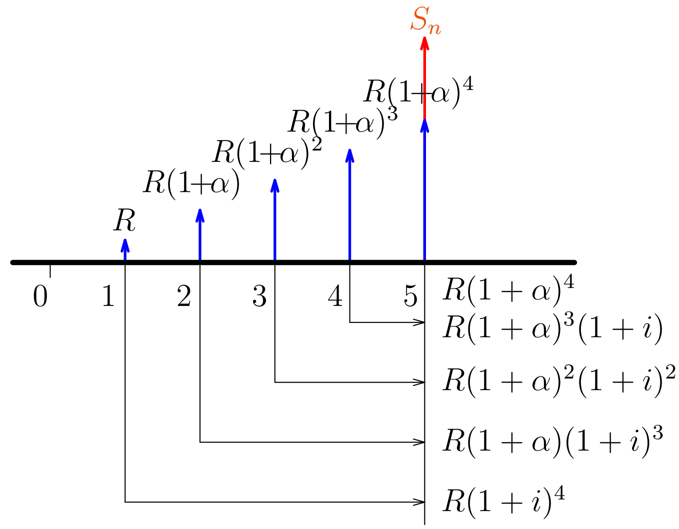
V tejto časti sa budeme zaoberať rentou, ktorá je nepodmienená, konečná, polehotná, s rovnomerne rastúcou splátkou, t. j. výška splátky sa zvyšuje pravidelne s ročnou sadzbou α. **Postupnosť ročných splátok** má potom tvar:

$$R,\ R \cdot (1 + \alpha),\ R \cdot (1 + \alpha)^2,\ ...,\ R \cdot (1 + \alpha)^{n-1}.$$

Obrázok (viď Obr. 36) znázorňuje hodnotu postupnosti splátok na konci doby splatnosti (kvôli jednoduchosti uvažujeme $n = 5$). Ich súčet dáva budúcu hodnotu ročnej polehotnej renty s rovnomerne rastúcou splátkou.
Budúca hodnota uvažovanej renty je

$$\begin{aligned} S_n &= R(1+\alpha)^{n-1} + R(1+\alpha)^{n-2}(1+i) + R(1+\alpha)^{n-3}(1+i)^2 + \ldots + \\ &\quad + R(1+\alpha)(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}, \end{aligned}$$

kde na pravej strane je súčet prvých n členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q = \dfrac{1+i}{1+\alpha}$. Opäť súčet nahradíme výrazom $a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ a môžeme formulovať nasledujúce tvrdenie.



Obr. 36: Budúca hodnota polehotnej renty s rovnomerne rastúcou splátkou

Veta 9.7 *Budúcu hodnotu ročnej polehotnej renty s rovnomerne rastúcou splátkou s ročnou sadzbou α pri ročnej úrokovej sadzbe i, s výškou prvej splátky R a dobou splatnosti n vypočítame zo vzťahu*

$$S_n = R\,(1+i)^n \left[1 - \left(\frac{1+\alpha}{1+i}\right)^n\right] \frac{1}{i-\alpha}.$$

Príklad 9.3.5 *Na konci každého roka počas 5 rokov budeme vkladať do banky sumu, ktorej hodnotu budeme každoročne zvyšovať o 10 %. Prvý vklad bude mať výšku 1 500 eur. Banka poskytuje 5% ročnú úrokovú mieru. Akú sumu našetríme?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{rcl} R &=& 1\,500 \\ n &=& 5 \\ i &=& 0{,}05 \\ \alpha &=& 0{,}1 \\ \hline S_5 &=& ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet budúcej hodnoty renty:

$$\begin{aligned} S_n &= R(1+i)^n \left[1 - \left(\frac{1+\alpha}{1+i}\right)^n\right] \frac{1}{i-\alpha} \\ S_5 &= 1\,500(1+0{,}05)^5 \left[1 - \left(\frac{1+0{,}1}{1+0{,}05}\right)^5\right] \frac{1}{0{,}05-0{,}1} = \\ &= 10\,026{,}85313. \end{aligned}$$

♡

Veta 9.3 formuluje vzťah medzi budúcou a súčasnou hodnotou renty s konštantnou splátkou. Ako dôsledok môžeme formulovať nasledujúcu vetu.

Veta 9.8 *Súčasnú hodnotu ročnej polehotnej renty s rovnomerne rastúcou splátkou s ročnou sadzbou α pri ročnej úrokovej sadzbe i, s výškou prvej splátky R a dobou splatnosti n vypočítame zo vzťahu*

$$A_n \quad = \quad R\left[1-\left(\frac{1+\alpha}{1+i}\right)^n\right]\frac{1}{i-\alpha}.$$

9.3.4 Predlehotná renta s konštantnou splátkou

Na rozdiel od predchádzajúcich typov rent sa budeme v nasledujúcich riadkoch zaoberať predlehotnou rentou, t. j. rentou pri ktorej sa splátka platí na začiatku periódy renty. Ďalej predpokladajme, že je nepodmienená, konečná a konštantná. Budeme používať nasledujúce skratky:

- $\ddot{A}_n$ súčasná hodnota renty,
- $\ddot{S}_n$ budúca hodnota renty,
- n doba splatnosti renty,
- R splátka (anuita),
- p počet splátok za rok,
- m počet úrokových periód (konverzií) za rok,
- i ročná úroková sadzba, ak $m = 1$,
- j nominálna úroková sadzba, ak $m > 1$.

Uvažujme najskôr prípad, keď je počet splátok za rok rovný 1 a počet konverzií v banke je tiež jedna. Splátky navýšené o úroky na konci doby splatnosti vytvárajú **budúcu hodnotu predlehotnej renty** $\ddot{S}_n$ a sú znázornené na obrázku (viď Obr. 37).
Budúcu hodnotu ročnej predlehotnej renty $\ddot{S}_n$ určíme pomocou budúcej hodnoty ročnej polehotnej renty S_n:

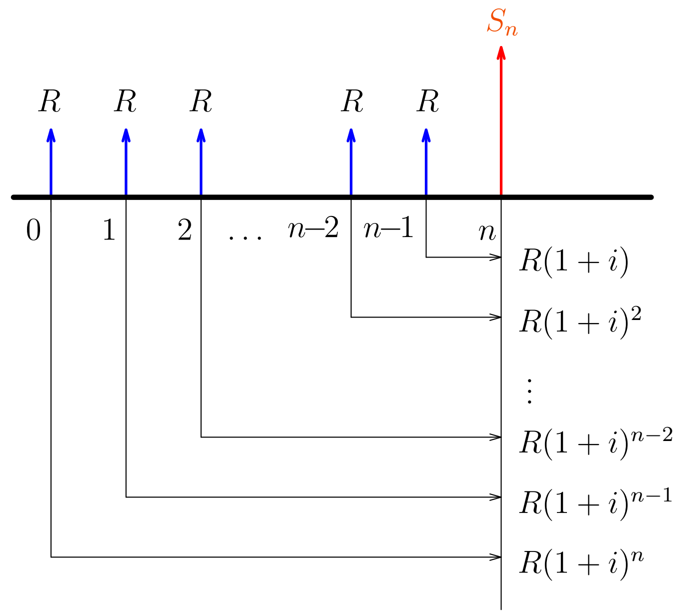
$$\begin{aligned}\ddot{S}_n &= R\cdot(1+i)+R\cdot(1+i)^2+\cdots+R\cdot(1+i)^{n-1}+R\cdot(1+i)^n = \\ &= (1+i)\cdot\underbrace{\left[R+R(1+i)+\cdots+R(1+i)^{n-2}+R(1+i)^{n-1}\right]}_{S_n} = \\ &= (1+i)\cdot S_n\end{aligned}$$

Veta 9.9 *Budúcu hodnotu ročnej predlehotnej renty s konštantnou splátkou pri ročnej úrokovej sadzbe i, s výškou splátky R a dobou splatnosti n vypočítame zo vzťahu*

$$\ddot{S}_n \quad = \quad R\cdot(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

Definícia 9.4 ***Predlehotným sporiteľom*** *nazývame výraz*

$$\ddot{s}_{n\backslash i} = (1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i},$$



Obr. 37: Budúca hodnota ročnej predlehotnej renty

ktorý udáva, koľkokrát sa zväčší pravidelne predlehotne platená renta so splátkou $R=1$ peňažnej jednotky za n períód pri úrokovej sadzbe i za jednu periódu.
Zápis*:*

$$\ddot{S}_n = R \cdot \underbrace{(1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}_{\ddot{s}_{n\backslash i}},$$
$$\ddot{S}_n = R \cdot \ddot{s}_{n\backslash i}.$$

Príklad 9.3.6 *Rozhodli sme sa, že na začiatku každého z nasledujúcich desiatich rokov uložíme do banky sumu 3 500 eur pri 5% ročnej úrokovej miere. Akú sumu budeme mať na konte po 10 rokoch?*

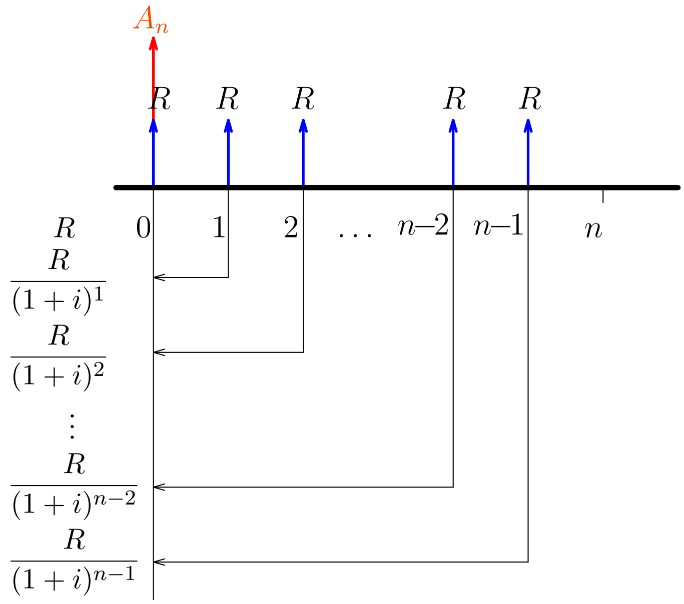
Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} R & = & 3\,500 \\ n & = & 10 \\ i & = & 0{,}05 \\ \hline \ddot{S}_{10} & = & ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet budúcej hodnoty predlehotnej renty:

$$\ddot{S}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$\ddot{S}_{10} = 3\,500 \cdot (1+0{,}05) \cdot \frac{(1+0{,}05)^{10} - 1}{0{,}05}$$
$$\ddot{S}_{10} = 46\,223{,}75507.$$

♡



Obr. 38: Súčasná hodnota ročnej predlehotnej renty

Súčet súčasných hodnôt všetkých splátok ku začiatku doby splatnosti je **súčasná hodnota predlehotnej renty** $\ddot{A}_n$ (viď Obr. 38).
Analogicky ako v prípade budúcej hodnoty určíme súčasnú hodnotu predlehotnej renty $\ddot{A}_n$ pomocou súčasnej hodnoty polehotnej renty A_n

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_n &= R + \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-2}} + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} = \\
&= (1+i) \cdot \underbrace{\left[\frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R}{(1+i)^n}\right]}_{A_n} = \\
&= (1+i) \cdot A_n
\end{aligned}$$

Veta 9.10 *Súčasnú hodnotu ročnej predlehotnej renty s konštantnou splátkou pri ročnej úrokovej sadzbe i, s výškou splátky R a dobou splatnosti n vypočítame zo vzťahu*

$$\ddot{A}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Definícia 9.5 ***Predlehotným zásobiteľom*** *nazývame výraz*

$$\ddot{a}_{n\backslash i} = (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

ktorý udáva, súčasnú hodnotu renty so splátkou $R=1$ peňažnej jednotky za n periód pri úrokovej sadzbe i za jednu periódu.

Zápis:

$$\begin{aligned}\ddot{A}_n &= R \cdot \underbrace{(1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}_{\ddot{a}_{n\backslash i}},\\ \ddot{A}_n &= R \cdot \ddot{a}_{n\backslash i}.\end{aligned}$$

Príklad 9.3.7 *Pôžičku na dom vo výške 40 000 eur treba splatiť 20 rovnakými splátkami pri 5% ročnej úrokovej miere. Nájdime výšku ročnej splátky, ak sa tieto platia*

a) *predlehotne,*

b) *polehotne.*

Riešenie.

a) Urobíme zápis:

$$\begin{array}{rcl}\ddot{A}_n &=& 40\ 000\\ n &=& 20\\ i &=& 0{,}05\\ \hline R &=& ?\end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet súčasnej hodnoty predlehotnej renty

$$\begin{aligned}\ddot{A}_n &= R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\\ R &= \frac{\ddot{A}_n}{1+i} \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\\ R &= \frac{40\ 000}{1+0{,}05} \cdot \frac{0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-20}}\\ R &= 3\ 056{,}86046.\end{aligned}$$

b) Urobíme zápis:

$$\begin{array}{rcl}A_n &=& 40\ 000\\ n &=& 20\\ i &=& 0{,}05\\ \hline R &=& ?\end{array}$$

V tomto prípade môžeme použiť pre výpočet vzťah medzi polehotnou a predlehotnou rentou $\ddot{A}_n = (1+i) \cdot A_n$, z ktorého vyplýva, že výška splátky $R^\star$ pri polehotnej rente je $(1+i)$ násobkom výšky splátky pri predlehotnej rente.

$$\begin{aligned}R^\star &= R \cdot (1+i)\\ R^\star &= 3\ 056{,}86046 \cdot (1+0{,}05)\\ R^\star &= 3\ 209{,}70349.\end{aligned}$$

♡

Keďže v porovnaní s polehotnou rentou sa pri predlehotnej rente každá splátka úročí o jednu periódu dlhšie, veta 9.9 ako aj veta 9.10 môžu byť zovšeobecnené pre prípad ľubovoľného počtu splátok a ľubovoľného počtu konverzií za rok.

Veta 9.11 *Uvažujme predlehotnú rentu s konštantnou splátkou pri nominálnej úrokovej sadzbe j, počte konverzií m, s počtom splátok p za rok, výškou splátky R a dobou splatnosti n.*

- *Budúcu hodnotu renty vypočítame zo vzťahu*

$$\ddot{S}_n \;=\; R\cdot\left(1+\tfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

- *Súčasnú hodnotu renty vypočítame zo vzťahu*

$$\ddot{A}_n \;=\; R\cdot\left(1+\tfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

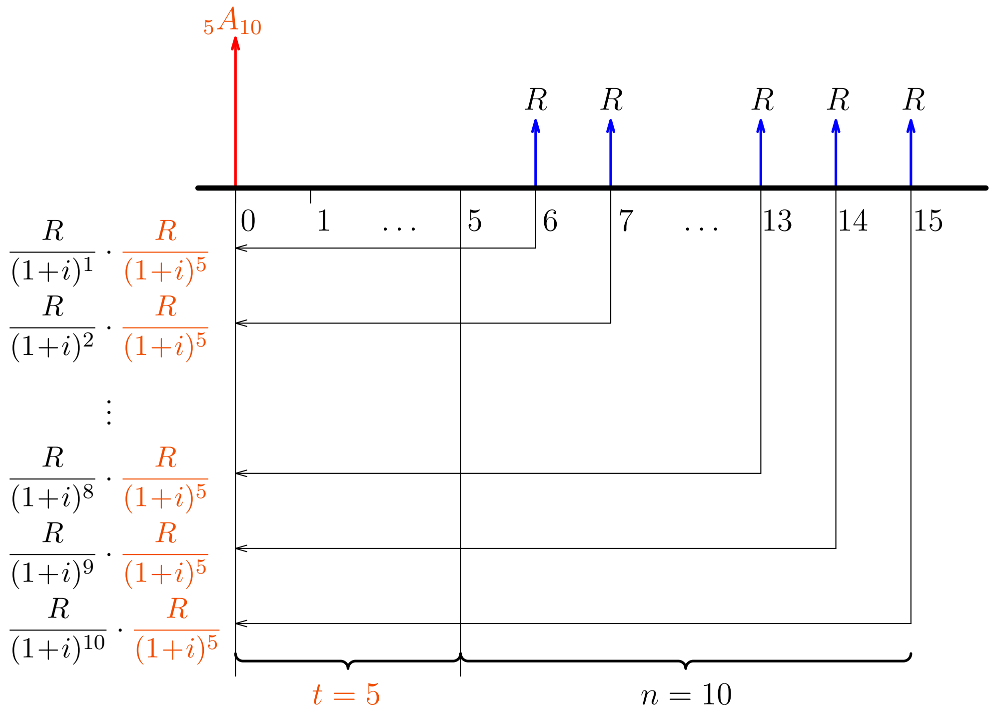
9.3.5 Odložená renta s konštantnou splátkou

Ak sa prvá splátka renty zaplatí po uplynutí určitej doby t (čakacia doba renty), ktorá je väčšia ako perióda renty, hovoríme o **odloženej rente**. Predpokladajme ďalej, že je nepodmienená, konečná a konštantná. Budeme používať nasledujúce skratky:

t	čakacia doba renty,
${}_tA_n$	súčasná hodnota renty,
${}_tS_n$	budúca hodnota renty,
n	doba splatnosti renty,
R	splátka (anuita),
p	počet splátok za rok,
m	počet úrokových periód (konverzií) za rok,
i	ročná úroková sadzba, ak $m=1$,
j	nominálna úroková sadzba, ak $m>1$.

Uvažujme najskôr prípad, keď je počet splátok za rok rovný 1 a počet konverzií v banke je tiež jedna. Súčasné hodnoty jednotlivých splátok dostaneme dodatočným odúročením za obdobie zodpovedajúce čakacej dobe renty. Ich súčet tvorí **súčasnú hodnotu odloženej renty** ${}_tA_n$. Obrázok (viď Obr. 39) ilustruje prípad, keď je čakacia doba $t=5$ a doba splatnosti $n=10$.

Pomocou súčasnej hodnoty polehotnej renty A_n určíme súčasnú hodnotu odloženej polehotnej renty ${}_tA_n$:



Obr. 39: Súčasná hodnota odloženej renty

$$
\begin{aligned}
{}_tA_n &= \frac{R}{1+i} \cdot \frac{1}{(1+i)^t} + \frac{R}{(1+i)^2} \cdot \frac{1}{(1+i)^t} + \cdots \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{1}{(1+i)^t} = \\
&= \frac{1}{(1+i)^t} \cdot \underbrace{\left[\frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}\right]}_{A_n} = (1+i)^{-t} \cdot A_n.
\end{aligned}
$$

Veta 9.12 *Súčasnú hodnotu odloženej polehotnej renty s konštantnou splátkou s čakacou dobou t pri ročnej úrokovej sadzbe i, s výškou ročnej splátky R a dobou splatnosti n vypočítame zo vzťahu*

$$
{}_tA_n = (1+i)^{-t} \cdot R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.
$$

Príklad 9.3.8 *Získali sme pôžičku vo výške 9 000 eur pri 4% ročnej úrokovej miere. Chceme ju splatiť desiatimi rovnakými splátkami vždy na konci roka. Prvá splátka pôžičky bude zaplatená na konci 6. roka. Vypočítajme veľkosť splátky.*

Riešenie. Urobíme zápis:

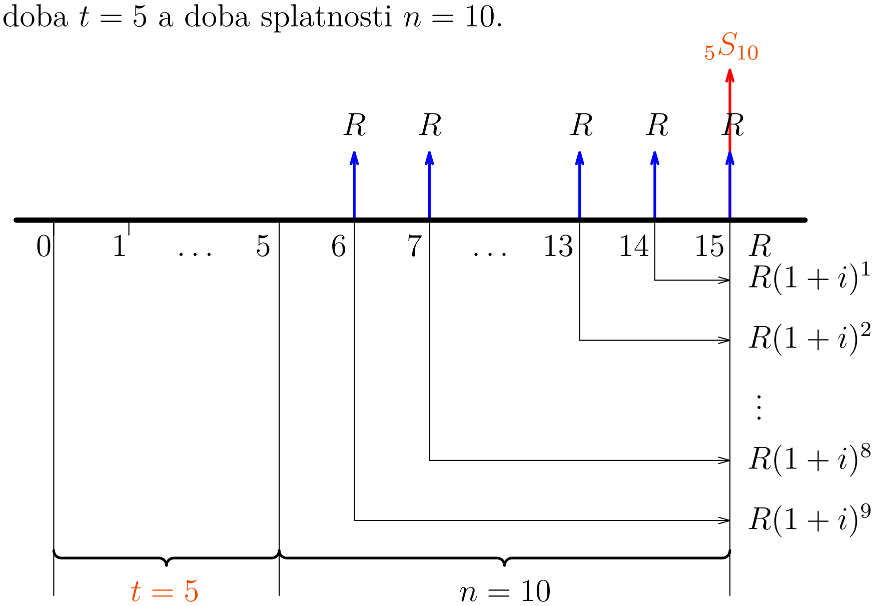
$$\begin{array}{lcl} {}_5A_{10} & = & 9\ 000 \\ i & = & 0{,}04 \\ n & = & 10 \\ t & = & 5 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet súčasnej hodnoty odloženej renty:

$$\begin{aligned} {}_tA_n &= (1+i)^{-t} \cdot R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\ R &= {}_tA_n \cdot (1+i)^t \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \\ R &= 9\ 000 \cdot (1+0{,}04)^5 \cdot \frac{0{,}04}{1-(1+0{,}04)^{-10}} \\ &= 1\ 350{,}02057. \end{aligned}$$

♡

Ako môžeme vidieť na obrázku (viď Obr. 40), odklad splácania nemá vplyv na budúcu hodnotu renty. Kvôli prehľadnosti uvádzame prípad, keď je čakacia doba $t = 5$ a doba splatnosti $n = 10$.



Obr. 40: Budúca hodnota odloženej renty

Veta 9.13 *Budúcu hodnotu odloženej polehotnej renty s konštantnou splátkou s čakacou dobou t pri ročnej úrokovej sadzbe i, s výškou ročnej splátky R a dobou splatnosti n vypočítame zo vzťahu*

$${}_tS_n = S_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Keďže úročiteľ zodpovedajúci jednému roku úročenia je vo všeobecnom prípade rovný hodnote $\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^m$, veta 9.13 ako aj veta 9.12 môžu byť ľahko zovšeobecnené pre prípad ľubovoľného počtu splátok a ľubovoľného počtu konverzií za rok.

Veta 9.14 *Uvažujme odloženú polehotnú rentu s konštantnou splátkou s čakacou dobou t pri nominálnej úrokovej sadzbe j, počte konverzií m, s počtom splátok p za rok, výškou splátky R a dobou splatnosti n.*

- *Budúcu hodnotu renty vypočítame zo vzťahu*

$$_tS_n = S_n = R\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

- *Súčasnú hodnotu renty vypočítame zo vzťahu*

$$_tA_n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot t}\cdot A_n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot t}\cdot R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

Príklad 9.3.9 *Mladomanželia získali pôžičku na byt vo výške 30 000 eur pri 3,5% ročnej úrokovej miere. Dlžobu chcú splatiť 28 štvrťročnými splátkami. Vypočítajme veľkosť splátky, ak sa má prvá splátka realizovať o 3 a 1/4 roka.*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} {}_3A_7 & = & 30\,000 \\ j & = & 0{,}035 \\ n & = & 7 \\ t & = & 3 \\ p & = & 4 \\ m & = & 1 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$

Vzhľadom na to, že uvažujeme polehotnú rentu so štvrťročnými splátkami, je odklad splácania $t = 3$ a 28 splátok predstavuje dobu splácania sedem rokov. Zo vzťahu pre súčasnú hodnotu odloženej renty vyjadríme splátku a vypočítame jej výšku:

$$
\begin{aligned}
{}_tA_n &= \left(1+\tfrac{j}{m}\right)^{-m\cdot t} \cdot R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \\
R &= {}_tA_n \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot t} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}} \\
R &= 30\ 000 \cdot (1+0{,}035)^3 \cdot \frac{(1+0{,}035)^{\frac{1}{4}}-1}{1-(1+0{,}035)^{-7}} \\
&= 1\ 342{,}442.
\end{aligned}
$$

♡

9.3.6 Prerušená renta s konštantnou splátkou

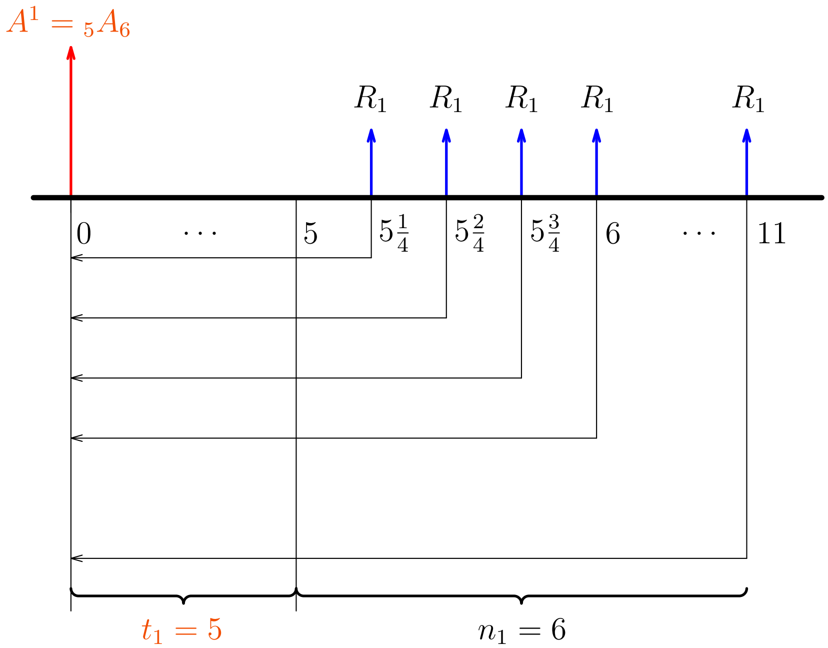
V prípade, ak je medzi niektorými splátkami renty čakacia doba dlhšia ako je perióda renty, hovoríme o **prerušenej rente**. Ďalej budeme uvažovať, že je nepodmienená, konečná a konštantná. V princípe sa v prípade prerušenej renty jedná o súčet odložených rent. Budeme používať označenie, ktoré sme zaviedli v predchádzajúcich častiach.

Súčasnú hodnotu prerušenej renty si ozrejmíme na nasledujúcom príklade.

Príklad 9.3.10 *Peter sa dohodol s bankou, že pôžičku na štúdium začne splácať 5 a 1/4 roka po získaní pôžičky štvrťročnými splátkami vo výške 100 eur. 11 rokov po získaní pôžičky nebol schopný v splátkach pokračovať. Obnovil ich 12 rokov po získaní pôžičky polročnými splátkami na konci polroka vo výške 200 eur a štúdium splatil na konci 16. roka. Banka má mesačné úrokovanie s nominálnou úrokovou mierou 3 %. Vypočítajme výšku pôžičky a jej hodnotu na konci 16. roku.*

Riešenie. Jedná sa v podstate o dve odložené renty, ktorých súčet súčasných hodnôt dáva súčasnú hodnotu celej renty a súčet budúcich hodnôt budúcu hodnotu renty.
Splátky vo výške 100 eur tvoria prvú rentu, ktorej splácanie bolo odložené 5 rokov a trvalo 6 rokov. Jej súčasnú hodnotu označíme A^1 (viď Obr. 41).
Urobíme zápis:

$$
\begin{array}{rcl}
R_1 &=& 100 \\
p_1 &=& 4 \\
t_1 &=& 5 \\
n_1 &=& 6 \\
j &=& 0{,}03 \\
m &=& 12 \\
\hline
{}_5A_6 &=& ?
\end{array}
$$



Obr. 41: Súčasná hodnota prerušenej renty - 1. časť

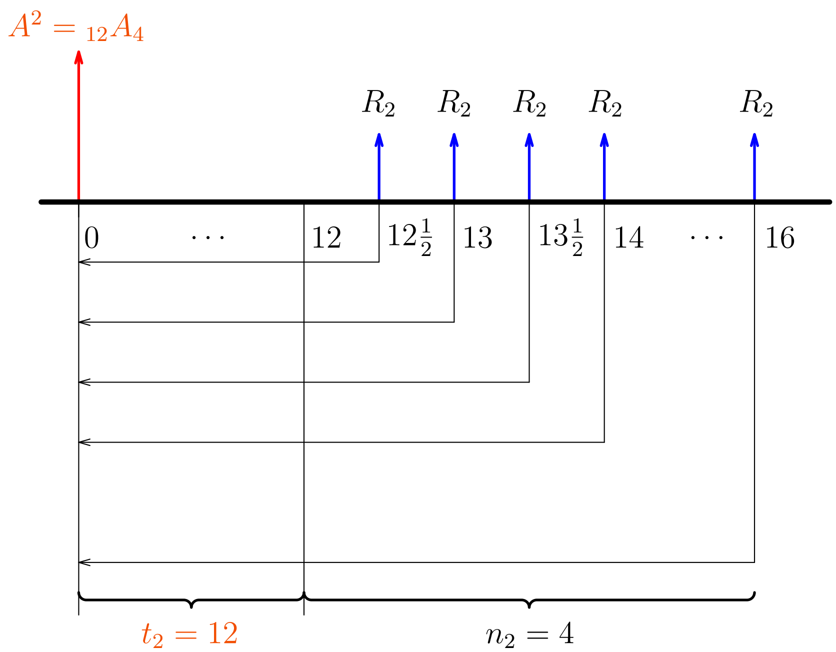
Zo vzťahu pre súčasnú hodnotu odloženej renty vypočítame:

$$
\begin{aligned}
{}_tA_n &= \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot t} \cdot R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \\
{}_5A_6 &= \left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{-12\cdot 5} \cdot 100 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{-12\cdot 6}}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1} = A^1 \\
A^1 &= 1\ 883{,}94280.
\end{aligned}
$$

Splátky vo výške 200 eur tvoria druhú rentu, ktorej splácanie bolo odložené 12 rokov a trvalo 4 roky. Jej súčasnú hodnotu označíme A^2 (viď Obr. 42).

Urobíme zápis:

$$
\begin{array}{lcl}
R_2 & = & 200 \\
p_2 & = & 2 \\
t_2 & = & 12 \\
n_2 & = & 4 \\
j & = & 0{,}03 \\
m & = & 12 \\
\hline
{}_{12}A_4 & = & ?
\end{array}
$$



Obr. 42: Súčasná hodnota prerušenej renty - 2. časť

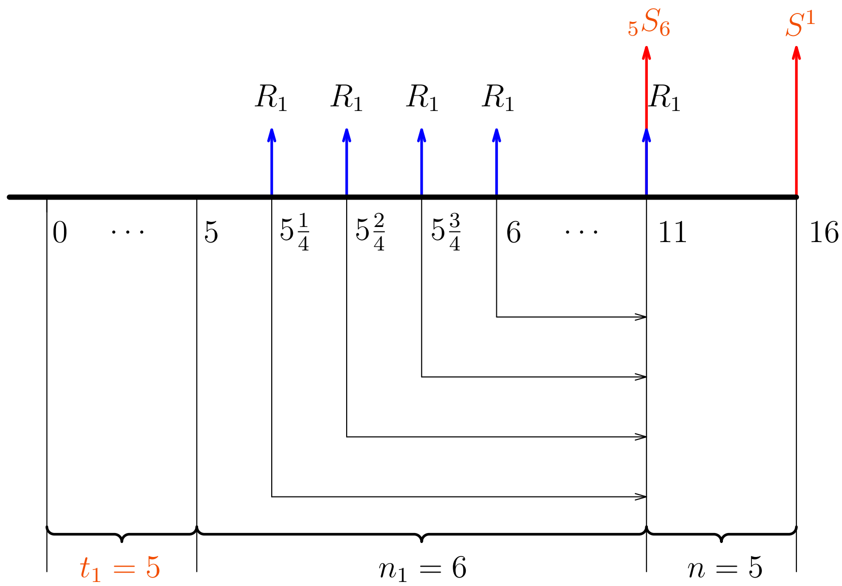
Zo vzťahu pre súčasnú hodnotu odloženej renty vypočítame:

$$
\begin{aligned}
{}_tA_n &= \left(1+\tfrac{j}{m}\right)^{-m\cdot t}\cdot R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}\\
{}_{12}A_4 &= \left(1+\tfrac{0{,}03}{12}\right)^{-12\cdot 12}\cdot 200\cdot\frac{1-\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{-12\cdot 4}}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{\frac{12}{2}}-1}=A^2\\
A^2 &= 1\ 044{,}59175.
\end{aligned}
$$

Súčet vypočítaných hodnôt dáva súčasnú hodnotu celej prerušenej renty:

$$A = A^1 + A^2 = 2\ 928{,}53455.$$

Analogicky ako pri súčasnej hodnote musíme aj pri budúcej hodnote uvažovať dve odložené renty. Pri rente so splátkou 100 eur po vypočítaní budúcej hodnoty k dobe splatnosti tejto renty, budeme mať jej hodnotu na konci 12. roka. Doba splatnosti celej renty je ale 16 rokov a preto túto sumu musíme úročiť ďalších 5 rokov. Jej budúcu hodnotu označíme S^1 (viď Obr. 43).



Obr. 43: Budúca hodnota prerušenej renty - 1. časť

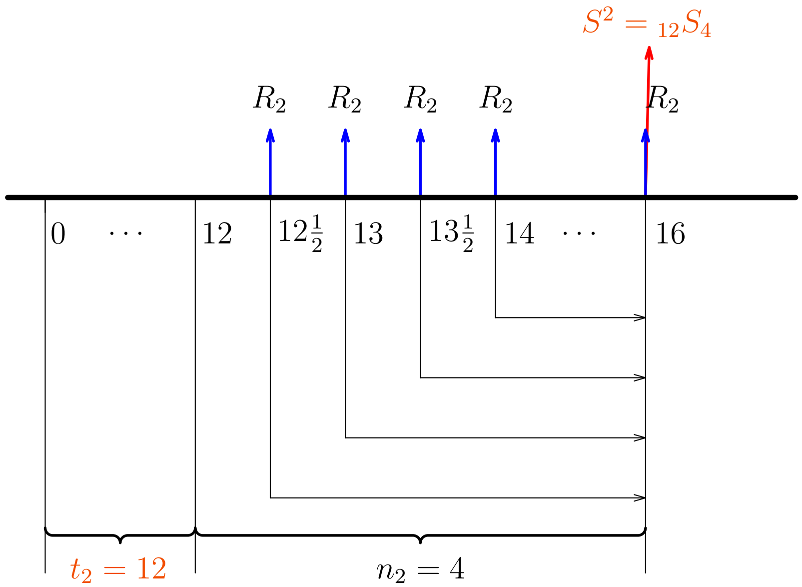
Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} R_1 & = & 100 \\ p_1 & = & 4 \\ t_1 & = & 5 \\ n_1 & = & 6 \\ j & = & 0{,}03 \\ m & = & 12 \\ \hline {}_5S_6 & = & ? \end{array}$$

Zo vzťahu pre budúcu hodnotu odloženej renty vypočítame:

$$\begin{aligned} {}_tS_n &= S_n = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \\ {}_5S_6 &= S_6 = 100 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{12 \cdot 6} - 1}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} \\ S^1 &= \left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{12 \cdot 5} \cdot {}_5S_6 \\ S^1 &= 3\ 042{,}76867. \end{aligned}$$

Pri rente so splátkou 200 eur je doba splatnosti rovnaká ako pre celú rentu, preto vypočítanú budúcu hodnotu S^2 nie je potrebné ďalej upravovať (viď Obr. 44).



Obr. 44: Budúca hodnota prerušenej renty - 2. časť

Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} R_2 & = & 200 \\ p_2 & = & 2 \\ t_2 & = & 12 \\ n_2 & = & 4 \\ j & = & 0{,}03 \\ m & = & 12 \\ \hline {}_{12}S_4 & = & ? \end{array}$$

Zo vzťahu pre budúcu hodnotu odloženej renty vypočítame:

$$\begin{aligned} {}_tS_n &= S_n = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \\ {}_{12}S_4 &= S_4 = 200 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}03}{12}\right)^{12 \cdot 4} - 1}{\left(1 + \frac{0{,}03}{12}\right)^{\frac{12}{2}} - 1} = S^2 \\ S^2 &= 1\ 687{,}12719. \end{aligned}$$

Súčet vypočítaných hodnôt dáva budúcu hodnotu celej prerušenej renty:

$$S = S^1 + S^2 = 4\ 729{,}85169.$$

♡

9.3.7 Večná renta

Večnou rentou nazývame takú rentu, pri ktorej je počet splátok neohraničený ($n \to \infty$). Uvažujme ďalej, že je nepodmienená, polehotná a konštantná.

Súčasnú hodnotu večnej renty označíme A_∞, budúcu hodnotu S_∞. Ostatné označenie použijeme ako v predchádzajúcich častiach.

Súčasnú hodnotu nekonečnej renty vypočítame ako limitu pre $n \to \infty$ zo vzťahu pre súčasnú hodnotu konečnej polehotnej renty. Pre prípad, keď je počet splátok $p = 1$ a počet konverzií $m = 1$ za rok dostávame

$$\begin{aligned} A_\infty &= \lim_{n\to\infty} A_n = \\ &= \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}. \end{aligned}$$

Veta 9.15 *Súčasnú hodnotu večnej polehotnej renty s konštantnou splátkou pri ročnej úrokovej sadzbe i a s ročnou splátkou R vypočítame zo vzťahu*

$$A_\infty = \frac{R}{i}.$$

Na základe analogického postupu dostávame vo všeobecnom prípade nasledujúce tvrdenie

Veta 9.16 *Súčasnú hodnotu večnej polehotnej renty s konštantnou splátkou pri nominálnej úrokovej sadzbe j, počte konverzií m, s počtom splátok p za rok a výškou splátky R vypočítame zo vzťahu*

$$A_\infty = \frac{R}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}.$$

Príklad 9.3.11 *Aký zabezpečovací fond nám a našim dedičom zaistí polročný polehotný večný dôchodok vo výške 500 eur pri 5% nominálnej úrokovej miere, ak sa úroky pripisujú štvrťročne?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} p &=& 2 \\ j &=& 0{,}05 \\ n &\to& \infty \\ R &=& 500 \\ m &=& 4 \\ \hline A_\infty &=& ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet súčasnej hodnoty renty:

$$A_\infty = \frac{R}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{500}{\left(1+\frac{0{,}05}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1} = 19\,875{,}7764.$$

♡

Budúcu hodnotu nekonečnej renty vypočítame ako limitu pre $n \to \infty$ zo vzťahu pre budúcu hodnotu konečnej polehotnej renty. Pre prípad, keď je počet splátok $p = 1$ a počet konverzií $m = 1$ za rok a za predpokladu, že $i > 0$ a $R > 0$, dostávame

$$\begin{aligned} S_\infty &= \lim_{n\to\infty} S_n = \\ &= \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \infty. \end{aligned}$$

Rovnaký výsledok dostaneme aj vo všeobecnom prípade. Platí teda nasledujúce tvrdenie.

Veta 9.17 *Budúca hodnota večnej polehotnej renty s konštantnou splátkou je*

$$S_\infty = \infty.$$

9.3.8 Renta so spojitým úrokovaním

Rentou so spojitým úrokovaním nazývame takú rentu, pri ktorej je počet konverzií neohraničený ($m \to \infty$). Uvažujme ďalej, že je nepodmienená, polehotná a konštantná.

Predpokladajme najskôr, že sa jedná o konečnú rentu. Jej súčasnú hodnotu vypočítame ako limitu pre $m \to \infty$ zo vzťahu pre súčasnú hodnotu konečnej polehotnej renty:

$$A_n = \lim_{m\to\infty} R \cdot \frac{1 - \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = R \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-j\cdot n}}{\mathrm{e}^{\frac{j}{p}} - 1}.$$

Veta 9.18 *Súčasná hodnota konečnej polehotnej renty so spojitým úrokovaním pri nominálnej úrokovej sadzbe j, s počtom splátok p za rok a výškou splátky R je*

$$A_n = R \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-j\cdot n}}{\mathrm{e}^{\frac{j}{p}} - 1}.$$

Budúcu hodnotu renty vypočítame ako limitu pre $m \to \infty$ zo vzťahu pre budúcu hodnotu konečnej polehotnej renty:

$$S_n = \lim_{m\to\infty} R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = R \cdot \frac{\mathrm{e}^{j\cdot n} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{j}{p}} - 1}.$$

Veta 9.19 *Budúca hodnota konečnej polehotnej renty so spojitým úrokovaním pri nominálnej úrokovej sadzbe j, s počtom splátok p za rok a výškou splátky R je*

$$S_n = R \cdot \frac{\mathrm{e}^{j \cdot n} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{j}{p}} - 1}.$$

Príklad 9.3.12 *Aký veľký musí byť zabezpečovací fond v banke, ak je uložený pri spojitom úrokovaní pri nominálnej úrokovej miere 4 % a má poskytovať pravidelné polročné splátky polehotne v sume 200 eur po dobu 10 rokov?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{rcl} R & = & 200 \\ n & = & 10 \\ j & = & 0{,}04 \\ p & = & 2 \\ m & \to & \infty \\ \hline A_n & = & ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet súčasnej hodnoty konečnej renty so spojitým úrokovaním:

$$\begin{aligned} A_n &= R \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-j \cdot n}}{\mathrm{e}^{\frac{j}{p}} - 1} \\ A_{10} &= 200 \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-0{,}04 \cdot 10}}{\mathrm{e}^{\frac{0{,}04}{2}} - 1} = 3\ 263{,}94144. \end{aligned}$$

♡

Uvažujme teraz rentu so spojitým úrokovaním, ktorá je navyše nekonečná, t. j. $n \to \infty$. Jej súčasnú hodnotu vypočítame ako limitu pre $n \to \infty$ zo vzťahu pre súčasnú hodnotu konečnej polehotnej renty so spojitým úrokovaním:

$$A_\infty = \lim_{n \to \infty} R \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-j \cdot n}}{\mathrm{e}^{\frac{j}{p}} - 1} = \frac{R}{\mathrm{e}^{\frac{j}{p}} - 1}.$$

Veta 9.20 *Súčasná hodnota nekonečnej polehotnej renty so spojitým úrokovaním pri nominálnej úrokovej sadzbe j, s počtom splátok p za rok a výškou splátky R je*

$$A_\infty = \frac{R}{\mathrm{e}^{\frac{j}{p}} - 1}.$$

Budúcu hodnotu renty vypočítame ako limitu pre $n \to \infty$ zo vzťahu pre budúcu hodnotu konečnej polehotnej renty. Za predpokladu, že nominálna úroková sadzba je $j > 0$ a výška splátky je $R > 0$, platí:

$$S_\infty = \lim_{n \to \infty} R \cdot \frac{\mathrm{e}^{j \cdot n} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{j}{p}} - 1} = \infty.$$

Veta 9.21 *Budúca hodnota nekonečnej polehotnej renty so spojitým úrokovaním je*

$$S_\infty = \infty.$$

Príklad 9.3.13 *Aký veľký musí byť zabezpečovací fond v banke, ak je uložený pri spojitom úrokovaní pri nominálnej úrokovej miere 4 % a má poskytovať pravidelné polročné splátky polehotne v sume 200 eur po dobu nekonečne dlhú?*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{ccl} R & = & 200 \\ n & \to & \infty \\ j & = & 0{,}04 \\ p & = & 2 \\ m & \to & \infty \\ \hline A_\infty & = & ? \end{array}$$

Použijeme vzťah pre výpočet súčasnej hodnoty nekonečnej renty so spojitým úrokovaním:

$$A_\infty = \frac{R}{\mathrm{e}^{\frac{j}{p}} - 1} = \frac{200}{\mathrm{e}^{\frac{0{,}04}{2}} - 1} = 9\ 900{,}33333.$$

♡

9.4 Umorovanie

9.4.1 Pojem umorovania

Definícia 9.6 ***Umorovaním*** *nazývame proces splácania úrokovej pôžičky, t. j. pôžičky, pri ktorej spláca dlžník veriteľovi okrem požičanej sumy aj úroky z tejto sumy.*

Klasifikácia pôžičiek podľa spôsobu umorovania:

1. **pôžičky bez záväzného splácania**
   - dlžník spláca len dohodnuté úroky v určených termínoch a kedykoľvek môže pôžičku vyplatiť,

2. **pôžičky s povinným jednorazovým splatením**
   - dlžník pravidelne spláca úroky a pôžičku vyplatí naraz jednou splátkou v dohodnutom termíne,

3. **pôžičky s postupným splácaním v niekoľkých termínoch**
   - dlžník pravidelne spláca úroky z nesplateného základu pôžičky a časť dosiaľ nesplateného základu (úmor).

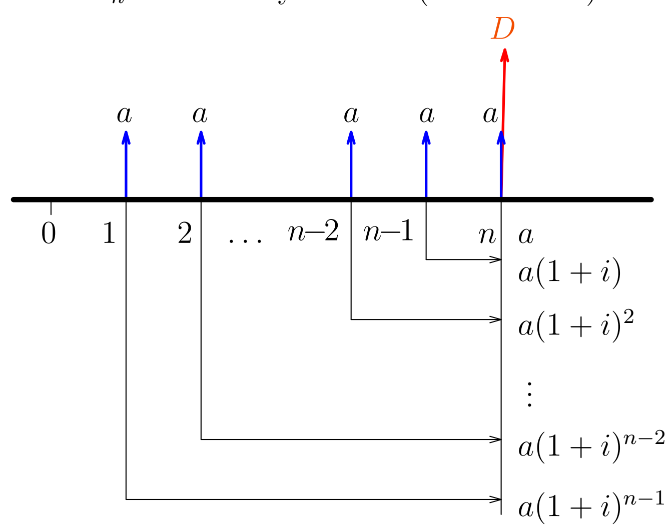
Vzhľadom na triviálnosť prvého typu pôžičky sa v ďalšom texte budeme venovať len posledným dvom menovaným typom.

9.4.2 Pôžičky s povinným jednorazovým splatením

Okrem pravidelného splácania úrokov je zvykom pri tomto druhu pôžičky vytvoriť tzv. **zabezpečovací fond**, do ktorého idú tiež pravidelné splátky. Účelom tohto fondu je, aby sa našetrila suma, ktorou sa dlh v dohodnutom termíne splatí jednou splátkou. Budeme používať nasledujúce označenie

D	veľkosť pôžičky/dlhu,
n	počet rokov splatnosti pôžičky,
g	nominálna úroková sadzba pôžičky,
p	počet splátok za rok,
m	počet úrokových periód (konverzií) za rok,
i	ročná úroková sadzba, ak $m = 1$,
j	nominálna úroková sadzba, ak $m > 1$,
u_t	úrok na konci t-tej periódy,
a	splátka do fondu,
A_t	splátka (anuita) splatná na konci t-tej periódy.

Splátky do zabezpečovacieho fondu tvoria konečnú polehotnú rentu, ktorej budúca hodnota S_n sa rovná výške dlhu (viď Obr. 45).



Obr. 45: Zabezpečovací fond

Predpokladajme, že výška splátky a do fondu je konštantná. Na základe rovnosti $S_n = D$, môžeme teda určiť jej hodnotu. Uvažujme najskôr prípad, keď počet splátok aj konverzií je jedna. Dostávame

$$D = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \Longrightarrow \quad a \;=\; D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}.$$

Ak uvažujeme, že dlh je úročený raz do roka, tak výška úroku je tiež konštantná ($u_t = u$) rovnako ako aj výsledná hodnota anuity ($A_t = A$). Platí teda $A = a + u$.

Veta 9.22 *Predpokladajme pôžičku vo výške D s povinným jednorazovým splatením. Predpokladajme, že dlh je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g, ročné splátky do zabezpečovacieho fondu sú konštantné a úročenie v banke je ročné s ročnou úrokovou sadzbou i. Pre výšku splátky do zabezpečovacieho fondu a, výšku úroku u a výšku celkovej anuity A platí*

$$a = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}, \tag{3}$$

$$u = D \cdot g, \tag{4}$$

$$A = D \cdot g + D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}. \tag{5}$$

Na základe uvedených hodnôt môžeme potom zostaviť tzv. **umorovací plán**, v ktorom uvedieme prehľad platieb za jednotlivé periódy.

Uvádzame zovšeobecnenie predchádzajúcej vety, ak je počet splátok do fondu aj počet úrokových periód ľubovoľný.

Veta 9.23 *Predpokladajme pôžičku vo výške D s povinným jednorazovým splatením. Predpokladajme, že dlh je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g, splátky do zabezpečovacieho fondu sú konštantné a ich počet v roku je p, počet konverzií v banke je m s nominálnou úrokovou sadzbou j. Pre výšku splátky do zabezpečovacieho fondu a, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A_t platí*

$$a = D \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}, \tag{6}$$

$$u_t = \begin{cases} D \cdot g & \textit{koncoročná splátka} \\ 0 & \textit{inak} \end{cases} \tag{7}$$

$$A_t = u_t + D \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}. \tag{8}$$

Príklad 9.4.1 *Podnikateľ si zobral pôžičku na modernizáciu zariadenia dielne v hodnote 10 000 eur. Pôžička bola vydaná pri 5% ročnej úrokovej miere a musí byť vrátená jednorazovo o 4 roky. Podnikateľ chce na tento účel vytvoriť v banke zabezpečovací fond, pričom banka poskytuje 6% nominálnu úrokovú mieru pri štvrťročnom úrokovaní. Predpokladajme, že fond sa bude realizovať polročnými splátkami. Zostavme umorovací plán.*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{rcl} D &=& 10\,000 \\ g &=& 0{,}05 \\ n &=& 4 \\ j &=& 0{,}06 \\ m &=& 4 \\ p &=& 2 \\ \hline a &=& ? \end{array}$$

Použijeme vzťah (6) pre výpočet výšky splátky vo všeobecnom prípade

$$\begin{aligned} a &= D \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n} - 1} = 10\,000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1}{\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{4\cdot 4} - 1} = \\ &= 1\,123{,}666. \end{aligned}$$

Keďže splátky do zabezpečovacieho fondu sa budú realizovať dvakrát do roka, bude sa výška úroku líšiť (viď (7)). Pri polročných splátkach to bude $u_1 = u_3 = u_5 = u_7 = 0$, pri koncoročných splátkach $u_2 = u_4 = u_6 = u_8 = D \cdot g = 500$. Umorovací plán zapíšeme do tabuľky, ktorej posledný stĺpec reprezentuje hodnotu splátky za danú periódu navýšenú o úroky po uplynutí doby splatnosti. Súčet tohto stĺpca sa rovná budúcej hodnote renty a teda výške dlhu, ktorý máme splatiť.

perióda t	úroky z pôžičky u_t	splátka do fondu a	anuita $A_t = u_t + a$	zúročená splátka do fondu $a \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m(n-\frac{t}{p})}$
1	0	1 123,666	1 123,666	1 384,082
2	500	1 123,666	1 623,666	1 343,475
3	0	1 123,666	1 123,666	1 304,060
4	500	1 123,666	1 623,666	1 265,801
5	0	1 123,666	1 123,666	1 228,665
6	500	1 123,666	1 623,666	1 192,618
7	0	1 123,666	1 123,666	1 157,629
8	500	1 123,666	1 623,666	1 123,666
$\sum$	2 000	8 989,328	10 989,328	9 999,996

♡

Suma našetrená v zabezpečovacom fonde nebola úplne rovnaká ako výška dlhu. Malý rozdiel vznikol pri zaokrúhľovaní.

9.4.3 Pôžičky s postupným splácaním

Okrem pravidelného splácania úrokov sa pri tomto druhu pôžičky postupne spláca aj dlh v pravidelných splátkach. Celková splátka **anuita** bude teda pozostávať z **úmoru** (časť dosiaľ nezaplateného dlhu) a **úroku** z dosiaľ nezaplateného dlhu. Ak použijeme nasledujúce označenie:

D veľkosť pôžičky,
n počet rokov splatnosti pôžičky,
p počet splátok za rok,
g nominálna úroková sadzba pôžičky,
m počet úrokových periód (konverzií) za rok,
u_t úrok na konci t-tej periódy,
Q_t úmor na konci t-tej periódy,
A_t splátka (anuita) splatná na konci t-tej periódy,
D_t dlh na konci t-tej periódy po zaplatení úmoru Q_t.

tak

$$A_t = Q_t + u_t. \tag{9}$$

Výška úroku na konci t-tej periódy je počítaná zo zvyšku dlhu na začiatku t-tej periódy, čo je vlastne výška dlhu na konci predchádzajúcej periódy, teda platí

$$u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{p}. \tag{10}$$

Zvyšok dlhu na konci t-tej periódy po zaplatení úmoru je potom

$$D_t = D_{t-1} - Q_t, \tag{11}$$

pričom $D_0 = D$.

Pravidlá umorovania

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať pôžičku vo výške D, ktorá je úročená ročnou úrokovou sadzbou g raz do roka. Predpokladajme ďalej, že splátky sú ročné po dobu n rokov. Ak postupne zostavíme rovnicu ekvivalencie k rôznemu referenčnému dátumu t, tak dostaneme pravidlá umorovania, ktoré platia pre pôžičky s postupným splácaním.

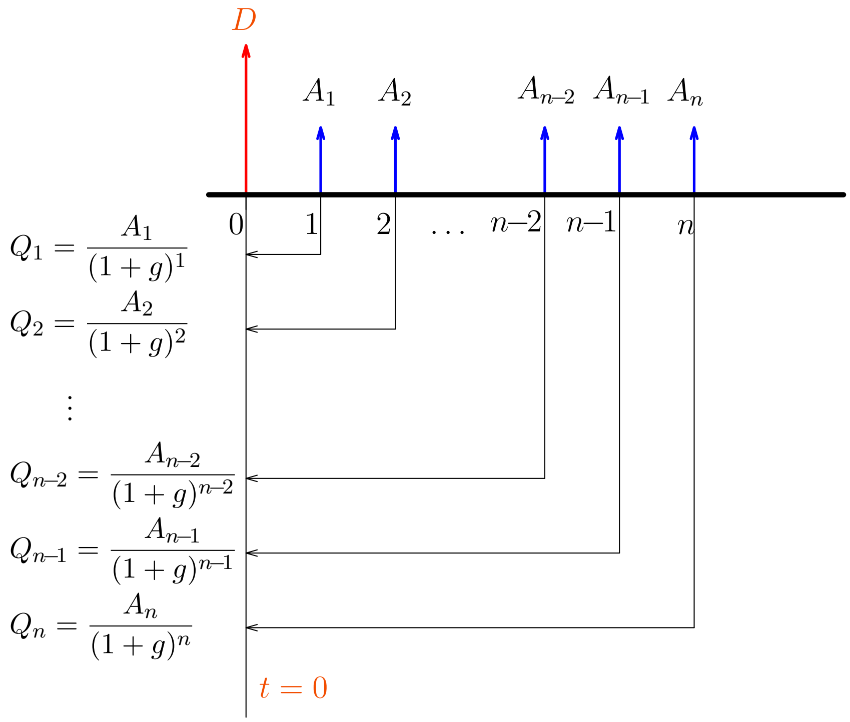
Postupnosť splátok tvorí polehotnú rentu. Jej súčasná hodnota pozostáva z odúročených splátok, t. j. úmorov, a rovná sa výške dlhu (viď Obr. 46). Inými slovami povedané má rovnica ekvivalencie pre $t = 0$ tvar

$$D = \frac{A_1}{1+g} + \frac{A_2}{(1+g)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(1+g)^p} + \cdots + \frac{A_n}{(1+g)^n}$$

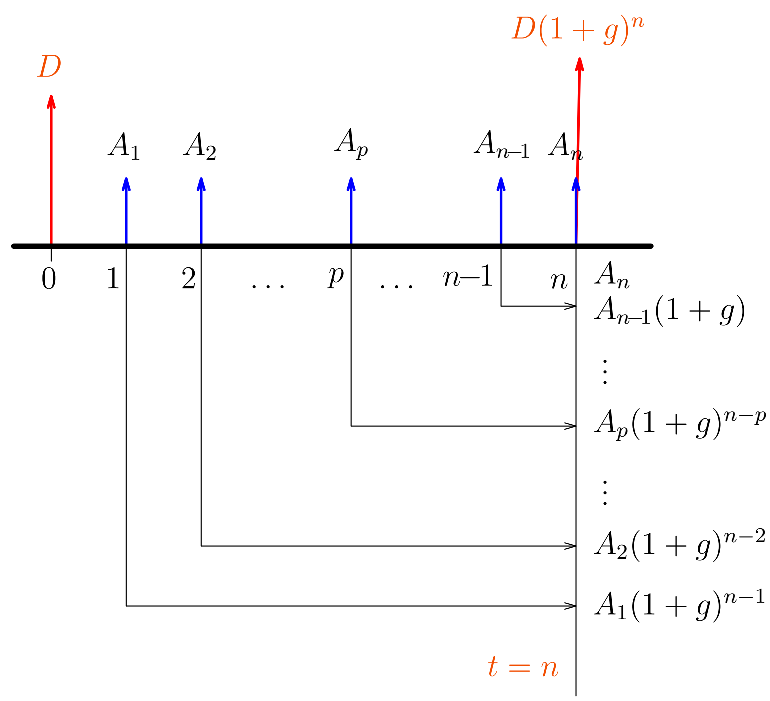
a môžeme sformulovať prvé pravidlo.

Veta 9.24 (Pravidlo 1) *Veľkosť dlhu pôžičky s postupným umorovaním je rovná súčtu súčasných hodnôt všetkých anuít.*

Budúca hodnota tejto renty pozostáva zo zúročených splátok ku dňu po uplynutí doby splatnosti a rovná sa budúcej hodnote dlhu na konci n - tej periódy (viď Obr. 47).



Obr. 46: 1. pravidlo umorovania



Obr. 47: 2. pravidlo umorovania

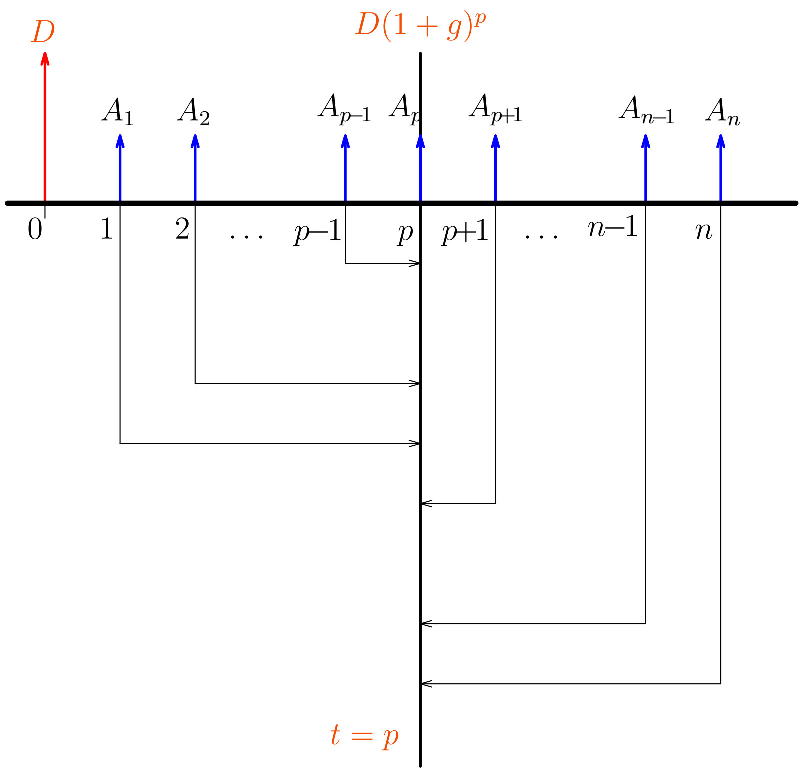
Inými slovami povedané má rovnica ekvivalencie pre $t = n$ tvar

$$D \cdot (1+g)^n = A_1 \cdot (1+g)^{n-1} + A_2 \cdot (1+g)^{n-2} + \cdots + A_p \cdot (1+g)^{n-p} + \cdots + A_n$$

a môžeme sformulovať druhé pravidlo.

Veta 9.25 (Pravidlo 2) *Veľkosť budúcej hodnoty dlhu pôžičky s postupným umorovaním na konci n-tej periódy je rovná súčtu budúcich hodnôt všetkých anuít na konci n-tej periódy.*

Hodnota tejto renty na konci p-tej periódy pozostáva zo zúročených splátok, ktoré sa už uskutočnili a odúročených splátok, ktoré budú ešte realizované, a rovná sa hodnote pôvodného dlhu na konci p-tej periódy (viď Obr. 48).



Obr. 48: 3. pravidlo umorovania

Inými slovami povedané má rovnica ekvivalencie pre $t = p$ tvar

$$\begin{aligned} D(1+g)^p \;=\; & A_1(1+g)^{p-1} + A_2(1+g)^{p-2} + \cdots A_{p-1}(1+g) + A_p + \\ & + A_{p+1}(1+g)^{-1} + A_{p+2}(1+g)^{-2} + \cdots + \\ & + A_{n-1}(1+g)^{p-n+1} + A_n(1+g)^{p-n} \end{aligned}$$

a zostatok dlhu po zaplatení p-tej splátky je

$$D_p = A_{p+1} \cdot (1+g)^{-1} + A_{p+2} \cdot (1+g)^{-2} + \cdots + A_n \cdot (1+g)^{p-n}.$$

Môžeme teraz sformulovať tretie pravidlo.

Veta 9.26 (Pravidlo 3) *Zostatok dlhu D_p pôžičky s postupným umorovaním po zaplatení p-tej anuity sa rovná súčtu súčasných hodnôt zostávajúcich $n-p$ anuít A_{p+1}, A_{p+2}, ..., A_n k času $t = p$.*

Rovnicu ekvivalencie pre $t = p$ môžeme prepísať na tvar

$$D(1+g)^p \;=\; A_1(1+g)^{p-1} + A_2(1+g)^{p-2} + \cdots A_{p-1}(1+g) + A_p + D_p$$

a pre zostatok dlhu po zaplatení p-tej splátky potom platí nasledujúci vzťah

$$D_p = D(1+g)^p - \Big[A_1(1+g)^{p-1} + A_2(1+g)^{p-2} + \cdots + A_{p-1}(1+g) + A_p\Big].$$

Z predchádzajúcich úvah vyplýva štvrté pravidlo.

Veta 9.27 (Pravidlo 4) *Zostatok dlhu D_p pôžičky s postupným umorovaním po zaplatení p-tej anuity sa rovná rozdielu medzi budúcou hodnotou dlhu na konci p-tej periódy a súčtom budúcich hodnôt prvých p anuít A_1, A_2, ..., A_p k času $t = p$.*

Klasifikácia pôžičiek s postupným splácaním:

1. **pôžičky s rovnomerným splácaním** (**splátkové umorovanie**)
   - úmor je konštantný $A_t = Q + u_t$,

2. **pôžičky s anuitným splácaním** (**anuitné umorovanie**)
   - anuita je konštantná $A = Q_t + u_t$.

Splátkové umorovanie

Definícia 9.7 ***Pôžičkou s rovnomerným splácaním*** *nazývame takú pôžičku s postupným splácaním, pri ktorej je výška úmoru konštantná, t. j.*

$$Q_t = Q \qquad\qquad \textit{pre } t = 1,\, 2,\, \ldots\, n \cdot p,$$

kde n je počet rokov splatnosti pôžičky a p je počet splátok do roka.

Keďže bude dlh splácaný postupne pri konštantnej výške úmoru, tak v prípade ročných splátok po dobu n rokov platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 9.28 *Predpokladajme pôžičku s rovnomerným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že zostatok dlhu je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g a splátka je realizovaná raz do roka. Pre výšku úmoru Q, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A_t platí*

$$Q = \frac{D}{n}, \tag{12}$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot g, \tag{13}$$

$$A_t = u_t + Q. \tag{14}$$

Vetu môžme zovšeobecniť pre prípad, ak je počet splátok do roka vyšší ako jedna.

Veta 9.29 *Predpokladajme pôžičku s rovnomerným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že splátka je realizovaná $p-$krát do roka a zostatok dlhu je úročený tiež $p-$krát do roka nominálnou úrokovou sadzbou g. Pre výšku úmoru Q, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A_t platí*

$$Q = \frac{D}{n \cdot p}, \tag{15}$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{p}, \tag{16}$$

$$A_t = u_t + Q. \tag{17}$$

Príklad 9.4.2 *Dlh v sume 100 000 eur je vydaný pri 10% ročnej úrokovej miere a má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu ročných konštantných umorovacích splátok.*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{rcl} D & = & 100\,000 \\ g & = & 0{,}1 \\ n & = & 4 \\ p & = & 1 \\ \hline Q & = & ? \end{array}$$

Položíme $D_0 = D$ a postupne pomocou vzťahov (11), (12), (13) a (14) počítame ďalšie hodnoty. Umorovací plán má tvar:

perióda t	zvyšok dlhu na začiatku periódy $D_{t-1}(-Q = D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot g$	úmor $Q = \frac{D}{n}$	anuita $A_t = Q + u_t$
1	100 000	10 000	25 000	35 000
2	75 000	7 500	25 000	32 500
3	50 000	5 000	25 000	30 000
4	25 000	2 500	25 000	27 500
$\sum$	—	25 000	100 000	125 000

♡

Na tomto jednoduchom príklade je ľahko vidieť, že postupnosť zvyškov dlhu tvorí klesajúcu aritmetickú postupnosť.

Veta 9.30 *Zostatky dlhu D_0, D_1, ..., D_{n-1} pri pôžičke s rovnomerným splácaním tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť.*

Dôkaz:

$$\begin{aligned} D_t &= D_{t-1} - Q \\ D_t - D_{t-1} &= -Q \\ D_t - D_{t-1} &= -\frac{D}{n} \qquad (= \text{diferencia}). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Dôsledok 1 *Zostatok dlhu D_t na konci t-tej periódy pri pôžičke s rovnomerným splácaním je*

$$D_t = D_0 - t \cdot \frac{D}{n}.$$

Rovnako postupnosť úrokov v predchádzajúcom príklade tvorí klesajúcu aritmetickú postupnosť s diferenciou $d = -2\ 500$.

Veta 9.31 *Splátky úrokov u_1, u_2, ..., u_n pri pôžičke s rovnomerným splácaním tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť.*

Dôkaz:

$$\begin{aligned} u_t &= D_{t-1} \cdot g \\ u_{t+1} &= D_t \cdot g \\ u_{t+1} - u_t &= (D_t - D_{t-1}) \cdot g = -\frac{D}{n} \cdot g \qquad (= \text{diferencia}). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Dôsledok 2 *Splátka úroku u_t na konci t-tej periódy pri pôžičke s rovnomerným splácaním je*

$$u_t = u_1 + (t-1) \cdot \left(-\frac{D}{n}\right) \cdot g.$$

Aj postupnosť anuít v predchádzajúcom príklade tvorí klesajúcu aritmetickú postupnosť s diferenciou $d = -2\,500$.

Veta 9.32 *Anuity A_1, A_2, ..., A_n pri pôžičke s rovnomerným splácaním tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť.*

Dôkaz:

$$\begin{aligned} A_t &= u_t + Q \\ A_{t+1} &= u_{t+1} + Q \\ A_{t+1} - A_t &= u_{t+1} - u_t = -\frac{D}{n} \cdot g \qquad (= \text{diferencia}). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Dôsledok 3 *Anuita A_t na konci t-tej periódy pri pôžičke s rovnomerným splácaním je*

$$A_t = A_1 + (t-1) \cdot \left(-\frac{D}{n}\right) \cdot g.$$

Poznámka 9.1 *Miernou modifikáciou dôkazov sa dá ukázať, že aj vo všeobecnom prípade, ak je počet splátok do roka p, zostatky dlhu, úroky a anuity tvoria aritmetické postupnosti. Diferencia pre postupnosť zostatkov dlhu je* $-\dfrac{D}{n \cdot p}$*, pre postupnosti úrokov ako aj anuít je diferencia* $-\dfrac{D}{n \cdot p} \cdot \dfrac{g}{p}$.

Príklad 9.4.3 *Dlh v sume 100 000 eur je vydaný pri 10% ročnej úrokovej miere s polročným úrokovaním a má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu polročných konštantných umorovacích splátok.*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} D &=& 100\ 000 \\ g &=& 0{,}1 \\ n &=& 4 \\ m &=& 2 \\ p &=& 2 \\ \hline Q &=& ? \end{array}$$

Položíme $D_0 = D$, vypočítame pomocou (15) výšku úmoru $Q = \dfrac{D}{n \cdot p} = 12\,500$, pomocou (16) výšku prvého úroku $u_1 = D_0 \cdot \dfrac{g}{p} = 5\ 000$ a pomocou (17) výšku prvej anuity $A_1 = Q + u_1 = 17\ 500$. Na zostavenie celého umorovacieho plánu buď použijeme uvedené vzťahy alebo využijeme skutočnosť, že postupnosti zostatkov dlhu, úrokov a anuít sú aritmetické. Diferencia pre postupnosť zostatkov dlhu je $-\dfrac{D}{n \cdot p} = -12\ 500 (= Q)$, diferencia postupností úrokov i anuít je $-\dfrac{D}{n \cdot p} \cdot \dfrac{g}{p} = -12\ 500 \cdot 0{,}05 = -625$. Umorovací plán má potom tvar:

periódа t	zvyšok dlhu na začiatku periódy $D_{t-1}(-Q = D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{p}$	úmor $Q = \frac{D}{n \cdot p}$	anuita $A_t = Q + u_t$
1	100 000	5 000	12 500	17 500
2	87 500	4 375	12 500	16 875
3	75 000	3 750	12 500	16 250
4	62 500	3 125	12 500	15 625
5	50 000	2 500	12 500	15 000
6	37 500	1 875	12 500	14 375
7	25 000	1 250	12 500	13 750
8	12 500	625	12 500	13 125
$\sum$	—	22 500	100 000	122 500

♡

Anuitné umorovanie

Definícia 9.8 ***Pôžičkou s anuitným splácaním*** *nazývame takú pôžičku s postupným splácaním, pri ktorej je výška splátky (anuity) konštantná, t. j.*

$$A_t = A \qquad \textit{pre } t = 1,\, 2,\, \ldots\, n \cdot p,$$

kde n je počet rokov splatnosti pôžičky a p je počet splátok do roka.

Anuity tvoria konečnú polehotnú rentu, ktorej súčasná hodnota A_n sa rovná výške dlhu (viď Obr. 49).

Predpokladajme, že výška anuity A je konštantná. Na základe rovnosti $A_n = D$, môžeme teda určiť jej hodnotu. Uvažujme najskôr prípad, keď počet splátok aj konverzií je jedna. Pre výšku splátky dostávame

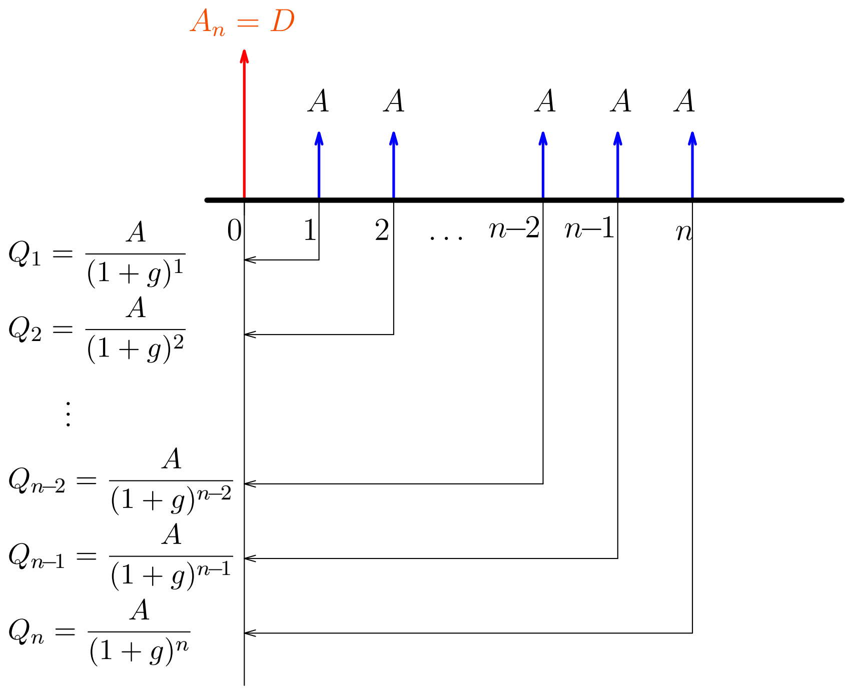
$$D = A \cdot \frac{1-(1+g)^{-n}}{g} \implies A = D \cdot \frac{g}{1-(1+g)^{-n}}.$$

Veta 9.33 *Predpokladajme pôžičku s anuitným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že zostatok dlhu je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g a splátka je realizovaná raz do roka. Pre výšku úmoru Q_t, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A platí*

$$A = D \cdot \frac{g}{1-(1+g)^{-n}}, \tag{18}$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot g, \tag{19}$$

$$Q_t = A - u_t. \tag{20}$$



Obr. 49: Anuitné umorovanie

Vetu môžeme zovšeobecniť pre prípad, ak je počet splátok do roka vyšší ako jedna. Ak uvažujeme ľubovoľný počet konverzií a splátok, tak úrok za periódu u_t vypočítame ako rozdiel výšky dlhu na začiatku periódy zúročeného za periódu $D_{t-1} \cdot \left(1 + \frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$ a výšky dlhu na začiatku periódy D_{t-1}.

Veta 9.34 *Predpokladajme pôžičku s anuitným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že splátka je realizovaná $p-$krát do roka a zostatok dlhu je úročený $m-$krát do roka nominálnou úrokovou sadzbou g. Pre výšku úmoru Q_t, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A platí*

$$A = D \cdot \frac{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{1 - \left(1+\frac{g}{m}\right)^{-m \cdot n}}, \tag{21}$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot \left[\left(1 + \frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right], \tag{22}$$

$$Q_t = A - u_t. \tag{23}$$

Poznámka 9.2 *V prípade, ak je počet konverzií rovný počtu splátok $p = m$, tak pre výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A môžeme vzťahy (21) a (22)* *zjednodušiť na tvar*

$$A = D \cdot \frac{\frac{g}{m}}{1 - \left(1 + \frac{g}{m}\right)^{-m \cdot n}}, \tag{24}$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{m}, \tag{25}$$

Príklad 9.4.4 *Podnikateľ si zobral pôžičku v hodnote 10 000 eur pri 5% nominálnej úrokovej miere a polročnom úrokovaní, ktorá má byť splatená do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu polročných konštantných anuít.*

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{rcl} D &=& 10\ 000 \\ g &=& 0{,}05 \\ m &=& 2 \\ p &=& 2 \\ n &=& 4 \\ \hline A &=& ? \end{array}$$

Položíme $D_0 = D$ a vypočítame výšku anuity, výšku prvého úroku a výšku prvého úmoru pomocou vzťahov (24), (25) a (23):

$$\begin{aligned} A &= D \cdot \frac{\frac{g}{m}}{1 - \left(1 + \frac{g}{m}\right)^{-m \cdot n}} = 10\ 000 \cdot \frac{\frac{0{,}05}{2}}{1 - \left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right)^{-2 \cdot 4}} = \\ &= 1\ 394{,}67346, \\ u_1 &= D_0 \cdot \frac{g}{m} = 250, \\ Q_1 &= A - u_1 = 1\ 144{,}67346. \end{aligned}$$

Postupne pomocou vzťahov (11), (25) a (23) počítame ďalšie hodnoty a zostavíme umorovací plán:

perió-da t	zvyšok dlhu na začiatku periódy $D_{t-1}(-Q_t = D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{m}$	úmor $Q_t = A - u_t$	anuita A
1	10 000,00000	250,00000	1 144,67346	1 394,67346
2	8 855,32654	221,38316	1 173,29029	1 394,67346
3	7 682,03624	192,05091	1 202,62255	1 394,67346
4	6 479,41369	161,98534	1 232,68812	1 394,67346
5	5 246,72557	131,16814	1 263,50532	1 394,67346
6	3 983,22025	99,58051	1 295,09295	1 394,67346
7	2 688,12730	67,20318	1 327,47028	1 394,67346
8	1 360,65702	34,01644	1 360,65703	1 394,67346
$\sum$	—	1 157,38768	10 000,00000	11 157,38768

♡

Pri zostavovaní umorovacieho plánu anuitného splácania pôžičky môžeme využiť nasledujúcu vetu.

Veta 9.35 *Umorovacie splátky Q_1, Q_2, ..., Q_n pri pôžičke s anuitným splácaním tvoria rastúcu geometrickú postupnosť.*

Dôkaz:

$$\begin{aligned} A_t &= Q_t + u_t = Q_t + D_{t-1} \cdot g \\ A_{t+1} &= A_t \\ Q_{t+1} + D_t \cdot g &= Q_t + D_{t-1} \cdot g \\ Q_{t+1} &= Q_t + (D_{t-1} - D_t) \cdot g \\ Q_{t+1} &= Q_t + Q_t \cdot g \\ Q_{t+1} &= Q_t \cdot (1+g) \\ \frac{Q_{t+1}}{Q_t} &= 1 + g \qquad (= \text{kvocient}). \end{aligned}$$

♢

Dôsledok 4 *Výška prvej umorovacej splátky Q_1 pri pôžičke s anuitným splácaním spĺňa*

$$D = Q_1 \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g}.$$

Dôkaz: Postupnosť úmorov tvorí geometrickú postupnosť. Ak použijeme vzťah pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti dostávame

$$\begin{aligned} D &= Q_1 + Q_2 + \cdots Q_n = \\ &= Q_1 + Q_1(1+g) + Q_1(1+g)^2 + \cdots + Q_1(1+g)^{n-1} = \\ &= Q_1 \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{1+g-1} = Q_1 \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g}. \end{aligned}$$

♢

9.5 Úlohy

9.1 Brat má sestre vyplatiť dedičský podiel 350 000 € o 5 rokov. Koľko musí uložiť koncom každého roka na účet v banke, aby nasporil dedičský podiel pri 11% ročnej úrokovej miere?

9.2 Ako dlho si bude môcť Karol užívať koncoročné vyberanie čiastky 4 000 €, ak 17 000 €, ktoré získal z dedičstva, uloží do banky so 4% ročnou úrokovou mierou?

9.3 Akou čiastkou Olívia sporila, ak pravidelným sporením koncom každého štvrťroka počas 6 rokov v banke s 3% ročnou úrokovou mierou, nasporila 8 372,14 €?

9.4 Koľko celých rokov bude môcť Yvona vyberať koncom každého štvrťroka po 400 € z banky, v ktorej sa štvrťročne úročí jej začiatočný vklad 7 700 € pri 1,8% nominálnej úrokovej miere?

9.5 Eugen si z banky na konci sporenia vybral 28 640,51 €. Začiatkom každého roka si sporil čiastkou 3 600 €, pričom ročná úroková sadzba bola 0,032. Koľko vkladov urobil?

9.6 Marcel si z banky na konci sporenia vybral 31 479,63 €. Začiatkom každého štvrťroka si sporil čiastkou 1 000 €, pričom nominálna úroková sadzba bola 0,032 a banka úročila vklady polročne. Koľko vkladov urobil?

9.7 Adriana na konci roka uloží do banky pri 2,5% ročnej úrokovej miere 2 500 €, pričom každý jej ďalší koncoročný vklad bude o 2 % vyšší ako predchádzajúci počas nasledujúcich 4 rokov. Koľko sa jej podarí nasporiť za toto obdobie?

9.8 Aký veľký bol prvý Félixov vklad, ak počas 6 rokov, koncoročným vkladaním do banky s 3% ročnou úrokovou mierou nasporil 9 900,15 €, ak svoje vklady každoročne zvyšoval o 10 % ?

9.9 Pôžičku na auto vo výške 32 000 €, bude Klára splácať na konci mesiaca 12 rokov od prvej splátky pri 5,6% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení. S bankou sa dohodla, že prvú splátku vyplatí na konci tretieho štvrťroka. Aká bude veľkosť mesačnej splátky?

9.10 Akou čiastkou Olívia sporila, ak pravidelným sporením koncom každého štvrťroka počas 6 rokov v banke s 3% ročnou úrokovou mierou a spojitým úročením, nasporila 8 383,09 €?

9.11 Koľko eur vložila Svetlana do banky, ak si koncom každého mesiaca neobmedzene dlho môže vyberať z banky s mesačným úročením a 2,5% nominálnou úrokovou mierou čiastku 105 €?

9.12 Ako by sa zmenil výsledok z predchádzajúcej úlohy, ak by úročenie bolo spojité?

9.13 Dlh v sume 15 000 € je vydaný pri 3% ročnej úrokovej miere a musí byť naraz vrátený o 3 roky. Na našetrenie tejto sumy je potrebné vytvoriť zabezpečovací fond v banke, ktorá poskytuje 4% nominálnu úrokovú mieru pri polročnom úročení. Zostavte umorovací plán za predpokladu, že polročné splátky do fondu sú konštantné.

9.14 Dlh v sume 9 000 € je vydaný pri 6% ročnej úrokovej miere s polročným úrokovaním a má byť splatený do 3 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu polročných konštantných umorovacích splátok.

9.15 Podnikateľ si zobral pôžičku v hodnote 9 200 € pri 8% ročnej nominálnej úrokovej miere a polročnom úrokovaní, ktorá má byť splatená do 2 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu polročných konštantných anuít.

Výsledky:

9.1 56 200 €

9.2 4,75 roka

9.3 320 €

9.4 4 roky

9.5 7 vkladov

9.6 28 vkladov

9.7 13 663,71 €

9.8 1 200 €

9.9 316,06 €

9.10 320 €

9.11 50 400 €

9.12 50 347,52 €

9.13

perióda t	úroky z pôžičky u_t	splátka do fondu a	anuita $A_t = u_t + a$	zúročená splátka do fondu $a \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m(n - \frac{t}{p})}$
1	0	2 377,89	2 377,89	2 625,38
2	450	2 377,89	2 827,89	2 573,90
3	0	2 377,89	2 377,89	2 523,44
4	450	2 377,89	2 827,89	2 473,96
5	0	2 377,89	2 377,89	2 425,45
6	450	2 377,89	2 827,89	2 377,89
$\sum$	1 350	14 267,34	15 617,34	15 000,02

9.14

perióda t	zvyšok dlhu na začiatku periódy $D_{t-1}(-Q = D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{p}$	úmor $Q = \frac{D}{n \cdot p}$	anuita $A_t = Q + u_t$
1	9 000	270	1 500	1 770
2	7 500	225	1 500	1 725
3	6 000	180	1 500	1 680
4	4 500	135	1 500	1 635
5	3 000	90	1 500	1 590
6	1 500	45	1 500	1 545
$\sum$	—	945	9 000	9 945

9.15

perióda t	zvyšok dlhu na začiatku periódy $D_{t-1}(-Q_t = D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{p}$	úmor $Q_t = A - u_t$	anuita A
1	9 200,00	368,00	2 166,51	2 534,51
2	7 033,49	281,34	2 253,17	2 534,51
3	4 780,32	191,21	2 343,30	2 534,51
4	2 437,02	97,48	2 437,03	2 534,51
$\sum$	—	938,03	9 200,01	10 138,04

10 Finančné toky

10.1 Cieľ

Oboznámiť s pojmom finančný tok, diskrétny a spojitý finančný tok, čistý finančný tok. Oboznámiť s niektorými kritériami hodnotenia finančných tokov.

10.2 Otázky

- Definujte pojem finančný tok a čistý finančný tok, klasifikujte finančný tok podľa spôsobu platieb.
- Uveďte príklad diskrétneho finančného toku a spôsoby jeho zadania.
- Vysvetlite pojem investičný projekt a uveďte niektoré kritériá jeho hodnotenia.
- Definujte čistú súčasnú hodnotu diskrétneho finančného toku a uveďte vzťahy pre jej výpočet pri diskrétnom úrokovaní s ročnou úrokovou sadzbou i a pri spojitom úrokovaní s intenzitou δ.
- Klasifikujte investičný projekt na základe čistej súčasnej hodnoty.
- Definujte ekvivalentné finančné toky a uveďte rovnicu ekvivalencie k referenčnému dátumu $t = 0$ pre dva diskrétne finančné toky pri ročnej úrokovej sadzbe i.
- Uveďte vzťah pre určenie čistej súčasnej hodnoty konštantného diskrétneho finančného toku pomocou súčasnej hodnoty polehotnej renty pri diskrétnom úrokovaní s ročnou úrokovou sadzbou i.
- Uveďte vzťah pre určenie čistej súčasnej hodnoty konštantného diskrétneho finančného toku pomocou súčasnej hodnoty polehotnej renty pri spojitom úrokovaní s intenzitou δ.
- Uveďte vzťah pre určenie čistej súčasnej hodnoty rovnomerne rastúceho diskrétneho finančného toku pomocou súčasnej hodnoty polehotnej renty pri diskrétnom úrokovaní s ročnou úrokovou sadzbou i.
- Definujte pojem obligácia, ilustrujte na príklade, z akých platieb pozostáva jej finančný tok a uveďte vzťah na výpočet jej čistej súčasnej hodnoty.
- Definujte pojem vnútorná miera výnosnosti projektu a uveďte spôsob porovnania výhodnosti dvoch projektov na jeho základe.

10.3 Pojem finančného toku

V tejto kapitole sa zaoberáme investičnými projektami a niektorými technikami ich posudzovania z hľadiska výhodnosti pre investora. Investičné projekty zahŕňajú na jednej strane výdavky (začiatočné i dodatočné) a na druhej strane príjmy (väčšinou v budúcnosti) a dajú sa preto reprezentovať tzv. finančnými tokmi.

Definícia 10.1 ***Finančným tokom*** *nazývame súbor platieb súvisiacich s daným projektom uskutočnených v priebehu určitého časového intervalu.*

Klasifikácia finančného toku podľa spôsobu platieb:

1. **diskrétny finančný tok**
   - platby sa uskutočňujú v oddelených (diskrétnych) časových intervaloch,

2. **spojitý finančný tok**
   - platby sa uskutočňujú nepretržite (spojite) s určitou intenzitou splátok v priebehu daného časového intervalu,

3. **zmiešaný finančný tok**
   - platby sa uskutočňujú v niektorých intervaloch spojite a v niektorých diskrétne.

Finančný tok pozostáva z dvoch typov platieb:

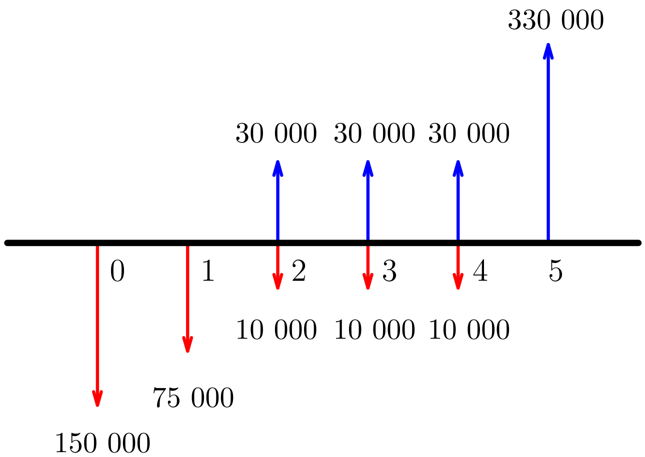
- **výdavky**,
- **príjmy**.

Definícia 10.2 ***Čistým finančným tokom*** *nazývame finančný tok, ktorý vznikne z rozdielu toku reprezentujúceho príjmy a toku reprezentujúceho výdavky v danom projekte.*

10.4 Diskrétne a spojité finančné toky

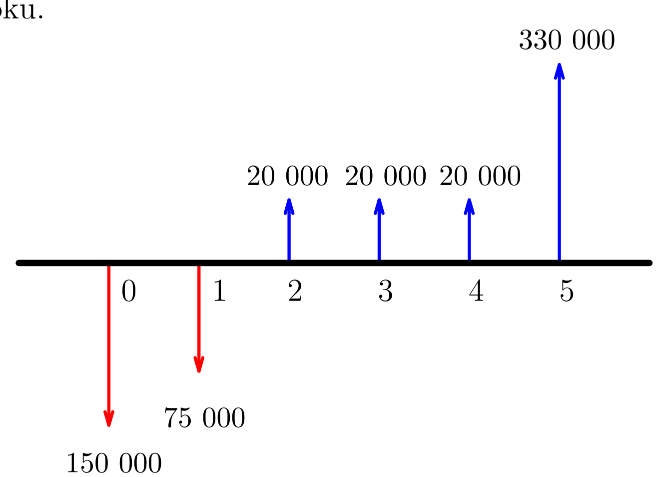
Uvažujme nasledujúci projekt: Rozbehnutie malej výrobnej prevádzky predpokladá začiatočnú investíciu vo výške 150 000 eur a ďalšie investície vo výške 75 000 eur na konci prvého a 10 000 eur na konci druhého, tretieho a štvrtého roka. Prevádzka sa spustí na konci prvého roka a počnúc druhým rokom bude prinášať koncoročne zisk 30 000 eur. Majiteľ ju na konci piateho roka predá za 300 000 eur.

Jedná sa o diskrétny finančný tok, ktorý môžeme graficky znázorniť (viď Obr. 50). Šípky smerujúce dolu znázorňujú výdavky a šípky smerujúce hore príjmy.



Obr. 50: Finančný tok

Na obrázku (viď Obr. 51) je grafické znázornenie zodpovedajúceho čistého finančného toku.



Obr. 51: Čistý finančný tok

Tok príjmov, tok výdavkov a čistý finančný tok môžeme zapísať aj do tabuľky:

perióda t	0	1	2	3	4	5
výdavky a_t	150 000	75 000	10 000	10 000	10 000	0
príjmy b_t	0	0	30 000	30 000	30 000	330 000
čistý fin. tok $x_t = b_t - a_t$	-150 000	-75 000	20 000	20 000	20 000	330 000

alebo ho zapíšeme v tvare postupností:

$$\begin{array}{llcl}
\text{výdavky} & a_t & = & (\,a_0,\,a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5\,) = \\
 & & = & (\,150\ 000, 75\ 000, 10\ 000, 10\ 000, 10\ 000, 0\,), \\
\text{príjmy} & b_t & = & (\,b_0,\,b_1,\,b_2,\,b_3,\,b_4,\,b_5\,) = \\
 & & = & (\,0, 0, 30\ 000, 30\ 000, 30\ 000, 330\ 000\,), \\
\text{čistý fin. tok} & X_t & = & (\,X_0,\,X_1,\,X_2,\,X_3,\,X_4,\,X_5\,) = \\
 & & = & \text{(-150 000,-75 000,20 000,20 000,20 000,330 000).}
\end{array}$$

Spojitý finančný tok nie je reprezentovaný, na rozdiel od diskrétneho, postupnosťou platieb, ale spojitou funkciou, ktorá udáva nepretržitý tok platieb v určitom časovom intervale.

Definícia 10.3 *Nech funkcia $M(t)$ vyjadruje výšku platby v čase $t \in< 0, T >$.* ***Intenzitou spojitého finančného toku*** *nazývame mieru platieb v okamihu t.*
Zápis*:*

$$\rho(t) = M'(t).$$

Definícia 10.4 *Ak $\rho_1(t)$ je intenzita príjmov a $\rho_2(t)$ je intenzita výdavkov daného finančného toku v čase $t \in< 0, T >$, tak ich rozdiel nazývame* ***intenzitou spojitého čistého finančného toku****.*
Zápis*:*

$$\rho(t) = \rho_1(t) - \rho_2(t).$$

10.5 Hodnotenie investičných projektov

Pri analyzovaní investičných príležitostí posudzujeme investičné projekty. Investičné projekty reprezentované finančnými tokmi hodnotíme rôznymi technikami. Medzi najpoužívanejšie kritériá hodnotenia patria:

- **čistá súčasná hodnota**,
- **vnútorná miera výnosnosti**.

Čistá súčasná hodnota

Definícia 10.5 ***Čistou súčasnou hodnotou*** *(Net Present Value - NPV) diskrétneho finančného toku nazývame súčet súčasných hodnôt všetkých očakávaných platieb čistého finančného toku.*
Zápis*:*

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} X_t \cdot v(t), \qquad \textit{kde } v(t) \textit{ je diskontný faktor v čase } t.$$

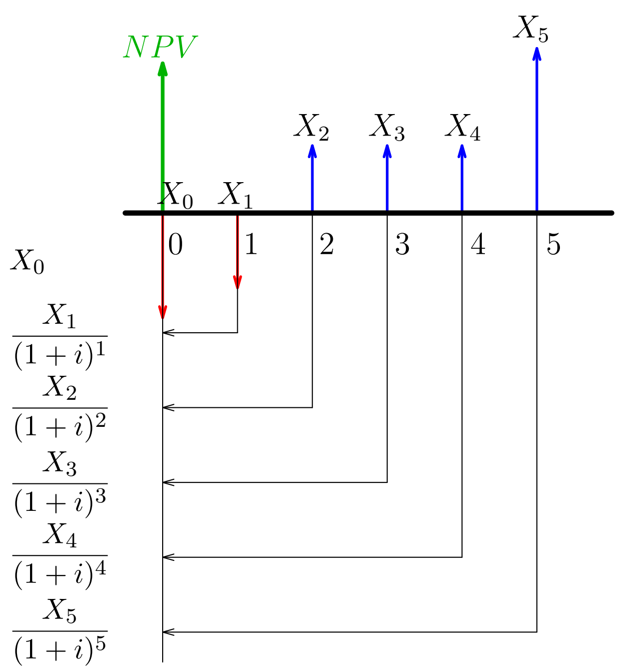
Príklady čistej súčasnej hodnoty pre rôzne úrokovania:

- **diskrétne úrokovanie** s ročnou úrokovou sadzbou i (viď Obr. 52)

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} X_t \cdot (1+i)^{-t},$$

- **spojité úrokovanie** s intenzitou δ

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} X_t \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}.$$



Obr. 52: Čistá súčasná hodnota finančného toku

Nezávislé investičné projekty (ich realizácia nie je navzájom podmienená) posudzujeme podľa kritéria čistej súčasnej hodnoty nasledovne:

- $NPV > 0$, tak je projekt **akceptovateľný**,
- $NPV = 0$, tak je projekt **indiferentný** (krajne akceptovateľný),
- $NPV < 0$, tak je projekt **neakceptovateľný**.

Príklad 10.5.1 *Rozbehnutie malej výrobnej prevádzky predpokladá začiatočnú investíciu vo výške 150 000 eur a ďalšie investície vo výške 75 000 eur na konci prvého a 10 000 eur na konci druhého, tretieho a štvrtého roka.*

Prevádzka sa spustí na konci prvého roka a počnúc druhým rokom bude prinášať koncoročne zisk 30 000 eur. Majiteľ ju na konci piateho roka predá za 300 000 eur. Vypočítajme čistú súčasnú hodnotu projektu pri 6% ročnej úrokovej miere a na jej základe rozhodnime, či sa investícia oplatí.

Riešenie. Urobíme zápis:

$$\begin{array}{lcl} a_t & = & (150\ 000,\ 75\ 000,\ 10\ 000,\ 10\ 000,\ 10\ 000,\ 0) \\ b_t & = & (0,\ 0,\ 30\ 000,\ 30\ 000,\ 30\ 000,\ 330\ 000) \\ \hline NPV(0{,}06) & = & ? \end{array}$$

Vypočítame čistý finančný tok a jemu zodpovedajúcu čistú súčasnú hodnotu pre úrokovú sadzbu 0,06 odúročením jednotlivých splátok za príslušný počet rokov (viď Obr. 52):

$$\begin{aligned} X_t &= (-150\ 000,\ -75\ 000,\ 20\ 000,\ 20\ 000,\ 20\ 000,\ 330\ 000) \\ NPV(i) &= X_0 + \frac{X_1}{1+i} + \frac{X_2}{(1+i)^2} + \frac{X_3}{(1+i)^3} + \frac{X_4}{(1+i)^4} + \frac{X_5}{(1+i)^5} \\ NPV(0{,}06) &= -150\ 000 - \frac{75\ 000}{1+0{,}06} + \frac{20\ 000}{(1+0{,}06)^2} + \frac{20\ 000}{(1+0{,}06)^3} + \\ &\quad + \frac{20\ 000}{(1+0{,}06)^4} + \frac{330\ 000}{(1+0{,}06)^5} \\ NPV(0{,}06) &= 76\ 274{,}66779. \end{aligned}$$

Vzhľadom na skutočnosť, že $NPV > 0$, je projekt akceptovateľný a investícia sa oplatí.

♡

V predchádzajúcom príklade sme posudzovali jeden finančný projekt, ktorého čistá súčasná hodnota bola kladná, t. j. projekt je pre nás akceptovateľný. Ak by sme mali posúdiť výhodnosť jedného projektu oproti iným projektom, potrebujeme projekty, resp. ich finančné toky, porovnať. Na to využijeme princíp finančnej ekvivalencie.

Definícia 10.6 ***Hodnotou čistého finančného toku v čase*** t *nazývame súčet všetkých platieb čistého finančného toku vyjadrených k referenčnému dátumu* t*.*

Definícia 10.7 ***Dva finančné toky sú ekvivalentné*** *práve vtedy, ak majú rovnakú hodnotu k ľubovoľnému referenčnému dátumu.*

Špeciálne, ak zvolíme referenčný dátum $t = 0$, tak vlastne porovnávame čisté súčasné hodnoty oboch projektov. Za predpokladu rovnakej ročnej úrokovej sadzby i pre oba projekty sú finančné toky $A = (X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n)$ a $B = (X_0^\star, X_1^\star, X_2^\star, \ldots, X_n^\star)$ ekvivalentné, ak

$$\sum_{t=0}^{n} X_t \cdot (1+i)^{-t} = \sum_{t=0}^{n} X_t^* \cdot (1+i)^{-t}.$$

Príklad 10.5.2 *Podnikateľ sa má rozhodnúť medzi dvomi investičnými projektmi A a B, ktorých finančné toky sú nasledovné:*

$$\begin{array}{lllrllll} A: & X_0 & = & -500 & \qquad B: & X_0^* & = & -700 \\ & X_1 & = & 200 & & X_1^* = X_2^* & = & 200 \\ & X_2 & = & 300 & & X_3^* = X_4^* & = & 300 \\ & X_3 = X_4 & = & 200 & & X_5^* & = & 200 \end{array}$$

Pre ktorý projekt sa rozhodne, ak

a) $i = 0{,}08$,

b) $i = 0{,}09$?

Riešenie. Vypočítame čistú súčasnú hodnotu oboch finančných tokov:

$$\begin{aligned} NPV_A(i) &= -500 + \frac{200}{1+i} + \frac{300}{(1+i)^2} + \frac{200}{(1+i)^3} + \frac{200}{(1+i)^4}, \\ NPV_B(i) &= -700 + \frac{200}{1+i} + \frac{200}{(1+i)^2} + \frac{300}{(1+i)^3} + \frac{300}{(1+i)^4} + \frac{200}{(1+i)^5} \end{aligned}$$

a nájdeme ich hodnoty pre jednotlivé úrokové sadzby:

a) $$\begin{aligned} NPV_A(0{,}08) &= 248{,}15939 \\ NPV_B(0{,}08) &= 251{,}42825, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} NPV_A(0{,}09) &= 232{,}11202 \\ NPV_B(0{,}09) &= 225{,}99152. \end{aligned}$$

Rozhodne sa pre projekt s vyššou čistou súčasnou hodnotou. To znamená v prípade úrokovej sadzby 0,08 sa rozhodne pre projekt B a v prípade úrokovej sadzby 0,09 sa rozhodne pre projekt A.

♡

V predchádzajúcich príkladoch sme čistú súčasnú hodnotu počítali jednotlivým odúročením platieb. V špeciálnych prípadoch môžeme diskrétny finančný tok považovať za rentu a použiť vzťahy pre výpočet jej súčasnej hodnoty. Uvádzame niektoré prípady, za predpokladu, že medzi platbami je konštantná perióda:

1. $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$
   -finančný tok tvorí polehotnú konečnú rentu s konštantnou splátkou X

   - **diskrétne úrokovanie** s ročnou úrokovou sadzbou i

$$NPV = X \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

- **spojité úrokovanie** s intenzitou δ

$$NPV = X \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta t}}{\mathrm{e}^{\delta} - 1},$$

2. $X_1 = X$, $X_2 = X \cdot (1 + \alpha)$, $\dots$, $X_n = X \cdot (1 + \alpha)^{n-1}$
-finančný tok tvorí polehotnú konečnú rentu s rovnomerne rastúcou splátkou
$$NPV = X \cdot \left[1 - \left(\frac{1+\alpha}{1+i}\right)^n\right] \cdot \frac{1}{i - \alpha}.$$

Poznámka 10.1 *V prípade, ak sa X_0 nerovná nule, tak vo všetkých horeuvedených prípadoch pridáme na pravej strane túto hodnotu.*

Príkladom, kde možno čiastočne použiť pri výpočte čistej súčasnej hodnoty súčasnú hodnotu renty, je obligácia. Obligácie sú vydávané firmami, bankami a inými oprávnenými subjektami za účelom získania potrebného kapitálu.

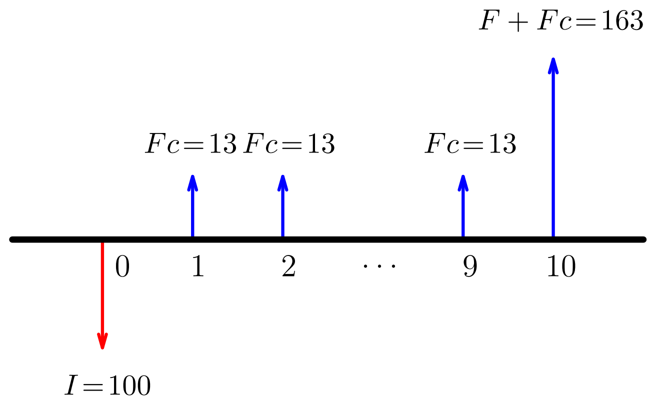
Definícia 10.8 ***Obligácia*** *je dlhodobý úverový cenný papier s pevne stanovenou dobou splatnosti a podmienkami splatnosti záväznými pre eminenta.*

Obligácia je určená nasledujúcimi atribútmi:

- nákupná cena I,
- nominálna hodnota F,
- výška kupónovej platby Fc,
- úroková sadzba obligácie (výnosnosť obligácie) i,
- doba splatnosti n.

Nominálna hodnota obligácie sa vyplatí jednorazovo na konci doby splatnosti obligácie alebo po častiach v pravidelných intervaloch. Okrem nominálnej hodnoty získava veriteľ aj úroky. Nominálny úrok tzv. kupón je vyplácaný pravidelne počas celej doby splatnosti kupónovej obligácie a práve ten tvorí polehotnú konečnú rentu s konštantnou splátkou, pre ktorú môžeme pri výpočte čistej súčasnej hodnoty obligácie použiť vzorec pre súčasnú hodnotu renty. Ukážeme si to na nasledujúcom príklade.

Príklad 10.5.3 *Kupónovú obligáciu v nominálnej hodnote 150 eur je možné teraz zakúpiť v cene 100 eur. Ročné kupóny v hodnote 13 eur budú vyplácané po dobu splatnosti 10 rokov. Predpokladáme 10% ročnú úrokovú mieru. Je výhodné kúpiť túto obligáciu?*



Obr. 53: Obligácia

Riešenie. Grafické znázornenie finančného toku reprezentujúceho túto obligáciu je na obrázku (viď Obr. 53).
Pre čistú súčasnú hodnotu obligácie môžeme teda použiť vzťah

$$NPV(i) = -I + Fc \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{F}{(1+i)^n}$$

a vypočítať jej hodnotu pre úrokovú sadzbu $i = 0,1$

$$NPV(0{,}1) = -100 + 13 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-10}}{0{,}1} + \frac{150}{(1+0{,}1)^{10}} = 37{,}71087.$$

Vzhľadom na kladný výsledok sa oplatí obligáciu kúpiť.

♡

Vnútorná miera výnosnosti

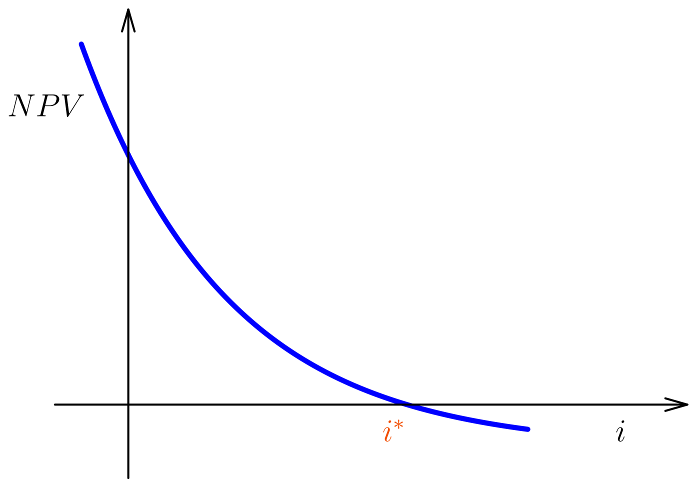
Ďalšou možnosťou ako posúdiť investičný projekt je určenie tzv. vnútornej miery výnosnosti.

Definícia 10.9 ***Vnútornou mierou výnosnosti*** *(Internal Rate of Return - IRR) diskrétneho finančného toku nazývame úrokovú mieru, pri ktorej je čistá súčasná hodnota finančného toku rovná nule.*
Zápis*:*

$$IRR: \quad NPV(i^*) = 0,$$

$$IRR = i^* \cdot 100\ \%.$$

Na obrázku (viď Obr. 54) je grafická interpretácia vnútornej miery výnosnosti finančného toku, ktorý reprezentuje nejaký projekt. Priesečník grafu funkcie s osou zodpovedajúcou NPV, dostaneme, ak položíme $i = 0$. Táto hodnota je v uvažovanom prípade kladná, to znamená, že pre úrokovú mieru menšiu ako je vnútorná miera výnosnosti, je tento projekt akceptovateľný.



Obr. 54: Vnútorná miera výnosnosti

Príklad 10.5.4 *Podnikateľ sa má rozhodnúť medzi dvomi investičnými projektmi $A = (\,-1\ 000,\ 1\ 000,\ 500\,)$ a $B = (\,-2\ 000,\ 1\ 700,\ 1\ 000\,)$ v tisícoch eur.*

a) *Vypočítajme vnútorné miery výnosnosti oboch projektov.*

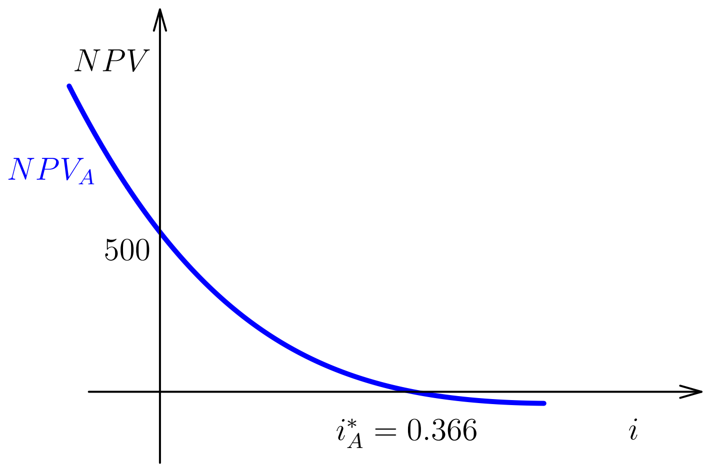
b) *Urobme analýzu, kedy je výhodné investovať do ktorého projektu.*

Riešenie.

a) Určíme funkciu čistej súčasnej hodnoty pre jednotlivé projekty a vyriešime rovnicu $NPV(i) = 0$. Kvôli prehľadnosti je výhodné označiť $x = 1+i$. Keďže i^* je z intervalu $(0,\ 1)$, tak hľadáme riešenie x z intervalu $(1,\ 2)$.

$$\begin{aligned} NPV_A(i) &= -1\ 000 + \frac{1\ 000}{1+i} + \frac{500}{(1+i)^2} &= 0 \\ && -1\ 000x^2 + 1\ 000x + 500 = 0 \\ && 2x^2 - 2x - 1 = 0 \\ && x = 1{,}366 \\ && i = 0{,}366. \end{aligned}$$

Vnútornou mierou výnosnosti projektu A je 36,6 % (viď Obr. 55).

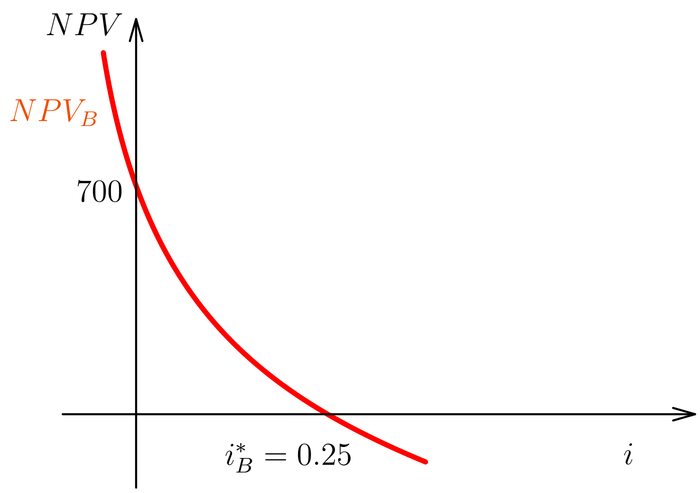


Obr. 55: Vnútorná miera výnosnosti projektu A

Analogicky postupujeme pri projekte B.

$$\begin{aligned} NPV_B(i) &= -2\ 000 + \frac{1\ 700}{1+i} + \frac{1\ 000}{(1+i)^2} = 0 \\ 20x^2 - 17x - 10 &= 0 \\ x &= 1{,}25 \\ i &= 0{,}25. \end{aligned}$$

Vnútornou mierou výnosnosti projektu B je 25 % (viď Obr. 56).

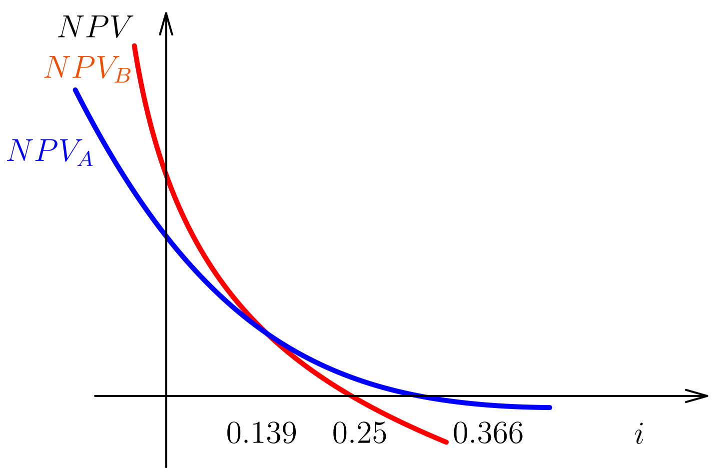


Obr. 56: Vnútorná miera výnosnosti projektu B

b) Pre nominálnu úrokovú mieru menšiu ako je $36,6$ % má projekt A čistú súčasnú hodnotu kladnú a teda je akceptovateľný. V prípade projektu B je hranicou akceptovateľnosti úroková miera 25 %. Ostáva zodpovedať otázku, aká je výhodnosť jedného projektu oproti druhému pri rôznych hodnotách úrokovej miery. Zistíme teda, kedy sú finančné toky ekvivalentné. Z rovnice $NPV_A = NPV_B$ dostávame rovnicu, ktorá reprezentuje finančný tok zodpovedajúci rozdielu finančných tokov oboch projektov. Jej riešením je úroková sadzba, pri ktorej sú finančné toky ekvivalentné:

$$\begin{aligned} NPV_{A-B}(i) &= 1\,000 - \frac{700}{1+i} - \frac{500}{(1+i)^2} = 0 \\ 10x^2 - 7x - 5 &= 0 \\ x &= 1{,}13899 \\ i &= 0{,}13899. \end{aligned}$$

Projekty sú ekvivalentné pri nominálnej úrokovej miere 13,9 % (viď Obr. 57).



Obr. 57: Vnútorná miera výnosnosti projektov A a B

Vzhľadom na výsledky z prvej časti príkladu môžeme zhodnotiť, že pre nominálnu úrokovú mieru do 13,9 % je výhodnejší projekt B. Pre nominálnu úrokovú mieru od 13,9 % je výhodnejší projekt A. Samozrejme, ak úroková miera presiahne hodnotu 36,6 % je už čistá súčasná hodnota aj pre tento projekt záporná a teda je neakceptovateľný.

♡

Poznámka 10.2 *Pri výpočte vnútornej miery výnosnosti riešime vo všeobecnosti algebrickú rovnicu n-tého stupňa, ktorá môže mať v intervale* $(1,\, 2)$ *viac* *ako jeden koreň. Navyše korene môžu ležať pomerne blízko seba. Problematika hľadania týchto hodnôt vo všeobecnom prípade je obsiahla a presahuje rámec tejto učebnice. Odkazujeme čitateľa na literatúru, ktorá sa zaoberá približnými numerickými metódami na výpočet koreňov algebrických rovníc.*

10.6 Úlohy

10.1 Investícia do výstavby komplexu budov predpokladá výdavky na kúpu pozemku 2 000 000 € a 900 000 € na konci 1. a 2. roku na výstavbu. Budovy budú postavené na konci 3. roku a staviteľská firma ich plánuje hneď predať za cenu 6 000 000 €. Určte NPV tejto investície pri 14% ročnej úrokovej miere.

10.2 Kupónová obligácia v nominálnej hodnote 200 € vynesie majiteľovi na konci každého z nasledujúcich 8 rokov kupónovú platbu 15 € a na konci doby splatnosti aj nominálnu hodnotu. Túto obligáciu môžete teraz kúpiť za 120 €, pričom uvažujeme 12% ročnú úrokovú mieru? Je vhodné investovať do takéhoto projektu?

10.3 Máte možnosť investovať do dvoch projektov A=(- 4 000, 1 000, 1 500, 1 300, 1 500) tis. € a B=(- 4 000, 1 900, 1 700, 800, 600) tisíc € pri cene kapitálu 10 %. Ktorý projekt uprednostníte?

10.4 Podnikateľ chce kúpiť stroj, ktorého cena je 1 700 000 € a životnosť 20 rokov. Prevádzka stroja si vyžaduje každý rok vynaložiť 60 000 €, ale zaručuje príjmy 220 000 € ročne pri cene kapitálu 7 %. Posúďte jeho prijateľnosť.

10.5 Máme projekt, do ktorého sme na začiatku investovali 60 dolárov. V 1. roku predpokladáme príjem 155 dolárov. V druhom roku ale musíme investovať do projektu 100 dolárov. Aká je hodnota IRR? Pri akých hodnotách ročnej úrokovej miery je vhodné investovať do projektu?

10.6 Máte dva nezlučiteľné projekty A=(-2 000, 1 500, 2 000) € a B=(-3 000, 2 400, 1 440) €. Vypočítajte IRR pre obidva projekty. Urobte analýzu, kedy je výhodné investovať do daných projektov.

Výsledky:

10.1 567 834,60 €

10.2 35,29 €, vhodná investícia.

10.3 $NPV_A = 149\ 000$ €, $NPV_B = 143\ 090$ €

10.4 $NPV = -4\ 957{,}72$ €, neakceptovateľný.

10.5 $IRR_1 = 25$ %, $IRR_2 = 33{,}33$ %, $i \in (25,\ 33.33)$

10.6 $IRR_A = 44{,}3$ %, $IRR_B = 20$ %, výhodnejší je stále projekt A, akceptovateľný je ale len po $i = 44{,}3$ %.

Literatúra

[1] Brabec, J. – Martan, F. – Rozenský, Z.: Matematická analýza I, SNTL/ALFA, Praha, 1985.

[2] Džurina, J. – Grinčová, A. – Pirč, V.: Matematická analýza 1, Technická univerzita v Košiciach, ISBN 80 – 8073 – 307 – 4. Dostupné online: `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/eLearning/uLern/maI.htm` (október 2012).

[3] Džurina, J. – Grinčová, A. – Pirč, V.: Matematika 1, Elfa, Košice, 2009. ISBN 978 – 80 – 8086 – 115 – 5.

[4] Džurina, J. – Pirč, V.: Calculus 1, 1. vydanie, Elfa, Košice, 2010, ISBN 978 – 80 – 8086 – 165 – 0.

[5] Eliáš, J. – Horváth, J. – Kajan, J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 1, ALFA, 6. vydanie, Bratislava, 1985.

[6] Eliáš, J. – Horváth, J. – Kajan, J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2, ALFA, 6. vydanie, Bratislava, 1986.

[7] Grinčová, A. – Molnárová, M.: MATEMATIKA I a jej využitie v ekonómii (Zbierka riešených a neriešených úloh), Technická univerzita v Košiciach, ISBN 978 – 80 – 553 – 1158 – 6. Dostupné online: `http://people.tuke.sk/monika.molnarova/` (október 2012).

[8] Harshbarger, R. J. – Reynolds, J.: Mathematical Applications for Management, Life, and Social Sciences, D. C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts, Toronto, 1989, ISBN 0 – 669 – 16263 – 9.

[9] Hoffmann, L. D. – Bradley, G. L: Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences, McGraw-Hill Publishing Company, 1989, ISBN 0 – 07 – 029334 – 1.

[10] Ivan, J.: Matematika 1, SNTL/ALFA, Bratislava, 1983.

[11] Jirásek, F. – Kriegelstein, E. – Tichý, Z.: Sbírka řešených příkladů z matematiky, SNTL/ALFA, Praha, 1982.

[12] Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M.: Matematika I, SVTL, Bratislava, 1966.

[13] Molnárová, M.: Úvod do lineárnej algebry, prednášky, Technická univerzita v Košiciach, ISBN 80 – 8073 – 697 – 9. Dostupné online: `http://people.tuke.sk/monika.molnarova/` (október 2012).

[14] Molnárová, M. – Myšková, H.: Úvod do lineárnej algebry, zbierka riešených a neriešených úloh, Technická univerzita v Košiciach, ISBN 80 – 8073 – 361 – 9. Dostupné online: `http://people.tuke.sk/monika.molnarova/` (október 2012).

[15] Pirč, V. – Haščák, A.: Matematická analýza 1, Elfa, Košice, 2000, ISBN 80 – 88786 – 92 – 4.

[16] Pirč, V. – Sedláčková, A.: Finančná matematika, Elfa, Košice, 2002, ISBN 80 – 89066 – 21 – 6.

[17] Small, D. B. – Hosack, J. M.: Calculus an Integrated Approach, McGraw-Hill Publishing Company, 1990, ISBN 0 – 07 – 058264 – 5.

[18] Šoltés, V. – Juhászová, Z.: Zbierka úloh z vyššej matematiky, Elfa, Košiice, 1995.

[19] Šoltés, V. – Hudec, O. – Penjak, V. – Lacková, D. – Révészová, L.: Matematika I, Elfa, Košiice, 2005, ISBN 80 – 8073 – 333 – 3.

Názov: MATEMATIKA I a jej využitie v ekonómii

Autor: Monika Molnárová

Vydavateľ: EQUILIBRIA, s.r.o., Letná 42, Košice
Vydanie: druhé, r. 2013
Náklad: 100 ks
Počet strán: 174

ISBN 978-80-8143-123-4

ISBN 978-80-8143-123-4