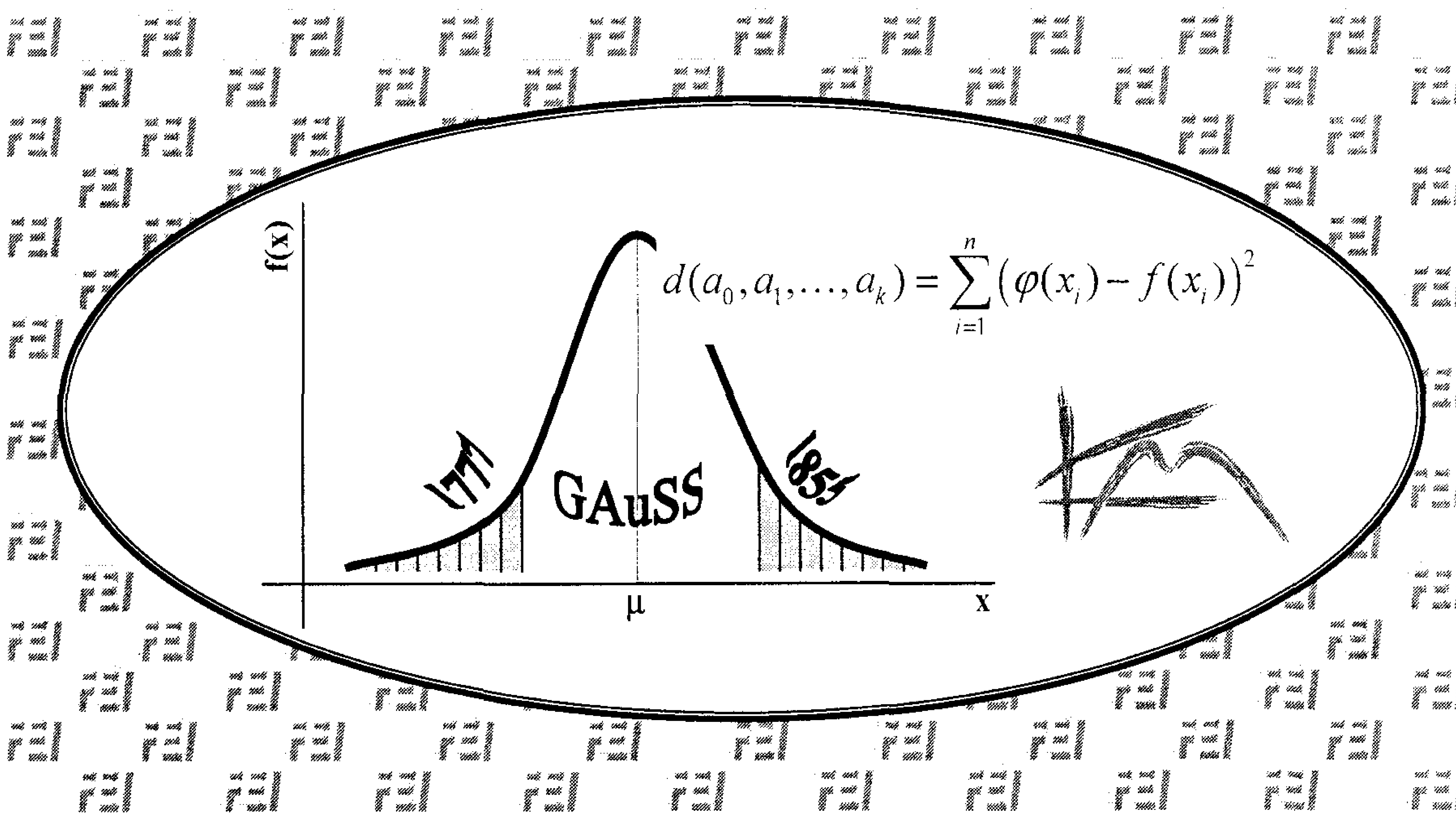
ivan daňo – eva ostertagová



numerické metódy, pravdepodobnosť a matematická štatistika v príkladoch

košice 2007

Numerické metódy, pravdepodobnosť
a matematická štatistika v príkladoch

Ivan Daňo – Eva Ostertagová

Košice 2007

Recenzenti: RNDr. Vladimír Lacko, PhD.
Mgr. Ján Pribiš, PhD.

Prvé vydanie

elfa, s. r. o., Letná 9, Košice
Košice, 2007

ISBN 978-80-8086-063-9

OBSAH

Úvod

Predkladaná vysokoškolská učebnica je zbierkou úloh k predmetu Numerické metódy, pravdepodobnosť a matematická štatistika, vyučovanému v druhom ročníku bakalárskeho štúdia na FEI TU v Košiciach, ale môže poslúžiť aj čitateľovi s iným technickým, ale aj ekonomickým zameraním.

Učebnica je členená do dvanástich kapitol, ktoré svojim obsahom zodpovedajú aktuálnym prednáškam a cvičeniam z tohto predmetu a nadväzuje na vysokoškolskú učebnicu [3]. RNDr. Ivan Daňo, PhD. je autorom kapitol 1 – 6, PhDr. Eva Ostertagová, PhD. je autorkou kapitol 7 – 12.

Každá kapitola v úvode obsahuje niekoľko riešených vzorových príkladov so stručným výkladom teórie, ktorá je potrebná k vyriešeniu daného príkladu. Druhá časť každej kapitoly obsahuje pomerne rozsiahlu databázu úloh k danej téme, pri ktorých sú uvedené aj ich výsledky. Učebnica obsahuje množstvo príkladov a úloh z technickej praxe a bežného života. Boli do nej zaradené aj príklady a úlohy, ktorých riešenie vyžaduje názornejší výklad tých základných matematických metód a postupov, ktoré sa ďalej využívajú pri štúdiu odborných predmetov.

Touto cestou ďakujeme recenzentom RNDr. Vladimírovi Lackovi, PhD. a Mgr. Jánovi Pribišovi, PhD. za starostlivé prečítanie rukopisu a za cenné rady, ktoré prispeli ku jeho skvalitneniu.

Autori

1. Numerické riešenie nelineárnych rovníc

Riešené príklady:

Príklad 1.1. Metódou polovičného delenia intervalu vypočítajte väčší reálny koreň rovnice $\ln x - x + 3 = 0$ s presnosťou $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$.

Riešenie: Separáciou koreňov zistíme, že rovnica $f(x) = 0$ má dva kladné reálne korene α_1 a α_2, ktoré ležia v intervaloch $\langle 0,1 \rangle$ a $\langle 4,5 \rangle$. Väčší reálny koreň leží v intervale $\langle 4,5 \rangle$. Počet polovičných delení vypočítame pomocou vzťahu $2^{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{5-4}{5 \cdot 10^{-2}} = 20$, teda $2^5 > 20$ a dostávame, že $n+1 = 5$, respektíve $n = 4$. Stačí teda urobiť $n = 4$ delení intervalu $\langle 4,5 \rangle$. Stred c intervalu $\langle 4,5 \rangle$ vypočítame pomocou vzorca $c = \frac{a+b}{2}$, kde $a = 4$ a $b = 5$. Ak $f(c) = 0$, tak c je koreňom rovnice $f(x) = 0$. Ak $f(c) \neq 0$ a $f(a)f(c) < 0$, tak koreň α_2 leží v intervale $\langle a,c \rangle$. V opačnom prípade daný koreň leží v intervale $\langle c,b \rangle$. Novovzniknutý interval sa nazýva aktuálnym intervalom. Ak dĺžka aktuálneho intervalu je menšia ako zadaná presnosť, tak výpočet ukončíme a bod c je približná hodnota koreňa α_2 vypočítaná s presnosťou ε. V opačnom prípade opäť prevedieme polovičné delenie aktuálneho intervalu a výpočet opakujeme. Ak označíme $a_0 = a$, $b_0 = b$, postupným polovičným delením aktuálnych intervalov získame intervaly $\langle a_1, b_1 \rangle$, $\langle a_2, b_2 \rangle$, ..., $\langle a_n, b_n \rangle$, ..., pre ktoré je $f(a_n)f(b_n) < 0$, $n = 0,1,2,\dots$. Medzivýsledky sme zaokrúhľovali na šesť desatinných miest a sú uvedené v tabuľke.

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$
0	4	5	4,5	0,00407
1	4,5	5	4,75	−0,19185
2	4,5	4,75	4,625	−0,09352
3	4,5	4,625	4,5625	−0,04463
4	4,5	4,5625	4,53125	−0,02025

Presná hodnota koreňa α_2 leží v intervale $\langle 4{,}5; 4{,}53125 \rangle$. Dĺžka daného intervalu je už menšia ako zadaná presnosť ε a preto približná hodnota koreňa je $\alpha_2 = 4{,}53125$. Vzhľadom na zadanú presnosť $\varepsilon = 0{,}05$, približnú hodnotu koreňa zaokrúhlime na dve desatinné miesta, t.j. $\alpha_2 = 4{,}53$. Odhad chyby výpočtu môžeme urobiť na základe vzťahu $|c_n - \alpha_2| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$, kde c_n je stred intervalu $\langle a_n, b_n \rangle$ a α_2 je presná hodnota koreňa.

Príklad 1.2. Prostou iteračnou metódou vypočítaje najmenší reálny koreň rovnice $x^4 + 9x - 4 = 0$ s presnosťou $\varepsilon = 10^{-2}$.

Riešenie: Separáciou koreňov zistíme, že rovnica $f(x) = 0$ má dva reálne korene, ktoré ležia v intervaloch $\alpha_1 = \langle -3,-2 \rangle$, $\alpha_2 = \langle 0,1 \rangle$. Najmenší reálny koreň leží v intervale $\langle -3,-2 \rangle$.

v intervaloch $\alpha_1 = \langle -3,-2 \rangle$, $\alpha_2 = \langle 0,1 \rangle$. Najmenší reálny koreň leží v intervale $\langle -3,-2 \rangle$.
Rovnicu prepíšeme na tvar $x = \varphi(x)$, kde $\varphi(x) = -\sqrt[4]{4-9x}$.

Overíme splnenie podmienky konvergencie: $q = \max\limits_{x\in\langle -3,-2\rangle} |\varphi'(x)| = \left| \dfrac{9}{4\sqrt[4]{(4-9x)^3}} \right| = 0{,}2215 < 1$.

Podmienka konvergencie je splnená. Pre výpočet postupnosti iterácií $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ teda môžeme použiť vzťah $x_{n+1} = -\sqrt[4]{4-9x_n}$. Za začiatočnú iteráciu x_0 si zvolíme ľubovoľný bod z intervalu $\langle -3,-2 \rangle$. Nech $x_0 = -2{,}5$. Medzivýsledky budeme zaokrúhľovať na tri desatinné miesta. Iteračný proces ukončíme, ak $|x_{n+1} - x_n| \le \dfrac{1-q}{q} \cdot \varepsilon = \dfrac{1-0{,}2215}{0{,}2215} \cdot 10^{-2} = 0{,}035$.
Postupnosť jednotlivých iterací je uvedená v tabuľke.

n	x_n	Stoptest
0	−2,5	0,231>0,035
1	−2,269	0,046>0,035
2	−2,223	0,009<0,035
3	−2,214	

Riešením rovnice je iterácia x_3, ktorú vzhľadom na zadanú presnosť $\varepsilon = 10^{-2}$ zaokrúhlime na dve desatinné miesta, t.j. $\alpha_1 = -2{,}21$.

Príklad 1.3. Newtonovou metódou vypočítajte najväčší reálny koreň rovnice $e^x + x^2 - 3 = 0$ s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

Riešenie: Separáciou koreňov zistíme, že rovnica má dva reálne korene α_1 a α_2 ležiace v intervaloch $\langle -2,-1 \rangle$ a $\langle 0,1 \rangle$. Väčší reálny koreň α_2 leží v intervale $\langle 0,1 \rangle$. Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie $f(x) = e^x + x^2 - 3$. Na intervale $\langle 0,1 \rangle$ sú $f'(x) = e^x + 2x > 0$ a $f''(x) = e^x + 2 > 0$ a teda na danom intervale nemenia znamienko. Na základe podmienky $f(x_0)f''(x_0) > 0$ určíme začiatočnú iteráciu $x_0 = 1$. Pomocou vzorca $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ vypočítame jednotlivé iterácie x_n, $n = 0,1,2,\ldots$. Medzivýsledky budeme zaokrúhľovať na päť desatinných miest. Iteračný proces ukončíme, ak $f(x_{n+1} - \varepsilon) f(x_{n+1} + \varepsilon) < 0$. Postupnosť jednotlivých iterácií je uvedená v tabuľke.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	1	0,71828	4,71828
1	0,84776	0,05311	4,02993
2	0,83458	0,00037	3,97301
3	0,83449	0,00001	

$f(x_3-\varepsilon)f(x_3+\varepsilon) = -0{,}00041 \cdot 0{,}00038 < 0$. Teda riešením rovnice je iterácia x_3, ktorú zaokrúhlime na štyri desatinné miesta $\alpha_2 = x_3 = 0{,}8345$.

Odhad chyby výpočtu iterácie x_3 urobíme na základe vzťahu $|x_3 - \alpha_2| \le \dfrac{|f(x_3)|}{M}$, kde $M = \min\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} |f'(x)|$ a α_2 je presná hodnota väčšieho reálneho koreňa rovnice. Vypočítame $M = \min\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} |e^x + 2x| = 1$ a urobíme odhad chyby výpočtu: $|x_3 - \alpha_2| \le \dfrac{0{,}00001}{1} = 0{,}00001$.

Úlohy:

Metóda polovičného delenia intervalu (bisekcie)

Graficky separujte všetky reálne korene rovnice. Určený koreň vypočítajte metódou polovičného delenia intervalu s presnosťou ε.

1.1.
$x^5 - 6x^3 - 8x + 7 = 0$; menší kladný reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-5}$.

$[0{,}66803]$

1.2.
$x^5 - 4x^3 + 4x^2 - 2 = 0$; väčší záporný reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-4}$.

$[-0{,}5724]$

1.3.
$2x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 8x - 7 = 0$; najväčší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-5}$.

$[0{,}65050]$

1.4.
$x^3 + 2.7x^2 - 2.1 = 0$; väčší záporný reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-5}$.

$[-1{,}17253]$

1.5.
$x^4 + 2x^3 + x^2 - 5 = 0$; menší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-4}$.

$[-2{,}0767]$

1.6.
$\ln x + x = 0$; reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-3}$.

$[0{,}568]$

1.7.
$e^x + x - 2 = 0$; reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-3}$.

$[0{,}443]$

Metóda prostej iterácie

Graficky separujte všetky reálne korene rovnice. Určený koreň vypočítajte metódou prostej iterácie s presnosťou ε.

1.8.
$x^3 - 12x + 1 = 0$; najmenší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$.

$[-3{,}505]$

1.9.
$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$; menší kladný reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-2}$.

$[0{,}45]$

1.10.
$x^5 - 3x^3 - 2x + 3 = 0$; najmenší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$.

$[-1{,}975]$

1.11.
$\ln x + 2x - 4 = 0$; reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$.

$[1{,}727]$

1.12.
$e^{2x} + x - 9 = 0$; reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[1{,}0374]$

1.13.
$4x^3 - \frac{x^2}{2} - 6x + 1 = 0$; najmenší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$.

$[1{,}201]$

1.14.
$2x^4 + 3x^2 + 4x - 3 = 0$; väčší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$.

$[0{,}515]$

Newtonova metóda

Graficky separujte všetky reálne korene rovnice. Určený koreň vypočítajte Newtonovou metódou s presnosťou ε.

1.15.
$\ln x - x + 2 = 0$; najväčší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[3{,}1462]$

1.16.
$e^{2x} - 2x - \frac{5}{2} = 0$; najmenší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[-1{,}2051]$

1.17.
$\sin x + \frac{x-2}{2} = 0$; reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[0{,}7046]$

1.18.
$x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$; najväčší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-5}$.

$[0{,}85762]$

1.19.
$x^3 + 2x^2 + x - 3 = 0$; najväčší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-5}$.

$[0{,}86371]$

1.20.

$3x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 4 = 0$; najväčší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-5}$.

$[1{,}81172]$

1.21.

$e^x + \ln x = 0$; reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[0{,}2699]$

1.22.

$e^{2x} - 8x = 0$; najmenší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-5}$.

$[0{,}17870]$

1.23.

$\ln x + 8x = 0$; reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[0{,}2007]$

1.24.

$x^5 - 5x + 3 = 0$; najmenší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[-1{,}6180]$

2. Iteračná metóda riešenia sústav lineárnych rovníc

Riešené príklady:

Príklad 2.1. Jacobiho iteračnou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-2}$ riešte sústavu rovníc

$$
\begin{aligned}
10x_1 + x_2 - x_3 &= 9\\
x_1 - 20x_2 + 2x_3 &= -51\\
-2x_1 + 21x_2 + 8x_3 &= 93.
\end{aligned}
$$

Riešenie: V danej sústave lineárnych rovníc druhú rovnicu pripočítame k tretej rovnici tak, aby matica sústavy bola diagonálne dominantná. Teda

$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1\\ 1 & -20 & 2\\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, $10>1+|-1|$, $|-20|>1+2$, $10>|-1|+1$. Novovzniknutú sústavu rovníc

prepíšeme na tvar $\overline{x} = H\,\overline{x} + \overline{d}$, kde $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}05 & 0 & 0{,}1\\ 0{,}1 & -0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{d} = \begin{pmatrix} 0{,}9\\ 2{,}55\\ 4{,}2 \end{pmatrix}$.

Vypočítame riadkovú normu matice H. Teda

$\|H\|_m = \max[0{,}1+0{,}1;\ 0{,}05+0{,}1;\ 0{,}1+0{,}1] = 0{,}2<1$.

Norma matice je menšia ako 1 a preto iteračný proces $\overline{x^{(k+1)}} = H\,\overline{x^{(k)}} + \overline{d}$ bude konvergovať. Postupnosť jednotlivých iterácií zostrojíme tak, že si zvolíme ľubovoľne začiatočné priblíženie presného riešenia $\overline{x_0^{(0)}} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)}\\ x_2^{(0)}\\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}$ a ďalšie priblíženia budeme počítať podľa rekurentných vzťahov

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -0{,}1x_2^{(k)} + 0{,}1x_3^{(k)} + 0{,}9\\
x_2^{(k+1)} &= 0{,}05x_1^{(k)} + 0{,}1x_3^{(k)} + 2{,}55\\
x_3^{(k+1)} &= 0{,}1x_1^{(k)} - 0{,}1x_2^{(k)} + 4{,}2.
\end{aligned}
$$

Výpočet ukončíme, keď $\left\|\overline{x^{(k+1)}} - \overline{x^{(k)}}\right\|_m \le \dfrac{1-\|H\|_m}{\|H\|_m}\cdot\varepsilon = \dfrac{1-0{,}2}{0{,}2}\cdot 10^{-2} = 0{,}04$. Odpovedajúcou normou k riadkovej norme matice H je pre vektor $\overline{x}$ riadková vektorová norma $\|\overline{x}\|_m$, ktorú vypočítame podľa vzťahu $\|\overline{x}\|_m = \max\limits_{i=1,2,3} |x_i|$. Postupnosť priblížení je uvedená v tabuľke

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|\overline{x^{(k+1)}} - \overline{x^{(k)}}\right\|_m \le 0{,}04$
0	0,9	2,55	4,2	0,465>0,04
1	1,065	3,015	4,035	0,63>0,04
2	1,002	3,0067	4,005	0,006<0,04
3	0,9998	3,0006	3,9995	

Za približnú hodnotu riešenia danej sústavy rovníc berieme hodnoty uvedené v poslednom riadku zaokrúhlené na dve desatinné miesta, t.j. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$. Odhad chyby výpočtu môžeme urobiť na základe vzťahu $\left\|\overline{x^{(k+1)}} - \overline{\alpha}\right\|_m \leq \frac{\|H\|_m}{1-\|H\|_m} \cdot \left\|\overline{x^{(k+1)}} - \overline{x^{(k)}}\right\|_m$, kde $\overline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ je presné riešenie danej sústavy lineárnych rovníc.

Úlohy:

2.1.

Jacobiho iteračnou metódou riešte sústavu lineárnych rovníc s presnosťou $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$\begin{aligned} 21x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 19x_1 + 18x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 33x_3 &= 227. \end{aligned}$$

$[-1; 0{,}5; -7]$

2.2.

Jacobiho iteračnou metódou riešte sústavu lineárnych rovníc s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\begin{aligned} 18x_1 - 19x_2 + 2x_3 &= -12 \\ 2x_1 + 21x_2 - x_3 &= 23 \\ -2x_1 + x_2 - 15x_3 &= 15. \end{aligned}$$

$[0{,}5; 1; -1]$

2.3.

Jacobiho iteračnou metódou riešte sústavu lineárnych rovníc s presnosťou $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 20x_3 &= 9 \\ 3x_1 - 10x_2 + x_3 &= -38 \\ 30x_1 + x_2 + 2x_3 &= 32. \end{aligned}$$

$[1; 4; -1]$

2.4.

Jacobiho iteračnou metódou riešte sústavu lineárnych rovníc s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\begin{aligned} 20x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 39 \\ x_1 + x_2 - 12x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 20x_2 - 8x_3 &= -12 \\ 0{,}5x_2 + 4x_3 - 19x_4 &= -10. \end{aligned}$$

$[2; 1; -0{,}25; 0{,}5]$

2.5.

Jacobiho iteračnou metódou riešte sústavu lineárnych rovníc s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\begin{aligned} 12x_2 - x_3 &= -10 \\ 24x_1 + x_2 &= 5 \\ 4x_1 + 21x_3 &= -41. \end{aligned}$$

$[0{,}25; -1; -2]$

2.6.

Jacobiho iteračnou metódou riešte sústavu lineárnych rovníc s presnosťou $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 11x_3 &= 23 \\ 11x_2 - x_3 &= -24 \\ 33x_1 + x_2 &= -35 \\ x_1 + x_2 - 20x_4 &= -13. \end{aligned}$$

$[-1; -2; 2; 0{,}5]$

2.7.

Jacobiho iteračnou metódou riešte sústavu lineárnych rovníc s presnosťou $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_3 &= -14 \\ x_1 - 3x_2 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 8. \end{aligned}$$

$[1; 1; -3]$

3. Riešenie sústav nelineárnych rovníc

Riešené príklady:

Príklad 3.1. Iteračnou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-2}$ riešte v oblasti $D = \langle 0,1 \rangle \times \langle 3,4 \rangle$ sústavu nelineárnych rovníc $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $x^3 - y + 3 = 0$.

Riešenie: Pôvodnú sústavu rovníc $\overline{f(\bar{x})} = 0$ upravíme na sústavu tvaru $\bar{x} = \overline{g(\bar{x})}$, kde $\bar{x} = (x, y)$. Teda

$$y = 2 + \sqrt{4 - x^2},$$
$$x = \sqrt[3]{y - 3}\ .$$

Jacobiho maticu zobrazenia $\bar{g}$ označíme $\bar{g}'(\bar{x})$. Najdeme danú maticu a vypočítame jej riadkovú normu. Teda

$$\bar{g}'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}} \end{pmatrix},$$

$$\left\|\bar{g}'(\bar{x})\right\|_m = \max_{x \in \langle 0,1 \rangle,\, y \in \langle 3,4 \rangle} \left[\left| \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \right| + 0, 0 + \left| \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}} \right| \right] = \max\,[0{,}57735; 0{,}20998] = 0{,}57735\,.$$

Existuje konštanta $q = 0{,}58$, ktorá vyhovuje podmienke $\left\|\bar{g}'(\bar{x})\right\|_m \le q = 0{,}58 < 1$. Potom sústava rovníc $\bar{x} = \bar{g}(\bar{x})$ má práve jedno riešenie $\overline{x^*} \in D$ a pri ľubovoľnej voľbe začiatočnej aproximácie $\overline{x^{(0)}} \in D$ postupnosť aproximácií $\left(\overline{x^{(k)}}\right)_{k=1}^{\infty}$, získaná pomocou rekurentných vzťahov

$$y^{(k+1)} = 2 + \sqrt{4 - (x^{(k)})^2}\ ,$$
$$x^{(k+1)} = \sqrt[3]{y^{(k)} - 3}\,,$$

konverguje k presnému riešeniu $\overline{x^*}$ danej sústavy. Výpočet jednotlivých aproximácií $\overline{x^{(k+1)}}$ ukončíme, keď $\left\|\overline{x^{(k+1)}} - \overline{x^{(k)}}\right\|_m \le \dfrac{1-q}{q} \cdot \varepsilon = \dfrac{1 - 0{,}58}{0{,}58} \cdot 10^{-2} = 0{,}00724$. V tabuľke sú uvedené dané aproximácie zaokrúhlené na päť desatinných miest.

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\left\|\overline{x^{(k+1)}} - \overline{x^{(k)}}\right\|_m \le 0{,}00724$
0	0,5	3,5	0,4365 > 0,00724
1	0,7937	3,9365	0,1847 > 0,00724
2	0,9784	3,83576	0,0364>0,00724
3	0,94195	3,74434	0,0357>0,00724
4	0,90627	3,76429	0,0186>0,00724
5	0,91429	3,78288	0,0073>0,00724
6	0,92164	3,77878	0,0038<0,00724
7	0,92004	3,77498	

Za približnú hodnotu presného riešenia sústavy berieme hodnoty uvedené v poslednom riadku tabuľky zaokrúhlené na dve desatinné miesta, t.j. $x = 0{,}92$, $y = 3{,}77$. Odhad chyby výpočtu môžeme urobiť na základe vzťahu $\left\|\overline{x^*} - \overline{x^{(k+1)}}\right\|_m \le \frac{q}{1-q} \cdot \left\|\overline{x^{(k+1)}} - \overline{x^{(k)}}\right\|_m$, $k = 0,1,\dots$.

Príklad 3.2. Newtonovou iteračnou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-2}$ riešte v danej oblasti $D = \langle 1,2\rangle \times \langle 0,1\rangle$ sústavu nelineárnych rovníc $xy - x + 1 = 0$, $2x^2 + y - 3 = 0$.

Riešenie: Vypočítame si potrebné parciálne derivácie obidvoch funkcií $f(x,y) = xy - x + 1$ a $g(x,y) = 2x^2 + y - 3$. Teda $\frac{\partial f}{\partial x} = y - 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 4x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 1$. Zvolíme si začiatočnú aproximáciu $x^{(0)} = 1$, $y^{(0)} = 0$. Postupnosť ďalších aproximácií získame výpočtom pomocou rekurentných vzťahov

$$\frac{\partial f(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{\partial f(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y}(y^{(k+1)} - y^{(k)}) = -f(x^{(k)}, y^{(k)}),$$

$$\frac{\partial g(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{\partial g(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y}(y^{(k+1)} - y^{(k)}) = -g(x^{(k)}, y^{(k)}).$$

Výpočet ukončíme, keď $\left\|\overline{x^{(k+1)}} - \overline{x^{(k)}}\right\|_m < \varepsilon$, kde $\overline{x} = (x,y)$. Jednotlivé aproximácie sú uvedené v tabuľke.

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\left\|\overline{x^{(k+1)}} - \overline{x^{(k)}}\right\|_m < \varepsilon$
0	1	0	$0{,}2 > 10^{-2}$
1	1,2	0,2	$0{,}04 > 10^{-2}$
2	1,191488	0,160713	$0{,}0003 < 10^{-2}$
3	1,191491	0,160771	

Za približnú hodnotu riešenia danej sústavy nelineárnych rovníc berieme hodnoty uvedené v poslednom riadku zaokrúhlené na dve desatinné miesta, t.j. $x = 1{,}19$, $y = 0{,}16$.

Úlohy:

3.1.

Iteračnou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$ riešte v oblasti $D = \langle 0;0{,}5\rangle \times \langle 2{,}5;3\rangle$ sústavu nelineárnych rovníc $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$, $10x - y + 2 = 0$.

$[0{,}099; 2{,}995]$

3.2.

Iteračnou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$ riešte v oblasti $D = \langle 3{,}5;4\rangle \times \langle 0;0{,}5\rangle$ sústavu nelineárnych rovníc $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x - 10y - 2 = 0$.

$[3{,}9901; 0{,}1990]$

3.3.

Iteračnou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$ riešte v oblasti $D = \langle 0,1\rangle \times \langle 3,4\rangle$ sústavu nelineárnych rovníc $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $10x - y + 2 = 0$.

$[0{,}1990; 3{,}9901]$

3.4.

Iteračnou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$ riešte v oblasti $D = \langle 2;2{,}5\rangle \times \langle 0;0{,}5\rangle$ sústavu nelineárnych rovníc $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$, $x + 4y = 3{,}9878$.

$[2{,}059; 0{,}4822]$

3.5.

Iteračnou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$ riešte v oblasti $D = \langle 1{,}5;2\rangle \times \langle 1{,}5;2\rangle$ sústavu nelineárnych rovníc $x^3 - y^2 - 1 = 0$, $xy^3 - y - 4 = 0$.

$[1{,}502; 1{,}546]$

3.6.

Newtonovou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-2}$ riešte v oblasti $D = \langle -1;-0{,}5\rangle \times \langle 0{,}2;0{,}5\rangle$ sústavu nelineárnych rovníc $\sin y - x = 1{,}2$, $2y + \cos x = 1{,}7$.

$[-0{,}74; 0{,}48]$

3.7.

Newtonovou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$ riešte v oblasti $D = \langle 1{,}5;2\rangle \times \langle 0{,}5;1\rangle$ sústavu nelineárnych rovníc $xy - 1 = 0$, $y - (x-1)^3 - 0{,}21 = 0$.

$[1{,}719; 0{,}582]$

3.8.

Newtonovou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$ riešte v oblasti $D = \langle 1;1{,}2\rangle \times \langle 0{,}5;1\rangle$ sústavu nelineárnych rovníc $9x^2 + y^2 - 10 = 0$, $2xy + 4y - 5 = 0$.

$[1{,}0173; 0{,}8286]$

3.9.

Newtonovou metódou s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$ riešte v oblasti $D = \langle 1;1{,}5\rangle \times \langle 0{,}5;1\rangle$ sústavu nelineárnych rovníc $6x^3 + 5y^3 - 15 = 0$, $2x^2 - y - 3 = 0$.

$[1{,}332; 0{,}548]$

4. Aproximácia funkcií

Riešené príklady:

Príklad 4.1. Zostrojte Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu $f(x)$, ktorá je zadaná tabuľkou svojich funkčných hodnôt $y_i = f(x_i)$ v uzlových bodoch x_i

x_i	0	1,5	6,8
y_i	1,45	3,14	4,11

Riešenie: Lagrangeov interpolačný polynóm budeme hľadať na základe vzťahu $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$, kde $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. V našom prípade je funkcia $f(x)$ zadaná v troch uzlových bodoch , čo značí, že $n = 2$. Vypočítame koeficienty $l_0(x), l_1(x)$ a $l_2(x)$. Teda

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x^2 - 8{,}3x + 10{,}2}{10{,}2},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{x^2 - 6{,}8x}{-7{,}95},$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{x^2 - 1{,}5x}{36{,}04}.$$

Vypočítané koeficienty dosadíme do vzťahu $L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$. Teda

$$L_2(x) = 1{,}45 \frac{x^2 - 8{,}3x + 10{,}2}{10{,}2} + 3{,}14 \frac{x^2 - 6{,}8x}{-7{,}95} + 4{,}11 \frac{x^2 - 1{,}5x}{36{,}04} = -0{,}1387x^2 + 1{,}3348x + 1{,}45.$$

Príklad 4.2. Funkcia $f(x)$ je zadaná tabuľkou svojich funkčných hodnôt $y_i = f(x_i)$ v uzlových bodoch x_i

x_i	0	1	3	5
y_i	-6	-3	0	1

Určte hodnotu funkcie $f(x)$ v bode $x = 2$.

Riešenie: Nahradíme funkciu $f(x)$ Lagrangeovym interpolačným polynómom $L_3(x)$ a vypočítame približnú hodnotu funkcie $f(x)$ v bode $x = 2$ pomocou tohto polynómu. Najprv vypočítame koeficienty $l_i(x)$, $i = 0,1,2,3$ Lagrangeovho interpolačného polynómu v bode $x = 2$. Teda

$$l_0(2)=\frac{(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(2-1)(2-3)(2-5)}{(0-1)(0-3)(0-5)}=-\frac{1}{5}=-0{,}2,$$
$$l_1(2)=\frac{(2-x_0)(2-x_2)(2-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(2-0)(2-3)(2-5)}{(1-0)(1-3)(1-5)}=\frac{3}{4}=0{,}75,$$
$$l_2(2)=\frac{(2-x_0)(2-x_1)(2-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{1}{2}=0{,}5,$$
$$l_3(2)=\frac{(2-x_0)(2-x_1)(2-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=-\frac{1}{20}.$$
Po dosadení do vzťahu
$$L_3(2)=y_0l_0(2)+y_1l_1(2)+y_2l_2(2)+y_3l_3(2)$$
dostávame hľadanú približnú hodnotu funkcie $f(2)\approx L_3(2)=-1{,}1$.

Príklad 4.3. Funkcia $f(x)$ je zadaná tabuľkou svojich funkčných hodnôt $y_i=f(x_i)$ v uzlových bodoch x_i

x_i	1,462	1,491	2,247	3,490
y_i	0,38	0,40	0,81	1,25

Pomocou inverzného Lagrangeovho interpolačného polynómu riešte rovnicu $f(x)=0{,}53$.

Riešenie: Použijeme inverznú Lagrangeovu interpoláciu. Keďže nás v tomto prípade nebude zaujímať celkový tvar inverzného Lagrangeovho interpolačného polynómu, ale len jeho hodnota v konkrétnom bode, vypočítame najprv jeho koeficienty $l_i(y)$, $i=0,1,2,3$ v tomto bode a až potom $L_3(0.53)$. Teda

$$l_0(0{,}53)=\frac{(0{,}53-y_1)(0{,}53-y_2)(0{,}53-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}=-3{,}50281,$$
$$l_1(0{,}53)=\frac{(0{,}53-y_0)(0{,}53-y_2)(0{,}53-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}=4{,}3386,$$
$$l_2(0{,}53)=\frac{(0{,}53-y_0)(0{,}53-y_1)(0{,}53-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}=0{,}18099,$$
$$l_3(0{,}53)=\frac{(0{,}53-y_0)(0{,}53-y_1)(0{,}53-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}=-0{,}01678.$$
Po dosadení do vzťahu pre inverzný Lagrangeov interpolačný polynóm
$$L_3(0{,}53)=x_0l_0(0{,}53)+x_1l_1(0{,}53)+x_2l_2(0{,}53)+x_3l_3(0{,}53),$$
dostávame hľadanú približnú hodnotu $x=f^{-1}(0{,}53)\approx L_3(0{,}53)=1{,}6958671$.

Príklad 4.4. Odhadnite na celom intervale interpolácie chybu pri interpolácii funkcie zadanej tabuľkou svojich funkčných hodnôt $y_i=f(x_i)$ v uzlových bodoch x_i

x_i	300	305	315	323
y_i	$\ln 300$	$\ln 305$	$\ln 315$	$\ln 323$

Riešenie: Použijeme vzťah pre odhad chyby interpolácie

$$|f(x)-L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|, \text{ kde}$$

$$M_{n+1} = \sup_{x\in\langle a,b\rangle}\left|f^{(n+1)}(x)\right|, \quad a = x_0, \quad b = x_n.$$

V našom prípade je $n=3$ a interval interpolácie je $\langle 300,323\rangle$. Na tomto intervale je $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ ohraničená a preto môžeme všeobecne známymi postupmi z matematickej analýzy vypočítať M_4. Teda $M_4 = \sup_{x\in\langle 300,323\rangle}\left|-\frac{6}{x^4}\right| = \frac{6}{300^4}$. Globálne maximum M_p polynómu $|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$ odhadneme tak, že si na intervale interpolácie vypočítame globálne maxima M_{1i} polynómov $|x-x_i|$ a potom pre odhad M_p platí $M_p \le M_{11}M_{12}\dots M_{1n}$. Po dosadení do vzťahu pre odhad chyby interpolácie dostávame

$$|\ln x - L_3(x)| \le \frac{6}{300^4 4!}|(x-300)(x-305)(x-315)(x-323)| \le \frac{1}{324\cdot 10^8}\cdot 23\cdot 17\cdot 15\cdot 23 \le 4{,}2\cdot 10^{-8}$$

Príklad 4.5. S akou presnosťou môžeme vypočítať pomocou Lagrangeovho interpolačného polynómu $\ln 309$, ak poznáme hodnoty $\ln 300, \ln 305, \ln 315, \ln 323$.

Riešenie: Použijeme vzťah pre odhad chyby interpolácie

$$|f(x)-L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|, \text{ kde}$$

$$M_{n+1} = \sup_{x\in\langle a,b\rangle}\left|f^{(n+1)}(x)\right|, \quad a = x_0, \quad b = x_n.$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade je $n=3$ a interval interpolácie je tiež $\langle 300,323\rangle$. Teda na tomto intervale je $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ ohraničená a preto je $M_4 = \sup_{x\in\langle 300,323\rangle}\left|-\frac{6}{x^4}\right| = \frac{6}{300^4}$.
Po dosadení do vzťahu pre odhad chyby interpolácie dostávame

$$|\ln 309 - L_3(309)| \le \frac{6}{300^4\, 4!}|(309-300)(309-305)(309-315)(309-323)| = \frac{9\cdot 4\cdot 6\cdot 14}{324\cdot 10^8} = 9\cdot 10^{-8}$$

Príklad 4.6. Funkcia $f(x)$ je zadaná tabuľkou svojich funkčných hodnôt $y_i = f(x_i)$ v uzlových bodoch x_i

x_i	0	1	2	3
y_i	0,5	2,1	8,2	25,6

Určte ktorá z dvoch funkcií $g_1(x) = ax + b$ a $g_2(x) = e^{ax+b}$ lepšie aproximuje v zmysle MNŠ funkciu $f(x)$.

Riešenie: Pri aproximácii funkcií metódou najmenších štvorcov hľadáme funkciu $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j \varphi_j(x)$ tak, aby súčet štvorcov odchýlok $\sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - f(x_i))^2$ bol minimálny. Teda úloha aproximovať funkciu $f(x)$ funkciou $\varphi(x)$ pomocou MNŠ spočíva v určení takých reálnych koeficientov $a_0, a_1, \ldots, a_k$, ktoré minimalizujú funkciu

$d(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - f(x_i))^2$, kde funkcia $d(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ je zrejme tzv. kvadratická odchýlka. Koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_k$ môžeme určiť riešením sústavy lineárnych rovníc

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) + \ldots + a_k \sum_{i=1}^{n} \varphi_k(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi_0(x_i),$$
$$\vdots$$
$$a_0 \sum_{i=1}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_k(x_i) + \ldots + a_k \sum_{i=1}^{n} \varphi_k(x_i)\varphi_k(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi_k(x_i).$$

V prípade funkcie $g_1(x)$ koeficient $a_0 = b$ a koeficient $a_1 = a$. Sústava lineárnych rovníc nadobudne tvar

$$4b + 6a = 36{,}400002$$
$$6b + 14a = 95{,}300003.$$

Vyriešením danej sústavy dostaneme, že funkcia $g_1(x) = 8{,}14x - 3{,}11$ a $d(b,a) = 64{,}722008$. Aby bolo možné použiť ten istý postup výpočtu koeficientov a, b aj v druhom prípade, tak si aproximačnú rovnicu $f(x) \approx g_2(x) = e^{ax+b}$ prechodne upravíme na tvar

$$\ln(f(x)) \approx \ln(g_2(x)) = ax + b.$$

Teraz si už môžeme vytvoriť sústavu lineárnych rovníc s neznámymi koeficientami a a b. Teda

$$4b + 6a = 5{,}395516,$$
$$6b + 14a = 14{,}67798.$$

Vyriešením danej sústavy dostaneme, že funkcia $g_2(x) = e^{1{,}316941x - 0{,}626533}$ a odchýlka $d_2(b,a) = 0{,}023135$. Veľmi malá kvadratická odchýlka v druhom prípade automatický dáva odpoveď na otázku, ktorá z funkcií $g_1(x)$ a $g_2(x)$ lepšie aproximuje funkciu $f(x)$ v zmysle metódy najmenších štvorcov. Je to funkcia $g_2(x) = e^{ax+b}$.

Úlohy:

Zostrojte Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu $f(x)$, ktorá je zadaná tabuľkou.

4.1.

x_i	0	1	5
y_i	2	3	147

$[7x^2 - 6x + 2]$

4.2.

x_i	1	2	−4
y_i	3	−5	4

$[-1{,}3x^2-4{,}1x+8{,}4]$

4.3.

x_i	11	13	14	18
y_i	1342	2210	2758	5850

$[x^3+x]$

4.4.

x_i	−2	1	2	4
y_i	25	−8	−15	−23

$[x^2-10x+1]$

4.5.

x_i	−3	0	3	6
y_i	−1	2	−2	10

$$\left[\frac{23x^3-63x^2-234x+324}{162}\right]$$

4.6.

x_i	−1	0	2	4
y_i	5	2	−4	−10

$[2-3x]$

4.7.

x_i	−1	0	1	3
y_i	6	1	0	10

$[2x^2-3x+1]$

Funkcia $f(x)$ je zadaná tabuľkou. Pomocou Lagrangeovho interpolačného polynómu určte hodnotu funkcie $f(x)$ v bode z.

4.8.

x_i	321	322,8	324,2	325
y_i	2,506	2,508	2,510	2,511

$z=323.5$

$[2{,}5090066]$

4.9.

x_i	0	1	3	5
y_i	−6	−3	0	1

$z = 4$

$[0{,}6]$

4.10.

x_i	1	2	4	8
y_i	0	1	2	3

$z = 2{,}5$

$[1{,}3549107]$

4.11.

x_i	0,89	1,14	1,50	1,62
y_i	2,435	3,126	4,481	5,053

$z = 1{,}35$

$[3{,}8558517]$

4.12.

x_i	0,14	0,28	0,57	1,0
y_i	1,15	1,323	1,768	2,718

$z = 0{,}8$

$[2{,}2262829]$

4.13.

x_i	1,2	1,59	1,77	1,83
y_i	3,320	4,903	5,870	6,233

$z = 1{,}61$

$[5{,}0019886]$

Pomocou inverzného Lagrangeovho interpolačného polynómu vypočítajte hodnotu x, pre ktorú funkcia $f(x)$ zadaná tabuľkou nadobúda funkčnú hodnotu v.

4.14.

x_i	3,287	4,055	5,528	5,584
y_i	1,19	1,40	1,71	1,72

$v = 1{,}55$

$[4{,}7083196]$

4.15.

x_i	1,462	1,491	2,247	3,490
y_i	0,38	0,40	0,81	1,25

$v = 0.53$

$[1.6958682]$

4.16.

x_i	8,935	11,473	18,356
y_i	2,190	2,440	2,910

$v = 2.49$

[12,074198]

4.17.

x_i	1,377	2,075	2,637	3,095	4,572
y_i	0,32	0,73	0,97	1,13	1,52

$v = 1.0$

[2,717331]

4.18.

S akou presnosťou môžeme vypočítať pomocou Lagrangeovho interpolačného polynómu $\ln 101{,}5$, ak poznáme hodnoty $\ln 100, \ln 101, \ln 102$ a $\ln 103$.

$[7{,}9 \,.\, 10^{-10}]$

4.19.

S akou presnosťou môžeme vypočítať hodnotu $\sqrt{113}$ pomocou Lagrangeovho interpolačného polynómu pre funkciu $y = \sqrt{x}$, ak zvolíme za uzlové body $x_0 = 100,\ x_1 = 121,\ x_2 = 144$.

$[2{,}02 \,.\, 10^{-3}]$

4.20.

S akou presnosťou môžeme vypočítať pomocou Lagrangeovho interpolačného polynómu $\frac{1}{\sqrt{115}}$, ak poznáme hodnoty $\frac{1}{\sqrt{100}}, \frac{1}{\sqrt{121}}, \frac{1}{\sqrt{144}}$.

$[8{,}2 \,.\, 10^{-5}]$

4.21.

Odhadnite na celom intervale interpolácie chybu pri interpolácii funkcie zadanej tabuľkou svojich funkčných hodnôt $y_i = f(x_i)$ v uzlových bodoch x_i

x_i	100	121	144
y_i	$\sqrt{100}$	$\sqrt{121}$	$\sqrt{144}$

$[2{,}78 \,.\, 10^{-2}]$

4.22.

Odhadnite na celom intervale interpolácie chybu pri interpolácii funkcie zadanej tabuľkou svojich funkčných hodnôt $y_i = f(x_i)$ v uzlových bodoch x_i

x_i	100	121	144
y_i	$\frac{1}{\sqrt{100}}$	$\frac{1}{\sqrt{121}}$	$\frac{1}{\sqrt{144}}$

$$\left[1{,}39\,.\,10^{-3}\right]$$

Funkcia $f(x)$ je zadaná tabuľkou. Metódou najmenších štvorcov aproximujte funkciu $f(x)$ funkciou $g(x)$.

4.20.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	2,1	3,5	5	6,7	8

$g(x) = ax + b$

$$[1{,}5x + 2{,}06]$$

4.21.

x_i	−1,0	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0
y_i	−10,8	−2,1	−4,9	22,2	60,6	133,0

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$[1{,}5898148x^3 + 1{,}4761905x^2 + 3{,}5030423x - 6{,}1134921]$$

4.22.

x_i	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y_i	2,5	1,2	112	2,25	4,28

$g(x) = ax^2 + bx + c$

$$[1{,}002352x^2 - 4{,}014309x + 5{,}022148]$$

4.23.

x_i	−2	−1	−1	0	1	1
y_i	0,045872	0,071942	0,069930	0,169492	−0,526316	−0,454545

$g(x) = \frac{1}{ax + b}$

$$\left[\frac{1}{-7{,}995418x + 5{,}968173}\right]$$

4.24.

x_i	−0,83	−0,75	−0,14	0,28	0,56	1,15
y_i	13,3	13,6	14,9	15,5	16,2	17,5

$g(x) = a.e^{bx}$

$$\left[15{,}0061032\ e^{0.135221x}\right]$$

4.25.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0,741937	1,252763	1,609438	1,902107	2,079442

$g(x) = ab^x$

$$\left[0{,}869187\ (1{,}281305)^x\right]$$

4.26.

x_i	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y_i	0,51	0,58	0,71	0,93	1,32

$g(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$

$$\left[\ln\left(0{,}31479x^2 - 0{,}808341x + 2{,}166604\right)\right]$$

4.27.

x_i	0	0,5	1,1	2
y_i	−1,75	0,53	0,25	1,25

$g(x) = a + b\sin x$

$$\left[-1{,}797146 + 2{,}810868\sin x\right]$$

4.28.

x_i	0	0,5	1,1	2
y_i	−1,75	−0,53	0,25	1,25

$g(x) = a + b\sin x + c\cos x$

$$\left[-0{,}753021 + 1{,}744669\sin x - 0{,}911546\cos x\right]$$

5. Numerický výpočet určitého integrálu

Riešené príklady:

Príklad 5.1. Vypočítajte lichobežníkovou metódou integrál $\int_0^1 \cos x^2\, dx$ pre $n = 10$ a odhadnite chybu výpočtu.

Riešenie: Rozdelíme interval $\langle 0,1 \rangle$ na $n = 10$ častí. Určíme krok $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{10} = 0.1$.

Približnú hodnotu integrálu $\int_0^1 \cos x^2\, dx$ vypočítame na základe vzťahu

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right).$$

Teda $\int_0^1 \cos x^2\, dx \approx \frac{0.1}{2}\left(\cos 0 + \cos 1 + 2\sum_{i=1}^{9} \cos (0 + i\,0.1)^2 \right) = 0{,}903122$.

Na základe vzťahov $|R(f)| \le \frac{b-a}{12n^2} M_2$, $M_2 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|$ urobíme odhad chyby výpočtu.

Teda $M_2 = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} \left| -4x^2 \cos x^2 - 2\sin x^2 \right| \le 4 + 2 = 6$ a $|R(f)| \le \frac{1}{1200} \cdot 6 = 0{,}005$.

Príklad 5.2. Vypočítajte Simpsonovou metódou integrál $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$ s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$.

Riešenie: Najprv určíme n, ktoré zabezpečí dosiahnutie žiadanej presnosti ε výpočtu daného integrálu. Na určenie n použijeme vzťahy $|R(f)| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \le \varepsilon$, $M_4 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} \left| f^{(4)}(x) \right|$.

Teda $M_4 = \max_{x\in\langle 1,4\rangle} \left| \frac{15}{16\sqrt{x^7}} \right| = \frac{15}{16}$, $n \ge \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} M_4} = \sqrt[4]{\frac{3^5}{180\cdot 10^{-3}} \cdot \frac{15}{16}}$ =5,9645. Pri zaokrúhlení hore na párne číslo dostávame, že $n = 6$ a $h = \frac{4-1}{6} = 0{,}5$. Približnú hodnotu integrálu vypočítame na základe vzťahu

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{k} f(a + (2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f(a + 2i\,h) \right),\ k = \frac{n}{2}.$$

Teda $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx \approx \frac{0{,}5}{3}\left(\sqrt{1} + \sqrt{4} + 4\sum_{i=1}^{3} \sqrt{1 + (2i-1)0{,}5} + 2\sum_{i=1}^{2} \sqrt{1 + 2i\,0{,}5} \right) = 4{,}6665626$.

Úlohy:

Pre zadaný počet n delení vypočítajte lichobežníkovou metódou integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ a odhadnite chybu výpočtu.

5.1.

$$\int_1^5 \frac{dx}{x}, \quad n=10$$

$[1{,}622039]$

5.2.

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+5x}, \quad n=4$$

$[0{,}198607]$

5.3.

$$\int_0^{10} \frac{dx}{1+x^2}, \quad n=10$$

$[1{,}476842]$

5.4.

$$\int_4^{6{,}4} \ln x\,dx, \quad n=6$$

$[3{,}933881]$

5.5.

$$\int_0^{1{,}2} \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx, \quad n=6$$

$[-0{,}425794]$

5.6.

$$\int_2^6 \ln(x^3+1)\,dx, \quad n=8$$

$[16{,}183535]$

5.7.

$$\int_0^2 e^{x^2}\,dx, \quad n=10$$

$[17{,}170212]$

5.8.

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x+1}\,dx, \quad n=10$$

$[0{,}181064]$

5.9.

$$\int_0^1 \cos x^2 \, dx \;, \quad n = 8$$

$[0{,}902333]$

Pre zadaný počet n delení vypočítajte Simpsonovou metódou integrál $\int_a^b f(x)\, dx$ a urobte odhad chyby výpočtu.

5.10.

$$\int_0^5 \frac{dx}{1+x} \;, \quad n = 10$$

$[1{,}793170]$

5.11.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx \;, \quad n = 10$$

$[1{,}125387]$

5.12.

$$\int_0^{2,4} \ln(1+x^2)\, dx \;, \quad n = 6$$

$[2{,}138582]$

5.13.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x+1} dx \;, \quad n = 10$$

$[0{,}284225]$

5.14.

$$\int_0^1 \sin(1+x^2)\, dx \;, \quad n = 10$$

$[0{,}928765]$

5.15.

$$\int_1^2 \cos x^2 \, dx \;, \quad n = 10$$

$[-0{,}443081]$

5.16.

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x^2}}\,dx\,, \quad n=4$$

$[1{,}687673]$

5.17.

$$\int_0^2 e^{3-x^2}\,dx\,, \quad n=8$$

$[17{,}716761]$

Lichobežníkovou metódou vypočítajte daný integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ tak, aby ste dosiahli zadanú presnosť ε.

5.18.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\,, \quad \varepsilon = 0{,}001$$

$[n=13;\ 0{,}693517]$

5.19.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}\,, \quad \varepsilon = 0{,}001$$

$[n=8;\ 0{,}834670]$

5.20.

$$\int_1^{10} \sqrt{x}\,dx\,, \quad \varepsilon = 0{,}05$$

$[n=3;\ 20{,}180670]$

5.21.

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx\,, \quad \varepsilon = 0{,}05$$

$[n=7;\ 1{,}471866]$

5.22.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \quad \varepsilon = 0{,}01$$

$[n=6;\ 0{,}745119]$

5.23.

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x^2}}\,dx\ , \quad \varepsilon = 0{,}001$$

$[n = 11;\ 2{,}270077]$

5.24.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x+1}\,dx\ , \quad \varepsilon = 0{,}001$$

$[n = 14;\ 0{,}283827]$

5.25.

$$\int_0^1 \cos(1 - x^2)\,dx\ , \quad \varepsilon = 0{,}01$$

$[n = 7;\ 0{,}749805]$

Simpsonovou metódou vypočítajte daný integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ tak, aby ste dosiahli zadanú presnosť ε.

5.26.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\ , \quad \varepsilon = 0{,}001$$

$[n = 6;\ 0{,}693170]$

5.27.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}\ , \quad \varepsilon = 0{,}001$$

$[n = 6;\ 0{,}828434]$

5.28.

$$\int_1^5 \sqrt{x}\,dx\ , \quad \varepsilon = 0{,}01$$

$[n = 8;\ 6{,}786788]$

5.29.

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx\ , \quad \varepsilon = 0{,}01$$

$[n = 6;\ 1{,}462873]$

5.30.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \quad \varepsilon = 0{,}0001$$

$[n = 8;\ 0{,}746826]$

5.31.

$$\int_2^4 \ln(x+2)\,dx\ , \quad \varepsilon = 0{,}0001$$

$[n = 6;\ 3{,}205378]$

5.32.

$$\int_0^1 \sin x^2\ dx\ , \quad \varepsilon = 0{,}001$$

$[n = 6;\ 0{,}310205]$

5.33.

$$\int_0^1 \cos x^2\ dx\ , \quad \varepsilon = 0{,}0001$$

$[n = 10;\ 0{,}904524]$

6. Numerické riešenie diferenciálnych rovníc a ich sústav

Riešené príklady:

Príklad 6.1. Cauchyho úlohu $y' = 1 + 2(y - x)$, $y(0) = 1$ riešte na intervale $\langle 0{,}0.2 \rangle$ najprv Eulerovov a potom Heunovov metódou s krokom $h = 0.1$. Výsledky porovnajte s hodnotami presného riešenia danej úlohy.

Riešenie: Použijeme rekurentný vzorec Eulerovej metódy

$y_{i+1} = y_i + k_1$, kde

$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$ a $f(x, y) = 1 + 2(y - x)$.

Teda

$y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1(1 + 2) = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$,

$y_2 = y_1 + h\,f(x_1, y_1) = 1{,}3 + 0{,}34 = 1{,}64$.

Porovnanie približne vypočítaných hodnôt y_i riešenia s hodnotami $y(x_i)$ presného riešenia je uvedené v tabuľke

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$e_i = \lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	1	1	0
1	0,1	1,3	1,3214	0,0214
2	0,2	1,64	1,6918	0,0518

Ukážeme, že Heunova metóda je oveľa presnejšia ako predchádzajúca Eulerova metóda. Jedinou nevýhodou použitia Heunovej metódy v porovnaní s Eulerovou metódou je zložitejší rekurentný vzorec, ktorý obsahuje o jednu smernicu viac ako rekurentný vzorec Eulerovej metódy. Vypočítame približné hodnoty y_i riešenia Cauchyho úlohy pomocou rekurentného vzorca Heunovej metódy

$y_{i+1} = y_i + \dfrac{k_1 + k_2}{2}$, kde

$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$, $k_2 = h\,f(x_i + h, y_i + k_1)$.

Porovnanie približne vypočítaných hodnôt y_i riešenia s hodnotami $y(x_i)$ presného riešenia Cauchyho úlohy je uvedené v tabuľke

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$e_i = \lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0	1	1	0
1	0,1	1,32	1,3214	0,0014
2	0,2	1,6884	1,6918	0,0034

Príklad 6.2. Cauchyho úlohu

$$y' = (xy - 5)e^{2x+3}, \quad y(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}2 \rangle$ s krokom $h = 0{,}1$ metódou Rungeho-Kutta 4. rádu.

Riešenie: Použijeme rekurentný vzorec metódy Rungeho-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ kde}$$

$$k_1 = h\,f(x_i, y_i),\ k_2 = h\,f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = h\,f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}),\ k_4 = h\,f(x_i + h, y_i + k_3).$$

Vypočítané jednotlivé smernice k_i, $i = 1,2,3,4$ a približné hodnoty y_i riešenia Cauchyho úlohy sú uvedené v tabuľke

i	x_i	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	1	−10,042768	−11,545308	−11,628692	−14,873752
1	0,1	−10,87742	−14,934772	−21,016962	−22,253744	−34,836960
2	0,2	−33,596279				

Príklad 6.3. Cauchyho úlohu

$$y' = 2y - z + \sin x, \qquad y(0) = 2,$$
$$z' = -5y - 2z + x^2, \qquad z(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}3\rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4. rádu s krokom $h = 0{,}1$.

Riešenie: Približné riešenie tejto Cauchyho úlohy pre systémy obyčajných diferenciálnych rovníc vypočítame pomocou sústavy rekurentných vzorcov metódy Rungeho – Kutta 4. rádu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \text{ kde}$$

$$k_1 = h\,f(x_i, y_i, z_i),\ k_2 = h\,f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{m_1}{2}),$$

$$k_3 = h\,f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{m_2}{2}),\ k_4 = h\,f(x_i + h, y_i + k_3, z_i + m_3),$$

$$m_1 = h\,g(x_i, y_i, z_i),\ m_2 = h\,g(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{m_1}{2}),$$

$$m_3 = h\,g(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{m_2}{2}),\ m_4 = h\,g(x_i + h, y_i + k_3, z_i + m_3).$$

Vypočítané jednotlivé hodnoty smerníc k_i, $i = 1,2,3,4$ sú uvedené v prvej tabuľke, jednotlivé hodnoty smerníc m_i, $i = 1,2,3,4$ sú uvedené v druhej tabuľke a približné hodnoty y_i a z_i riešenia Cauchyho úlohy sú uvedené v tretej tabuľke.

i	x_i	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	0,3	0,394998	0,402235	0,508733
1	0,1	0,507408	0,621340	0,633191	0,764063
2	0,2	0,762523	0,905561	0,923092	1,090037

i	x_i	m_1	m_2	m_3	m_4
0	0	−1,2	−1,154750	−1,183025	−1,163513
1	0,1	−1,164631	−1,173770	−1,201339	−1,237959
2	0,2	−1,238249	−1,302804	−1,332108	−1,428373

i	x_i	y_i	z_i
0	0	2	1
1	0,1	2,400533	−0,173177
2	0,2	3,030622	−1,365312
3	0,3	3,948933	−2,688053

Príklad 6.4. Cauchyho úlohu

$$y''+2y'-xy=\sin x\,,\quad y(0)=1\,,\quad y'(0)=1$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}5\rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4. rádu s krokom $h=0{,}1$.

Riešenie: Uvedenú diferenciálnu rovnicu prepíšeme na systém diferenciálnych rovníc. Teda položíme $y'=z$, potom $y''=z'$ a dostávame systém diferenciálnych rovníc

$y'=z$,

$z'=xy-2z+\sin x$.

Začiatočne podmienky Cauchyho úlohy po tejto trasformácii majú tvar $y(0)=1$ a $z(0)=1$. Teraz môžeme podobne ako v predchádzajúcom príklade približné riešenie Cauchyho úlohy pre systémy diferenciálnych rovníc vypočítať už pomocou známej sústavy vzorcov metódy Rungeho - Kutta 4. rádu

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),$$

$$z_{i+1}=z_i+\frac{1}{6}(m_1+2m_2+2m_3+m_4),\quad \text{kde}$$

$$k_1=h\,f(x_i,y_i,z_i),\ k_2=h\,f(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_1}{2},z_i+\frac{m_1}{2}),$$

$$k_3=h\,f(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_2}{2},z_i+\frac{m_2}{2}),\ k_4=h\,f(x_i+h,y_i+k_3,z_i+m_3),$$

$$m_1=h\,g(x_i,y_i,z_i),\ m_2=h\,g(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_1}{2},z_i+\frac{m_1}{2}),$$

$$m_3=h\,g(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_2}{2},z_i+\frac{m_2}{2}),\ m_4=h\,g(x_i+h,y_i+k_3,z_i+m_3).$$

Vypočítané jednotlivé hodnoty smerníc k_i, $i=1,2,3,4$ sú uvedené v prvej tabuľke, jednotlivé hodnoty smerníc m_i, $i=1,2,3,4$ a približné hodnoty z_i sú uvedené v druhej tabuľke. Približné hodnoty y_i riešenia pôvodnej Cauchyho úlohy sú uvedené v tretej tabuľke.

i	x_i	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	0,1	0,09	0,091512	0,082720
1	0,1	0,082839	0,07560	0,076876	0,070652
2	0,2	0,070753	0,065839	0,066910	0,062846
3	0,3	0,062932	0,059967	0,060864	0,058612
4	0,4	0,058683	0,057351	0,058102	0,057367

i	x_i	z_i	m_1	m_2	m_3	m_4
0	0	1	−0,2	−0,169752	−0,172802	−0,144541
1	0,1	0,828392	−0,144785	−0,119270	−0,121876	−0,098080
2	0,2	0,707532	−0,098292	−0,076868	−0,079072	−0,059112
3	0,3	0,629318	−0,059295	−0,041357	−0,043203	−0,026491
4	0,4	0,586834	−0,026648	−0,011636	−0,013167	0,000835

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0,1	1,090957
2	0,2	1,167364
3	0,3	1,233880
4	0,4	1,294415
5	0,5	1,352240

Úlohy:

6.1.

Cauchyho úlohu

$$y' = xy, \quad y(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0,5 \rangle$ Eulerovou metódou s krokom $h = 0,1$.

0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	1	1,01	1,0302	1,061106	1,103550

6.2.

Cauchyho úlohu

$$y' = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0,5 \rangle$ Eulerovou metódou s krokom $h = 0,1$.

0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	1	1,01	1,029802	1,058934	1,096708

6.3.

Cauchyho úlohu

$$y' = \frac{x}{y^2} - 1, \qquad y(1) = 1$$

riešte na intervale $\langle 1;1,4 \rangle$ Eulerovou metódou s krokom $h = 0,1$.

1	1,1	1,2	1,3	1,4
1	1	1,01	1,027636	1,050738

6.4.

Cauchyho úlohu

$$y' = \frac{\cos y}{1.5 + x} + 0.1 y^2, \qquad y(0) = 0$$

riešte na intervale $\langle 0;0,3 \rangle$ Eulerovou metódou s krokom $h = 0,1$.

0	0,1	0,2	0,3
0	0,066667	0,129072	0,187573

6.5.

Cauchyho úlohu

$$y' = y^2 e^x - 2y, \qquad y(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0,3 \rangle$ Eulerovou metódou s krokom $h = 0,1$.

0	0,1	0,2	0,3
1	0,9	0,809519	0,727656

6.6.

Cauchyho úlohu

$$y' = xy, \qquad y(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0,3 \rangle$ Heunovou metódou s krokom $h = 0,1$.

0	0,1	0,2	0,3
1	1,005	1,020175	1,045986

6.7.

Cauchyho úlohu

$$y' = y^2 e^x - 2y, \qquad y(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0,3 \rangle$ Heunovou metódou s krokom $h = 0,1$.

0	0,1	0,2	0.3
1	0,904759	0,818582	0.740606

6.8.

Cauchyho úlohu

$$y' = x^2(1+y), \qquad y(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}3\rangle$ Heunovou metódou s krokom $h = 0{,}1$.

0	0,1	0,2	0,3
1	1,001	1,006007	1,019082

6.9.

Cauchyho úlohu

$$y' = \frac{\cos y}{1.5 + x} + 0.1y^2, \qquad y(0) = 0$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}3\rangle$ Heunovou metódou s krokom $h = 0{,}1$.

0	0,1	0,2	0,3
0	0,064536	0,124998	0,181738

6.10.

Cauchyho úlohu

$$y' = x^2(1+y), \qquad y(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}3\rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0{,}1$.

0	0,1	0,2	0,3
1	1,000667	1,005340	1,018081

6.11.

Cauchyho úlohu

$$y' = y^2 - 3xy, \qquad y(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}3\rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0{,}1$.

0	0,1	0,2	0,3
1	1,093964	1,171454	1,225463

6.12.

Cauchyho úlohu

$$y' = \frac{xy - x}{y + x^2}, \qquad y(1) = 0$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}3\rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0{,}1$.

0	0,1	0,2	0,3
1	−0,104999	−0,219998	−0,344997

6.13.

Cauchyho úlohu

$$y' = \frac{1}{2y^2 - x}, \qquad y(1) = 0$$

riešte na intervale $\langle 1;1{,}3\rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0{,}1$.

1	1,1	1,2	1,3
0	−0,095857	−0,186067	−0,273559

6.14.

Cauchyho úlohu

$$y' = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x}\ln x, \qquad y(1) = 1$$

riešte na intervale $\langle 1;1{,}4 \rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0{,}2$.

1	1,2	1,4
1	0,845784	0,748228

6.15.

Cauchyho úlohu

$$y' = -(y+1)\cos x, \qquad y(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}2 \rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0{,}1$.

0	0,1	0,2
1	0,809976	0,639642

6.16.

Cauchyho úlohu

$$y' = y^2 - 4y + 5\sin(3x), \qquad y(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}05 \rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4. rádu s krokom $h = 0{,}05$.

0	0,05
1	0,875641

6.17.

Cauchyho úlohu

$$y' = \frac{2y}{x} + \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}, \qquad y(0.5) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0{,}5;0{,}6 \rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4. rádu s krokom $h = 0{,}05$.

0,5	0,55	0,6
1	0,609284	0,730593

6.18.

Cauchyho úlohu

$$y' = y + z, \qquad y(0) = 1,$$
$$z' = y + e^x + 1, \qquad z(0) = 0$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}3 \rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0{,}1$.

x_i	0	0,1	0,2	0,3
y_i	1	1,121046	1,288781	1,511104
z_i	0	0,310863	0,647165	1,015123

6.19.

Cauchyho úlohu

$$y' = y + z, \qquad y(0) = 0,$$
$$z' = y - z + e^x, \qquad z(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}3\rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0{,}1$.

x_i	0	0,1	0,2	0,3
y_i	0	0,105513	0,224218	0,359660
z_i	1	1,010017	1,040268	1,091358

6.20.

Cauchyho úlohu

$$y' = y + z, \qquad y(0) = 1,$$
$$z' = y - z + xe^x, \qquad z(0) = 0$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}3\rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0{,}1$.

x_i	0	0,1	0,2	0,3
y_i	1	1,110525	1,244424	1,405722
z_i	0	0,105513	0,224219	0,359662

6.21.

Cauchyho úlohu

$$y' = x + z, \qquad y(0) = 0,$$
$$z' = -y - 2z + x\cos x, \qquad z(0) = 2$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}3\rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0{,}1$.

x_i	0	0,1	0,2	0,3
y_i	0	0,186729	0,353135	0,507099
z_i	2	1,651075	1,390204	1,199557

6.22.

Cauchyho úlohu

$$y' = z + \sin x, \qquad y(0) = 2,$$
$$z' = -y - 2z + x, \qquad z(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0{,}3\rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0{,}1$.

x_i	0	0,1	0,2	0,3
y_i	2	2,086275	2,149777	2,196616
z_i	1	0,637908	0,343814	0,107159

6.23.

Cauchyho úlohu

$$y' = z - y + \sin x, \qquad y(0) = 2,$$
$$z' = y - 2z + \cos x, \qquad z(0) = 2$$

riešte na intervale $\langle 0;0,3 \rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0,1$.

x_i	0	0,1	0,2	0,3
y_i	2	2,000300	2,002181	2,006658
z_i	2	1,909216	1,834060	1,771000

6.24.

Cauchyho úlohu

$$y'' - y = e^x + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

riešte na intervale $\langle 0;0,3 \rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0,1$.

0	0,1	0,2	0,3
1	1,015183	1,061606	1,140895

6.25.

Cauchyho úlohu

$$y'' + y' - y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0,3 \rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0,1$.

0	0,1	0,2	0,3
0	0,100329	0,202610	0,308739

6.26.

Cauchyho úlohu

$$y'' + y' - y = xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

riešte na intervale $\langle 0;0,3 \rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0,1$.

0	0,1	0,2	0,3
1	1,100333	1,202679	1,309100

6.27.

Cauchyho úlohu

$$y'' + 2y' + y = x\cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

riešte na intervale $\langle 0;0,3 \rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0,1$.

0	0,1	0,2	0,3
0	0,181125	0,328691	0,448316

6.28.

Cauchyho úlohu

$$y'' + y = \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

riešte na intervale $\langle 0;0,3 \rangle$ štandardnou metódou Rungeho – Kutta 4.rádu s krokom $h = 0,1$.

0	0,1	0,2	0,3
1	1,194837	1,378733	1,550836

7. Náhodné javy a pravdepodobnosť

Riešené príklady:

Príklad 7.1. Koľko rôznych hláskových zoskupení s desiatimi písmenami môžeme zostaviť z písmen slova MATEMATIKA?

Riešenie: Použijeme vzorec pre permutácie s opakovaním: $P'_{n_1,n_2,\dots,n_k}(n)=\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$,

kde základný súbor má n_1 prvkov jedného druhu, n_2 prvkov druhého druhu, ... , až n_k prvkov k-tého druhu, pričom $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$.

Poznámka: V prípade, že sa každý prvok vyskytne len raz, dostaneme vzorec pre permutácie (bez opakovania): $P(n)=n!$.

V našom príklade sa písmeno A vyskytuje trikrát, písmená M a T dvakrát, písmená E, I a K raz. Dostaneme: $\dfrac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=151\ 200$.

Príklad 7.2. Na telefónnom vedení, spájajúcom miesta M_1 a M_2, ktoré sú od seba vzdialené 4 km, dôjde k prerušeniu. Určte pravdepodobnosť toho, že sa vedenie preruší v prvých 500 m od miesta M_1 za predpokladu, že prerušenie je rovnako možné na ktoromkoľvek úseku.

Riešenie: Označíme A jav, pozostávajúci v prerušení vedenia v prvých 500 m. Uvažujme, že celé vedenie je rozdelené na úseky o dĺžke 1 m. Vykonávame takto diskretizáciu spojitého modelu. Potom celkový počet elementárnych výsledkov je n = 4 000, počet elementárnych výsledkov priaznivých javu A je m = 500. Použitím *klasickej definície pravdepodobnosti* dostávame: $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{500}{4\,000}=0{,}125$.

Príklad 7.3. Aká je pravdepodobnosť toho, že troma hracími kockami hodíme na prvý raz tri rovnaké čísla?

Riešenie: Označíme A jav, že troma hracími kockami hodíme na prvý raz tri rovnaké čísla. Počet všetkých rovnako pravdepodobných možností ako dosiahnuť výsledky na troch kockách vypočítame pomocou vzorca pre variácie s opakovaním: $V'(n,k)=n^k$.

Teda $n=6^3=216$.

Priaznivé možnosti sú: [1,1,1], [2,2,2], [3,3,3], [4,4,4], [5,5,5], [6,6,6], teda ich počet je m = 6.

Potom použitím *klasickej definície pravdepodobnosti* dostaneme: $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{6}{216}=\dfrac{1}{36}$.

Príklad 7.4. Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybrané nanajvýš štvorciferné číslo zostavené len z číslic 1, 2, 3, 5 je deliteľné dvomi? Predpokladáme, že žiadna z číslic sa v zostavenom čísle neopakuje.

Riešenie: Označme A jav, že náhodne vybrané nanajvýš štvorciferné číslo zostavené len z číslic 1, 2, 3, 5 je deliteľné dvomi (žiadna z číslic sa v zostavenom čísle neopakuje).

Použijeme vzorec pre variácie bez opakovania: $V(n,k)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Počet všetkých možností bude: $n=V(4,1)+V(4,2)+V(4,3)+V(4,4)=4+12+24+24=64$.

Počet priaznivých možností bude: $m=1+V(3,1)+V(3,2)+V(3,3)=1+3+6+6=16$.

Teda dostávame: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{16}{64}=0{,}25$.

Úloha sa dá riešiť aj jednoduchšie. Číslo bude deliteľné dvomi práve vtedy, keď posledná cifra bude 2. To je jedna zo štyroch rovnako pravdepodobných možností.

Príklad 7.5. Aká je pravdepodobnosť toho, že z troch náhodne vybraných úsečiek možno zostrojiť trojuholník, ak sú dané úsečky o dĺžkach 1, 3, 5, 7, 9 jednotiek?

Riešenie: Označme A jav, že z troch náhodne vybraných úsečiek možno zostrojiť trojuholník, ak sú dané úsečky o dĺžkach 1, 3, 5, 7, 9 jednotiek (každú môžeme použiť nanajvýš raz). Celkový počet elementárnych výsledkov n vypočítame podľa vzorca pre kombinácie bez opakovania: $C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$. Potom bude: $n=\binom{5}{3}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$.

Aby sme mohli zostrojiť trojuholník, musí platiť trojuholníková nerovnosť, teda súčet jeho dvoch strán musí byt väčší ako tretia strana. V našom prípade to platí pre tieto trojice: [3,5,7], [5,7,9], [3,7,9]. Teda počet elementárnych výsledkov priaznivých javu A je $m = 3$. Použitím *klasickej definície pravdepodobnosti* dostaneme: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$.

Príklad 7.6. Medzi 100 výrobkami je práve 5 nepodarkov. Pritom ich nemôžeme vytriediť, lebo nemáme potrebný merací prístroj a chceme okamžite použiť 60 výrobkov pre ďalšie spracovanie. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi týmito šesťdesiatimi výrobkami, ktoré si náhodne vyberieme, bude práve k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 nepodarkov?

Riešenie: Označme A_k jav, pozostávajúci z výberu k nepodarkov zo 60 náhodne vybraných výrobkov, kde k = 0, 1, ... , 5. Celkový počet elementárnych výsledkov je $n=\binom{100}{60}$, počet elementárnych výsledkov priaznivých danému javu je $m=\binom{5}{k}\cdot\binom{95}{60-k}$. Dostávame:

$$P(A_k)=\frac{m}{n}=\frac{\binom{5}{k}\cdot\binom{95}{60-k}}{\binom{100}{60}}.$$

Po vyčíslení dostaneme tieto výsledky:

k	0	1	2	3	4	5
$P(A_k)$	0,0087	0,0728	0,2323	0,3545	0,2591	0,0725

Poznámka: V kapitolách 7 – 12 budeme uvádzať výsledky zaokrúhlené na 4 desatinné miesta. Ak obdržíme výsledok 0,0000, tak použijeme zápis s vyššou presnosťou (pravdepodobnosť nemožného javu $\emptyset$ je rovná 0).

Príklad 7.7. V lotérii sa ťahá 6 čísel zo 49. Hráč vopred tipuje 6 čísel. Aká je pravdepodobnosť toho, že hráč uhádne práve k = 0, 1, ... ,6 čísel spomedzi šiestich vytiahnutých?

Riešenie: Označme A_k jav, pozostávajúci z uhádnutia k čísel, kde $k = 0, 1, \dots , 6$. Použitím *klasickej definície pravdepodobnosti* dostávame: $P(A_k) = \dfrac{\binom{6}{k}\cdot\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$.

Po vyčíslení dostaneme tieto výsledky:

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(A_k)$	0,4360	0,4130	0,1324	0,0177	0,0010	$1{,}845\cdot10^{-5}$	$7{,}1511\cdot10^{-8}$

Príklad 7.8. Určte pravdepodobnosť toho, že číslo, náhodne zvolené spomedzi celých čísel 1 až 90, je deliteľné troma alebo štyrmi.

Riešenie: Jav, že zvolené číslo bude deliteľné troma, označíme písmenom A, jav, že zvolené číslo bude deliteľné štyrmi, označíme písmenom B. Javy A, B sú *zlúčiteľné*, môžu nastať súčasne. Pre pravdepodobnosť *zjednotenia* dvoch javov platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Počet všetkých za sebou idúcich čísel je 90. Troma je deliteľné každé tretie. Teda $P(A) = \dfrac{30}{90}$.

Štyrmi je deliteľné každé štvrté. Prvé také číslo je 4, posledné 88. Teda $P(B) = \dfrac{22}{90}$.

Čísla deliteľné troma aj štyrmi sú: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84. Teda je to každé dvanáste číslo.

Potom bude platiť: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{30+22-7}{90} = \dfrac{45}{90} = \dfrac{1}{2}$.

Príklad 7.9. V zásielke je 90 % štandardných výrobkov, medzi ktorými je 65 % výrobkov mimoriadnej kvality. Určte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný výrobok je mimoriadnej kvality.

Riešenie: Jav, že náhodne vybraný výrobok je mimoriadnej kvality, označíme písmenom A, jav, že náhodne vybraný výrobok je štandardný, označíme písmenom B. Podľa podmienok úlohy platí: $P(B) = 0{,}9$; $P(A \mid B) = 0{,}65$. Máme vypočítať pravdepodobnosť $P(A)$. Použijeme definíciu *podmienenej pravdepodobnosti. Podmienená pravdepodobnosť javu A za podmienky B* je definovaná takto:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

V prípade $P(B) = 0$ nie je $P(A \mid B)$ definovaná.

V našom prípade platí, že jav A je podjavom javu B:

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad A \cap B = A \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A).$$

Teda dostaneme: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0{,}65 \cdot 0{,}9 = 0{,}585.$

Príklad 7.10. Prístroje, ktoré majú istú výrobnú chybu, sa v záručnej dobe pokazia v 60 % prípadov. Z ostatných prístrojov sa pokazí len 5 %. Výrobca dodáva 1 % výrobkov s uvedenou chybou. Určte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný prístroj sa v záručnej dobe pokazí.

Riešenie: Označme A jav, že náhodne vybraný prístroj sa v záručnej dobe pokazí, H_1 jav, že prístroj je chybný a H_2 jav, že je bezchybný. Javy H_1 a H_2 (*hypotézy*) tvoria *úplný systém nezlúčiteľných* (*disjunktných*) javov, t. j. $H_1 \cup H_2 = I$ a $H_1 \cap H_2 = \varnothing$, kde I je istý jav a $\varnothing$ je nemožný jav. Použijeme *vetu o úplnej pravdepodobnosti*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i).$$

Na základe pomienok úlohy platí:
$P(H_1) = 0{,}01$; $P(H_2) = 0{,}99$; $P(A \mid H_1) = 0{,}6$; $P(A \mid H_2) = 0{,}05$. Teda dostaneme:
$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) = 0{,}01 \cdot 0{,}6 + 0{,}99 \cdot 0{,}05 = 0{,}0555$.

Príklad 7.11. V sklade výrobného podniku sa nachádzajú výrobky pochádzajúce od troch strojov v pomere 2 : 3 : 1. Pravdepodobnosť produkcie výrobku 1. kvality je pri jednotlivých strojoch rovná 0,7; 0,6 a 0,8. Zo skladu náhodne vyberieme 1 výrobok. Aká je pravdepodobnosť toho, že je 1. kvality?

Riešenie: Označme A jav, že výrobok je 1. kvality a javy H_1, H_2, H_3, že náhodne vybraný výrobok vyrobil i-ty stroj, kde i = 1, 2, 3. Použijeme *vetu o úplnej pravdepodobnosti.* Príslušné pravdepodobnosti *hypotéz* vypočítame na základe faktu, že tvoria *úplný systém nezlúčiťeľných javov*, a teda súčet ich pravdepodobností musí byť 1, pričom berieme do úvahy daný pomer strojov. Podmienené pravdepodobnosti ľahko zistíme z textu úlohy. Dostaneme:

$$P(H_1) = \frac{2}{6},\ P(H_2) = \frac{3}{6},\ P(H_3) = \frac{1}{6},\ P(A \mid H_1) = 0{,}7;\ P(A \mid H_2) = 0{,}6;\ P(A \mid H_3) = 0{,}8.$$

Teda výsledok bude: $P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) = \frac{2}{3}$.

Príklad 7.12. V sérii dvadsiatich výrobkov možno nájsť s rovnakou pravdepodobnosťou 0, 1, 2, 3 chybné výrobky a iný počet chybných nie je možný. Aká je pravdepodobnosť toho, že keď z danej série náhodne vyberieme dva výrobky, tak všetky budú dobré?

Riešenie: Označme A jav, že všetky 2 náhodne vybrané výrobky z danej série sú dobré, javy H_0, H_1, H_2, H_3, že v sérii je i chybných výrobkov, kde i = 0, 1, 2, 3. Použijeme *vetu o úplnej pravdepodobnosti.* Javy H_i tvoria *úplný systém nezlúčiteľných javov*, pričom $P(H_i) = 1/4$. Pre podmienené pravdepodobnosti dostávame:

$$P(A \mid H_i) = \frac{\binom{20-i}{2} \cdot \binom{i}{0}}{\binom{20}{2}}.$$ Po vyčíslení dostaneme tieto výsledky:

$P(A \mid H_1) = 1$, $P(A \mid H_2) = 0{,}9$; $P(A \mid H_3) = 0{,}8053$ a $P(A \mid H_4) = 0{,}7158$.

Výsledná pravdepodobnosť teda bude: $P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) = 0{,}8553$.

Príklad 7.13. Prístroj z príkladu **7.10.** sa pokazil. Aká je pravdepodobnosť toho, že mal výrobnú chybu?

Riešenie: Použijeme *Bayesov vzorec*:

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}.$$

Počítame podmienenú pravdepodobnosť:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)} = \frac{0{,}006}{0{,}0555} = 0{,}1081.$$

Príklad 7.14. Pravdepodobnosť toho, že pacient má niektorú z dvoch navzájom sa vylučujúcich chorôb, je pre jednotlivé choroby 0,002 a 0,015. Pozitívny výsledok istého vyšetrenia má 70 % chorých na prvú chorobu, 30 % chorých na druhú chorobu a 5 % zdravých. Aké sú pravdepodobnosti jednotlivých chorôb, resp. toho, že pacient je zdravý, ak bol výsledok vyšetrenia pacienta pozitívny?

Riešenie: Označme A jav, že výsledok vyšetrenia je pozitívny, javy H_0, H_1, H_2, že pacient má i-tu chorobu, kde i = 0, 1, 2, pričom index 0 znamená, že pacient je zdravý. Použijeme *Bayesov vzorec*. Javy H_i tvoria *úplný systém nezlúčiteľných javov*, preto pravdepodobnosť toho, že pacient je zdravý bude $P(H_0) = 1 - P(H_1) - P(H_2) = 1 - 0{,}002 - 0{,}015 = 0{,}983$.

Príslušné podmienené pravdepodobnosti $P(A \mid H_i)$ ľahko zistíme z textu úlohy:

$P(A \mid H_0) = 0{,}05$; $P(A \mid H_1) = 0{,}7$; $P(A \mid H_2) = 0{,}3$.

Teda postupne dostaneme:

$$P(H_0 \mid A) = \frac{P(H_0) \cdot P(A \mid H_0)}{P(H_0) \cdot P(A \mid H_0) + P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)} = \frac{0{,}04915}{0{,}05505} = 0{,}8928;$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}0014}{0{,}05505} = 0{,}0254;$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}0045}{0{,}05505} = 0{,}0817.$$

Príklad 7.15. Z 200 procesorov je 130 štandardných a 70 mimoriadnej kvality. Zo štandardných procesorov bolo 80 vyrobených na 1. stroji a 50 na 2. stroji, z procesorov mimoriadnej kvality bolo 40 vyrobených na 1. stroji a 30 na 2. stroji. Náhodne vyberáme jeden procesor. Nech jav A znamená, že vybraný procesor je štandardný a jav B, že bol vyrobený na 1. stroji. Sú javy A, B vzájomne nezávislé?

Riešenie: Použijeme definíciu vzájomnej nezávislosti javov: dva javy A a B sú *vzájomne nezávislé* práve vtedy, keď nastane aspoň jeden z týchto štyroch prípadov:

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \vee \quad P(B) = 0 \quad \vee \quad P(B \mid A) = P(B) \quad \vee \quad P(A) = 0.$$

Poznámka: V ďalšom texte budeme vynechávať prívlastok „vzájomne“ a budeme hovoriť o nezávislých javoch.

V našom prípade platí: $P(A) = \frac{130}{200}$, $P(B) = \frac{120}{200}$, $P(A \mid B) = \frac{80}{120}$, $P(B \mid A) = \frac{80}{130}$.

Pretože $P(A \mid B) \neq P(A)$, $P(B \mid A) \neq P(B)$, sú javy A, B *závislé.*

Príklad 7.16. Nech náhodný pokus spočíva vo vytiahnutí jednej karty zo sady 32 kariet, nech A znamená jav, že vytiahnutá karta je „srdcová" a B nech je jav, že vytiahnutá karta je „kráľ". Aké sú pravdepodobnosti javov A, B, $A \cap B$? Sú javy A, B nezávislé?

Riešenie: Platí veta: Javy A, B sú nezávislé práve vtedy, keď $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.

V našom prípade $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{32} = P(A) \cdot P(B)$ $\Rightarrow$ javy A, B sú *nezávislé.*

Pravdepodobnosť javu A podmienená javom B je $P(A \mid B) = P(A) = \frac{1}{4}$.

Priamym výpočtom podľa definície *podmienenej pravdepodobnosti* bude platiť to isté:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{4}{32}} = \frac{1}{4}.$$

Príklad 7.17. Kontrolný systém pozostáva z troch nezávislých modulov. Pravdepodobnosti zlyhania jednotlivých modulov pri istej operácii sú postupne 0,05; 0,03; 0,07. Určte pravdepodobnosť zlyhania modulov: a) všetkých, b) žiadneho, c) aspoň jedného, d) nanajvýš dvoch.

Riešenie: Označme javy A_1, A_2, A_3, že zlyhá príslušný modul. Podľa podmienok úlohy platí, že dané javy sú *nezávislé* a tiež poznáme pravdepodobnosti:
$P(A_1) = 0{,}05$; $P(A_2) = 0{,}03$; $P(A_3) = 0{,}07$.

a) Platí veta: Systém javov $A_1, A_2, \ldots, A_n; n \geq 2$ je celkove nezávislým práve vtedy, keď je splnená podmienka $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

Označme jav A, že všetky moduly zlyhajú. Platí: $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Keďže javy A_1, A_2, A_3 sú *nezávislé*, pre pravdepodobnosť ich *prieniku* bude platiť:
$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}05 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}07 = 0{,}0001$.

b) Označme jav B, že žiaden modul nezlyhá. Platí: $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$. Keďže javy A_1, A_2, A_3 sú *nezávislé*, aj javy k nim *opačné* sú *nezávislé.*

Platí teda: $P(B) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 0{,}95 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}93 = 0{,}8570$.

c) Označme jav C, že zlyhá aspoň jeden modul. Jav C je *opačný* k javu B, bude teda platiť:
$P(C) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}8570 = 0{,}1430$.

Použili sme jednu zo základných vlastností klasickej pravdepodobnosti.

d) Označme jav D, že zlyhajú nanajvýš dva moduly, to znamená, že zlyhajú: žiaden (jav B) alebo jeden (jav K) alebo dva moduly (jav L). Javy B, K, L sú *disjunktné* (nemôžu nastať súčasne). Použijeme vlastnosť *aditívnosti* pravdepodobnosti. Keďže ide o *zjednotenie disjunktných* javov, platí vzťah: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Platí teda: $P(D) = P(B \cup K \cup L) = P(B) + P(K) + P(L)$. Ďalej platí:
$K = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$,

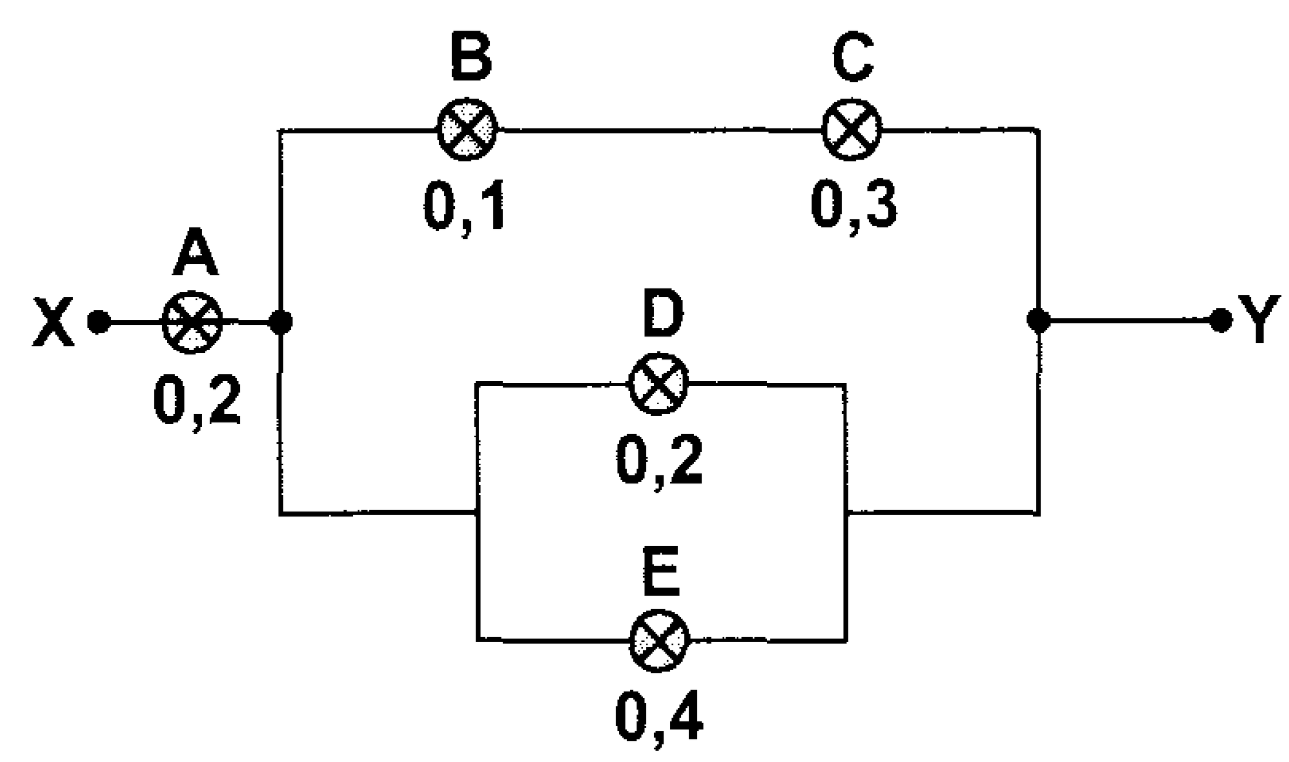
$L = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$,

$P(B) = 0{,}8570$; $P(K) = 0{,}05 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}93 + 0{,}95 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}93 + 0{,}95 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}07 = 0{,}1361$;

$P(L) = 0{,}05 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}93 + 0{,}05 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}07 + 0{,}95 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}07 = 0{,}0068$.

Potom bude: $P(D) = 0{,}8570 + 0{,}1361 + 0{,}0068 = 0{,}9999$. Úloha sa dá riešiť aj jednoduchšie pomocou *opačného* javu, pretože platí, že $D = \overline{A}$.

Príklad 7.18. Žiarovky sú zapojené podľa uvedenej schémy. Pri každej žiarovke je uvedená pravdepodobnosť jej poruchy. Určte pravdepodobnosť toho, že z bodu X do bodu Y nebude pretekať prúd.



Riešenie: Označme jav N, že z bodu X do bodu Y nebude pretekať prúd. Ďalej nech javy A, B, C, D a E znamenajú poruchu príslušnej žiarovky. Tieto javy sú nezávislé.
Jav N môžeme zapísať takto: $N = A \cup ((B \cup C) \cap (D \cap E))$. Použijeme vety:

- Systém javov $A_1, A_2, \ldots, A_n; n \geq 2$, je celkove nezávislým práve vtedy, keď je splnená podmienka $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.
- Ak systém javov $A_1, A_2, \ldots, A_n; n \geq 2$, je celkove nezávislým, tak $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n})$.

Postupne dostaneme:

$P(B \cup C) = 1 - P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}37$; $P(D \cap E) = P(D) \cdot P(E) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$;

$P((B \cup C) \cap (D \cap E)) = 0{,}37 \cdot 0{,}08 = 0{,}0296$. Teda $P(N) = 1 - 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}0296) = 0{,}22368$.

Príklad 7.19. V určitom podniku sa podiel nepodarkov ustálil na 3 %. Za účelom kontroly sa vyberie a preskúša 8 výrobkov. Určte:

a) aká je pravdepodobnosť toho, že je medzi nimi $k = 0, 1, 2, 3$ nepodarkov?
b) najpravdepodobnejší počet nepodarkov vo výbere 300 výrobkov pre 5 %-nú nepodarkovosť výroby.

Riešenie: a) Keďže ide o *opakované nezávislé pokusy* (resp. výber s vrátením), môžeme použiť *Bernoulliho vzorec*:

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \ldots, n; \text{ kde } q = 1 - p.$$

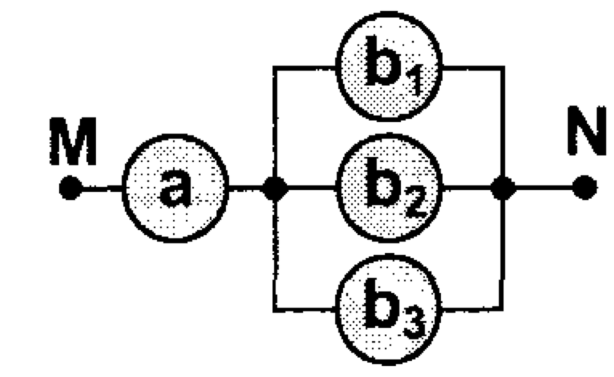
V danom vzorci položíme rozsah výberu $n = 8$, pravdepodobnosť sledovaného javu $p = 0{,}03$ a počítame pre $k = 0, 1, 2, 3$.
Dostaneme postupne tieto výsledky: 0,7837; 0,1939; 0,0210; 0,0013.
b) Pre určenie *najpravdepodobnejšieho počtu (modusu)* k_0 nepodarkov vo výbere použijeme vzorec: $k_0 \in \langle n \cdot p - q \,;\, n \cdot p + p \rangle$. V našom prípade dostávame:

$k_0 \in \langle 300 \cdot 0{,}05 - 0{,}95 \,; 300 \cdot 0{,}05 + 0{,}05 \rangle = \langle 14{,}05 \,; 15{,}05 \rangle$, a teda $k_0 = 15$.

Úlohy:

7.1.

Uvažujme o časti elektrického obvodu podľa schémy na obrázku. Jav A znamená, že je vyradený prvok a, kým jav B_k znamená vyradenie prvku b_k, $k = 1, 2, 3$. Pomocou týchto javov vyjadrite jav C, ktorý znamená, že po zapojení na elektrickú sieť preteká medzi bodmi M a N prúd.



[$\overline{A \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)}$]

7.2.

Koľkými spôsobmi je možné:

a) vyžrebovať rôzne čísla lotérie „ 5 zo 40 “, [658 008]
b) postaviť na poličku desať rôznych kníh s ohľadom na poradie, [103 628 800]
c) zostaviť štvorciferné číslo z číslic 1, 2, 3; [81]
d) nakúpiť dva výrobky vzhľadom na ich druh, keď v obchode ponúkajú päť druhov; [15]
e) obsadiť prvé tri miesta v pretekoch s desiatimi účastníkmi? [720]

7.3.

Na poličke je náhodne rozostavených 20 rôznych kníh, medzi ktorými sú 4 knihy o počítačoch. Aká je pravdepodobnosť toho, že tieto 4 knihy sú postavené vedľa seba? [1/285]

7.4.

Študent chce telefonovať svojmu priateľovi, ale zabudol posledné dvojčíslie jeho telefónneho čísla. Pamätal si však, že tieto 2 číslice sú rôzne a nepárne. Zvolil ich teda náhodne. Aká je pravdepodobnosť toho, že ich uhádol? [1/20]

7.5.

V urne je 20 gulí očíslovaných od 1 do 20. Gule sa postupne náhodne vyťahujú bez vrátenia. Aká je pravdepodobnosť toho, že pri prvých piatich ťahoch bude poradie vždy totožné s číslom na vytiahnutej guli? [$5{,}375 \cdot 10^{-7}$]

7.6.

Každá z troch krabíc obsahuje 10 lístkov očíslovaných od 1 do 10. Z každej krabice je náhodne vytiahnutý jeden lístok. Určte pravdepodobnosť toho, že súčet čísel na vytiahnutých lístkoch je väčší ako 4. [0,996]

7.7.

Určte pravdepodobnosť toho, že pri hode dvoch hracích kociek padne: a) práve 1 šestka, b) aspoň 1 šestka, c) nepadne žiadna šestka, d) padnú obe šestky, e) súčet bodov 9, f) súčet bodov 6, g) nepadne súčet 10, h) súčet menší ako 7, i) súčet väčší ako 10, j) súčet deliteľný tromi, k) súčet deliteľný šiestimi.

$$\left[a)\frac{10}{36}, b)\frac{11}{36}, c)\frac{25}{36}, d)\frac{1}{36}, e)\frac{4}{36}, f)\frac{5}{36}, g)\frac{33}{36}, h)\frac{15}{36}, i)\frac{3}{36}, j)\frac{12}{36}, k)\frac{6}{36}\right]$$

7.8.

Tri hracie kocky hodíme súčasne a spočítame počet bodov, ktorý padol na všetkých troch kockách. Ktorý zo súčtov, 11 alebo 12, je pravdepodobnejší? [Pravdepodobnejší je súčet 11, pretože má 27 priaznivých možností, zatiaľ čo súčet 12 má len 25 priaznivých možností.]

7.9.

Hra DOMINO obsahuje hracie kocky, na ktorých sú 2 polia a v každom poli môže byť 0, 1, ... , 6 bodiek. Určte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraná kocka z krabice obsahujúcej hru DOMINO, pozostáva z dvoch rovnakých polí. [7/28]

7.10.

Na rovnakých lístkoch sú napísané čísla 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Náhodne sa vyberú 2 lístky. Určte pravdepodobnosť toho, že zlomok zostavený z týchto dvoch čísel možno krátiť. [10/28]

7.11.

Máme 10 vstupeniek po 200 Sk, 3 vstupenky po 300 Sk a 2 po 500 Sk. Náhodne vyberieme 3 vstupenky. Určte pravdepodobnosť toho, že aspoň 2 z týchto vstupeniek budú mať rovnakú cenu. [79/91]

7.12.

Aká je pravdepodobnosť toho, že z troch náhodne vybraných úsečiek možno zostrojiť trojuholník, ak sú dané úsečky o dĺžkach 1, 3, 4, 6, 8, 10 jednotiek? [6/20]

7.13.

Zo série 3 000 výrobkov, medzi ktorými je 150 chybných, náhodne vyberieme na kontrolu kvality 70 výrobkov. Určte pravdepodobnosť toho, že je medzi nimi $k = 0, 1, \ldots, 10$ chybných.

[0,0264; 0,0998; 0,1843; 0,2222; 0,1965; 0,1360; 0,0767; 0,0362; 0,0146; 0,0051; 0,0016]

7.14.

Pri kontrole kvality papiera vyberieme určitý počet listov z balíka, v ktorom sa nachádza 700 kusov. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetky vybrané listy sú bezchybné, ak 6 % listov v balíku obsahuje nečistoty? Úlohu riešte pre výber $k = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ listov.

[0,8835; 0,7803; 0,6889; 0,6080; 0,5364; 0,4730]

7.15.

Počet bielych ako aj čiernych guľôčok v urne je 7. Určte pravdepodobnosť toho, že medzi šiestimi náhodne vybranými guľôčkami bude práve $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ bielych guľôčok.

[0,0023; 0,0490; 0,2448; 0,4079; 0,2448; 0,0490; 0,0023]

7.16.

Medzi 100 výrobkami je 15 % nepodarkov. Na kontrolu kvality náhodne vyberieme 10 kusov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že medzi nimi bude najviac $k = 1, 2, \ldots, 5$ nepodarkov. [0,5375; 0,8295; 0,9592; 0,9937; 0,9994]

7.17.

V zásielke je 8 kusov tovaru od dodávateľa X a 12 kusov od dodávateľa Y. Zákazník si náhodne vyberá 5 kusov. Určte pravdepodobnosť toho, že:

a) 3 vybrané kusy sú od dodávateľa X a 2 od Y,
b) najviac 3 kusy sú od X,
c) všetky sú od toho istého dodávateľa,
d) aspoň 1 kus je od Y. [*a*) 0,2384; *b*) 0,9422; *c*) 0,0547; *d*) 0,9964]

7.18.

V hre „KENO 10" hráč tipuje 10 čísel z osemdesiatich, pričom vyžrebovaných je 20 čísel. Vypočítajte pravdepodobnosť výhry niektorej z prvých piatich cien. [0,0132]

7.19.

Zo sady 32 kariet náhodne vyberieme 5. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi nimi budú aspoň 3 rovnakej farby? [0,3415]

7.20.

Určte pravdepodobnosť toho, že číslo náhodne zvolené spomedzi celých čísel 1 až 90 je deliteľné:

a) štyrmi alebo piatimi,
b) dvoma alebo siedmimi,
c) dvoma alebo piatimi. [*a*) 36/90, *b*) 51/90, *c*) 54/90]

7.21.

Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že dvoma hracími kockami hodíme súčet:

a) väčší ako 10 alebo deliteľný šiestimi,
b) 10 alebo súčet väčší ako 8,
c) väčší ako 8 a menší ako 11 alebo nepárny súčet,
d) väčší ako 5 a menší ako 8 alebo párny súčet,

[*a*) 8/36, *b*) 10/36, *c*) 21/36, *d*) 24/36]

7.22.

Hádžeme 2 hracie kocky. Jav A_1 znamená, že súčet bodov na oboch kockách je párne číslo, jav A_2, že súčet bodov je najviac 7 a jav A_3, že na jednej kocke padla dvojka. Vypočítajte pravdepodobnosť zjednotenia týchto javov. [30/36]

7.23.

Pravdepodobnosť toho, že ženatý muž pravidelne sporí je 0,6; pravdepodobnosť toho, že vydatá žena pravidelne sporí je 0,5 a pravdepodobnosť toho, že vydatá žena pravidelne sporí, ak pravidelne sporí jej muž, je 0,4. Určte pravdepodobnosť toho, že:

a) obaja pravidelne sporia,
b) pravidelne sporí ženatý muž, ak pravidelne sporí jeho žena;
c) aspoň jeden z manželov pravidelne sporí. [*a*) 0,24; *b*) 0,48; *c*) 0,86]

7.24.

Urna obsahuje 7 modrých a 3 červené spojovacie vodiče. Náhodným spôsobom vyberáme postupne (bez vrátenia) 3 vodiče. Určte pravdepodobnosť toho, že:

a) 2. vytiahnutý vodič je modrý, ak vieme, že 1. vytiahnutý vodič bol tiež modrý; [2/3]
b) 3. vytiahnutý vodič je modrý, ak vieme, že 1. aj 2. vytiahnutý vodič bol modrý. [5/8]

7.25.

Podľa štatistických tabuliek sa v istej krajine zo 100 000 živo narodených mužov dožije desiatich rokov 96 590 a šesťdesiatich rokov 77 506. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že ak sa muž dožije desiatich rokov, dožije sa tiež šesťdesiatich rokov. [0,8024]

7.26.

Z výrobkov určitého druhu dosahuje 95 % predpísanú kvalitu. V istom závode, ktorý vyrába 80 % celkovej produkcie, dosahuje predpísanú kvalitu 98 % výrobkov. Určte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý výrobok predpísanej kvality bol vyrobený v spomínanom závode. [0,8253]

7.27.

Štatisticky bolo zistené, že asi 30 % študentov sa učí priebežne počas celého semestra. Z nich asi 90 % urobí skúšku v riadnom termíne. Celkovo urobí skúšku v riadnom termíne asi 55 % študentov. Aká je pravdepodobnosť toho, že študent, úspešný v riadnom termíne, študoval priebežne? [0,4909]

7.28.

Hádžeme dvoma hracími kockami. Nájdite pravdepodobnosť toho, že:

a) ak na 1. kocke padla jednotka, súčet je práve 6;
b) ak na 1. kocke padla dvojka, súčet je väčší ako 6;
c) ak na 1. kocke padlo párne číslo, súčet je väčší ako 9. [*a*) 1/6, *b*) 1/3, *c*) 2/9]

7.29.

Skúška z určitého predmetu má 3 časti. Aby študent úspešne urobil skúšku, musí úspešne urobiť všetky 3 časti. Pravdepodobnosť úspechu v 1. časti je 0,6. Pravdepodobnosť úspechu v 2. časti, za predpokladu úspechu v 1. časti je 0,75 a pravdepodobnosť úspechu v 3. časti, za predpokladu, že obidve predchádzajúce časti boli úspešné je 0,9. Aká je pravdepodobnosť úspešného zloženia skúšky? [0,405]

7.30.

Dvaja robotníci vyrábajú tie isté výrobky, pričom prvý vyrobí za smenu dvakrát viac ako druhý. Pravdepodobnosť vyrobenia nepodarku je u 1. robotníka 0,02 a u 2. robotníka 0,01. Zo skladu, kde sú uložené všetky výrobky, náhodne vyberieme 1 výrobok. Aká je pravdepodobnosť toho, že daný výrobok nebude nepodarok? [0,9833]

7.31.

Do predajne dodávajú rovnaký druh tovaru 3 podniky. Podnik A dodáva o 50 % viac výrobkov ako podnik B, podnik C dodáva rovnaké množstvo výrobkov ako A. Nepodarkovosť výroby podniku A je 2 %-ná, podniku B 1 %-ná a podniku C 3 %-ná. Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne kúpený výrobok v danej predajni bude bezchybný? [0,9788]

7.32.

Z urny, ktorá obsahuje 5 čiernych a 10 bielych gulí, náhodne vyberieme 1 guľu. Potom ju vrátime naspäť a pridáme ešte 5 gulí tej istej farby, akej bola vytiahnutá guľa. Aká je pravdepodobnosť toho, že guľa vytiahnutá v druhom ťahu bude biela? [2/3]

7.33.

V nádobe sú medzi dvadsiatimi guľôčkami s rovnakou pravdepodobnosťou 0, 1, 2, 3 červené. Ostatné guľôčky sú biele. Náhodne vyberieme z nádoby 5 guľôčok. Aká je pravdepodobnosť toho, že je medzi nimi aspoň 1 červená? [0,3246]

7.34.

V pravom vrecku máme 4 biele guľôčky a 6 čiernych, v ľavom vrecku máme 3 biele a 4 čierne guľôčky. Z pravého vrecka náhodne vyberieme 5 guľôčok a dáme ich do ľavého vrecka. Potom z ľavého vrecka vyberieme 1 guľôčku. Aká je pravdepodobnosť toho, že to bude biela guľôčka? [0,4167]

7.35.

V krabici je 12 loptičiek, z nich je 9 nových. Pre 1. hru sa z krabice náhodne vyberú 3 loptičky, ktoré sa po hre vrátia späť. Pre 2. hru sa z tejto krabice opäť vyberú 3 loptičky. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetky 3 už boli použité? [0.0593]

7.36.

V určitej spoločnosti je 40 % mužov a 60 % žien. Vysokých nad 180 cm je 35 % mužov a 6 % žien. Náhodne vybraná osoba z danej spoločnosti má výšku nad 180 cm. Aká je pravdepodobnosť toho, že je to: a) žena; b) muž? [*a*) 0,2045; *b*) 0,7955]

7.37.

Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je dvakrát vyššia ako druhého. 1. automat vyrába priemerne 60 % kvalitných výrobkov, pričom 2. automat 84 %. Náhodne bol vybraný 1 výrobok, o ktorom kontrola zistila, že je kvalitný. Aká je pravdepodobnosť toho, že ho vyrobil: a) 1. automat; b) 2. automat? [*a*) 0,5882; *b*) 0,4118]

7.38.

Istá výrobná chyba sa vyskytuje u 10 % chladničiek. Pri výrobkoch, ktoré majú túto chybu dochádza v záručnej dobe k poruche s pravdepodobnosťou 0,6; kým u ostatných len s pravdepodobnosťou 0,01. Aká je pravdepodobnosť toho, že zakúpená chladnička má uvažovanú výrobnú chybu, ak sa v záručnej dobe pokazila? [20/23]

7.39.

Odliatky sú kontrolované röntgenovým prístrojom, ktorý odhalí chybu v odliatku s pravdepodobnosťou 0,98 a dobrý odliatok označí za zlý s pravdepodobnosťou 0,001. Chyba sa vyskytuje pri 0,3 % odliatkov. Aká je pravdepodobnosť toho, že odliatok označený prístrojom za chybný, je naozaj zlý? [0,7468]

7.40.

Zákazník vyberá obraz zo skupiny desiatich originálov a dvoch kópií. Radí sa s odborníkom, ktorý rozozná originál od kópie s pravdepodobnosťou 5/6. Odborník tvrdí, že vybraný obraz je originál. Aká je pravdepodobnosť toho, že je to skutočne originál? [0,9615]

7.41.

V istom podniku 35 % produkcie určitého výrobku vyrobí stroj A, 20 % stroj B a ostatnú časť produkcie stroj C. Stroj A vyrobí 1 % nepodarkov, stroj B 1,5 % a stroj C 2 % nepodarkov. Náhodne vybraný výrobok bol nepodarok. Aká je pravdepodobnosť toho, že ho vyrobil stroj: a) A; b) B; c) C? [*a*) 0,2258; *b*) 0,1935; *c*) 0,5806]

7.42.

Na skúšobných kartách je pripravených 20 otázok. V skupine desiatich študentov sú traja pripravení výborne (vedia zodpovedať 20 otázok), štyria veľmi dobre (vedia zodpovedať 16 otázok), dvaja dobre (10 otázok) a jeden nevyhovujúco (5 otázok). Aká je pravdepodobnosť toho, že študent, ktorý na tri zadané otázky odpovedal správne, bol pripravený výborne (resp. veľmi dobre, dobre či nevyhovujúco)?

[0,5787; 0,3790; 0,0406; 0,0017]

7.43.

Hádžeme dvoma hracími kockami. Nech A_i znamená jav, že padne súčet deliteľný číslom i, pre $i = 2, 3, 4, 5$. Rozhodnite o závislosti, resp. nezávislosti všetkých možných dvojíc javov A_i. [Javy A_2, A_3 sú vzájomne nezávislé, ostatné dvojice sú závislé.]

7.44.

Súčiastka prechádza tromi operáciami opracovania. Pravdepodobnosť toho, že bude nepodarkom po i-tej operácii je p_i, pre $i = 1, 2, 3$; $p_1 = 0{,}02$; $p_2 = 0{,}03$; $p_3 = 0{,}02$. Určte pravdepodobnosť toho, že súčiastka nebude nepodarok po troch operáciách, ak predpokladáme, že vzniknutia nepodarkov pri jednotlivých operáciách sú nezávislé javy.

[0,9316]

7.45.

Tri skupiny študentov sa nezávisle snažia vyriešiť úlohu. Pravdepodobnosť vyriešenia úlohy prvou skupinou je 65 %, pre ďalšie skupiny sú pravdepodobnosti 55 % a 70 %. Aká je pravdepodobnosť toho, že úloha bude vyriešená: a) vo všetkých skupinách, b) vôbec nebude vyriešená, c) aspoň v jednej skupine, d) aspoň v dvoch skupinách, e) viac ako v jednej skupine? [*a*) 0,2503; *b*) 0,0473; *c*) 0,9527, *d*) 0,6970; *e*) 0,6970]

7.46.

Máme 3 urny. Prvá urna obsahuje 1 bielu a 2 čierne guľôčky, druhá urna obsahuje 3 biele a 1 čiernu, tretia urna obsahuje 2 biele a 3 čierne guľôčky. Z každej urny náhodne vytiahneme jednu guľôčku. Určte pravdepodobnosť toho, že: a) 2 guľôčky budú biele a 1 čierna, b) všetky budú rovnakej farby. [*a*) 23/60, *b*) 1/5]

7.47.

V knižnici sú len technické a matematické publikácie. Pravdepodobnosť toho, že si ľubovoľný čitateľ požičia technickú publikáciu je 0,7 a matematickú je 0,3. Určte pravdepodobnosť toho, že z piatich po sebe nasledujúcich čitateľov si všetci požičajú len technickú alebo len matematickú publikáciu, za predpokladu, že každý z nich si požičia len jednu knihu. [0,1705]

7.48.

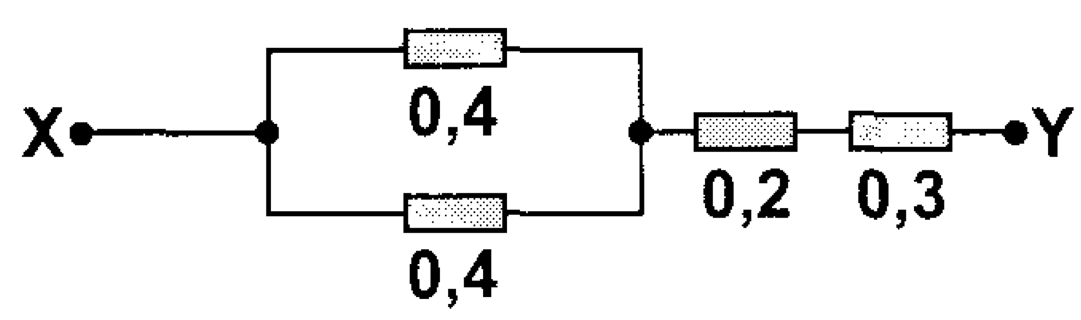
Určitý výrobok možno vyrobiť dvoma technologickými postupmi. Pravdepodobnosť toho, že výrobok bude 1. kvality je pri 1. postupe 0,8 a pri 2. postupe je 0,7. Pomocou 1. postupu vyrobíme 2 výrobky, pomocou 2. postupu vyrobíme 3 výrobky. Určte pravdepodobnosť toho, že všetky výrobky budú 1. kvality. [0,2195]

7.49.

Štyria pretekári hádžu oštep nezávisle jeden od druhého. Prvý prekoná 80 m hranicu priemerne v 80 % hodov, druhý v 70 % hodov, tretí v 65 % hodov a štvrtý v 50 % hodov. Určte pravdepodobnosť toho, že ak každý z nich vykoná 1 hod, 80 metrová hranica bude prekonaná aspoň raz. [0,9895]

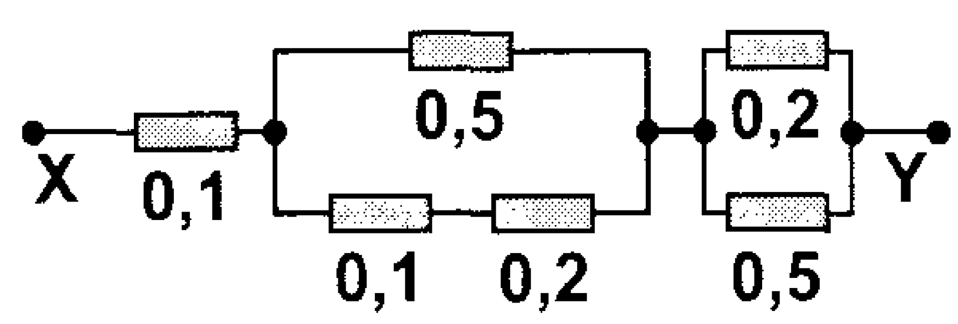
7.50.

Do siete sú zapojené odpory podľa uvedenej schémy. Každý z nich sa pokazí s uvedenou pravdepodobnosťou. Určte pravdepodobnosť toho, že sieťou preteká prúd. [0,4704]



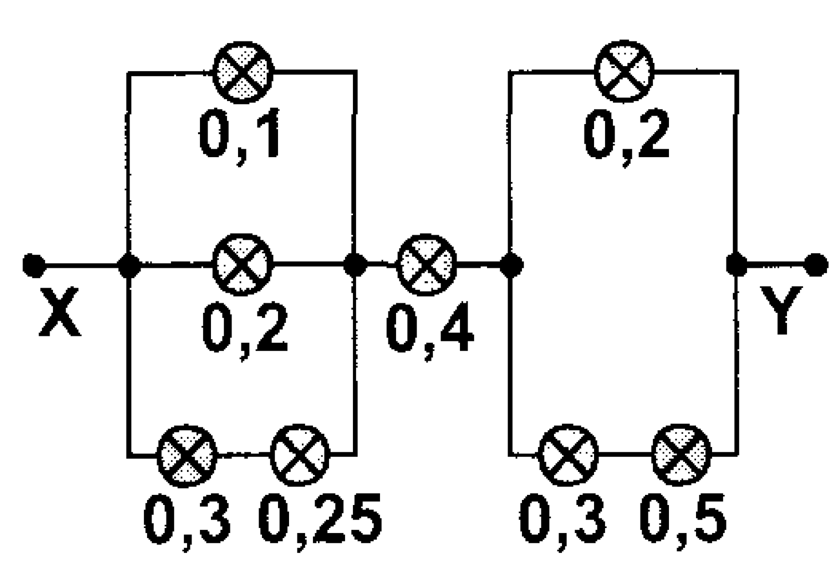
7.51.

Do siete sú zapojené odpory podľa uvedenej schémy. Každý z nich sa pokazí s uvedenou pravdepodobnosťou. Určte pravdepodobnosť toho, že sieťou preteká prúd. [0,6966]



7.52.

Žiarovky sú zapojené podľa uvedenej schémy. Pri každej žiarovke je uvedená pravdepodobnosť jej poruchy. Určte pravdepodobnosť toho, že z bodu X do bodu Y nebude pretekať prúd. [0,482959]



7.53.

Pravdepodobnosť toho, že basketbalista trafí do koša je 0,7. Určte:

a) pravdepodobnosť toho, že basketbalista pri šiestich nezávislých hodoch aspoň raz trafí do koša;
b) pravdepodobnosť toho, že pri troch hodoch trafí do koša aspoň dvakrát;
c) najpravdepodobnejší počet trafení do koša v sérii dvadsiatich nezávislých pokusov.

[*a*) 0,9993; *b*) 0,784; *c*) 14]

7.54.

Určte, či je pravdepodobnejšie vyhrať s rovnocenným protivníkom (nerozhodný výsledok hry neuvažujeme):

a) 2 zo štyroch alebo 3 zo šiestich stretnutí; $[0{,}375 > 0{,}3125]$
b) najmenej 3 zo štyroch alebo najmenej 5 z ôsmich stretnutí. $[0{,}3125 < 0{,}3633]$

7.55.

Rozhodnite, kto má väčšiu nádej výhry, či 1. hráč, ktorý má zo šiestich hodov hracou kockou aspoň raz hodiť šestku alebo 2. hráč, ktorý má z dvanástich hodov hodiť najmenej dve šestky alebo 3. hráč, ktorý má z osemnástich hodov hodiť aspoň 3 šestky. [$0{,}6651 > 0{,}6187 > 0{,}5973$; prvý hráč má väčšiu nádej výhry ako druhý a ten väčšiu ako tretí]

7.56.

Z urny, v ktorej je 15 bielych a 5 červených guľôčok, sa n-krát ťahá po jednej guľôčke, pričom sa po každom ťahu guľôčka vráti späť. Určte najmenší počet ťahov, pri ktorom bude pravdepodobnosť vytiahnutia aspoň 1 červenej guľôčky väčšia ako 0,5. [3]

8. Náhodná premenná (veličina)

Riešené príklady:

Príklad 8.1. Pravdepodobnosť toho, že spotreba elektrickej energie v určitom podniku počas pracovného dňa prevýši plánovanú spotrebu je rovná 0,3. Predpokladáme, že spotreba elektrickej energie v určitom dni nezávisí od spotreby v predchádzajúcich dňoch. Sledujeme spotrebu elektrickej energie počas jedného týždňa (5 pracovných dní). Určte:

a) pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej X – počtu pracovných dní, počas ktorých spotreba elektrickej energie prevýši plánovanú spotrebu;
b) distribučnú funkciu a jej graf,
c) číselné charakteristiky $E(X)$, $Mo(X)$, $D(X)$ a $\sigma(X)$;
d) pravdepodobnosti $P(X < 3)$, $P(X \leq 3)$ a $P(1 < X < 4)$.

Riešenie: a) Diskrétna náhodná premenná X udáva počet pracovných dní, počas ktorých spotreba elektrickej energie prevýši plánovanú spotrebu a môže nadobúdať v tomto prípade hodnoty $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Máme vypočítať pravdepodobnosti $P(X = x_i) = p_i$ nadobudnutia hodnôt x_i. Pretože ide o *opakované nezávislé pokusy*, môžeme použiť *Bernoulliho vzorec*:

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \dots, n; \text{ kde } q = 1 - p.$$

V danom vzorci položíme $n = 5$, $p = 0{,}3$; $k = 0, 1, \dots, 5$; pričom hodnoty k nahradíme hodnotami x_i.

Pravdepodobnostná tabuľka bude vyzerať takto:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1681	0,3601	0,3087	0,1323	0,0283	0,0024

b) *Distribučná funkcia* (CDF – Cumulative Distribution Function) náhodnej premennej X je definovaná pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ vzťahom $F(x) = P(X \leq x)$. V prípade *diskrétnej* náhodnej premennej platí: $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$.

Vypočítajme si hodnoty distribučnej funkcie pre dané $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

$F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = 0{,}1681$;

$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}1681 + 0{,}3601 = 0{,}5282$, atď.

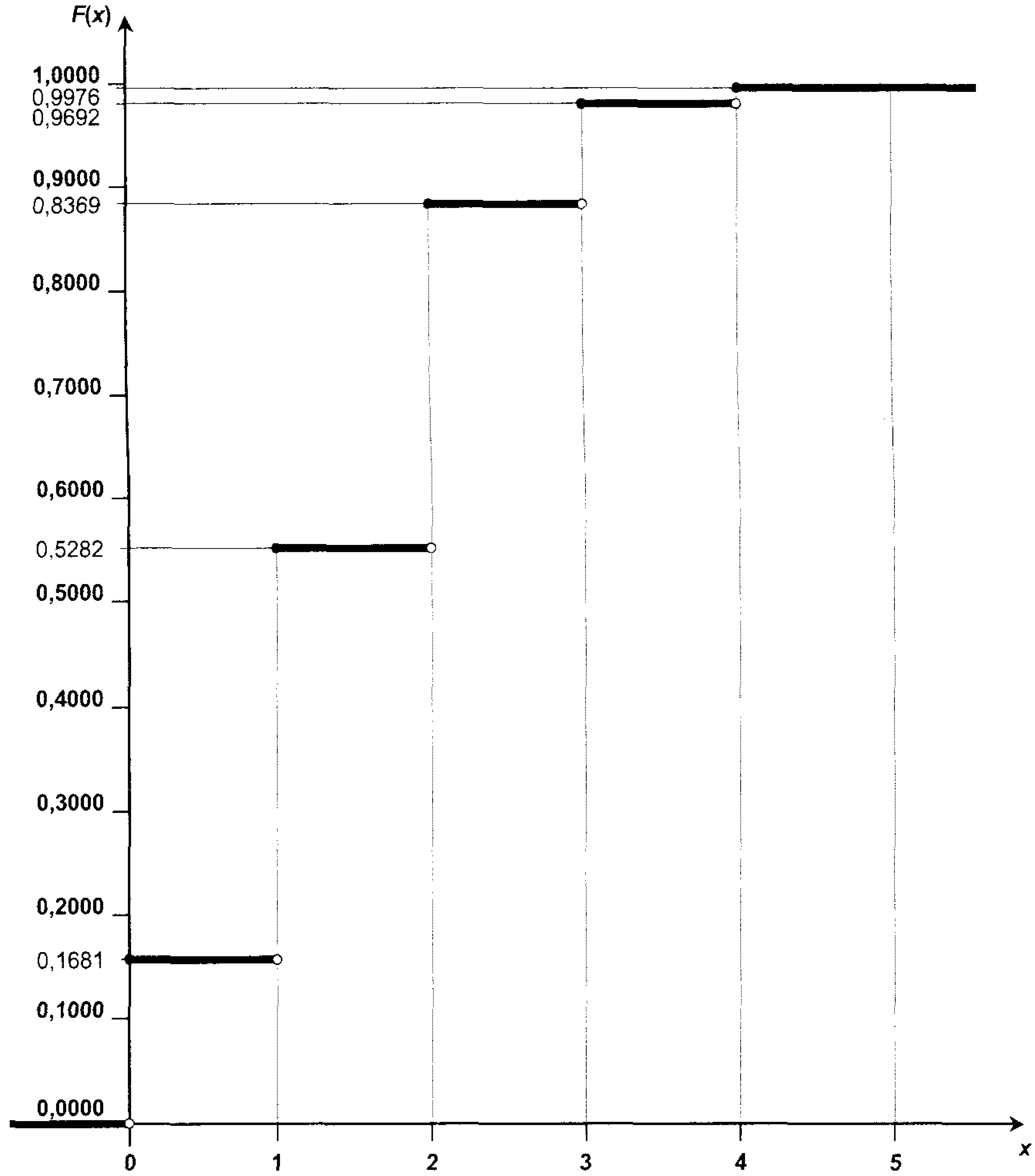
Výsledok v tvare tabuľky:

x	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	0,1681	0,5282	0,8369	0,9692	0,9976	1,0000

Na základe tejto pomocnej tabuľky zostavíme distribučnú funkciu:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pre \quad x < 0 \\ 0{,}1681 & pre\; 0 \leq x < 1 \\ 0{,}5282 & pre\; 1 \leq x < 2 \\ 0{,}8369 & pre\; 2 \leq x < 3 \\ 0{,}9692 & pre\; 3 \leq x < 4 \\ 0{,}9976 & pre\; 4 \leq x < 5 \\ 1 & \quad 5 \leq x \end{cases}$$

Graf distribučnej funkcie:



c) *Modus* diskrétnej náhodnej premennej je definovaný ako najpravdepodobnejšia hodnota tejto náhodnej premennej. Na základe pravdepodobnostnej tabuľky vidíme, že $Mo(X) = 1$.
Stredná hodnota E(X), disperzia D(X) a *smerodajná odchýlka* $\sigma(X)$ sa vypočítajú dosadením hodnôt z pravdepodobnostnej tabuľky do vzorcov:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i, \quad D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i, \quad \text{resp.} \quad D(X) = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{kde}$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i, \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Dostaneme výsledky: $E(X) = 1{,}5$; $D(X) = 1{,}05$; $\sigma(X) = 1{,}0247$.

d) Platí: $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}8369$;

$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}9692$;

$P(1 < X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}4410$.

Príklad 8.2. Plocha má tvar štvorca, ktorého strana podľa leteckých snímok je rovná 300 [m]. Kvalita leteckej snímky je daná hodnotami:

Chyba 0 m má pravdepodobnosť ... 0,42

$\pm$ 10 m 0,16

$\pm$ 20 m 0,08

$\pm$ 30 m .... 0,05.

Predpokladáme, že chyba je rovnaká v x- aj v y-ovom smere. Určte:

a) zákon rozdelenia pravdepodobnosti chyby (X),
b) strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$,
c) strednú hodnotu a disperziu veľkosti strany tohto štvorca (S),
d) strednú hodnotu a disperziu obvodu tohto štvorca (O),
e) strednú hodnotu plošného obsahu štvorca (P).

Riešenie: a) *Zákon rozdelenia pravdepodobnosti* chyby, t.j.diskrétnej náhodnej premennej X, bude daný pravdepodobnostnou tabuľkou:

x_i [m]	−30	−20	−10	0	10	20	30
p_i	0,05	0,08	0,16	0,42	0,16	0,08	0,05

b) *Stredná hodnota* $E(X)$ a *disperzia* $D(X)$ sa vypočítajú podľa vzorcov, uvedených v predchádzajúcom príklade. Dostaneme výsledky: $E(X)=0\text{ m}$, $D(X)=186\text{ m}$.

c) Nech X, Y sú náhodné premenné (nad tým istým pravdepodobnostným poľom) a nech a, b sú ľubovoľné konštanty. Potom platia tieto vlastnosti strednej hodnoty:

(1) stredná hodnota konštantnej náhodnej premennej A je $E(A)=a$,

(2) $E(a\cdot X+b\cdot Y)=a\cdot E(X)+b\cdot E(Y)$,

(3) $E(X-E(X))=0$.

Ďalej platia tieto vlastnosti disperzie:

(1) disperzia konštantnej náhodnej premennej A je $D(A)=0$,

(2) $D(a\cdot X)=a^2\cdot D(X)$,

(3) $D(a\cdot X+b)=a^2\cdot D(X)$,

(4) $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.

Strednú hodnotu a *disperziu* veľkosti strany tohto štvorca (S) vypočítame teda pomocou týchto vlastností:

$E(S)=E(X+300)=E(X)+300=300\text{ m}$, $D(S)=D(X+300)=D(X)=186\text{ m}$.

d) Podobne budeme počítať s*trednú hodnotu* a *disperziu* obvodu tohto štvorca (O):

$E(O)=E(4\cdot S)=4\cdot E(S)=4\cdot 300=1\,200\text{ m}$, $D(O)=D(4\cdot S)=4^2\cdot D(S)=16\cdot 186=2\,976\text{ m}$.

e) Pre *strednú hodnotu* plošného obsahu štvorca (P) platí:

$D(S)=E(S^2)-(E(S))^2 \Rightarrow E(P)=E(S^2)=D(S)+(E(S))^2=186+300^2=90\,186\text{ m}^2$.

Príklad 8.3. Daná je funkcia $F(x)=\begin{cases} 0, & pre \quad x<0 \\ a+b\cdot\cos x, & pre \quad 0\le x<\pi \\ 1, & pre \quad x\ge\pi \end{cases}$. Určte:

a) pre aké hodnoty a, $b\in R$ je $F(x)$ distribučnou funkciou spojitej náhodnej premennej X,
b) hustotu pravdepodobnosti $f(x)$,
c) strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$,
d) pravdepodobnosti $P(0<X<\pi/4)$ a $P(X=1)$.

Riešenie: a) *Distribučná funkcia* $F(x)$ spojitej náhodnej premennej X je spojitá funkcia na množine reálnych čísel, teda aj v bodoch 0 a π. Platí teda:

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=0,\ \lim_{x\to 0^+}F(x)=a+b,\ \lim_{x\to\pi^-}F(x)=a-b,\ \lim_{x\to\pi^+}F(x)=1.$$

Dostaneme rovnice $a + b = 0$, $a - b = 1$, odkiaľ získame výsledky: $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

b) *Hustota pravdepodobnosti* $f(x)$ je prvou deriváciou distribučnej funkcie $f(x) = F'(x)$.

Dostaneme výsledok: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sin x, & pre\ x \in \langle 0, \pi) \\ 0, & pre\ x \notin \langle 0, \pi) \end{cases}$.

c) *Stredná hodnota* $E(X)$ a *disperzia* $D(X)$ sa vypočítajú podľa vzorcov:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx, \quad D(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Dostaneme integrály, ktoré vypočítame metódou per partes:

$$E(X) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \sin x\, dx = \frac{1}{2} \cdot [-x \cdot \cos x + \sin x]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}, \; E(X^2) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin x\; dx = \cdots = \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

Potom $D(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2.$

d) Pre *spojitú* náhodnú premennú X platí vzorec pre výpočet *pravdepodobnosti*:

$$P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Teda dostávame $P(0 < X < \pi/4) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\; dx = \frac{1}{2} \cdot [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$.

Použitím distribučnej funkcie dostaneme rovnaký výsledok:

$$P(0 < X < \pi/4) = F(\pi/4) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0{,}1464.$$

Pravdepodobnosť $P(X = 1) = 0$, pretože ide o spojitú náhodnú premennú.

Príklad 8.4. Daná je funkcia $f(x) = \begin{cases} k \cdot (4x - x^3), & pre \quad x \in (0, 2\rangle \\ 0, & pre \quad x \notin (0, 2\rangle \end{cases}$. Určte:

a) pre akú hodnotu $k \in R$ je $f(x)$ hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej X,
b) príslušnú distribučnú funkciu $F(x)$.

Riešenie: a) Pre hustotu pravdepodobnosti platí tzv. *normalizačná podmienka* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

Odtiaľ dostávame pre hľadanú konštantu k: $1 = k \cdot \int_0^2 (4x - x^3)\; dx = k \cdot \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4k$.

Teda dostaneme, že $k = \frac{1}{4}$.

b) *Distribučnú funkciu* $F(x)$ nájdeme na základe vzťahu $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\; dt$. Počítame postupne:

- pre $x \le 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$,
- pre $0 < x \le 2$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{x} \left(t - \frac{t^3}{4} \right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}$,
- pre $x>2$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{2} \left(t - \frac{t^3}{4} \right) dt + \int_{2}^{x} 0 \cdot dt = 1$.

Teda dostávame $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}, & x \in (0,2\rangle \\ 1, & x > 2 \end{cases}$.

Úlohy:

8.1. Diskrétna náhodná premenná X je daná pravdepodobnostnou tabuľkou

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	p_5

Určte neznámu hodnotu p_5, strednú hodnotu, modus, disperziu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej X.

[$p_5 = 0,1296$; $E(X) = 2,4$; $Mo(X) = 2$ a $Mo(X) = 3$, $D(X) = 0,96$; $\sigma(X) = 0,9798$]

8.2. Náhodná premenná X je daná pravdepodobnostnou tabuľkou

x_i	x_1	1	2	3
p_i	0,1	0,2	p_3	0,4

, pričom platí $D(X) = 1$ a $x_1 \le 4$. Určte hodnoty x_1, p_3 a vypočítajte $E(X)$, $P(|X - 1,5| \le 1)$.

[$x_1 = 0$, $p_3 = 0,3$; $E(X) = 2$, $P = 0,5$]

8.3.

V súbore desiatich výrobkov je osem 1. kvality a dva nepodarky. Výberom bez vrátenia je náhodne vybraných 5 výrobkov. Určte:

a) pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej X – počtu výrobkov 1. kvality vo výbere,

b) číselné charakteristiky $E(X)$, $D(X)$ a $\sigma(X)$.

[$a)$

x_i	3	4	5
p_i	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

$b)$ $E(X) = 4$, $D(X) = \frac{4}{9}$, $\sigma(X) = \frac{2}{3}$]

8.4.

Športovec vystrelil trikrát do terča. Pravdepodobnosť zásahu pri každom výstrele je 0,9. Za každý zásah dostane 10 bodov. Určte:

a) pravdepodobnostnú tabuľku počtu získaných bodov (X),

b) strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej X,

c) strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku počtu zásahov (Y).

[$a)$

x_i	0	10	20	30
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

, $b)$ $E(X) = 27,0$; $\sigma(X) = 5,1961$

$c)$ $E(Y) = 2,70$; $\sigma(Y) = 0,5196$]

8.5.

V urne je 6 bielych a 4 čierne gule. Z urny sa postupne vyberie 5 guli, pričom po každom ťahu sa guľa vráti späť. Určte:

a) pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej X – počtu vytiahnutých bielych gulí,
b) distribučnú funkciu a jej graf,
c) číselné charakteristiky $E(X)$, $Mo(X)$, $D(X)$ a $\sigma(X)$;
d) pravdepodobnosti $P(X < 3)$, $P(X \leq 3)$, $P(X > 1)$ a $P(1 < X < 4)$.

a)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0778

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pre \quad x < 0 \\ 0,0102 & pre\, 0 \leq x < 1 \\ 0,0870 & pre\, 1 \leq x < 2 \\ 0,3174 & pre\, 2 \leq x < 3 \\ 0,6630 & pre\, 3 \leq x < 4 \\ 0,9222 & pre\, 4 \leq x < 5 \\ 1 & \quad 5 \leq x \end{cases}$$

c) $E(X) = 3, \quad Mo(X) = 3, \quad D(X) = 1,2; \quad \sigma(X) = 1,0954$

d) $0,3174; \quad 0,6630; \quad 0,9130; \quad 0,5760$

8.6.

V dvoch urnách je po 5 očíslovaných loptičiek. V 1.urne 2 loptičky majú číslo 1, 2 loptičky číslo 2 a 1 loptička číslo 3. V 2.urne 3 loptičky majú číslo 1 a 2 loptičky číslo 2. Z oboch urien sa náhodne vyberie po jednej loptičke a vypočíta sa súčin ich čísel. Získané číslo je náhodná premenná X. Určte jej: a) pravdepodobnostnú tabuľku, b) distribučnú funkciu, c) číselné charakteristiky $E(X)$, $Mo(X)$ a $D(X)$.

a)

x_i	1	2	3	4	6
p_i	$\frac{6}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pre \quad x < 1 \\ \frac{6}{25} & pre \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{16}{25} & pre \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{19}{25} & pre \quad 3 \leq x < 4 \\ \frac{23}{25} & pre \quad 4 \leq x < 6 \\ 1 & \quad 6 \leq x \end{cases}$$

c) $E(X) = \frac{63}{25}, \quad Mo(X) = 2, \quad D(X) = 2,0096$

8.7.

Šofér musí prejsť cez 3 križovatky riadené nezávislými svetelnými signálmi. Pravdepodobnosť zastavenia na každej križovatke je 0,6 nezávisle od ostatných. Náhodná premenná X je počet križovatiek, ktoré šofér prejde na zelenú až do prvého zastavenia. Určte jej: a) pravdepodobnostnú tabuľku, b) číselné charakteristiky $E(X)$, $D(X)$ a $\sigma(X)$; c) pravdepodobnosti $P(X < 2)$, $P(X \geq 1)$, $P(X > 0)$, $P(X \geq 0)$, $P(X \geq 3)$ a $P(X > 3)$.

[*a*)

x_i	0	1	2	3
p_i	0,6	0,24	0,096	0,064

$b)\ E(X) = 0,6240;\quad D(X) = 0,8106;\quad \sigma(X) = 0,9003$

$c)\ 0,84;\quad 0,4;\quad 0,4;\quad 1,\quad 0,064;\quad 0$]

8.8.

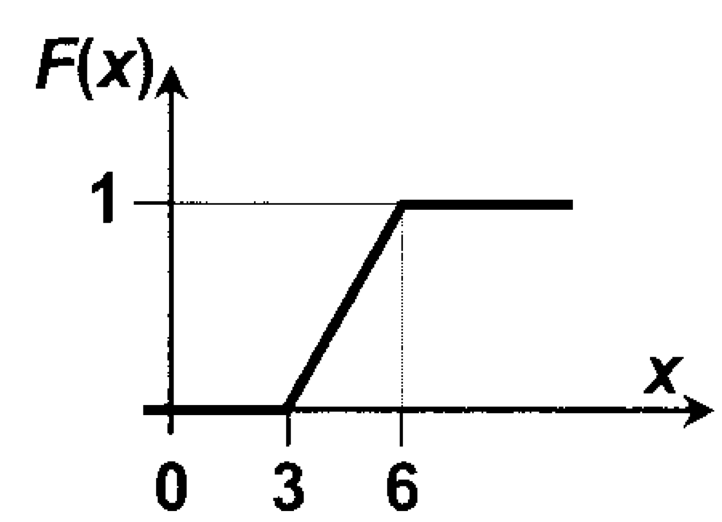
Daná je funkcia $F(x) = \begin{cases} 0, & pre \quad x \leq 3 \\ ax - 1, & pre \quad 3 < x \leq 6 \\ 1, & pre \quad x > 6 \end{cases}$. Určte:

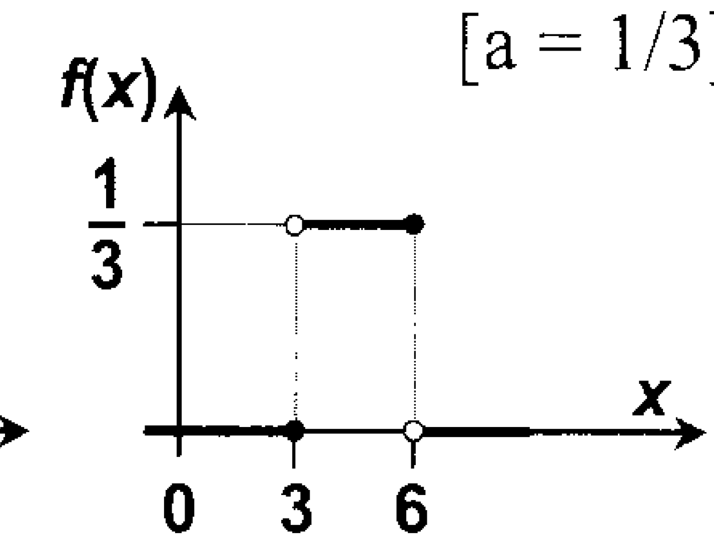
a) pre akú hodnotu $a \in R$ je $F(x)$ distribučnou funkciou náhodnej premennej X, [a = 1/3]

b) graf $F(x)$,

c) hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ a jej graf,

$$\left[f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 3 < x \leq 6 \\ 0, & x \notin (3,6\rangle \end{cases} \right]$$





d) pravdepodobnosti $P(4 \leq X \leq 5)$ a $P(-1/2 < X < 5)$, [1/3, 2/3]

e) strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$, [4,5; 0,75]

f) čísla c_1 a c_2 také, že $P(X \leq c_1) = 0,05$ a $P(X \leq c_2) = 0,9$. [$c_1 = 3,15$; $c_2 = 5,7$]

8.9.

Daná je funkcia $F(x) = \begin{cases} 0, & pre \quad x \leq -5 \\ a \cdot (x+5), & pre \quad -5 < x \leq 2 \\ 1, & pre \quad x > 2 \end{cases}$. Určte:

a) pre akú hodnotu $a \in R$ je $F(x)$ distribučnou funkciou náhodnej premennej X, [$a = 1/7$]

b) hustotu pravdepodobnosti $f(x)$,

$$\left[f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & pre \quad -5 < x \leq 2 \\ 0, & inak \end{cases} \right]$$

c) pravdepodobnosti $P(-2 \leq X \leq 2)$, $P(-6 < X < 1)$ a $P(X = 2)$. $\left[\frac{4}{7},\ \frac{6}{7},\ 0 \right]$

8.10.

Daná je funkcia $F(x) = \begin{cases} 0, & pre \quad x \leq 0 \\ a \cdot (x^2 - \frac{x^4}{4}), & pre \quad 0 < x \leq \sqrt{2} \\ 1, & pre \quad x > \sqrt{2} \end{cases}$. Určte:

a) pre akú hodnotu $a \in R$ je $F(x)$ distribučnou funkciou náhodnej premennej X, [$a = 1$]

b) príslušnú distribučnú funkciu $F(x)$,
$$\left[F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2x^3}{27}, & x\in\left(0,3\right\rangle \\ 1, & x>3 \end{cases} \right]$$

c) číselné charakteristiky $E(X)$, $D(X)$ a $\sigma(X)$; [3/2, 0,45; 0,6708]

d) pravdepodobnosť $P(1\le X<2)$. [13/27]

8.15.

Daná je funkcia $f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{x^4}, & x\ge 1 \\ 0, & x<1 \end{cases}$. Určte:

a) pre akú hodnotu $k\in R$ je $f(x)$ hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej X,[k = 3]

b) príslušnú distribučnú funkciu $F(x)$,
$$\left[F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 1-\dfrac{1}{x^3}, & x\ge 1 \end{cases} \right]$$

c) číselné charakteristiky $E(X)$ a $D(X)$, [1,5; 0,75]

d) pravdepodobnosť $P(\sqrt[3]{2}<X<E(X))$. [11/54]

8.16.

Daná je funkcia $f(x)=\begin{cases} k\cdot\cos 2x, & x\in\left(0,\pi/4\right\rangle \\ 0, & x\notin\left(0,\pi/4\right\rangle \end{cases}$. Určte:

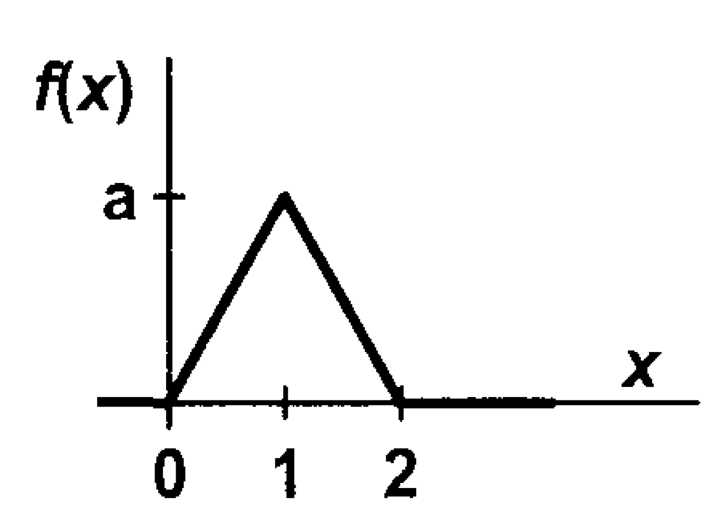
a) pre akú hodnotu $k\in R$ je $f(x)$ hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej X, [k = 2]

b) číselné charakteristiky $E(X)$ a $D(X)$, $\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2},\ 0{,}0354\right]$

c) pravdepodobnosť $P(-3<X<\pi/12)$. [0,5]

8.17.

Daná je funkcia $f(x)$ obrázkom



Určte:

a) pre akú hodnotu $a\in R$ je $f(x)$ hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej X,[a = 1]

b) číselné charakteristiky $E(X)$ a $D(X)$, [1, 1/6]

c) príslušnú distribučnú funkciu $F(x)$.
$$\left[F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & x\in\left(0,1\right\rangle \\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & x\in\left(1,2\right\rangle \\ 1, & x>2 \end{cases} \right]$$

9. Niektoré rozdelenia pravdepodobnosti

Riešené príklady:

Príklad 9.1. Výrobný podnik expedoval zásielku, ktorá obsahovala 100 procesorov. Pravdepodobnosť toho, že sa jeden procesor cestou poškodí je 0,05 (nezávisle od ostatných). Vypočítajte:

a) pravdepodobnosť toho, že sa počas prepravy nepoškodí viac ako 5 procesorov,
b) strednú hodnotu a disperziu počtu poškodených procesorov počas prepravy,
c) najpravdepodobnejší počet (modus) poškodených procesorov počas prepravy.

Riešenie: Nech $n \in N$, $p \in (0,1)$. Diskrétna náhodná premenná X má <u>*binomické*</u> rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami n a p práve vtedy, keď:

- jej obor hodnôt je $H(X) = \{0,1,2,\ldots,n\}$,
- $P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$, pre každé $x \in \{0,1,2,\ldots,n\}$.

Používame označenie $X \sim bino(n, p)$.

O binomickom rozdelení hovoríme najčastejšie v súvislosti s Bernoulliho vzorcom.

a) Nech v našom príklade náhodná premenná X znamená počet poškodených procesorov počas prepravy a nech $F(x)$ je jej distribučná funkcia, $X \sim bino(n,p)$, kde $n = 100$ a $p = 0,05$. Počítame *pravdepodobnosť*:

$$P(X \le 5) = F(5) = \binom{100}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^{99} + \cdots + \binom{100}{5} \cdot 0,05^5 \cdot 0,95^{95} = 0,6160$$

b) Pre výpočet *strednej hodnoty* a *disperzie* použijeme vzťahy: $E(X) = n \cdot p$, $D(X) = n \cdot p \cdot q$.
Po vyčíslení dostávame výsledky: $E(X) = 100 \cdot 0,05 = 5$, $D(X) = 100 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 4,75$.

c) Pre určenie *najpravdepodobnejšieho počtu* (*modusu*) poškodených procesorov počas prepravy použijeme vzorec $Mo(X) \in \langle n \cdot p - q \; ; \; n \cdot p + p \rangle$, kde $q = 1 - p$. V našom prípade dostávame: $Mo(X) \in \langle 100 \cdot 0,05 - 0,95 \; ; 100 \cdot 0,05 + 0,05 \rangle = \langle 4,05 \, ; 5,05 \rangle$, a teda $Mo(X) = 5$.

Príklad 9.2. V dielni sa vyrobilo 1 000 kusov výrobkov, z nich je 50 kusov chybných. Vypočítajte:

a) pravdepodobnosť toho, že medzi 100 náhodne vybranými výrobkami bude práve 10 chybných;
b) strednú hodnotu a disperziu počtu chybných výrobkov medzi 100 vybranými.

Riešenie: Nech M, K, $n \in N$, kde $n \le M$ a $K \le M$. Diskrétna náhodná premenná X má <u>*hypergeometrické*</u> rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami M, K, n práve vtedy, keď:

- jej obor hodnôt je $H(X) = \{\max\{0, n - M + K\}, \ldots, \min\{K, n\}\}$,
- $P(X = x) = \dfrac{\binom{K}{x} \cdot \binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}$, pre každé $x \in H(X)$.

Používame označenie $X \sim hyge(M, K, n)$.
O hypergeometrickom rozdelení hovoríme najčastejšie v súvislosti s výberom bez vrátenia.

a) Nech v našom príklade náhodná premenná X vyjadruje počet chybných výrobkov medzi 100 náhodne vybranými, $X \sim hyge(M, K, n)$, kde $M = 1\ 000$, $K = 50$ a $n = 100$.
Počítame *pravdepodobnosť*:

$$P(X=10)=\frac{\binom{50}{10}\cdot\binom{950}{90}}{\binom{1000}{100}}=0,0138.$$

b) Pre výpočet *strednej hodnoty* a *disperzie* použijeme vzťahy:

$$E(X)=n\cdot\frac{K}{M},\ D(X)=\frac{M-n}{M-1}\cdot\left(1-\frac{K}{M}\right)\cdot\frac{n\cdot K}{M}.$$

Po dosadení obdržíme výsledky $E(X) = 5$ a $D(X) = 4{,}2793$.

Príklad 9.3. V priebehu jednej hodiny príde na benzínové čerpadlo priemerne 90 zákazníkov. Počet zákazníkov za určitý časový interval sa riadi Poissonovým rozdelením, ktorého parameter je priamo úmerný dĺžke intervalu. Určte pravdepodobnosť toho, že za 4 minúty prídu: práve dvaja zákazníci, aspoň jeden zákazník, najviac dvaja zákazníci, aspoň dvaja zákazníci.

Riešenie: Nech $\lambda > 0$. Diskrétna náhodná premenná X má Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ práve vtedy, keď:

- jej obor hodnôt je $H(X)=\{0,1,2,\dots\}=N\cup\{0\}$,
- $P(X=x)=\dfrac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$ pre každé $x\in N\cup\{0\}$.

Používame označenie $X \sim poiss(\lambda)$.
Pre číselné charakteristiky platia vzťahy: $E(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$ a $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$.

Počet impulzov za istý časový interval, pochádzajúcich z rôznych náhodných zdrojov, zvyčajne posudzujeme ako náhodnú premennú s Poissonovym rozdelením.

Nech náhodná premenná X udáva počet záujemcov o služby čerpadla v priebehu 4 minút a nech $F(x)$ je jej distribučná funkcia, $X \sim poiss(\lambda)$, $E(X)=\lambda=\dfrac{90\cdot 4}{60}=6$.

Dané *pravdepodobnosti* počítame podľa uvedeného vzorca:

$$P(X=2)=\frac{6^2\cdot e^{-6}}{2!}=\frac{18}{e^6}=0{,}0446;\quad P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{6^0\cdot e^{-6}}{0!}=0{,}9975;$$

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=F(2)=\frac{6^0\cdot e^{-6}}{0!}+\frac{6^1\cdot e^{-6}}{1!}+\frac{6^2\cdot e^{-6}}{2!}=\frac{25}{e^6}=$$
$$=0{,}0620;$$

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X\leq 1)=1-F(1)=1-\frac{6^0\cdot e^{-6}}{0!}-\frac{6^1\cdot e^{-6}}{1!}=0{,}9826.$$

Príklad 9.4. Pravdepodobnosť zásahu atómového jadra časticou v urýchľovači pri jednom pokuse je 0,001.

a) Aká je pravdepodobnosť toho, že pri 5 000 pokusoch bude jadro zasiahnuté viac než 5-krát a menej než 10-krát? Úlohu riešte pomocou binomického a Poissonovho rozdelenia a obidva výsledky porovnajte.
b) Vypočítajte strednú hodnotu, disperziu a smerodajnú odchýlku počtu zásahov jadra.

Riešenie: *Aproximácia binomického* rozdelenia pomocou *Poissonovho* rozdelenia:

Ak $\lambda > 0$ je konštanta a ak pre prirodzené n označíme $p = \frac{\lambda}{n}$, $q = 1 - p$, tak

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}, \text{ pre } x = 0, 1, \dots \ .$$

Aproximácia je vhodná, ak je $n \geq 500$ a $p \leq 0{,}05$.

a) Počítame *pravdepodobnosť* $P(5 < X < 10) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$. Použitím binomického a Poissonovho rozdelenia dostaneme tieto výsledky: 0,35228381100059 a 0,35221128786073.

b) Číselné charakteristiky neaproximujeme. Pre výpočet *strednej hodnoty, disperzie* a *smerodajnej odchýlky* náhodnej premennej X použijeme vzťahy:

$$E(X) = n \cdot p,\ D(X) = n \cdot p \cdot q,\ \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}\,.$$

Dostaneme tieto výsledky: $E(X) = 5$, $D(X) = 4{,}9950$ a $\sigma(X) = 2{,}2349$.

Príklad 9.5. Cestujúci môže prísť na zástavku električky v ľubovoľnom okamihu. Určte:

a) dĺžku intervalu medzi nasledujúcimi spojmi, ak pravdepodobnosť toho, že cestujúci bude čakať aspoň 4 minúty je 0,6;
b) strednú hodnotu, disperziu a smerodajnú odchýlku doby čakania na spoj [min.];
c) distribučnú funkciu doby čakania na spoj,
d) pravdepodobnosť toho, že doba čakania bude kratšia ako 2 minúty.

Riešenie: Nech $a, b \in R$, $a < b$. Spojitá náhodná premenná X má *spojité rovnomerné* rozdelenie pravdepodobnosti na intervale $\langle a,b \rangle$ práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom $f(x) = \begin{cases} h, & x \in \langle a,b \rangle \\ 0, & x \notin \langle a,b \rangle \end{cases}$, pre nejaké $h > 0$.

Používame označenie $X \sim unif(a,b)$.

Platí: $h = \frac{1}{b-a}$, distribučná funkcia $F(x) = \begin{cases} 0 & ak \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & ak \quad a \leq x \leq b \\ 1 & ak \quad x > b \end{cases}$, stredná hodnota

$E(X) = \frac{a+b}{2}$, disperzia $D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$. Parametre rozdelenia sú a, b.

Spojité rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná, ktorej hodnoty sa môžu vyskytovať len v istom ohraničenom intervale, pričom pravdepodobnosť toho, že hodnota sa vyskytne v istom podintervale tohto intervalu, je úmerná jeho dĺžke.

a) Nech náhodná premenná X znamená dobu čakania na spoj [min.], $X \sim unif(a,b)$, kde parameter $a = 0$ a parameter b je neznámy. Podľa podmienky úlohy platí (pričom máme na zreteli, že náhodná premenná je spojitá):

$P(X \geq 4) = 0{,}6 \Rightarrow P(X < 4) = P(X \leq 4) = F(4) = 0{,}4$.

Dosadíme do vzorca pre distribučnú funkciu: $\frac{4}{10} = \frac{4-0}{b-0} \Rightarrow b = 10$.

Teda interval $\langle a,b \rangle = \langle 0,10 \rangle$.

b) *Stredná hodnota*, *disperzia* a *smerodajná odchýlka* sa vypočítajú podľa uvedených vzorcov

$$E(X) = \frac{0+10}{2} = 5,\quad D(X) = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3},\quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{10-0}{2\sqrt{3}} = 2{,}8868.$$

c) *Distribučná funkcia*: $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{10}, & 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$.

d) Keďže náhodná premenná X je spojitá, pre danú *pravdepodobnosť* platí:

$P(X < 2) = P(X \leq 2) = F(2) = \frac{2}{10} = 0{,}2$.

Príklad 9.6. Životnosť kľúčovej súčiastky istého zariadenia má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 300 hodín. Určte:

a) pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraná súčiastka bude mať životnosť dlhšiu ako 320 hodín;

b) takú hodnotu t, pre ktorú možno s pravdepodobnosťou $P = 0{,}25$ očakávať, že životnosť súčiastky bude dlhšia ako t hodín.

Riešenie: Nech $\lambda \in R$, $\lambda > 0$. Spojitá náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\cdot e^{\frac{-x}{\lambda}}, & x \geq 0 \\ 0 \quad , & x < 0 \end{cases}.$$

Používame označenie $X \sim exp(\lambda)$.

Platí: $F(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x < 0 \\ 1 - e^{\frac{-x}{\lambda}}, & x \geq 0 \end{cases}$, $E(X) = \lambda$ a $D(X) = \lambda^2$.

Doba čakania na prvý výskyt istej udalosti má exponenciálne rozdelenie, ak intenzita možného vzniku tejto udalosti je stále rovnaká.

a) Nech X znamená životnosť súčiastky [hod.], $X \sim exp(\lambda)$, $E(X) = \lambda = 300$. Máme vypočítať *pravdepodobnosť*:

$P(X > 320) = 1 - P(X \leq 320) = 1 - F(320) = 1 - (1 - e^{\frac{-320}{300}}) = e^{\frac{-320}{300}} = 0{,}3442$.

b) Pre danú hodnotu $P = 0{,}25$ máme počítať také t, pre ktoré platí:

$0{,}25 = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F(t) = e^{\frac{-t}{300}}$.

Odtiaľ dostávame $\frac{-t}{300} = \ln 0,25$, a teda $t = -300 \cdot \ln 0,25 = 415,8883$.

Príklad 9.7. Merací prístroj je zaťažený jednak systematickou chybou 5 metrov, jednak chybou náhodnou. Náhodné chyby majú normálne rozdelenie so smerodajnou odchýlkou 10 metrov. Určte:

a) pravdepodobnosť toho, že chyba jedného merania bude v hraniciach od 7 do 12 m;
b) pravdepodobnosť toho, že chyba jedného merania nebude väčšia ako 15 m;
c) pravdepodobnosť toho, že chyba jedného merania bude väčšia ako 9 m;
d) pravdepodobnosť toho, že absolútna hodnota chyby jedného merania nebude väčšia ako 10 m;
e) pravdepodobnosť toho, že chyba jedného merania sa nebude líšiť od strednej hodnoty o viac ako 2 m;
f) pravdepodobnosť toho, že chyba jedného merania sa bude líšiť od strednej hodnoty o viac ako 3 m;
g) hornú hranicu chyby jedného merania, ktorá nebude prekročená s pravdepodobnosťou 0,9;
h) takú hodnotu ε, že pravdepodobnosť toho, že chyba jedného merania sa nebude líšiť od strednej hodnoty o viac ako ε, je 0,5.

Riešenie: Nech μ, $\sigma \in R$, $\sigma > 0$. Spojitá náhodná premenná X má <u>normálne (Gaussovo)</u> rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a σ práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, pre každé $x \in R$. Predpis pre distribučnú funkciu F nebudeme uvádzať.

Používame označenie $X \sim norm(\mu, \sigma)$.

Ak $Y \sim norm(0,1)$, tak hovoríme, že náhodná premenná Y má <u>normované normálne</u> rozdelenie. Jej hustota pravdepodobnosti je daná predpisom $\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$ a distribučná funkcia predpisom $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ pre každé $y \in R$. Distribučné funkcie F a Φ nie sú elementárne. Hodnoty distribučnej funkcie Φ sú tabelované.

Náhodná premenná $X \sim norm(\mu, \sigma)$ sa substitúciou $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ prevedie na normovanú náhodnú premennú $Y \sim norm(0,1)$.

Platí:

- $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$, $E(Y) = 0$, $D(Y) = \sigma(Y) = 1$;
- $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$ a $\Phi(y) - \Phi(-y) = 2 \cdot \Phi(y) - 1$, pre každé $y \in R$;
- $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, pre každé $x \in R$;
- $P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$, pre ľubovoľné $a < b$;
- $P(|X - \mu| < \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$, pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$.

Chyba pri udržaní istého priestorového alebo kvantitatívneho cieľa, často napr. v hromadnej výrobe, sa zvyčajne posudzuje ako normálne rozdelenie. Často vystupuje normálne rozdelenie ako limitný prípad iných rozdelení pravdepodobnosti.

a) Nech náhodná premenná X znamená chybu merania v metroch, $X \sim norm(\mu, \sigma)$. Stredná hodnota je rovná chybe systematickej, teda $\mu = 5$ a smerodajná odchýlka $\sigma = 10$.
Počítame danú *pravdepodobnosť*, pričom hodnoty distribučnej funkcie Φ vyhľadáme v tabuľkách, resp. použijeme vhodný softvér, napr. MATLAB:

$$P(7 < X < 12) = F(12) - F(7) = \Phi\left(\frac{12-5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{7-5}{10}\right) = \Phi(0,7) - \Phi(0,2) =$$
$$= 0,75804 - 0,57926 = 0,1788.$$

b) Analogicky: $P(X \le 15) = F(15) = \Phi\left(\frac{15-5}{10}\right) = \Phi(1) = 0,8413$.

c) $P(X > 9) = 1 - P(X \le 9) = 1 - F(9) = 1 - \Phi\left(\frac{9-5}{10}\right) = 1 - \Phi(0,4) = 1 - 0,65542 = 0,3446$.

d) $P(|X| \le 10) = P(-10 \le X \le 10) = \Phi\left(\frac{10-5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-10-5}{10}\right) = \Phi(0,5) - \Phi(-1,5) =$
$= \Phi(0,5) - (1 - \Phi(1,5)) = 0,69146 - 1 + 0,93319 = 0,6247$.

e) $P(|X - \mu| \le 2) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{2}{10}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi(0,2) - 1 = 2 \cdot 0,57926 - 1 = 0,1585$.

f) $P(|X - \mu| > 3) = 1 - P(|X - \mu| \le 3) = 1 - 2 \cdot \Phi\left(\frac{3}{10}\right) + 1 = 2 - 2 \cdot 0,61791 = 0,7642$.

g) Máme vypočítať hornú hranicu h chyby jedného merania v metroch pre danú hodnotu pravdepodobnosti:

$$0,9 = P(X \le h) = F(h) = \Phi\left(\frac{h-5}{10}\right) \Rightarrow \frac{h-5}{10} = \Phi^{-1}(0,9) = 1,28155 \Rightarrow h = 17,8155.$$

h) $0,5 = P(|X - \mu| \le \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{10}\right) - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{10}\right) = 0,75 \Rightarrow \varepsilon = 10 \cdot \Phi^{-1}(0,75) = 10 \cdot 0,67449 = 6,7449.$$

Príklad 9.8. Nech náhodná premenná $X \sim norm(\mu, \sigma)$. Určte parametre μ a σ, ak platí $P(X < 70) = 0,95$ a $P(X < 80) = 0,99$.

Riešenie:

Platí: $0,95 = P(X < 70) = F(70) = \Phi\left(\frac{70-\mu}{\sigma}\right)$, $0,99 = P(X < 80) = F(80) = \Phi\left(\frac{80-\mu}{\sigma}\right)$.

Dostaneme sústavu rovníc , odkiaľ vypočítame neznáme parametre μ a σ:

$$\frac{70-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,95) = 1,64485; \quad \frac{80-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,99) = 2,32635 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu + 1,64485 \cdot \sigma = 70, \quad \mu + 2,32635 \cdot \sigma = 80 \Rightarrow \mu = 45,8640 \text{ a } \sigma = 14,6736.$$

Úlohy:

9.1.

Viacročným pozorovaním stavu hladiny veľkej rieky v určitej oblasti sa zistilo, že pravdepodobnosť jarných záplav tejto rieky je 3/14. Určte:

a) strednú hodnotu, disperziu a modus počtu záplav pre najbližších 70 rokov;

b) pravdepodobnosť toho, že týchto záplav bude aspoň 6.

[*a*) $E(X) = 15$, $D(X) = 11{,}7857$; $Mo(X) = 15$, *b*) 0,9989]

9.2.

Úspešnosť zásahov cieľa istého športovca dosahuje 65 %. Určte:

a) pravdepodobnosť toho, že pri dvadsiatich nezávislých výstreloch bude cieľ zasiahnutý najmenej sedemkrát, ak sa pri ďalšej streľbe podmienky nezmenia;

b) strednú hodnotu, disperziu a modus počtu zásahov do cieľa v tejto sérii pokusov.

[*a*) 0,9985; *b*) $E(X) = 13$, $D(X) = 4{,}55$; $Mo(X) = 13$]

9.3.

Veľkoobchodný sklad zásobuje 20 obchodov. Od každého z nich môže prísť v priebehu dňa objednávka s pravdepodobnosťou 0,6 nezávisle od ostatných obchodov. Určte:

a) strednú hodnotu, disperziu a modus počtu objednávok za deň;

b) pravdepodobnosť toho, že v priebehu dňa príde aspoň 5 objednávok;

c) pravdepodobnosť toho, že v priebehu dňa príde aspoň 6, ale najviac 9 objednávok.

[*a*) $E(X) = 12$, $D(X) = 4{,}8$; $Mo(X) = 12$, *b*) 0,9997; *c*) 0,1259]

9.4.

Určte pravdepodobnosť toho, že v sérii 100 nezávislých hodov hracou kockou padne šestka:

a) 10-krát; b) aspoň 25-krát; c) ani raz; d) najpravdepodobnejší počet šestiek v tejto sérii pokusov a pravdepodobnosť toho, že padne práve tento počet šestiek.

[*a*) 0,0214; *b*) 0,0217; *c*) $1{,}2075 \cdot 10^{-8}$; *d*) 16; 0,1065]

9.5.

V hre „5 zo 40" určte:

a) pravdepodobnosť výhry prvej ceny, [$1{,}5197 \cdot 10^{-6}$]

b) pravdepodobnosť výhry niektorej z prvých troch cien, [0,0093]

c) strednú hodnotu a disperziu počtu uhádnutých čísel. [$E(X) = 0{,}6250$; $D(X) = 0{,}4908$]

9.6.

Zo série 2 000 výrobkov, medzi ktorými je 120 chybných, náhodne vyberieme na kontrolu kvality 40 výrobkov. Určte:

a) pravdepodobnosť toho, že medzi nimi je $x = 0, 1, \ldots, 5$ chybných;

b) pravdepodobnosť toho, že počet chybných výrobkov vo výbere bude aspoň 6;

c) strednú hodnotu a disperziu počtu chybných výrobkov vo výbere.

$$\begin{bmatrix} a)\quad 0{,}0821;\quad 0{,}2140;\quad 0{,}2695;\quad 0{,}2186;\quad 0{,}1283;\quad 0{,}0581; \\ b)\quad 0{,}0294;\quad c)\quad E(X)=2{,}4;\quad D(X)=2{,}2120 \end{bmatrix}$$

9.7.

V priebehu jednej hodiny zapojí manipulantka v telefónnej ústredni priemerne 80 hovorov. Určte pravdepodobnosť toho, že v priebehu 30 sekúnd, počas ktorých sa v miestnosti nenachádza:

a) nebude volať ani 1 účastník;

b) bude volať aspoň 1 účastník;

c) budú volať aspoň dvaja účastníci. [*a*) 0,5134; *b*) 0,4866; *c*) 0,1443]

9.8.

Do predajne príde za hodinu priemerne 120 zákazníkov. Počet zákazníkov za určitý časový interval sa riadi Poissonovým rozdelením, ktorého parameter je priamo úmerný dĺžke intervalu. Určte, aká je pravdepodobnosť toho, že za 2 minúty prídu:

a) práve dvaja zákazníci, b) najviac dvaja zákazníci, c) aspoň dvaja zákazníci,
d) aspoň jeden zákazník, e) aspoň štyria zákazníci, f) najviac štyria zákazníci.

[*a*) 0,1465; *b*) 0,2381; *c*) 0,9084; *d*) 0,9817; *e*) 0,5665; *f*) 0,6288]

9.9.

V Inland Empire Telephone zistili, že na istej linke prichádza v priemere 3,2 hovorov za minútu. Nájdite:

a) pravdepodobnosť toho, že počas nasledujúcej minúty príde na tejto linke 5 hovorov;
b) pravdepodobnosť toho, že počas nasledujúcej minúty príde aspoň 5 hovorov;
c) pravdepodobnosť toho, že počas nasledujúcich dvoch minút príde 5 hovorov.

[*a*) 0,1140; *b*) 0,2194; *c*) 0,1487]

9.10.

Určitá rádioaktívna látka vyžaruje priemerne 80 častíc za hodinu. Určte pravdepodobnosť toho, že v priebehu 1 minúty vyžiari látka:

a) $x = 0, 1, \dots, 10$ častíc; b) viac ako 3 častice,
c) najviac 8 častíc, d) viac ako 3 častice, ale najviac 8 častíc.

$$\left[\begin{array}{c} a)\,0{,}2636;\ 0{,}3515;\ 0{,}2343;\ 0{,}1041;\ 0{,}0347;\ 0{,}0093;\ 0{,}0021;\ 0{,}0004;\ 0{,}0001;\ 1{,}2899\cdot 10^{-6};\\ b)\,4{,}6494\cdot 10^{-2};\qquad c)\,9{,}9999\cdot 10^{-1};\qquad d)\,0{,}0465. \end{array}\right]$$

9.11.

Na poštovom úrade majú byť inštalované automaty na predaj poštových známok, ktoré po vhodení príslušnej mince vydajú behom desiatich sekúnd žiadanú známku. Predpokladáme, že v dobe najväčšej frekvencie bude chcieť použiť automat v priemere 6 osôb za minútu.

a) Aká je stredná hodnota počtu záujemcov o poštovú známku v priebehu desiatich sekúnd?
b) Aká je pravdepodobnosť toho, že v priebehu desiatich sekúnd prídu traja záujemcovia?
c) Aká je pravdepodobnosť toho, že záujemcovia budú aspoň dvaja?
d) Koľko automatov by sme mali inštalovať, aby bol záujemca obslúžený okamžite s pravdepodobnosťou aspoň 0,95? [*a*) 1; *b*) 0,0613; *c*) 0,2642; *d*) 4]

9.12.

Plniaca linka naplní do fľaše viac ako 0,7 l minerálnej vody s pravdepodobnosťou 0,6. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi 2 000 fľašami:

a) ani v jednej nie je menej ako 0,7 l?
b) aspoň polovica obsahuje viac ako 0,7 l?
c) Nájdite najpravdepodobnejší počet fliaš obsahujúcich viac ako 0,7 l minerálnej vody.
d) Aká je odpovedajúca pravdepodobnosť?

[Binomické rozdelenie v úlohách *a*), *b*) aproximujeme Poissonovým rozdelením. *a*) $4{,}8805\cdot 10^{-99}$; *b*) 0,99999999871184; *c*) 1 200; *d*) 0,0182]

9.13.

Hodnota dielika voltmetra je 10 V. Odčítanie sa uskutočňuje so zaokrúhlením na najbližší celý dielik stupnice. Určte disperziu chyby zaokrúhlenia a pravdepodobnosť toho, že absolútna hodnota náhodnej chyby, ktorej sa zaokrúhlením dopustíme, bude menšia ako 2 V. [25/3; 0,4]

9.14.

Trolejbusy MHD premávajú v päťminútových intervaloch. Istý cestujúci môže prísť na zastávku s rovnakou pravdepodobnosťou v ľubovoľnom okamžiku medzi dvoma odchodmi.

a) Aká je stredná hodnota a smerodajná odchýlka doby čakania [min.] na trolejbus?
b) Aká je pravdepodobnosť toho, že doba čakania bude kratšia ako 1 minúta?
c) Aké sú intervaly premávania trolejbusov, keď smerodajná odchýlka doby čakania na trolejbus je $\frac{5}{2}\sqrt{3}$?

$$\left[a)2,5;\ \frac{5\cdot\sqrt{3}}{6};\ b)\frac{1}{5};\ c)15\right]$$

9.15.

Dĺžka cesty [km], ktorú auto prejde až do prvej poruchy, je náhodnou premennou s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti a strednou hodnotou 5 000 km. Určte:

a) distribučnú funkciu náhodnej premennej X,
b) pravdepodobnosť toho, že sa auto pokazí skôr než prejde 5 000 km;
c) pravdepodobnosť toho, že auto prejde bez poruchy viac ako x = 6 000, 7 000, 8 000, 9 000, 10 000 km.

$$\left[\begin{array}{l} a)\ F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\frac{x}{5000}}, & x\geq 0\end{cases};\quad b)\,0,6321;\\ c)\,0,3012;\ 0,2466;\ 0,2019;\ 0,1653;\ 0,1353\end{array}\right]$$

9.16.

Výrobné zariadenie má poruchu v priemere raz za 2 000 hodín. Doba bezporuchového chodu má exponenciálne rozdelenie. Vypočítajte:

a) pravdepodobnosť toho, že doba bezporuchového chodu bude kratšia ako 1 000 hodín;
b) takú hodnotu t, že pravdepodobnosť toho, že doba bezporuchového chodu bude dlhšia ako t hodín, je 0,99. [*a*) 0,3935; *b*) 20,1007]

9.17.

Doba obsluhy zákazníka má exponenciálne rozdelenie so smerodajnou odchýlkou 7 minút. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že zákazník bude obslúžený do t = 3, 6, 9, 12 minút.

[0,3486; 0,5756; 0,7235; 0,8199]

9.18.

Doba obsluhy zákazníka má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti. Aká by mala byť stredná hodnota doby obsluhy, aby bol zákazník obslúžený do 5 minút s pravdepodobnosťou P = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9?

[7;2135; 5,4568; 4,1529; 3,1067; 2,1715]

9.19.

Doba života určitej elektronickej súčiastky sa riadi exponenciálnym rozdelením so smerodajnou odchýlkou 1 000 hodín. Vypočítajte strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku počtu tých súčiastok, ktoré budú mať životnosť dlhšiu ako 1 500 hodín, pri výrobe 100 súčiastok. [22,3130; 4,1634]

9.20.

Pri výrobe kaprolaktamu sa žiada, aby bod tuhnutia bol z intervalu 67,2 – 69,9 °C. Pri skúškach veľkého množstva fliaš kaprolaktamu sa zistilo, že bod tuhnutia má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ = 67,7 °C a smerodajnou odchýlkou σ = 0,3 °C. Stanovte % fliaš kaprolaktamu, pri ktorých leží bod tuhnutia mimo požadovaného intervalu. [4,78 %]

9.21.

Dĺžka rúrok má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ = 400 cm a smerodajnou odchýlkou σ = 10 cm. Zo zásielky inštalačných rúrok je náhodne vybraná jedna rúrka. Vypočítajte:

a) pravdepodobnosť toho, že dĺžka náhodne vybranej rúrky bude väčšia ako 405 cm;
b) pravdepodobnosť toho, že sa dĺžka náhodne vybranej rúrky nebude líšiť od strednej hodnoty o viac ako 1 cm;
c) hornú hranicu h dĺžky náhodne vybranej rúrky, ktorá nebude prekročená s pravdepodobnosťou 0,95;
d) takú hodnotu ε, že pravdepodobnosť toho, že sa dĺžka náhodne vybranej rúrky nebude líšiť od strednej hodnoty o viac ako ε, je 0,5.

[*a*) 0,3085; *b*) 0,0797; *c*) 416,4485; *d*) 6,7449]

9.22.

Náhodná premenná X sa riadi normálnym rozdelením $norm(1,\sigma)$. Určte parameter σ, ak platí, že $P\left(|X-1|<0,5\right)=0,5$. [0,7413]

9.23.

a) Aká je pravdepodobnosť toho, že dĺžka skrutky, vyrobenej na istom stroji, sa nebude líšiť od jej strednej hodnoty o viac ako 2 mm, ak vieme, že táto dĺžka má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 71 mm a smerodajnou odchýlkou 1,5 mm?
b) Na inom stroji bola vyrobená skrutka dlhá 65 mm. Vieme, že smerodajná odchýlka dĺžky skrutky vyrábanej na tomto stroji je 2,5 mm, ale nepoznáme jej strednú hodnotu. Aká je pravdepodobnosť toho, že táto stredná hodnota sa nelíši od dosiahnutej hodnoty 65 mm o viac ako 5 mm? [*a*) 0,8176; *b*) 0,9545]

9.24.

Dĺžka automaticky vyrábaných skrutiek je náhodná premenná X, ktorá má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ = 20 mm (čo je normovaná dĺžka) a so smerodajnou odchýlkou σ = 0,1 mm. Odberateľ očakáva dodávku n = 50 000, 800 000, 1 000 000 skrutiek. Určte strednú hodnotu počtu skrutiek, ktoré budú mať požadovanú dĺžku 20 mm s prípustnou toleranciou $\pm$ 0,2 mm. [47 725; 763 600; 954 500]

9.25.

Pri kontrole sa prijímajú všetky výrobky, ktorých dĺžka presahuje 77 cm. Bolo zistené, že stredná hodnota dĺžky výrobku μ = 75 cm a smerodajná odchýlka σ = 5 cm. Určte:

a) pravdepodobnosť toho, že výrobok, ktorý prešiel kontrolou, je dlhší než 80 cm;
b) koľko výrobkov dlhších než 80 cm môžeme očakávať, ak na kontrolu bolo prijatých 1 000 kusov ? [*a*) 0,4604; *b*) 460]

9.26.

Výška náhodne vybraného dospelého muža je náhodná premenná s normálnym rozdelením so strednou hodnotou 176 cm a smerodajnou odchýlkou 6 cm. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že z dvoch náhodne vybraných mužov aspoň jeden bude mať výšku presahujúcu 182 cm. [0,2921]

10. Náhodné vektory

Riešené príklady:

Príklad 10.1. Je daná pravdepodobnostná tabuľka diskrétneho náhodného vektora (X,Y):

$Y \setminus X$	2	4	6
1	0	k	$2\cdot k$
3	k	$2\cdot k$	k
7	$2\cdot k$	0	k

. Určte:

a) konštantu k,
b) marginálne pravdepodobnosti $P_1(x_i)$ a $P_2(y_j)$,
c) stredné hodnoty $E(X)$ a $E(Y)$,
d) disperzie $D(X)$ a $D(Y)$,
e) kovarianciu $k(X,Y)$ a korelačný koeficient $\rho(X,Y)$,
f) kovariančnú maticu K,
g) či sú náhodné vektory X, Y nezávislé.

Riešenie:

a) Nech (X,Y) je *diskrétny* náhodný vektor s oborom hodnôt $H(X,Y) \subseteq H(X)\times H(Y)$, kde $H(X)=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a $H(Y)=\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ sú obory hodnôt náhodných premenných X a Y. Pravdepodobnosti $P(X=x_i, Y=y_j)=P(x_i,y_j)=p_{ij}$ náhodného vektora (X,Y) nazývame *združené pravdepodobnosti.* Konštantu k vypočítame na základe *normalizačnej podmienky* $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}=1$.

Dostávame teda $3k + 3k + 4k = 1$, odtiaľ $k=\dfrac{1}{10}$.

b) Pre *marginálne pravdepodobnosti* náhodných premenných X a Y vektora (X,Y) platí:
$P_1(x_i)=\sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ pre $x_i \in H(X)$ a $P_2(y_j)=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ pre $y_j \in H(Y)$.

Pravdepodobnostné tabuľky jednotlivých premenných X, Y budú teda:

x_i	2	4	6	y_j	1	3	7
$P_1(x_i)$	0,3	0,3	0,4	$P_2(y_j)$	0,3	0,4	0,3

c) *Stredné hodnoty* vypočítame podľa vzorcov platných pre jednu diskrétnu náhodnú premennú:

$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_1(x_i)$ a $E(Y)=\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot P_2(y_j)$. Dostaneme výsledky $E(X) = 4{,}2$ a $E(Y) = 3{,}6$.

d) *Disperzie* môžeme počítať podľa vzorcov platných pre jednu diskrétnu náhodnú premennú:
$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ *a* $D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$.
Dostaneme výsledky $D(X) = 2{,}76$ a $D(Y) = 5{,}64$.

e) *Kovarianciu* (*korelačný moment*) vektora (X,Y) vypočítame na základe vzorca:

$k(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$, kde $E(X\cdot Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\cdot y_j\cdot p_{ij}$. *Korelačný koeficient* vektora (X,Y) je daný vzťahom:

$$\rho(X,Y)=\frac{k(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}.$$

Tieto charakteristiky poskytujú informáciu o vzťahu medzi premennými X a Y. Kovariancia môže nadobúdať hodnoty z intervalu $(-\infty, \infty)$ a je väčšinou len pomocným nástrojom pre meranie intenzity vzťahu medzi dvoma premennými. Najpoužívanejšou mierou tesnosti lineárneho vzťahu je korelačný koeficient, ktorý nadobúda hodnoty z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Ak je jeho hodnota rovná $\pm$ 1, ide o priamu, resp. nepriamu funkčnú lineárnu závislosť. Ak je $k(X,Y)=0$, náhodné premenné X a Y ešte nemusia byť *nezávislé*. Hovoríme, že sú *nekorelované*.

$E(X\cdot Y)=2\cdot 1\cdot 0+4\cdot 1\cdot 0{,}1+6\cdot 1\cdot 0{,}2+2\cdot 3\cdot 0{,}1+4\cdot 3\cdot 0{,}2+6\cdot 3\cdot 0{,}1+2\cdot 7\cdot 0{,}2+4\cdot 7\cdot 0+$
$+6\cdot 7\cdot 0{,}1=13{,}4.$

Potom $k(X,Y)=13{,}4-4{,}2\cdot 3{,}6=-1{,}72$ a $\rho(X,Y)=\dfrac{-1{,}72}{\sqrt{2{,}76}\cdot\sqrt{5{,}64}}=-0{,}4359.$

f) Pre *kovariančnú maticu* platí: $K=\begin{pmatrix} k(X,X) & k(X,Y)\\ k(Y,X) & k(Y,Y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D(X) & k(X,Y)\\ k(X,Y) & D(Y)\end{pmatrix}.$

V našom prípade dostaneme $K=\begin{pmatrix} 2{,}76 & -1{,}72\\ -1{,}72 & 5{,}64\end{pmatrix}.$

g) Platí: Ak sú náhodné premenné X, Y *nezávislé*, potom $k(X,Y) = 0$. V našom prípade je $k(X,Y)\neq 0$, teda X, Y sú *závislé*.

Úlohu môžeme riešiť aj inak.

Platí: Nech (X,Y) je diskrétny náhodný vektor so *združenými pravdepodobnosťami* p_{ij} a s *marginálnymi pravdepodobnosťami* $P_1(x_i)$ a $P_2(y_j)$. Náhodné premenné X, Y sú *nezávislé* práve vtedy, keď $p_{ij}=P_1(x_i)\cdot P_2(y_j)$ pre všetky $x_i\in H(X)$ a $y_j\in H(Y)$.

V našom prípade platí, že $P(X=2,Y=1)=0\neq P_1(2)\cdot P_2(1)=0{,}3\cdot 0{,}3$. Teda X, Y sú *závislé*.

Príklad 10.2. Je daná hustota pravdepodobnosti spojitého náhodného vektora (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} k\cdot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}\right), & x\in\langle 0,2\rangle,\ y\in\langle 0,3\rangle\\ 0, & inde\end{cases}$$. Určte:

a) konštantu k,
b) marginálne hustoty pravdepodobnosti $f_1(x)$ a $f_2(y)$,
c) stredné hodnoty $E(X)$ a $E(Y)$,
d) disperzie $D(X)$ a $D(Y)$,
e) kovarianciu $k(X,Y)$,
f) či sú X, Y nezávislé.

Riešenie: a) Konštantu k vypočítame na základe vlastnosti *združenej hustoty pravdepodobnosti spojitého* náhodného vektora (X,Y): $\iint_{R^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

Teda počítame dvojný integrál:

$$1 = k\cdot\int_0^3\left(\int_0^2\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)dx\right)dy = k\cdot\int_0^3\left[\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{3}\right]_0^2 dy = k\cdot\int_0^3\left(1+\frac{2y}{3}\right)dy = k\cdot\left[y+\frac{y^2}{3}\right]_0^3 = 6\cdot k,$$

odkiaľ $k=\dfrac{1}{6}$.

b) Na základe vzťahov $f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy,\ x\in R$, $f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx,\ y\in R$, vypočítame *marginálne hustoty pravdepodobnosti* $f_1(x)$ a $f_2(y)$:

$$f_1(x)=\int_0^3 \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)dy = \begin{cases}\frac{1}{4}\cdot(x+1), & pre\ x\in\langle 0,2\rangle\\ 0, & inde\end{cases}$$

$$f_2(y)=\int_0^2 \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)dx = \begin{cases}\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{2}{3}\cdot y\right), & pre\ y\in\langle 0,3\rangle\\ 0, & inde\end{cases}$$

c) *Stredné hodnoty* môžeme počítať podľa vzorcov platných pre jednu spojitú náhodnú premennú: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_1(x)\,dx$ a $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_2(y)\,dy$.

Dostaneme teda:

$$E(X)=\frac{1}{4}\cdot\int_0^2\left(x^2+x\right)dx=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{7}{6},\ E(Y)=\frac{1}{6}\cdot\int_0^3\left(y+\frac{2y^2}{3}\right)dy=\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{y^2}{2}+\frac{2y^3}{9}\right]_0^3=\frac{7}{4}.$$

d) *Disperzie* môžeme počítať podľa vzorcov platných pre jednu diskrétnu náhodnú premennú: $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ a $D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$.

Dostaneme výsledky $D(X)=11/36$ a $D(Y)=11/16$.

e) *Kovarianciu* vypočítame na základe vzorca:
$k(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$, kde $E(X\cdot Y)=\iint_{R^2} x\cdot y\cdot f(x,y)\,dx\,dy$.

Dostaneme teda: $E(X\cdot Y)=$

$$=\frac{1}{6}\cdot\int_0^3 y\cdot\left(\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{xy}{3}\right)dx\right)dy=\frac{1}{6}\cdot\int_0^3 y\cdot\left[\frac{x^3}{6}+\frac{x^2y}{6}\right]_0^2 dy=\frac{1}{9}\cdot\int_0^3(2y+y^2)\,dy=\frac{1}{9}\cdot\left[y^2+\frac{y^3}{3}\right]_0^3=2.$$

Potom $k(X,Y)=2-\dfrac{7}{6}\cdot\dfrac{7}{4}=-\dfrac{1}{24}$.

f) Platí:

Nech (X,Y) je spojitý náhodný vektor so *združenou hustotou pravdepodobnosti* $f(x,y)$ a s *marginálnymi hustotami pravdepodobnosti* $f_1(x), f_2(y)$. Náhodné premenné X, Y sú *nezávislé* práve vtedy, keď $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ skoro všade.

Ak existuje taký bod $(x_0,y_0) \in R^2$, že funkcie $f(x,y)$ a $f_1(x)\cdot f_2(y)$ sú v tomto bode spojité a $f(x_0,y_0) \neq f_1(x_0)\cdot f_2(y_0)$, potom sú náhodné premenné X, Y *závislé*.

V našom prípade platí, že $f(x,y)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right) \neq f_1(x)\cdot f_2(y)=\frac{1}{4}\cdot(x+1)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{2y}{3}\right)$.

Teda X, Y sú *závislé*.

Môžeme rozhodnúť aj na základe vypočítanej kovariancie. Pretože v našom prípade platí, že $k(X,Y)\neq 0$, budú X, Y *závislé*.

Úlohy:

10.1.

Je daná pravdepodobnostná tabuľka diskrétneho náhodného vektora (X,Y):

$Y \setminus X$	-1	0	1
2	k	0,1	0,35
4	0,05	0,3	0,1

Určte:

a) konštantu k,
b) marginálne pravdepodobnosti $P_1(x_i)$ a $P_2(y_j)$,
c) stredné hodnoty $E(X)$ a $E(Y)$,
d) disperzie $D(X)$ a $D(Y)$,
e) kovarianciu $k(X,Y)$ a korelačný koeficient $\rho(X,Y)$,
f) či sú náhodné vektory X, Y nezávislé.

$$\left[\; a)\, k=0{,}1;\quad b)\ \begin{array}{c|ccc} x_i & -1 & 0 & 1 \\ \hline P_1(x_i) & 0{,}15 & 0{,}4 & 0{,}45 \end{array};\quad \begin{array}{c|cc} y_j & 2 & 4 \\ \hline P_2(y_j) & 0{,}55 & 0{,}45 \end{array};\quad \begin{array}{l} c)\, 0{,}3;\ 2{,}9;\ d)\, 0{,}51;\ 0{,}99; \\ e)\, -0{,}17;\ -0{,}2392; \\ f)\ závislé \end{array} \right]$$

10.2.

Je daná hustota pravdepodobnosti spojitého náhodného vektora (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} a, & v\ oblasti\ \ M \\ 0, & mimo\ oblasti\ \ M \end{cases},$$

kde M je vnútro trojuholníka s vrcholmi $[0,0],[2,0],[2,2]$. Určte:

a) konštantu a,
b) marginálne hustoty pravdepodobnosti $f_1(x)$ a $f_2(y)$,
c) stredné hodnoty $E(X)$ a $E(Y)$,
d) disperzie $D(X)$ a $D(Y)$,
e) korelačný koeficient $\rho(X,Y)$,
f) či sú X, Y nezávislé.

$$\left[\begin{array}{l} a)\,\frac{1}{2};\quad c)\,\frac{4}{3},\frac{2}{3};\quad d)\,\frac{2}{9},\frac{2}{9};\quad e)\,\frac{1}{2};\quad f)\ závislé; \\ b)\ f_1(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}, & x\in\langle 0,2\rangle \\ 0, & inde \end{cases};\ f_2(y)=\begin{cases} 1-\frac{y}{2}, & y\in\langle 0,2\rangle \\ 0, & inde \end{cases} \end{array}\right]$$

11. Matematická štatistika

Riešené príklady:

Príklad 11.1. Zo základného súboru s normálnym rozdelením, kde je známy rozptyl $\sigma^2 = 0{,}06$, sme urobili náhodný výber s realizáciami: 1,3; 1,8; 1,4; 1,2; 0,9; 1,5; 1,7. Určte:

a) 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu,
b) 90 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu,
c) 99 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

Riešenie: a) S pravdepodobnosťou 1–α bude *obojstranný* interval spoľahlivosti (IS) pre strednú hodnotu μ určený reláciou, pričom smerodajnú odchýlku σ poznáme :

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle.$$

Do daného vzorca dosadíme potrebné hodnoty: rozsah výberu n = 7, smerodajná odchýlka $\sigma = \sqrt{0{,}06}$, výberový priemer $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 1{,}4$; hladina významnosti $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$; kvantil normovaného normálneho rozdelenia $y_{1-\frac{\alpha}{2}} = y_{0{,}975} = 1{,}95996$.

Hľadaný IS bude $\mu \in \langle 1{,}2185\ ;\ 1{,}5815 \rangle$.

b) Hľadaný *ľavostranný* IS s koeficientom spoľahlivosti 1–α určuje relácia (pričom smerodajnú odchýlku σ poznáme):

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \infty \right).$$

Do daného vzorca dosadíme: $n = 7$, $\sigma = \sqrt{0{,}06}$, $\bar{x} = 1{,}4$ a $y_{1-\alpha} = y_{0{,}9} = 1{,}28155$.

Hľadaný IS bude $\mu \in \langle 1{,}2814\ ;\ \infty)$.

c) Hľadaný *pravostranný* IS s koeficientom spoľahlivosti 1–α určuje relácia (pričom smerodajnú odchýlku σ poznáme):

$$\mu \in \left(-\infty\ ,\ \bar{x} + y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle.$$

Do daného vzorca dosadíme: $n = 7$, $\sigma = \sqrt{0{,}06}$, $\bar{x} = 1{,}4$ a $y_{1-\alpha} = y_{0{,}99} = 2{,}32635$.

Hľadaný IS bude $\mu \in (-\infty\ ;\ 1{,}6154\rangle$.

Príklad 11.2. V predchádzajúcom roku bol v osemdesiatich obchodných organizáciách priemerný podiel zásob financovaný bankovým úverom 68 %, pričom smerodajná odchýlka týchto podielov bola 4 %. Zistite, aký počet obchodných organizácií treba z ich celkového počtu vybrať, aby bolo možné odhadnúť priemerný podiel zásob, financovaný bankovým úverom v bežnom roku, s presnosťou ± 2 % a so spoľahlivosťou 0,9, ak predpokladáme, že sa variabilita (rozptyl) nezmenila.

Riešenie: Máme určiť, pre aké *najmenšie* $n \in N$ bude s pravdepodobnosťou 0,9 platiť:

$$|\bar{x} - \mu| \le 0{,}02 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \in \langle \bar{x} - 0{,}02\ ;\ \bar{x} + 0{,}02 \rangle.$$

Z predchádzajúceho príkladu vieme, že *obojstranný* IS pre strednú hodnotu μ na hladine významnosti α, pričom smerodajnú odchýlku σ poznáme, je určený reláciou:

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \overline{x} + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle .$$

Potrebujeme také n, že pre polomer intervalu platí $y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02$ s pravdepodobnosťou 0,9.

Platí, že $\sigma = 0{,}04$; $\alpha = 1-0{,}9 = 0{,}1$ a kvantil $y_{1-\frac{\alpha}{2}} = y_{0{,}95} = 1{,}64485$. Teda ďalej dostaneme:

$$1{,}6449 \cdot \frac{0{,}04}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \geq \frac{1{,}6449 \cdot 0{,}04}{0{,}02} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 10{,}8228 \quad \Leftrightarrow \quad n = 11.$$

Príklad 11.3. Predpokladá sa, že spotreba rozpúšťadla pre náterové hmoty má normálne rozdelenie. Na dvanástich náhodne vybraných vzorkách bola zistená spotreba a vypočítaný výberový priemer $\overline{x} = 14{,}3060$ a modifikovaný výberový rozptyl $s^{*2} = 0{,}3270$. Nájdite:

a) 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu spotreby rozpúšťadla,
b) 90 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu,
c) 99 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu,
d) 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre smerodajnú odchýlku.

Riešenie: a) V našom prípade je neznáma smerodajná odchýlka σ základného súboru, teda s pravdepodobnosťou $1-\alpha$ bude *obojstranný* IS pre strednú hodnotu μ určený reláciou:

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \;,\; \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right\rangle .$$

Do daného vzorca dosadíme: n = 12, $\overline{x} = 14{,}3060$; $s^* = \sqrt{s^{*2}} = 0{,}5718$; α = 1–0,95 = 0,05 a kvantil Studentovho t-rozdelenia $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{0{,}975;11} = 2{,}2010$.

Dostávame $\mu \in \langle 13{,}9427 \;;\; 14{,}6693 \rangle$.

b) Pre *pravostranný* IS pre strednú hodnotu μ na hladine významnosti α, pričom smerodajnú odchýlku σ nepoznáme, platí relácia:

$$\mu \in \left(-\infty \;,\; \overline{x} + t_{1-\alpha,n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right\rangle .$$

Do daného vzorca dosadíme: n = 12, $\overline{x} = 14{,}3060$; $s^* = \sqrt{s^{*2}} = 0{,}5718$; α = 1–0,9 = 0,1 a kvantil $t_{1-\alpha,n-1} = t_{0{,}9;11} = 1{,}3634$.

Dostávame $\mu \in (-\infty \;;\; 14{,}5311 \rangle$.

c) Pre *ľavostranný* IS pre strednú hodnotu μ na hladine významnosti α, pričom smerodajnú odchýlku σ nepoznáme, platí relácia:

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - t_{1-\alpha,n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \;,\; \infty \right) .$$

Do daného vzorca dosadíme: n = 12, $\overline{x} = 14{,}3060$; $s^* = \sqrt{s^{*2}} = 0{,}5718$; α = 1–0,99 = 0,01 a kvantil $t_{1-\alpha,n-1} = t_{0{,}99;11} = 2{,}7181$.

Dostávame $\mu \in \langle 13{,}8573 \;;\; \infty)$.

d) S pravdepodobnosťou $1-\alpha$ bude *obojstranný* IS pre smerodajnú odchýlku určený reláciou:

$$\sigma \in \left\langle \sqrt{\frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}\ ,\ \sqrt{\frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}} \right\rangle.$$

Do daného vzorca dosadíme: n = 12, $s^{*2} = 0{,}3270$, α = 1–0,95 = 0,05 a kvantily chí-kvadrát rozdelenia $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0,975;11} = 21{,}9200$; $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0,025;\,11} = 3{,}8157$.

Po vyčíslení dostávame $\sigma \in \langle 0{,}4051 ; 0{,}9709\rangle$.

Príklad 11.4. V laboratóriu bol meraný percentuálny obsah medi, vedľajšej prímesi, v istej zliatine. Výsledky meraní sú v tabuľke (z_i je triedny znak, t. j. stred triedneho intervalu I_i a n_i sú intervalové frekvencie):

z_i	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8
n_i	4	7	12	18	21	13	6

Predpokladáme, že výberový súbor sa riadi normálnym rozdelením. Nájdite:
a) 99 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre rozptyl obsahu medi v danej zliatine,
b) 95 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre rozptyl obsahu medi v danej zliatine.

Riešenie: a) S pravdepodobnosťou $1-\alpha$ bude *pravostranný* IS určený reláciou:

$$\sigma^2 \in \left(0\ ,\ \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\alpha,n-1}} \right\rangle.$$

Do daného vzorca dosadíme: $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 81$, $s^{*2} = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2\cdot n_i = 0{,}2183$; α = 0,01 a kvantil chí-kvadrát rozdelenia $\chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0,01;80} = 53{,}540$.

Po vyčíslení dostávame $\sigma^2 \in (0 ; 0{,}3261\rangle$.

b) S pravdepodobnosťou $1-\alpha$ bude *ľavostranný* IS určený reláciou:

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}\ ,\ \infty \right).$$

Dosadíme:
$n = 81$, $s^{*2} = 0{,}2183$; α= 0,05 a kvantil chí-kvadrát rozdelenia $\chi^2_{1-\alpha,n-1} = \chi^2_{0,95;80} = 101{,}88$.

Po vyčíslení dostávame $\sigma^2 \in \langle 0{,}1714 ; \infty)$.

Príklad 11.5. Pri tradičnom spôsobe opracovania strojových súčiastok sa dosahovali priemerné hodnoty 4,4 istej kvalitatívnej vlastnosti so smerodajnou odchýlkou σ = 0,4. Pokusne sa zavádza nová, lacnejšia metóda opracovania súčiastok, ktorou opracovali 20 súčiastok a dosiahli sa takéto výsledky: 4,5; 4,3; 4,1; 4,9; 4,6; 3,6; 4,7; 5,1; 4,8; 4,0; 3,7; 4,4; 4,9; 4,9; 5,2; 5,1; 4,7; 4,9; 4,6; 4,8. Na hladine významnosti α = 0,05 testujte hypotézu $H_0 : \mu = 4{,}4$ *proti* $H_1 : \mu > 4{,}4$, za predpokladu normálneho rozdelenia výberového súboru.

Riešenie:

- Použijeme <u>Y-test zhody strednej hodnoty μ so známou konštantou μ_0, pričom σ poznáme</u>. Budeme testovať nulovú hypotézu $H_0: \mu = 4,4$ proti alternatívnej hypotéze $H_1: \mu > 4,4$, kde μ_0 = 4,4. Použijeme testovaciu charakteristiku $Y = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$.
- Použijeme hladinu významnosti α = 0,05.
- Vyčíslime hodnotu testovacej charakteristiky z hodnôt štatistických dát. Do uvedeného vzorca dosadíme potrebné hodnoty: n = 20, μ_0 = 4,4; σ = 0,4 a $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 4,59$. Dostaneme výsledok Y = 2,1243.
- Hypotézu H_0 nezamietame, keď bude platiť $Y \notin K_\alpha$, pričom pre kritickú oblasť v tomto prípade platí $K_\alpha = (y_{1-\alpha}, \infty)$. Použijeme kvantil normovaného normálneho rozdelenia $y_{1-\alpha} = y_{0,95} = 1,64485$. Teda kritická oblasť bude $K_\alpha = (1,64485; \infty)$.
- Pretože $Y \in K_\alpha$, hypotézu H_0 zamietame v prospech alternatívy H_1.

Príklad 11.6. Meral sa percentuálny obsah cínu vo vzorkách rudy. Výsledky sú v tabuľke (z_i je triedny znak, t. j. stred triedneho intervalu I_i a n_i sú intervalové frekvencie):

z_i	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
n_i	4	6	8	15	25	20	8	7	5	2

Predpokladáme, že obsah cínu má normálne rozdelenie. Na hladine významnosti α = 0,05 testujte hypotézu $H_0: \mu = 50$ *proti* $H_1: \mu \neq 50$.

Riešenie:

- Použijeme <u>t-test zhody strednej hodnoty μ so známou konštantou μ_0, pričom σ nepoznáme</u>. Budeme testovať nulovú hypotézu $H_0: \mu = 50$ proti alternatívnej hypotéze $H_1: \mu \neq 50$, kde μ_0 = 50. Použijeme testovaciu charakteristiku $t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s^*} \cdot \sqrt{n}$.
- Použijeme hladinu významnosti α = 0,05.
- Vyčíslime hodnotu testovacej charakteristiky z hodnôt štatistických dát. Dosadíme: $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 100$, μ_0 = 50, $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i = 51,1$ a $s^{*2} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i = 10,115$. Dostaneme výsledok t = 1,0875.
- Hypotézu H_0 nezamietame, keď bude platiť $t \notin K_\alpha$, pričom pre kritickú oblasť v tomto prípade platí $K_\alpha = \left(-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) \cup \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, \infty\right)$. Použijeme kvantil Studentovho rozdelenia $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0,975; 99} = 1,9842$. V tabuľkách v tomto prípade by sme našli len aproximovanú hodnotu 1,96. Dostaneme $K_\alpha = (-\infty; -1,9842) \cup (1,9842; \infty)$.
- Pretože $t \notin K_\alpha$, hypotézu H_0 nezamietame.

Príklad 11.7. Presnosť nastavenia automatického obrábacieho stroja je charakterizovaná disperziou dĺžky súčiastok. Ak je táto hodnota väčšia ako 20 mm^2, automat treba znova nastaviť. Meranie kontrolných súčiastok dalo tieto výsledky [mm]: 792, 803, 790, 804, 801, 803, 798, 799, 806, 797, 802, 796, 802, 801, 798, 799, 806, 809, 797, 803. Posúďte, či treba urobiť nové nastavenie, ak $\alpha = 0{,}05$. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru.

Riešenie:

- Použijeme χ^2-test zhody rozptylu σ^2 so známou konštantou σ_0^2. Budeme testovať nulovú hypotézu $H_0 : \sigma^2 = 20$ proti alternatívnej hypotéze $H_1 : \sigma^2 > 20$, kde $\sigma_0^2 = 20$. Použijeme testovaciu charakteristiku $\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot s^{*2}$.
- Použijeme hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$.
- Vyčíslime hodnotu testovacej charakteristiky z hodnôt štatistických dát. Dosadíme potrebné hodnoty: $n = 20$, $\sigma_0^2 = 20$, $s^{*2} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = 21{,}6947$. Dostaneme výsledok $\chi^2 = 20{,}61$.
- Hypotézu H_0 nezamietame, keď bude platiť $\chi^2 \notin K_\alpha$, pričom pre kritickú oblasť v tomto prípade platí $K_\alpha = \left(\chi^2_{1-\alpha,\,n-1}, \infty\right)$. Použijeme kvantil χ^2 rozdelenia $\chi^2_{0{,}95;\,19} = 30{,}144$. Teda kritická oblasť $K_\alpha = (30{,}144; \infty)$.
- Pretože $\chi^2 \notin K_\alpha$, hypotézu H_0 nezamietame, t. j. netreba robiť nové nastavenie.

Príklad 11.8. Jednou z rozhodujúcich vlastností pre akosť ľanového vlákna je hmotnosť stonky. Čím je stonka ťažšia, tým je vlákno kvalitnejšie. Aby sa preukázal vplyv istej metódy ošetrenia ľanu na akosť vlákna, bolo vykonaných 10 meraní na ošetrenom pozemku: 47,5; 57,7; 47,1; 38,8; 45,2; 49,8; 43,4; 50,8; 41,5; 38,8 a 12 meraní na kontrolnom neošetrenom pozemku: 49,2; 44,1; 44,1; 38,1; 40,9; 32,1; 36,8; 39,5; 67,2; 41,8; 46,9; 42,3. Za predpokladu normality hmotnosti stonky testujte hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ *proti* $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ na hladine významnosti $\alpha = 0{,}1$.

Riešenie:

- Použijeme t-test zhody dvoch stredných hodnôt μ_1 a μ_2, pričom σ_1 a σ_2 nepoznáme. Budeme testovať nulovú hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti alternatívnej hypotéze $H_1 : \mu_1 > \mu_2$, kde μ_1 a μ_2 sú stredné hodnoty hmotnosti stonky u oboch metód. Platí, že $n_1 \le 30$ a $n_2 \le 30$. Pri oboch výberových súboroch predpokladáme normálne rozdelenie s neznámymi, ale rovnakými smerodajnými odchýlkami, t.j. $\sigma_1 = \sigma_2$. Použijeme testovaciu charakteristiku:
$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}}{\sqrt{(n_1 - 1) \cdot s_1^{*2} + (n_2 - 1) \cdot s_2^{*2}}} \cdot \sqrt{n_1 + n_2 - 2}\,.$$
- Použijeme hladinu významnosti $\alpha = 0{,}1$.
- Vyčíslime hodnotu testovacej charakteristiky z hodnôt štatistických dát. Dosadíme hodnoty: $n_1 = 10$, $n_2 = 12$, $\bar{x}_1 = 46{,}0600$; $\bar{x}_2 = 43{,}5833$; $s_1^{*2} = 34{,}3471$ a $s_1^{*2} = 76{,}1342$. Dostaneme výsledok $t = 0{,}7639$.

- Hypotézu H_0 nezamietame, keď bude platiť $t \notin K_\alpha$, pričom kritická oblasť je $K_\alpha = \left(t_{1-\alpha,\, n_1+n_2-2}\,,\infty\right)$. Použijeme kvantil t-rozdelenia $t_{1-\alpha,\, n_1+n_2-2} = t_{0,9;\,20} = 1,3253$. Teda kritická oblasť $K_\alpha = (1,3253\,;\infty)$.
- Pretože $t \notin K_\alpha$, hypotézu H_0 nezamietame.

Príklad 11.9. Vážením sme získali údaje o presnom množstve automaticky balených výrobkov. Výsledky pred nastavením baliaceho automatu [g]: 243,2; 244,8; 253,1; 247,5; 251,0; 251,7; 254,0; 252,5; 252,8; 250,1; 247,3; 250,9; 253,2; 252,7. Výsledky po nastavení baliaceho automatu [g]: 250,4; 250,2; 251,1; 249,3; 249,9; 250,2; 251,1. Na hladine významnosti α= 0,05 testujte hypotézu $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \; proti \; H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Riešenie:

- Použijeme <u>F-test zhody dvoch rozptylov σ_1^2 a σ_2^2</u>. Budeme testovať nulovú hypotézu $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti alternatívnej hypotéze $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, kde σ_1^2 a σ_2^2 sú rozptyly hmotnosti výrobkov pred a po nastavení baliaceho automatu. V prípade, že použijeme bežné tabuľky (t.j. nemáme k dispozícii počítač), tak v prípade Fisherovho-Snedecorovho rozdelenia musíme voliť indexy $_1$ a $_2$ tak, aby bola splnená podmienka $s_1^* > s_2^*$. Použijeme testovaciu charakteristiku $F = \dfrac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}}$. Najskôr teda vhodne očíslujeme výberové súbory. Daná podmienka bude splnená, ak index $_1$ priradíme súboru pred nastavením a index $_2$ súboru po nastavení baliaceho automatu, t.j. $s_{pred}^* = s_1^* =$ 3,3640 a $s_{po}^* = s_2^* = 0,6414$.
- Použijeme hladinu významnosti α= 0,05.
- Vyčíslime hodnotu testovacej charakteristiky $F = \dfrac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}} = \dfrac{11,3165}{0,4114} = 27,5053$.
- Hypotézu H_0 nezamietame, keď bude platiť $F \notin K_\alpha$, pričom pre kritickú oblasť v tomto prípade platí $K_\alpha = \left(F_{1-\alpha,\, n_1-1,\, n_2-1}\,,\infty\right)$. Použijeme kvantil F-rozdelenia $F_{0,95;\,13;\,6} = 3,9764$. Teda kritická oblasť je $K_\alpha = (3,9764;\infty)$.
- Pretože $F \in K_\alpha$, hypotézu H_0 zamietame v prospech alternatívy H_1.

Úlohy:

11.1.

Pre odhad strednej hodnoty životnosti hromadne vyrábaných žiaroviek určitého typu sme realizovali náhodný výber o rozsahu 400 kusov. Priemerná životnosť týchto vybraných žiaroviek bola 1 200 hodín. Určte hranice intervalu, v ktorom sa bude nachádzať stredná hodnota životnosti žiaroviek s pravdepodobnosťou 0,99 za predpokladu, že smerodajná odchýlka životnosti žiaroviek je σ = 35 hodín. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru. [⟨1 195,4924 ; 1 204,5077⟩]

11.2.

Vykonali sme 32 analýz na overenie koncentrácie istej chemickej látky v roztoku s týmito výsledkami:

x_i	9	11	12	14	15	16	17	18	20	21
n_i	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

Predpokladáme normálne rozdelenie so známym parametrom $\sigma^2 = 7{,}4$. Určte:

a) 99 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre neznámu strednú hodnotu μ,

b) 99 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre μ,

c) 95 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre μ.

[*a*) $\langle 14{,}1051 ; 16{,}5824\rangle$, *b*) $\langle 14{,}2250 ; \infty)$, *c*) $(-\infty ; 16{,}1347\rangle$]

11.3.

Podnik dodáva do obchodu balíčky sušienok, pričom predpokladáme, že ich hmotnosť má normálne rozdelenie s neznámou strednou hodnotou μ a smerodajnou odchýlkou $\sigma = 5$ g. Náhodne bolo z veľkej dávky vybraných 30 balíčkov a bola zistená ich priemerná hmotnosť $\bar{x} = 150$ g. Určte:

a) v akých hraniciach je možné očakávať s pravdepodobnosťou 0,95 strednú hodnotu hmotnosti balíčka,

b) hornú hranicu, ktorú stredná hodnota hmotnosti balíčka neprekročí s pravdepodobnosťou 0,95;

c) koľko balíčkov treba vybrať, aby bola s pravdepodobnosťou 0,95 odhadnutá stredná hodnota hmotnosti balíčka s chybou menšou ako 1 g.

[*a*) $\langle 148{,}2108 ; 151{,}7892\rangle$, *b*) 151,5015; *c*) 97]

11.4.

Pre účely spojovacej služby máme odhadnúť priemernú dĺžku telefonického rozhovoru. Požaduje sa, aby spoľahlivosť odhadu bola 0,99, pričom však chyba odhadu nemá prekročiť ± 10 sekúnd. Ďalej vieme, že smerodajná odchýlka telefonických rozhovorov je 2,5 minúty. Vypočítajte, pri akom počte náhodne vybraných telefonických rozhovorov treba zistiť ich dĺžku, aby bolo možné získať odhad s uvedenou presnosťou a spoľahlivosťou. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru. [n = 1 493]

11.5.

Strednú hodnotu základného súboru máme odhadnúť so spoľahlivosťou 0,98 a s prípustnou chybou 0,4. Vieme, že smerodajná odchýlka základného súboru je 2,5. Aký musí byť rozsah výberového súboru, aby sme získali odhad strednej hodnoty s požadovanou spoľahlivosťou a presnosťou? Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru.

[n = 212]

11.6.

Zo série výrobkov sa po obrúsení vybralo 200 kusov na kontrolné meranie. Výsledky sú usporiadané v tabuľke:

Rozmer [mm]	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
Počet [ks]	1	22	40	79	27	26	4	1

Vypočítajte 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu rozmeru celej série výrobkov. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru.

[$\langle 3{,}9863 ; 4{,}0217\rangle$]

11.7.

Na strojoch určitého typu sa zisťoval čas, ktorý je potrebný na vykonanie pracovnej operácie. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru. Výsledky sú v tabuľke:

Trvanie prac. operácií [s]	32	37	42	47	52	57	62	67
Počet prac. operácií [ks]	1	7	33	63	38	5	1	2

Vypočítajte 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu trvania pracovnej operácie. [⟨46,4422 ; 48,1578⟩]

11.8.

V zimnom období zisťovali stav hladiny spodnej vody na istej hydrologickej stanici. Namerali takéto stavy v [cm]: 159,53; 159,49; 159,61; 159,71; 159,88; 161,08; 160,98; 161,09; 160,91; 160,79; 161,02; 160,96; 160,80. Určite: 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre rozptyl a smerodajnú odchýlku hladiny spodnej vody. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru. [⟨0,2343 ; 1,2417⟩, ⟨0,4841 ; 1,1143⟩]

11.9.

Náhodný čas príchodu na prednášku sa riadi normálnym rozdelením. Nasledujú časy príchodov študentov pred začiatkom prednášky v [min.]: 5,1; 0,5; 2,2; 2,5; 7,1; 1,6; –2,3; 2,8; 4,0; 3,3; 6,7; –3,9; 1,9; 2,4; 1,6; –1,1. Nájdite:

a) 99,5 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu času príchodu na prednášku,

b) 99 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre rozptyl času príchodu na prednášku.

[*a*) ⟨–0,2649 ; 4,5649⟩, *b*) ⟨0 ; 24,7870⟩]

11.10.

Pri sledovaní organických látok v odpadových vodách celulózky sa v priebehu jedného mesiaca odobralo 20 vzoriek a namerali sa tieto hodnoty v $[g/l]$: 0,192; 0,214; 0,136; 0,172; 0,166; 0,192; 0,192; 0,111; 0,144; 0,104; 0,124; 0,076; 0,128; 0,228; 0,200; 0,126; 0,044; 0,084; 0,162; 0,178. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru. Určte:

a) 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre μ;

b) 95 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre μ;

c) 90 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre σ^2 a σ.

[*a*) ⟨0,1256 ; 0,1717⟩, *b*) ⟨0,1296 ; ∞), *c*) ⟨0,0015 ; 0,0046⟩, ⟨0,0392 ; 0,0676⟩]

11.11.

Zo základného súboru s normálnym rozdelením sme urobili náhodný výber daný tabuľkou:

I_i	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25	25–27
n_i	10	30	50	70	60	30

Určte:

a) hranice, v ktorých sa bude nachádzať stredná hodnota s pravdepodobnosťou 0,95;

b) hodnotu, pod ktorú sa s pravdepodobnosťou 0,95 stredná hodnota nedostane;

c) hranice, v ktorých sa bude nachádzať smerodajná odchýlka s pravdepodobnosťou 0,95;

d) hodnotu, ktorú s pravdepodobnosťou 0,95 rozptyl neprekročí.

[*a*) ⟨21,5094 ; 22,1706⟩, *b*) 21,5629, *c*) ⟨2,4398 ; 2,9093⟩, *d*) 8,2149]

11.12.

Meral sa percentuálny obsah cínu vo vzorkách rudy. Výsledky sú v tabuľke, pričom z_i je triedny znak:

z_i	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
n_i	1	3	4	10	15	20	11	5	3	2

Predpokladáme, že obsah cínu má normálne rozdelenie s disperziou $\sigma^2 = 85$. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu $H_0 : \mu = 52$ proti $H_1 : \mu \neq 52$.

$$\left[Y = 1{,}16 \notin K_\alpha = (-\infty, -y_{0,975}) \cup (y_{0,975}, \infty) = (-\infty; -1{,}96) \cup (1{,}96; \infty) \Rightarrow H_0\right]$$

11.13.

Priemerný odpad Fe v továrni bol 25,5 ton. Vo výrobe sa urobili úsporné opatrenia. V priebehu dvoch týždňov sa sledovali odpady a boli namerané tieto hodnoty: 23,8; 24,5;

26,1; 22,8; 25; 21,9; 24; 23,5; 25,2; 22; 23; 25. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu, že po vykonaní úsporných opatrení sa znížil odpad *Fe*. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \mu = 25{,}5 \quad proti \quad H_1 : \mu < 25{,}5 \\ t = -4{,}2040 \in K_\alpha = \left(-\infty, -t_{0{,}95;11}\right) = \left(-\infty; -1{,}7959\right) \Rightarrow H_1 \end{array}\right]$$

11.14.

Určitá linka mestskej autobusovej dopravy má v dobe dopravnej špičky priemernú rýchlosť v centre mesta 8 km/hod. Uvažovalo sa o tom, či by zmena trasy viedla k zvýšeniu priemernej rýchlosti. Nová trasa bola prejdená v desiatich náhodne vybraných dňoch a boli zistené tieto priemerné rýchlosti: 8,5; 9,5; 7,8; 8,2; 9,0; 7,5; 8,2; 7,8; 9,0; 8,5. Na hladinách významnosti $\alpha = 0{,}01$ a $\alpha = 0{,}05$ uvážte, či zmena trasy vedie k zvýšeniu priemernej rýchlosti. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \mu = 8 \quad proti \quad H_1 : \mu > 8;\ pre\ \alpha = 0{,}01 : \\ t = 2{,}0112 \notin K_\alpha = \left(t_{0{,}99;9}, \infty\right) = \left(2{,}8214; \infty\right) \Rightarrow H_0 \\ H_0 : \mu = 8 \quad proti \quad H_1 : \mu > 8;\ pre\ \alpha = 0{,}05 : \\ t = 2{,}0112 \in K_\alpha = \left(t_{0{,}95;9}, \infty\right) = \left(1{,}8331; \infty\right) \Rightarrow H_1 \end{array}\right]$$

11.15.

Chemický výrobok má podľa normy obsahovať priemerne 47,5 % určitej látky *L*. Z dennej produkcie sme náhodne vybrali 9 vzoriek. V tabuľke sa uvádza zistený podiel látky *L*:

Vzorka	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Obsah látky L [%]	45	47	50	52	48	47	49	52	51

Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}01$ posúďte, či sa dodržuje norma obsahu látky *L* vo výrobku. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \mu = 47{,}5 \quad proti \quad H_1 : \mu \neq 47{,}5 \\ t = 1{,}8371 \notin K_\alpha = \left(-\infty, -t_{0{,}995;8}\right) \cup \left(t_{0{,}995;8}, \infty\right) = \left(-\infty; -3{,}3554\right) \cup \left(3{,}3554; \infty\right) \Rightarrow H_0 \end{array}\right]$$

11.16.

Pri výrobe priadze sa požaduje priemerná pevnosť vyrábanej priadze 185 [Pa]. Pri skúškach kvality priadze sa zistila pevnosť, ako sa uvádza v tabuľke:

Pevnosť nite [Pa]	120–140	140–160	160–180	180–200	200–220	220–240	240–260	260–280
Počet skúšok	9	16	18	22	15	10	8	2

Otestujte na hladine významnosti $\alpha = 0{,}01$, či vyrábaná priadza v priemere zodpovedá požadovanej pevnosti. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \mu = 185 \quad proti \quad H_1 : \mu \neq 185 \\ t = 0{,}8330 \notin K_\alpha = \left(-\infty, -t_{0{,}995;99}\right) \cup \left(t_{0{,}995;99}, \infty\right) = \left(-\infty; -2{,}6264\right) \cup \left(2{,}6264; \infty\right) \Rightarrow H_0 \end{array}\right]$$

11.17.

Pri meraní koeficienta tepelnej vodivosti tehlovej steny pri 20°C sme namerali hodnoty: 0,63; 0,65; 0,57; 0,64; 0,58; 0,59; 0,63; 0,59; 0,60; 0,62; 0,63; 0,57. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}1$ otestujte hypotézu $H_0 : \sigma^2 = 0{,}0006$ proti $H_1 : \sigma^2 > 0{,}0006$. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru.

$$\left[\chi^2 = 14{,}6111 \notin K_\alpha = \left(\chi^2_{0,9;11}, \infty\right) = (17{,}2750; \infty) \Rightarrow H_0\right]$$

11.18.

Pri výmene batérií v elektrickom zariadení je výhodnejšie meniť naraz všetky články v pravidelných časových intervaloch, než vymieňať každý článok zvlášť. Predpokladom efektívnosti takejto výmeny je, aby smerodajná odchýlka životnosti článkov neprekračovala hranicu 5 hodín. Otestujte na hladine významnosti α = 0,05, či táto podmienka je splnená, ak pri 28 náhodne vybraných článkoch bola zistená modifikovaná výberová smerodajná odchýlka životnosti $s^* = 315$ minút. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \sigma^2 = 25 \quad proti \quad H_1 : \sigma^2 > 25 \\ \chi^2 = 29{,}7675 \notin K_\alpha = \left(\chi^2_{0,95;27}, \infty\right) = (40{,}1133; \infty) \Rightarrow H_0 \end{array}\right]$$

11.19.

Napätie v jadre určitého typu mikroprocesora má prípustnú variabilitu, vyjadrenú smerodajnou odchýlkou 0,025 [V]. Náhodne vybraných 9 mikroprocesorov tohto typu dávalo takéto hodnoty napätia [V]: 1,02; 1,05; 0,97; 1,01; 0,98; 1,03; 0,96; 1,00; 0,98. Na hladine významnosti α = 0,05 overte, či je dodržaná prípustná variabilita napätia u tohto typu mikroprocesora alebo je v skutočnosti vyššia. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \sigma^2 = 0{,}025^2 \quad proti \quad H_1 : \sigma^2 > 0{,}025^2 \\ \chi^2 = 11{,}5200 \notin K_\alpha = \left(\chi^2_{0,95;8}, \infty\right) = (15{,}5073; \infty) \Rightarrow H_0 \end{array}\right]$$

11.20.

Presnosť práce stroja sa kontroluje podľa rozptylu rozmerov výrobkov, ktorý nesmie prekročiť hodnotu 0,1 mm^2. Kontrolným meraním sme získali zaokrúhlené hodnoty:

x_i	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
n_i	2	6	9	7	1

Na hladine významnosti α = 0,1 zistite, či je zaručená tolerancia. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \sigma^2 = 0{,}1 \quad proti \quad H_1 : \sigma^2 > 0{,}1 \\ \chi^2 = 47{,}4000 \in K_\alpha = \left(\chi^2_{0,9;24}, \infty\right) = (33{,}1962; \infty) \Rightarrow H_1 \end{array}\right]$$

11.21.

Podľa informácií výrobcu je variabilita životnosti ním vyrábaných obrazoviek vyjadrená smerodajnou odchýlkou 45 hodín. O životnosti náhodne vybraných 50 obrazoviek, vyrobených u tohto výrobcu, sú údaje v tabuľke:

I_i	1860 – 1900	1900 – 1940	1940 – 1980	1980 – 2020	2020 – 2060	2060 – 2100	2100 – 2140
n_i	1	4	12	14	15	3	1

Testom na hladine významnosti α = 0,02 overte, či sa dá prijať predpoklad, že je variabilita životnosti obrazoviek taká, ako tvrdí výrobca alebo nie. Predpokladáme normálne rozdelenie výberového súboru

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \sigma^2 = 2025 \quad proti \quad H_1 : \sigma^2 \neq 2025 \\ \chi^2 = 57{,}6632 \notin K_\alpha = \left(-\infty, \chi^2_{0,01;49}\right) \cup \left(\chi^2_{0,99;49}, \infty\right) = (-\infty; 28{,}9406) \cup (74{,}9195; \infty) \Rightarrow H_0 \end{array}\right]$$

11.22.

Prístroj meral dobu reakcie na svetelný signál v stotinách sekundy u desiatich náhodne vybraných vodičov z povolania, pričom bol zistený aritmetický priemer $\bar{x}_1 = 34$ a tiež u dvadsiatich čerstvých absolventov autoškoly, kde bol zistený aritmetický priemer $\bar{x}_2 = 42$, pričom poznáme disperzie $\sigma_1^2 = 3$, $\sigma_2^2 = 6$. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ uvážte, či doba reakcie na svetelný signál závisí od dĺžky praxe vodiča (testujte hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$).

$$\left[\; Y = -10{,}3280 \in K_\alpha = (-\infty, -y_{0{,}975}) \cup (y_{0{,}975}, \infty) = (-\infty; -1{,}96) \cup (1{,}96; \infty) \Rightarrow H_1 \right]$$

11.23.

Zisťovalo sa, či použitie nového typu obrábacieho stroja skracuje čas opracovania materiálu. Výsledky v minútach sú v tabuľke:

Starý	58	58	56	38	70	42	42	75	68	67
Nový	56	54	53	24	63	40	32	62	54	53

Vykonajte vhodný test dvoch stredných hodnôt na hladine významnosti:
a) $\alpha = 0{,}05$; b) $\alpha = 0{,}1$. Predpokladáme normálne rozdelenie oboch výberových súborov.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad proti \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2 \\ a)\; t = 1{,}4335 \notin K_\alpha = (t_{0{,}95;18}, \infty) = (1{,}7341; \infty) \Rightarrow H_0 \\ b)\; t = 1{,}4335 \in K_\alpha = (t_{0{,}9;18}, \infty) = (1{,}3304; \infty) \Rightarrow H_1 \end{array}\right]$$

11.24.

Na železnorudnom ložisku, v približne rovnakých podmienkach, sa robilo vzorkovanie dvomi metódami: A) bodovým, B) zásekovým vzorkovaním. Výsledky analýz na obsah *Fe* [%] boli: A) 54, 45, 53, 48, 59, 44, 60, 61, 43, 57, 54.
B) 51, 51, 42, 48, 44, 39, 40, 48, 38, 59, 47, 55, 51.

Otestujte hypotézu rovnocennosti oboch spôsobov vzorkovania, t.j. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ pre: a) $\alpha = 0{,}05$; b) $\alpha = 0{,}1$. Predpokladáme normálne rozdelenie oboch výberových súborov.

$$\left[\begin{array}{l} a)\; t = 2{,}0347 \notin K_\alpha = (-\infty, -t_{0{,}975;22}) \cup (t_{0{,}975;22}, \infty) = (-\infty; -2{,}0739) \cup (2{,}0739; \infty) \Rightarrow H_0 \\ b)\; t = 2{,}0347 \in K_\alpha = (-\infty, -t_{0{,}95;22}) \cup (t_{0{,}95;22}, \infty) = (-\infty; -1{,}7171) \cup (1{,}7171; \infty) \Rightarrow H_1 \end{array}\right]$$

11.25.

Vážením sme získali údaje o presnom množstve automaticky balených výrobkov. Výsledky pred nastavením baliaceho automatu [g]: 243,2; 244,8; 253,1; 247,5; 251,0; 251,7; 254,0; 252,5; 252,8; 250,1; 247,3; 250,9; 253,2; 252,7. Výsledky po nastavení baliaceho automatu [g]: 250,4; 250,2; 251,1; 249,3; 249,9; 250,2; 251,1. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ zistite, či sa stredná hodnota nastavením automatu nezmenila. Predpokladáme normálne rozdelenie oboch výberových súborov.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad proti \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \\ t = 0{,}0220 \notin K_\alpha = (-\infty, -t_{0{,}975;19}) \cup (t_{0{,}975;19}, \infty) = (-\infty; -2{,}0930) \cup (2{,}0930; \infty) \Rightarrow H_0 \end{array}\right]$$

11.26.

Určitý výrobok sa vyrába dvoma technologickými postupmi. Kontrolným meraním sme zistili pri náhodne vybraných výrobkoch tieto údaje o určitej kvalitatívnej vlastnosti:

Postup A: 13, 15, 15, 14, 13.

Postup B: 13, 12, 14, 13, 13, 15, 16.

Na hladine významnosti α = 0,05 rozhodnite, či sa disperzia kvality pri oboch technologických postupoch významne líši. Predpokladáme normálne rozdelenie oboch výberových súborov.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad proti \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \\ F = 0,5250 \notin \left(0, F_{0,025;\,4;\,6}\right) \cup \left(F_{0,975;\,4;\,6}, \infty\right) = \left(0; 0,1087\right) \cup \left(6,2272; \infty\right) \Rightarrow H_0 \end{array}\right]$$

11.27.

Pri porovnaní kvality dvoch sústruhov boli na oboch strojoch vyrobené rovnaké súčiastky. Na prvom sústruhu bol priemer výrobkov [mm]: 12,05; 12,02; 11,96; 12,09. Na druhom: 12,02; 11,97; 12,01; 12,05; 11,99. Na hladine významnosti α = 0,05 rozhodnite, či sa disperzie oboch sústruhov významne líšia. Predpokladáme normálne rozdelenie oboch výberových súborov.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad proti \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \\ F = 3,2609 \notin K_\alpha = \left(0, F_{0,025;\,3;\,4}\right) \cup \left(F_{0,975;\,3;\,4}, \infty\right) = \left(0; 0,0662\right) \cup \left(9,9792; \infty\right) \Rightarrow H_0 \end{array}\right]$$

11.28.

Zisťovalo sa, či špeciálny prípravok pridaný do ocele zvyšuje jej pevnosť. Výsledky merania pri vzorkách, kde bol použitý prípravok: 6,2; 5,7; 5,6; 6,0; 6,3; 5,8; 5,7; 6,0; 6,0; 5,8. Výsledky merania pri vzorkách, kde nebol použitý prípravok: 5,6; 5,9; 5,8; 5,9; 5,7; 5,7; 6,0; 5,5; 5,7; 5,5. Na hladine významnosti α = 0,05 rozhodnite, či sa disperzie oboch sústruhov významne líšia. Predpokladáme normálne rozdelenie oboch výberových súborov.

$$\left[\begin{array}{c} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad proti \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \\ F = 1,7969 \notin K_\alpha = \left(0, F_{0,025;\,9;\,9}\right) \cup \left(F_{0,975;\,9;\,9}, \infty\right) = \left(0; 0,2484\right) \cup \left(4,0260; \infty\right) \Rightarrow H_0 \end{array}\right]$$

11.29.

Na základe údajov z úlohy **11.25.** testujte na hladine významnosti α = 0,05 hypotézu $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

$$\left[F = 27,5053 \in K_\alpha = \left(F_{0,95;\,13;\,6}, \infty\right) = \left(3,9764; \infty\right) \Rightarrow H_1\right]$$

11.30.

Určitý výrobok sa vyrába dvoma technologickými postupmi. Kontrolným meraním sme zistili pri náhodne vybraných výrobkoch tieto údaje o určitej kvalitatívnej vlastnosti:

Postup A: V tabuľke je daný triedny znak z_i

z_i	30	33	36	39	42	45
n_i	2	4	6	9	7	2

;

Postup B: 41, 36, 38, 42, 46, 39, 39, 43, 48, 40, 35, 39.

Na hladine významnosti α = 0,05 testujte hypotézu $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Predpokladáme normálne rozdelenie oboch výberových súborov.

$$\left[F = 1,1229 \notin K_\alpha = \left(F_{0,95;\,29;\,11}, \infty\right) = \left(2,5759 : \infty\right) \Rightarrow H_0\right]$$

12. Korelačná a regresná analýza

Riešené príklady:

Príklad 12.1. V tabuľke sú výsledky meraní výkonu Y [kW] a otáčok X [min^{-1}] benzínového motora:

Otáčky	2 000	2 500	3 000	3 500	4 000
Výkon	29	43	55	64	71

Riešte nasledujúce úlohy:

a) Nájdite výberový korelačný koeficient r_{xy}.

b) Určte odhady regresných koeficientov regresnej priamky $y = a_0^* + a_1^* \cdot x$.

Riešenie: a) *Výberový korelačný koeficient* r_{xy} môžeme vypočítať na základe vzťahu:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}}.$$

Počítame postupne:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{15\,000}{5} = 3\,000,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{262}{5} = 52,4;\ \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{838\,500}{5} = 167\,700,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{47\,500\,000}{5} = 9\,500\,000,\ \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{14\,852}{5} = 2,9704 \cdot 10^3,$$

$$s_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = 707,1068,\ s_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2} = 14,988.$$

Dostaneme výsledok $r_{xy} = \dfrac{167\,700 - 3\,000 \cdot 52,4}{707,1068 \cdot 14,988} = 0,9907$.

b) *Regresnú priamku* hľadáme v tvare $y = a_0^* + a_1^* \cdot x$, pričom regresné koeficienty získame riešením sústavy rovníc:

$$a_0^* \cdot n + a_1^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1^* \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

V našom prípade to bude $5 \cdot a_0^* + 15\,000 \cdot a_1^* = 262$, $15\,000 \cdot a_0^* + 47\,500\,000 \cdot a_1^* = 838\,500$. Riešením dostaneme $a_0^* = -10,6000$ a $a_1^* = 0,0210$. Teda $y = -10,6000 + 0,0210 \cdot x$.

Poznámka: Iným typom regresnej závislosti je venovaná pozornosť v časti Numerické metódy – metóda najmenších štvorcov.

Úlohy:

12.1.

U 15 jabloní bol zisťovaný vek stromu X [počet rokov] a úroda Y [kg] s výsledkami:

x_i	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	10
y_i	4,4	4,3	4,1	5,5	5,3	5,4	5,8	6,0	6,2	6,6	6,8	6,7	9,0	10,1	9,2

Riešte nasledujúce úlohy:

a) Nájdite výberový korelačný koeficient r_{xy}.

b) Určte odhady regresných koeficientov regresnej priamky $y = a_0^* + a_1^* \cdot x$.

[a) 0,8147; b) $y = 2,4600 + 0,7800 \cdot x$]

12.2.

V tabuľke sú výsledky 10 meraní dvoch parametrov X a Y určitých náhodne vybraných výrobkov:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0,7	1,1	1,8	2,1	2,6	3,2	3,5	4,0	4,6	5,1

Riešte nasledujúce úlohy:

a) Nájdite výberový korelačný koeficient r_{xy}.

b) Určte odhady regresných koeficientov regresnej priamky $y = a_0^* + a_1^* \cdot x$.

[a) 0,9986; b) $y = 0,2067 + 0,4842 \cdot x$]

12.3.

Je daná tabuľka meraní dvoch znakov X (teplota trosky) a Y (obsah kremíka v surovom železe):

Teplota [°C]	1300	1320	1340	1360	1380	1400	1420	1440	1460	1480	1500
Obsah Si [%]	0,30	0,29	0.35	0,28	0,38	0,42	0.47	0.51	0,62	0,68	0,70

Riešte nasledujúce úlohy:

a) Nájdite výberový korelačný koeficient r_{xy}.

b) Určte odhady regresných koeficientov regresnej priamky $y = a_0^* + a_1^* \cdot x$.

[a) 0,9558; b) $y = -2,6764 + 0,0022 \cdot x$]

12.4.

Telesná výška muža X a ženy Y u 10 manželských párov je uvedená v tabuľke:

Výška muža	170	181	178	174	178	171	170	177	183	179
Výška ženy	161	174	170	162	170	161	166	166	170	173

Riešte nasledujúce úlohy:

a) Nájdite výberový korelačný koeficient r_{xy}.

b) Určte odhady regresných koeficientov regresnej priamky $y = a_0^* + a_1^* \cdot x$.

[a) 0,8280; b) $y = 15,1182 + 0,8642 \cdot x$]

12.5.

Pri meraní závislosti Brinelovho koeficientu tvrdosti ocele Y [MPa] od deformácie X [mm] boli zistené nasledujúce údaje:

Deformácia	6	9	11	13	22	26	28	33	35
Tvrdosť	68	67	65	53	44	40	37	34	32

Riešte nasledujúce úlohy:

a) Nájdite výberový korelačný koeficient r_{xy}.

b) Určte odhady regresných koeficientov regresnej priamky $y = a_0^* + a_1^* \cdot x$.

[a) −0,9773; b) $y = 75,7200 - 1.3196 \cdot x$]

LITERATÚRA

1) Baculíková B., Daňo I.: *Numerické metódy. Zbierka úloh.* 1 elektronický optický disk (CD-ROM). FEI TU v Košiciach, 2006. http://www.tuke.sk/fei-km/NM/numerikao.pdf
2) Bakytová H., Ugron M.: *Príklady zo štatistických metód.* Alfa, Bratislava 1976.
3) Buša J., Pirč V., Schrötter Š.: *Numerické metódy, pravdepodobnosť a matematická štatistika.* FEI TU v Košiciach, 2006. http://www.tuke.sk/fei-km/NMS/statnumo.pdf
4) Demidovič B. P., Maron, I. A.: *Základy numerické matematiky.* SNTL, Praha 1966.
5) Gavalec M., Kováčová N., Ostertagová E., Skřivánek J.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika v počítačovom prostredí MATLABu.* Elfa, Košice 2002.
6) Gavalec M., Skřivánek J.: *Zbierka príkladov a úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky pre MATLAB.* Elfa, Košice 1996.
7) Hebák P., Kahounová J.: *Počet pravdepodobnosti v príkladoch.* SNTL, Praha 1978.
8) Huťka P., Jakeš J.: *Zbierka úloh z počtu pravdepodobnosti.* VŠE, Bratislava 1974.
9) Likeš J., Machek J.: *Počet pravdepodobnosti.* SNTL, Praha 1981.
10) Ostertagová E.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika v príkladoch.* Elfa, Košice 2005.
11) Penjak V., Doboš J., Raisová H., Pavlisková A., Heretová Z.: *MATEMATIKA IV.* VŠT, Košice 1991.
12) Pirč V., Buša J.: *Numerické metódy.* ES TU, Košice 2002.
13) Potocký R.: *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.* Alfa/SNTL, Bratislava 1986.
14) Riečan B., Lamoš F., Lenárt C.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika.* Alfa, Bratislava 1984.
15) Rusnák M., Vaľo D.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky IV.* Alfa, Bratislava 1989.
16) Seman J., Surzen R., Popovičová M., Ďuraš, Š.: *Základy numerickej matematiky a programovanie.* Alfa, Bratislava 1987.

Ivan Daňo – Eva Ostertagová

Numerické metódy, pravdepodobnosť a matematická štatistika v príkladoch

Vydavateľstvo: elfa, s.r.o., Košice, 535. publikácia
Vydanie: prvé, r. 2007
Náklad: 200 ks
Počet strán: 92

ISBN 978-80-8086-063-9

ISBN 978-80-8086-063-9