Katedra matematiky a teoretickej informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Technická univerzita v Košiciach

KATEDRA MATEMATIKY A TEORETICKEJ INFORMATIKY

MATEMATIKA I

a jej využitie v ekonómii

Zbierka riešených a neriešených úloh

Anna Grinčová, Monika Molnárová

Košice 2012

Katedra matematiky a teoretickej informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Technická univerzita v Košiciach

MATEMATIKA I

a jej využitie v ekonómii

Zbierka riešených a neriešených úloh

Anna Grinčová, Monika Molnárová

Košice 2012

RECENZOVAL: doc. RNDr. Viktor Pirč, CSc.

1. vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

© Anna Grinčová, Monika Molnárová

ISBN 978-80-553-1158-6

OBSAH

ÚVOD

Táto učebnica je určená pre študentov prvého ročníka bakalárskej formy štúdia Fakulty elektrotechniky a informatiky (FEI) Technickej univerzity (TU) v Košiciach pre odbor Hospodárska informatika. Môže poslúžiť aj študentom iných odborov a iných fakúlt. Tvorí zbierku riešených a neriešených úloh a je doplnkom k učebnici **MATEMATIKA I a jej využitie v ekonómii**, v ktorej je podrobnejšie uvedená teória požadovaná pri riešení úloh v tejto zbierke.

Štúdium učebnice predpokladá zvládnutie základov stredoškolskej matematiky.

Vzhľadom na rozsah tejto učebnej pomôcky, nie sú uvedené pri riešení niektorých príkladov podrobné postupy. Čitateľ má možnosť študovať uvedenú problematiku podrobnejšie v učebnici MATEMATIKA I a jej využitie v ekonómii a v citovanej literatúre.

Učebnica je rozdelená do 10 kapitol tak, ako sú preberané v prvom semestri štúdia na FEI v Košiciach.

Naša vďaka patrí doc. RNDr. Viktorovi Pirčovi, CSc. za starostlivé prečítanie rukopisu a za mnohé cenné pripomienky, ktoré prispeli ku skvalitneniu tejto učebnice.

Autori

1 FUNKCIA A JEJ APLIKÁCIE PRE EKONÓMIU

1.1 Riešené úlohy

DEFINIČNÝ OBOR FUNKCIE

Pri hľadaní definičného oboru funkcie je potrebné najčastejšie vziať do úvahy, že:

- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule,
- výraz pod párnou odmocninou musí byť nezáporný,
- logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument,
  ak $a > 1$, potom $\log_a x \ge 0$ práve vtedy, ak $x \ge 1$,
  ak $0 < a < 1$, potom $\log_a x \ge 0$ práve vtedy, ak $0 < x \le 1$.

Príklad 1.1 Nájdime definičný obor funkcie $f : y = \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$.

Riešenie:

Keďže výraz v menovateli musí byť rôzny od nuly, platí

$$x^2 - 5x + 6 \ne 0$$
$$(x-2)(x-3) \ne 0$$
$$\underline{\underline{x \ne 2}} \wedge \underline{\underline{x \ne 3}}$$

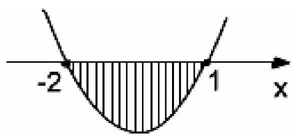
Odtiaľ vyplýva, že $D(f) = (-\infty,2) \cup (2,3) \cup (3,\infty)$ alebo $D(f) = \mathbf{R} - \{2,3\}$.

Príklad 1.2 Nájdime definičný obor funkcie $f : y = \sqrt{2 - x - x^2}$.

Riešenie:

Výraz pod druhou odmocninou musí byť nezáporný, potom platí

$$2 - x - x^2 \ge 0$$
$$x^2 + x - 2 \le 0$$
$$(x+2)(x-1) \le 0$$



Definičný obor funkcie je $D(f) = \langle -2, 1 \rangle$.

Príklad 1.3 Nájdime definičný obor funkcie $f : y = \ln(4x - 8)$.

Riešenie:

Logaritmus je definovaný len pre kladné čísla, preto musí byť

$$4x - 8 > 0$$

$$\underline{\underline{x > 2}}$$

Definičný obor funkcie je $D(f) = (2, \infty)$.

Príklad 1.4 Nájdime definičný obor funkcie $f : y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x-2}}$.

Riešenie:

Z podmienky, že menovateľ sa nesmie rovnať nule platí

$$\sqrt{x-2} \neq 0$$

a z podmienky, že výraz po párnou odmocninou môže byť len nezáporný platí

$$x - 2 \geq 0 .$$

Z obidvoch podmienok vyplýva

$$\underline{\underline{x > 2}} .$$

Definičný obor funkcie je $D(f) = (2, \infty)$.

INVERZNÁ FUNKCIA

Algoritmus hľadania inverznej funkcie $f^{-1}(x)$ k funkcii $y = f(x)$ je takýto:

- zistíme, na akom intervale je funkcia f prostá, teda kde k nej inverzná funkcia f^{-1} existuje,
- vymeníme x za y a naopak,
- vyjadríme y pomocou x
- nájdeme definičný obor pôvodnej aj inverznej funkcie.

Príklad 1.5 K funkcii $f : y = 2\ln(x+5)$ nájdime inverznú funkciu.

Riešenie:

Funkcia f je prostá na celom svojom definičnom obore $D(f) = (-5, \infty)$, preto k nej existuje inverzná funkcia na celom definičnom obore, pričom jej obor hodnôt je $H(f) = \mathbf{R}$.

$$y = 2\ln(x+5) ,$$

vymeníme navzájom x a y

$$x = 2\ln(y+5) ,$$

osamostatníme výraz obsahujúci y,

$$\frac{x}{2} = \ln(y+5) ,$$

aby sme vyjadrili y, použijeme inverznú funkciu k logaritmickej funkcii, exponenciálnu funkciu

$$e^{\frac{x}{2}} = y + 5$$

$$y = e^{\frac{x}{2}} - 5$$

Inverzná funkcia k f je $f^{-1} : y = e^{\frac{x}{2}} - 5$ a jej definičný obor je $D\left(f^{-1}\right) = H(f) = \mathbf{R}$.

EKONOMICKÉ APLIKÁCIE

Príklad 1.6 Celkové náklady v dolároch na výrobu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q) = 120 + 0{,}75e^{0{,}3q}$.

a) Vypočítajme celkové náklady na produkciu 20 kusov výrobkov.
b) Vypočítajme náklady na výrobu 20. výrobku v poradí.
c) Vypočítajme priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 20 výrobkov.

Riešenie:

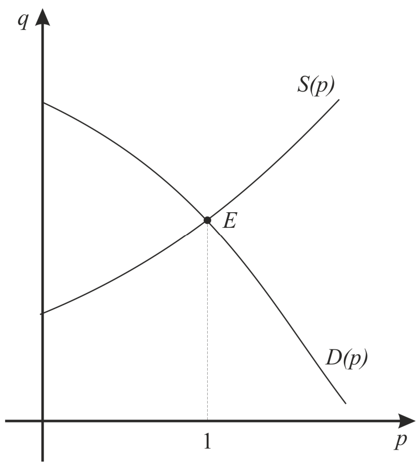
a) Celkové náklady na produkciu 20 kusov výrobkov vypočítame ako funkčnú hodnotu funkcie $C(q) = 120 + 0{,}75e^{0{,}3q}$ pre $q = 20$, teda $C(20) = 120 + 0{,}75e^{0{,}3 \cdot 20} \doteq 422{,}57$ \$.

b) Náklady na výrobu 20. výrobku v poradí vypočítame ako rozdiel celkových nákladov na výrobu 20 kusov a výrobu 19 kusov výrobkov, teda $C(20) - C(19) = 422{,}57 - 344{,}15 \doteq 78{,}42$ \$.

c) Priemerné náklady $A(q)$ na výrobu jedného výrobku, vypočítame ako podiel celkových nákladov a počtu vyrobených výrobkov. Ak bolo vyrobených 20 výrobkov, priemerné náklady sú $A(20) = \dfrac{C(20)}{20} \doteq 21{,}13$ \$.

Príklad 1.7 Tovar má funkciu dopytu $D(p) = 18 - 4p - p^2$ a funkciu ponuky $S(p) = p^2 + 2p + 10$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslime grafy oboch funkcií a určme rovnovážnu cenu.

Riešenie:

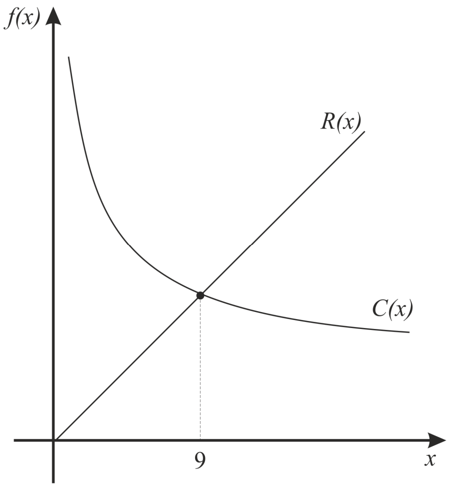


Rovnováha nastane, ak je dopyt rovný ponuke, rovnovážnu cenu určíme riešením rovnice $18-4p-p^2=p^2+2p+10$. Jej riešením je cena $p=1$€.

Príklad 1.8 Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x)=\dfrac{27}{x}+6$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x)=x$. Nakreslime grafy oboch funkcií, nájdime bod zlomu a určme kedy je výroba zisková.

Riešenie:

Bod zlomu je bod, v ktorom sú náklady rovné príjmom. Preto riešime rovnicu $\dfrac{27}{x}+6=x$. Riešením je $x=9$, teda bod zlomu nastane, ak sa vyrobí 9 tisíc kusov výrobkov. Výroba je zisková, keď sú príjmy vyššie ako výdaje. Ak má byť výroba zisková, z grafu je zjavné, že je potrebné vyrobiť viac ako 9 tisíc výrobkov.



1.2 Neriešené úlohy

V nasledujúcich úlohách určte definičný obor funkcií:

		Výsledky:
1.	$f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$	$\mathbf{R}-\{2,3\}$
2.	$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$	$\mathbf{R}-\{1\}$
3.	$f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2-x-6}$	$\mathbf{R}-\{-2,3\}$
4.	$f(x)=\dfrac{e^{3x}}{6+x-x^2}$	$\mathbf{R}-\{-2,3\}$
5.	$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{12-x-x^2}$	$\mathbf{R}-\{-4,3\}$
6.	$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$	$(-\infty,-1\rangle\cup\langle 2,\infty)$

7.	$f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$	$(-\infty,-4\rangle\cup\langle 1,\infty)$
8.	$f(x)=\sqrt{x^2-2x-24}$	$(-\infty,-4\rangle\cup\langle 6,\infty)$
9.	$f(x)=\sqrt{5+4x-x^2}$	$\langle -1,5\rangle$
10.	$f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$	$\langle -1,2\rangle$
11.	$f(x)=\sqrt{x-x^3}$	$(-\infty,-1\rangle\cup\langle 0,1\rangle$
12.	$f(x)=\sqrt{x^3-4x^2-5x}$	$\langle -1,0\rangle\cup\langle 5,\infty)$
13.	$f(x)=\sqrt{x^3+3x^2+2x}$	$\langle -2,-1\rangle\cup\langle 0,\infty)$
14.	$f(x)=\sqrt{2x+x^2-x^3}$	$(-\infty,-1\rangle\cup\langle 0,2\rangle$
15.	$f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-4x-21}}$	$(-\infty,-3)\cup(7,\infty)$
16.	$f(x)=\dfrac{5-x}{\sqrt{x^2+5x+6}}$	$(-\infty,-3)\cup(-2,\infty)$
17.	$f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$	$(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$
18.	$f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+3x-4}}$	$(-\infty,-4)\cup(1,\infty)$
19.	$f(x)=\dfrac{2x^4-4}{\sqrt{5+4x-x^2}}$	$(-1,5)$
20.	$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x-4}}$	$(4,\infty)$
21.	$f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}}$	$(-\infty,-4)\cup\langle 3,\infty)$
22.	$f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}}$	$(-2,-1)\cup\langle 1,\infty)$
23.	$f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{5x+10}}$	$\langle -3,-2)\cup\langle 3,\infty)$
24.	$f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}}$	$(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,2)\cup(3,\infty)$
25.	$f(x)=\ln(3x-15)$	$(5,\infty)$
26.	$f(x)=\ln(x^2+4x)$	$(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$
27.	$f(x)=\ln(6+x-x^2)$	$(-2,3)$
28.	$f(x)=\log(x^2+5x+6)$	$(-\infty,-3)\cup(-2,\infty)$

29. $f(x)=\log(x^2-4x-21)$ $\qquad$ $(-\infty,-3)\cup(7,\infty)$

30. $f(x)=\log\dfrac{1}{x-1}$ $\qquad$ $(1,\infty)$

31. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{3-x}$ $\qquad$ $(-\infty,3)$

32. $f(x)=\log_3\dfrac{2}{x^2-4x+4}$ $\qquad$ $\mathbf{R}-\{2\}$

33. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ $\qquad$ $(-1,1)$

34. $f(x)=\log_2\dfrac{3x}{x-3}$ $\qquad$ $(-\infty,0)\cup(3,\infty)$

35. $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2x-1}{5+3x}$ $\qquad$ $(-\infty,-5/3)\cup(1/2,\infty)$

36. $f(x)=\ln\dfrac{3x-9}{x^2}$ $\qquad$ $(3,\infty)$

37. $f(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$ $\qquad$ $\mathbf{R}-\{-1\}$

38. $f(x)=e^{\frac{2}{x-4}}$ $\qquad$ $\mathbf{R}-\{4\}$

39. $f(x)=e^{\sqrt{x^2+5x+6}}$ $\qquad$ $(-\infty,-3\rangle\cup\langle -2,\infty)$

40. $f(x)=e^{\sqrt{5+4x-x^2}}$ $\qquad$ $\langle -1,5\rangle$

41. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ $\qquad$ $(-1,1\rangle\cup\langle 2,3)$

42. $f(x)=\sqrt{x^2-7x+12}+\log(2x-3)$ $\qquad$ $(3/2,3\rangle\cup\langle 4,\infty)$

43. $f(x)=\log_{12}(2x+6)+\sqrt{x^2-4x+3}$ $\qquad$ $(-3,1\rangle\cup\langle 3,\infty)$

44. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}\cdot\ln(4x-4)$ $\qquad$ $\langle 2,\infty)$

45. $f(x)=\log(10-3x-x^2)+\sqrt{x-1}$ $\qquad$ $\langle 1,2)$

46. $f(x)=\sqrt{x^2-9x+18}-\log_2(16-x^2)$ $\qquad \left(-4,3\right\rangle$

47. $f(x)=\sqrt{x^2-16}+5\log(x^2-9x+18)$ $\qquad \left(-\infty,-4\right\rangle \cup \left(6,\infty\right)$

48. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+7}{x-12}}+\sqrt{\dfrac{2}{x-1}}$ $\qquad \left(12,\infty\right)$

49. $f(x)=\sqrt{2(x-1)}-\sqrt{\dfrac{x-12}{x+7}}$ $\qquad \left\langle 12,\infty\right)$

50. $f(x)=\ln\dfrac{x+10}{x-4}+\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$ $\qquad \left(-\infty,-10\right)\cup\left(4,\infty\right)$

51. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+10}{4-x}}-\log\dfrac{x-1}{x+3}$ $\qquad \left\langle -10,-3\right)\cup\left(1,4\right)$

52. $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+4}{6-2x}}-\ln(x^2+3x-4)$ $\qquad \left(1,3\right)$

53. $f(x)=\dfrac{\log(10-x)}{\sqrt{x^2-2x-3}}+3\sin x$ $\qquad \left(-\infty,-1\right)\cup\left(3,10\right)$

54. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{6-2x}-3\log\dfrac{x+4}{x-2}$ $\qquad \left(-\infty,-4\right)\cup\left(2,3\right\rangle$

55. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-3}+\sqrt{6x-x^2-9}$ $\qquad \{\ \}$

56. $f(x)=\dfrac{\ln(3x+21)}{x^3-3x^2+2x}$ $\qquad \left(-7,0\right)\cup\left(0,1\right)\cup\left(1,2\right)\cup\left(2,\infty\right)$

57. $f(x)=\dfrac{\ln(3-2x)}{\sqrt{x^2+4x-5}}$ $\qquad \left(-\infty,-5\right)\cup\left(1,3/2\right)$

58. $f(x)=\dfrac{\ln x-5}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ $\qquad \left(0,2\right)\cup\left(3,\infty\right)$

K daným funkciám $f(x)$, $g(x)$ určte zložené funkcie $h_1(x)=f(g(x))$, $h_2(x)=g(f(x))$, $h_3(x)=f(f(x))$, $h_4(x)=g(g(x))$ a nájdite ich definičné obory:

59. $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x+1}$

$h_1=x+1, D(h_1)=\mathbf{R}$, $h_2=\sqrt{x^2+1}, D(h_2)=\mathbf{R}$,

$$h_3 = x^4,\ D(h_3) = \mathbf{R},\ h_4 = \sqrt[4]{x+1},\ D(h_4) = (-1,\infty)$$

60. $f(x) = x^2 - 1,\ g(x) = \ln x$

$$h_1 = \ln^2 x - 1,\ D(h_1) = (0,\infty),\ h_2 = \ln(x^2-1),\ D(h_2) = (-\infty,-1) \cup (1,\infty),$$
$$h_3 = x^4 - 2x^2,\ D(h_3) = \mathbf{R},\ h_4 = \ln(\ln x),\ D(h_4) = (1,\infty)$$

61. $f(x) = 2 + x^3,\ g(x) = \sin x$

$$h_1 = 2 + \sin^3 x,\ D(h_1) = \mathbf{R},\ h_2 = \sin(2+x^3),\ D(h_2) = \mathbf{R},$$
$$h_3 = (2+x^3)^3 + 2,\ D(h_3) = \mathbf{R},\ h_4 = \sin(\sin x),\ D(h_4) = \mathbf{R}$$

62. $f(x) = e^x,\ g(x) = x^3$

$$h_1 = e^{x^3},\ D(h_1) = \mathbf{R},\ h_2 = e^{3x},\ D(h_2) = \mathbf{R},$$
$$h_3 = e^{e^x},\ D(h_3) = \mathbf{R},\ h_4 = x^9,\ D(h_4) = \mathbf{R}$$

63. $f(x) = \dfrac{1}{x-3},\ g(x) = 2x$

$$h_1 = 1/(2x-3),\ D(h_1) = \mathbf{R} - \{3/2\},\ h_2 = (x-3),\ D(h_2) = \mathbf{R} - \{3\},$$
$$h_3 = (x-3)/(10-3x),\ D(h_3) = \mathbf{R} - \{10/3\},\ h_4 = 4x,\ D(h_4) = \mathbf{R}$$

64. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = \sqrt{x}$

$$h_1 = 1/\sqrt{x},\ D(h_1) = (0,\infty),\ h_2 = \sqrt{1/x},\ D(h_2) = (0,\infty),$$
$$h_3 = x,\ D(h_3) = \mathbf{R},\ h_4 = \sqrt[4]{x},\ D(h_4) = (0,\infty)$$

K daným funkciám nájdite inverzné funkcie:

65. $f(x) = 3x - 7$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3},\ D(f) = \mathbf{R},\ D(f^{-1}) = \mathbf{R}$$

66. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-1},\ D(f) = \mathbf{R} - \{1\},\ D(f^{-1}) = \mathbf{R} - \{1\}$$

67. $f(x) = \sqrt{2x+8}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2-8}{2},\ D(f) = \langle -4,\infty),\ D(f^{-1}) = \mathbf{R}$$

68. $f(x) = \ln(3x-9)$

$$f^{-1}(x) = \frac{9+e^x}{3},\ D(f) = (3,\infty),\ D(f^{-1}) = \mathbf{R}$$

69. $f(x) = 2 - e^{6-x}$

$$f^{-1}(x) = 6 - \ln(2 - x),\, D(f) = \mathbf{R}\,,\, D\left(f^{-1}\right) = (-\infty, 2)$$

70. $f(x) = 3 + \sqrt{1 + e^x}$

$$f^{-1}(x) = \ln(x^2 - 6x + 8)\,,\, D(f) = \mathbf{R}\,,\, D\left(f^{-1}\right) = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$$

Pomocou elementárnych funkcií nakreslite grafy funkcií:

71. $f(x) = 2x$

72. $f(x) = \frac{1}{3}x$

73. $f(x) = x - 1$

74. $f(x) = 2 - x$

75. $f(x) = 2x + 3$

76. $f(x) = -3x + 6$

77. $f(x) = 2x^2$

78. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

79. $f(x) = -x^2$

80. $f(x) = (x + 2)^2$

81. $f(x) = x^2 + 1$

82. $f(x) = x^2 - 4$

83. $f(x) = (x - 1)^2 + 2$

84. $f(x) = 1 - (x + 2)^2$

85. $f(x) = x^2 + 2x + 5$

86. $f(x) = 2 - 4x - x^2$

87. $f(x) = 2x^3$

88. $f(x) = -2x^3$

89. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3$

90. $f(x) = -3 + x^3$

91. $f(x) = (x - 2)^3$

92. $f(x) = 2(x + 1)^3 - 4$

93. $f(x) = \frac{3}{x}$

94. $f(x) = \frac{1}{3x}$

95. $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

96. $f(x) = \frac{1}{x} + 3$

97. $f(x) = \frac{1}{x - 3}$

98. $f(x) = \frac{1}{x + 4} - 3$

99. $f(x) = 2 - \frac{1}{x + 1}$

100. $f(x) = \frac{3}{x^2}$

101. $f(x) = \frac{1}{2x^2}$

102. $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$

103. $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$

104. $f(x) = \frac{1}{(x - 3)^2}$

105. $f(x) = \frac{2}{(x + 3)^2} - 1$

106. $f(x) = 2 - \frac{1}{(x + 1)^2}$

107. $f(x) = 2|x|$

108. $f(x) = \frac{1}{3}|x|$

109. $f(x) = |x| - 2$

110. $f(x) = 1 - 3|x|$

111. $f(x) = |x + 4|$

112. $f(x) = |x - 2| + 1$

113. $f(x) = 3e^x$

114. $f(x) = -2e^x$

115. $f(x) = \frac{1}{2}e^x$

116. $f(x) = e^x - 1$

117. $f(x) = e^{x-1}$

118. $f(x) = e^{-x}$

119. $f(x) = e^{3x}$

120. $f(x)=e^{-4x}$

121. $f(x)=2-e^{x+1}$

122. $f(x)=2\ln x$

123. $f(x)=\frac{\ln x}{2}$

124. $f(x)=\ln\frac{x}{2}$

125. $f(x)=\ln 2x$

126. $f(x)=\ln(x-3)$

127. $f(x)=2+\ln x$

128. $f(x)=1-\ln(2-x)$

129. $f(x)=2\sin x$

130. $f(x)=-2\sin x$

131. $f(x)=\frac{1}{3}\sin x$

132. $f(x)=\sin 2x$

133. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$

134. $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$

135. $f(x)=1+\sin x$

136. $f(x)=3-\sin 2x$

137. $f(x)=2\cos x$

138. $f(x)=-3\cos x$

139. $f(x)=\frac{1}{2}\cos x$

140. $f(x)=\cos 2x$

141. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$

142. $f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2})$

143. $f(x)=-2+\cos x$

144. $f(x)=3-\cos 2x$

145. $f(x)=2\mathrm{tg}x$

146. $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{tg}x$

147. $f(x)=\mathrm{tg}2x$

148. $f(x)=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$

149. $f(x)=2+\mathrm{tg}x$

150. $f(x)=-1-\mathrm{tg}x$

151. $f(x)=\mathrm{tg}(x-\pi)$

152. $f(x)=3\mathrm{cotg}x$

153. $f(x)=\frac{1}{3}\mathrm{cotg}x$

154. $f(x)=\mathrm{cotg}3x$

155. $f(x)=\mathrm{cotg}\frac{x}{3}$

156. $f(x)=1-\mathrm{cotg}x$

157. $f(x)=\mathrm{cotg}(x+\pi)$

158. Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q)=11q+230$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 40 kusov výrobkov.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 40. výrobku v poradí.
c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 40, resp. 60 výrobkov.

a) 670, **b)** 11, **c)** 16.75, resp. 14.83

159. Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q)=6q+1000$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 80 kusov výrobkov.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 80. výrobku v poradí.
c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 80, resp. 100 výrobkov.

a) 1 480, **b)** 6, **c)** 18.5, resp. 16

160. Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q) = 0{,}8q + 60$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 150 kusov výrobkov.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 150. výrobku v poradí.
c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 150, resp. 200 výrobkov.

a) 180, **b)** 0.8, **c)** 1.2, resp. 1.1

161. Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q) = 1{,}2q^2 + 30q + 10$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 100 kusov výrobkov.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 50. výrobku v poradí.
c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 1000 výrobkov.

a) 15 010, **b)** 148.8, **c)** 1 230.01

162. Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q) = q^2 + 28q + 750$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 50 kusov výrobkov.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 50. výrobku v poradí.
c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 10, resp. 50 výrobkov.

a) 4 650, **b)** 127, **c)** 113, resp. 93

163. Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q) = 0{,}8q^2 + 70q + 420$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 70 kusov výrobkov.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 70. výrobku v poradí.
c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 70, resp. 140 výrobkov.

a) 9 240, **b)** 181.2, **c)** 132, resp. 185

164. Celkové náklady v eurách na produkciu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = x^3 - 2x^2 - 10x + 320$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 20 kusov výrobkov.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 20. výrobku v poradí.
c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 20, resp. 30 výrobkov.

a) 7 320, **b)** 1 053, **c)** 366, resp. 840.67

165. Celkové náklady v dolároch na výrobu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q) = 15 + e^{0{,}1q}$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 21 kusov výrobkov.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 21. výrobku v poradí.
c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 21, resp. 30 výrobkov.

a) 23.17, **b)** 0.78, **c)** 1.1, resp. 1.17

166. Celkové náklady v dolároch na výrobu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q)=120+0{,}75e^{0{,}3q}$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 10 kusov výrobkov.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 10. výrobku v poradí.
c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 10, resp. 15 výrobkov.

a) 135.06, **b)** 3.9, **c)** 13.51, resp. 12.5

167. Celkové náklady v dolároch na výrobu q kusov výrobkov sú dané funkciou $C(q)=95+\frac{2}{3}e^{0{,}2q}$.

a) Vypočítajte celkové náklady na produkciu 15 kusov výrobkov.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 15. výrobku v poradí.
c) Vypočítajte priemerné náklady na výrobu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 15 výrobkov.

a) 108.39, **b)** 2.43, **c)** 7.23

168. Výskumom bolo zistené, že krajčírka, ktorá začne pracovať o 7.00 hodine, bude mať o x hodín ušitých $f(x)=15x-x^2$ sukní.

a) Koľko sukní bude mať ušitých o 10.00 hod.?
b) Koľko sukní ušije medzi 10.00 a 11. 00 hod.?
c) Koľko sukní ušila medzi 13.00 a 14. 00 hod.?

a) 36, **b)** 8, **c)** 2

169. Zistilo sa, že strojník, ktorý začne pracovať o 6.30 hodine, vyrobí $f(x)=-0{,}5x^2+10x$ súčiastok po x hodinách práce.

a) Koľko súčiastok bude mať vyrobených o 9.00 hod.?
b) Koľko súčiastok bude mať vyrobených medzi 10.30 a 11.00 hod.?
c) Koľko súčiastok vyrobí medzi 11.00 a 11.30 hod.?

a) 21.875, **b)** 2.875, **c)** 2.625

170. Podľa štúdie produktivity práce v podniku bude mať priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 8.00 hodine, poskladaných $f(x)=-x^3+6x^2+15x$ prístrojov po x hodinách práce.

a) Koľko prístrojov bude mať poskladaných o 11.00 hod.?
b) Koľko prístrojov bude mať poskladaných medzi 11.00 a 12. 00 hod.?
c) Koľko prístrojov poskladá medzi 10.00 a 11. 00 hod.?

a) 72, **b)** 20, **c)** 26

171. Podľa odhadu bude počet obyvateľov mestskej časti o t rokov $P(t)=20-\frac{6}{t+1}$ tisíc.

a) Aký bude počet obyvateľov o rok, o 10 rokov?
b) O koľko narastie počet obyvateľov počas prvého roka?
c) O koľko narastie počet obyvateľov počas desiateho roka?

a) 17 tis., 19.45 tis., **b)** 3 tis., **c)** 0.05 tis.

172. Denná produkcia pracovníka po t týždňoch pracovnej činnosti je daná funkciou $Q(t) = 50 - 30e^{-0,4t}$.

a) Aká bude jeho produkcia o týždeň, o 5 týždňov?
b) Koľko výrobkov vyrobí počas prvého týždňa?
c) Koľko výrobkov vyrobí počas 5. týždňa?

a) 29.89, 45.94, **b)** 9.89, **c)** 1.99

173. Podľa zdravotných záznamov t týždňov po vypuknutí chrípky bol počet ochorení $f(t) = \dfrac{2}{1+3e^{-0,8t}}$ tisíc.

a) Koľko chorých bolo na začiatku a koľko na konci tretieho týždňa?
b) Koľko ľudí ochorelo počas 1. týždňa?
c) Koľko ľudí ochorelo počas 3. týždňa?

a) 0.5 tis., 1.57 tis., **b)** 0.35 tis., **c)** 0.32 tis.

174. Podľa predpokladov t týždňov po vypuknutí chrípky bude počet ochorení $Q(t) = \dfrac{800}{4+76e^{-1,2t}}$ tisíc.

a) Koľko chorých by malo byť na začiatku a koľko na konci štvrtého týždňa?
b) Koľko ľudí ochorelo počas 1. týždňa?
c) Koľko ľudí ochorelo počas 4. týždňa?

a) 10 tis., 172.96 tis., **b)** 19.75 tis., **c)** 41.3 tis.

175. Podľa zdravotných záznamov t týždňov po vypuknutí infekčnej žltačky bol počet ochorení $f(t) = \dfrac{60}{1+5e^{-0,5t}}$ tisíc.

a) Koľko chorých bolo na začiatku a koľko na konci druhého týždňa?
b) Koľko ľudí ochorelo počas 1. týždňa?
c) Koľko ľudí ochorelo počas 2. týždňa?

a) 10 tis., 21.13 tis., **b)** 4.88 tis., **c)** 6.25 tis.

176. Odhaduje sa, že o t rokov bude počet obyvateľov krajiny $P(t) = \dfrac{20}{2+3e^{-0,06t}}$ miliónov.

a) Aký by mal byť počet obyvateľov o 10 rokov, o 20 rokov?
b) O koľko by mal narásť počet obyvateľov počas 10. roka?
c) O koľko by mal narásť počet obyvateľov počas 20. roka?

a) 5.48 mil., 6.89 mil., **b)** 0.14 mil., **c)** 0.13 mil.

177. Celkové náklady v eurách na produkciu q kusov tovaru vyrobených počas jednej smeny, sú dané funkciou $C(q) = 0,2q^2 + 100q + 3200$. Počas prvých t hodín pracovnej smeny sa vyrobí $q(t) = 15t$ kusov tovaru.

a) Vyjadrite celkové náklady ako funkciu času.
b) Aké sú celkové náklady na produkciu počas prvých 5 hodín?
c) Po koľkých hodinách sú celkové náklady 10 000 eur?

a) $45t^2 + 1500t + 3200$, **b)** 11 825, **c)** 4.043

178. Celkové náklady v dolároch na výrobu q kusov televízorov sú dané funkciou $C(q)=0{,}05q^3+400$. Počas prvých t dní sa vyrobí $q(t)=20t$ televízorov.

a) Vyjadrite celkové náklady ako funkciu času.
b) Aké sú celkové náklady na produkciu počas prvých 3 dní?
c) Po koľkých dňoch sú celkové náklady 26 000 eur?

a) $400t^3+400$, **b)** 11 200, **c)** 4

179. Celkové náklady v eurách na výrobu q výrobkov sú dané funkciou $C(q)=\frac{3}{4}e^{\frac{q}{2}}+20$. Počas prvých t hodín sa vyrobí $q(t)=0{,}4t$ výrobkov.

a) Vyjadrite celkové náklady ako funkciu času.
b) Aké sú celkové náklady na výrobu počas prvých 6 hodín?
c) Po koľkých hodinách sú celkové náklady 210 000 eur?

a) $\frac{3}{4}e^{0{,}2t}+20$, **b)** 22.49, **c)** 62.71

180. Tovar má funkciu dopytu $D(p)=350-4p$ a funkciu ponuky $S(p)=3p+35$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E=45$

181. Tovar má funkciu dopytu $q=128-3p$ a funkciu ponuky $q=2p+13$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E=23$

182. Tovar má funkciu dopytu $d(q)=\frac{128-q}{5}$ a funkciu ponuky $s(q)=\frac{q-13}{2}$. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E=23$

183. Tovar má funkciu dopytu $D(p)=26-p$ a funkciu ponuky $S(p)=p^2+6p+8$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E=2$

184. Tovar má funkciu dopytu $q=90-9p$ a funkciu ponuky $q=p^2+17p-30$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E=4$

185. Tovar má funkciu dopytu $D(p)=100-p^2$ a funkciu ponuky $S(p)=2p+20$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E = 8$

186. Tovar má funkciu dopytu $q = 180 - 4p - p^2$ a funkciu ponuky $q = 96 + 4p$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E = 6$

187. Tovar má funkciu dopytu $D(p) = 18 - 4p - p^2$ a funkciu ponuky $S(p) = p^2 + 2p + 10$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E = 1$

188. Tovar má funkciu dopytu $q = 110 - 2p - p^2$ a funkciu ponuky $q = p^2 + 8p + 10$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E = 5$

189. Tovar má funkciu dopytu $D(p) = 7 + \dfrac{21}{p}$ a funkciu ponuky $S(p) = p + 3$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E = 7$

190. Tovar má funkciu dopytu $d(q) = \dfrac{21}{q - 7}$ a funkciu ponuky $s(q) = q - 3$. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E = 7$

191. Tovar má funkciu dopytu $D(p) = 17 + \dfrac{72}{p}$ a funkciu ponuky $S(p) = 2p + 7$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E = 9$

192. Tovar má funkciu dopytu $q = \dfrac{60}{p} + 39$ a funkciu ponuky $q = 15 + 3p$ tisíc kusov, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E = 10$

193. Tovar má funkciu dopytu $pq - 18 = 0$ a funkciu ponuky $p - q + 3 = 0$. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E = 3$

194. Tovar má funkciu dopytu $10pq - 74p - 81 = 0$ a funkciu ponuky $10p - 10q + 35 = 0$. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu.

$p_E = 5.4$

195. Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 2600 + 2x$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x) = 52x$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x = 52$, $(52, \infty)$

196. Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 0{,}5x + 345$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x) = 2x$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x = 230$, $(230, \infty)$

197. Celkové týždenné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 0{,}1x^2 + x + 700$. Funkcia celkových týždenných výnosov je $R(x) = 38x$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1 = 20$, $x_2 = 350$, $(20, 350)$

198. Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 0{,}04x^2 + x + 252$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x) = 18{,}4x$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1 = 15$, $x_2 = 420$, $(15, 420)$

199. Celkové týždenné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 15x + 1696$. Funkcia celkových týždenných výnosov je $R(x) = 100x - 0{,}01x^2$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1 = 20$, $x_2 = 8\,480$, $(20, 8\,480)$

200. Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 50x + 60\,000$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x) = 1255x - 0{,}1x^2$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1 = 50$, $x_2 = 12\,000$, $(50, 12\,000)$

201. Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = \dfrac{1000}{x}$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x) = 10x$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x = 10$, $(10, \infty)$

202. Celkové týždenné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x)=\frac{600}{x}+50$. Funkcia celkových týždenných výnosov je $R(x)=4x$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x=20$, $(20, \infty)$

203. Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x)=\frac{27}{x}+6$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x)=x$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x=9$, $(9, \infty)$

204. Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x)=\frac{5\,000}{x}$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x)=12{,}5x$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x=20$, $(20, \infty)$

205. Celkové týždenné náklady v tisícoch eur na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x)=\frac{5\,400}{x}$. Funkcia celkových týždenných výnosov je $R(x)=37{,}5x$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x=12$, $(12, \infty)$

206. Celkové denné náklady v dolároch na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x)=10x+360$. Predajná cena bola stanovená na $76-x$ dolárov za kus. Určte rovnicu funkcie celkových denných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1=6$, $x_2=60$, $(6, 60)$

207. Celkové mesačné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x)=x+90$. Predajná cena bola stanovená na $2-0{,}001x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových mesačných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1=100$, $x_2=900$, $(100, 900)$

208. Celkové mesačné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x)=2x+72$. Predajná cena bola stanovená na $7{,}8-0{,}1x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových mesačných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1=18$, $x_2=40$, $(18, 40)$

209. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 22(x+4)$. Predajná cena bola stanovená na $70 - 2x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových týždenných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1 = 2$, $x_2 = 22$, $(2, 22)$

210. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 360 + 40x + 0{,}1x^2$. Predajná cena bola stanovená na 60 eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových týždenných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1 = 20$, $x_2 = 180$, $(20, 180)$

211. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 360 + 10x + 0{,}2x^2$. Predajná cena bola stanovená na $50 - 0{,}2x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových týždenných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1 = 10$, $x_2 = 90$, $(10, 90)$

212. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 2\,000 + 40x + x^2$. Predajná cena bola stanovená na 130 eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových týždenných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1 = 40$, $x_2 = 50$, $(40, 50)$

213. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 1760 + 8x + 0{,}6x^2$. Predajná cena bola stanovená na $100 - 0{,}4x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových týždenných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1 = 46 - 2\sqrt{89}$, $x_2 = 46 + 2\sqrt{89}$, $(46 - 2\sqrt{89}, 46 + 2\sqrt{89})$

214. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 15\,000 + 35x + 0{,}1x^2$. Predajná cena bola stanovená na $385 - 0{,}9x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových týždenných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.

$x_1 = 50$, $x_2 = 300$, $(50, 300)$

2 ZÁKLADY LINEÁRNEJ ALGEBRY

2.1 Riešené úlohy

KANONICKÝ ROZKLAD POLYNÓMU

Príklad 2.1 Nájdime kanonický rozklad polynómu $x^4 - 9x^2$ v množine $\mathbf{R}$.

Riešenie:
Polynóm rozložíme na súčin vyberaním spoločného výrazu pred zátvorku a použitím vzťahu $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9) = x^2(x-3)(x+3)$$

Výsledok je v tvare $x^4 - 9x^2 = x^2(x-3)(x+3)$.

Príklad 2.2 Nájdime kanonický rozklad polynómu $x^3 + x^2 + 4x + 4$ v množine $\mathbf{R}$.

Riešenie:
V tomto prípade využijeme postupné vyberanie spoločných výrazov pred zátvorku.

$$x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4) = x^2(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^2 + 4)$$

Výraz $x^2 + 4$ v množine $\mathbf{R}$ nemá nulové body.
Výsledok je teda v tvare $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x^2 + 4)$.

Príklad 2.3 Nájdime kanonický rozklad polynómu $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ v množine $\mathbf{R}$.

Riešenie:
Postup využitý pri predchádzajúcich úlohách sa nedá aplikovať v tejto úlohe.

Pri kanonickom rozklade použijeme Hornerovu schému. Možnými koreňmi daného polynómu sú všetky delitele absolútneho člena, teda čísla 6. Delitele tvoria množinu $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Postupne budeme overovať, či niektorý člen danej množiny je koreňom polynómu. Ak je tomu tak, zvyšok po delení (posledné číslo v riadku) je rovné 0.

	1	**-2**	**-5**	**6**
1		**1**	**-1**	**-6**
	1	**-1**	**-6**	**0**
3		**3**	**6**	
	1	**2**	**0**	

V prvom riadku tabuľky sú koeficienty polynómu usporiadané od najvyššej mocniny.
V každom ďalšom riadku, ktorého posledným číslom je nula, sú koeficienty o jeden stupeň nižšieho polynómu.
Výsledok je v tvare $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)$.

Príklad 2.4 Nájdime kanonický rozklad polynómu $x^3 - x^2 - 8x + 12$ v množine $\mathbf{R}$.

Riešenie:

Tak, ako v predchádzajúcej úlohe, aj tu využijeme Hornerovu schému, pričom množinu potenciálnych koreňov tvoria čísla $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$. Sú to delitele čísla 12.

	1	**-1**	**-8**	**12**
2		**2**	**2**	**-12**
	1	**1**	**-6**	**0**
2		**2**	**6**	
	1	**3**	**0**	

Výsledok je v tvare $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2(x+3)$.

ROZKLAD RACIONÁLNEJ FUNKCIE NA ELEMENTÁRNE (PARCIÁLNE) ZLOMKY

Každú rýdzo racionálnu funkciu vieme rozložiť na súčet elementárnych (parciálnych) zlomkov, ktoré môžu mať v množine $\mathbf{R}$ tieto tvary

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

kde A, M, N, α, p, q sú reálne čísla, n je prirodzené číslo a kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$ nemá reálne nulové body.

Príklad 2.5 Rozložme na elementárne zlomky funkciu $\dfrac{2x^2+3x-23}{x^3-4x^2+x+6}$ v množine $\mathbf{R}$.

Riešenie:

Funkcia $\dfrac{2x^2+3x-23}{x^3-4x^2+x+6}$ je rýdzo racionálna (stupeň polynómu v čitateli je nižší ako stupeň polynómu v menovateli).

Polynóm v menovateli je potrebné rozložiť na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad).
S využitím Hornerovej schémy je $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)$.

Funkciu $\dfrac{2x^2+3x-23}{x^3-4x^2+x+6}$ môžeme prepísať a vytvoriť elementárne zlomky.

$$\frac{2x^2+3x-23}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Tri neznáme koeficienty A, B, C vypočítame dosadzovacou metódou tak, že do upravenej rovnice (po odstránení zlomkov) postupne budeme dosadzovať namiesto premennej x tri rôzne (vhodné) čísla. Využívame pritom, že hodnoty polynómov na ľavej a pravej strane rovnice sa rovnajú po dosadení ľubovoľného čísla za premennú x.

$$\frac{2x^2+3x-23}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \Big/ (x+1)(x-2)(x-3)$$

$$2x^2+3x-23 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2)$$

$$x=-1: \quad 2-3-23 = A(-1-2)(-1-3) + B(-1+1)(-1-3) + C(-1+1)(-1-2)$$
$$-24 = 12A$$
$$\underline{\underline{A=-2}}$$

$$x=2: \quad 8+6-23 = A(2-2)(2-3) + B(2+1)(2-3) + C(2+1)(2-2)$$
$$-9 = -3B$$
$$\underline{\underline{B=3}}$$

$$x=3: \quad 18+9-23 = A(3-2)(3-3) + B(3+1)(3-3) + C(3+1)(3-2)$$
$$4 = 4C$$
$$\underline{\underline{C=1}}$$

Rozklad na elementárne zlomky je $\dfrac{2x^2+3x-23}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{-2}{x+1} + \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$.

Príklad 2.6 Rozložme na elementárne zlomky funkciu $\dfrac{x^3-2x+1}{x^2+x}$ v množine $\mathbf{R}$.

Riešenie:

Funkcia $\dfrac{x^3-2x+1}{x^2+x}$ nie je rýdzo racionálna (stupeň polynómu v čitateli nie je nižší ako stupeň polynómu v menovateli), takže najprv je potrebné predeliť čitateľa menovateľom.

$$(x^3-2x+1):(x^2+x) = x-1+\frac{-x+1}{x^2+x}$$

Ďalej postupujeme ako v Príklade 1.5, polynóm v menovateli rozložíme na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad).

$$x^2+x = x(x+1)$$

Zvyšok po delení $\dfrac{-x+1}{x^2+x}$ je už rýdzo racionálna funkcia, ktorú môžeme prepísať a vyjadriť pomocou elementárnych zlomkov.

$\dfrac{-x+1}{x(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}$. Koeficienty A, B vypočítame podobne ako v Príklade 2.5.

$$\frac{-x+1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}\Big/ x(x+1)$$

$$-x+1=A(x+1)+Bx$$

$$x=0: \quad 0+1=A(0+1)+B\cdot 0$$
$$\underline{\underline{1=A}}$$

$$x=-1: \quad 1+1=A(-1+1)+B(-1)$$
$$2=-B$$
$$\underline{\underline{B=-2}}$$

Rozklad na elementárne zlomky je $\dfrac{x^3-2x+1}{x^2+x}=x-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+1}$.

Príklad 2.7 Rozložme na elementárne zlomky funkciu $\dfrac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}$ v množine $\mathbf{R}$.

Riešenie:

Funkcia $\dfrac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}$ je rýdzo racionálna (stupeň polynómu v čitateli je nižší ako stupeň polynómu v menovateli).

Polynóm v menovateli je potrebné rozložiť na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad).
Postupným vyberaním pred zátvorku je $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$.

Funkciu $\dfrac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}$ môžeme prepísať a vyjadriť pomocou elementárnych zlomkov

$$\frac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Tri neznáme koeficienty A, B, C vypočítame dosadzovacou metódou tak, že do upravenej rovnice (po odstránení zlomkov) postupne budeme dosadzovať namiesto premennej x tri rôzne (vhodné) čísla. Využívame pritom, že hodnoty polynómov na ľavej a pravej strane rovnice sa rovnajú po dosadení ľubovoľného čísla za premennú x.

$$\frac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\Big/(x-1)^2(x+1)$$

$$-x^2+5=A(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)^2$$

$x=1$: $\quad -1+5=A(1+1)+B(1-1)(1+1)+C(1-1)^2$

$$4=2A$$

$$\underline{\underline{A=2}}$$

$x=-1$: $\quad -1+5=A(-1+1)+B(-1-1)(-1+1)+C(-1-1)^2$

$$4=4C$$

$$\underline{\underline{C=1}}$$

$x=0$: $\quad 0+5=A(0+1)+B(0-1)(0+1)+C(0-1)^2$

$$5=2-B+1$$

$$\underline{\underline{B=-2}}$$

Rozklad na elementárne zlomky je $\dfrac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$.

Príklad 2.8 Rozložme na elementárne zlomky funkciu $\dfrac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}$ v množine $\mathbf{R}$.

Riešenie:

Funkcia $\dfrac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}$ je rýdzo racionálna (stupeň polynómu v čitateli je nižší ako stupeň polynómu v menovateli).

Polynóm v menovateli je potrebné rozložiť na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad).

Použitím Hornerovej schémy je $x^3-3x^2+2x-6=(x-3)(x^2+2)$.

Funkciu $\dfrac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}$ môžeme prepísať a vyjadriť pomocou elementárnych zlomkov

$$\frac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Tri neznáme koeficienty A, B, C vypočítame dosadzovacou metódou tak, že do upravenej rovnice (po odstránení zlomkov) postupne budeme dosadzovať namiesto premennej x tri rôzne (vhodné) čísla. Využívame pritom, že hodnoty polynómov na ľavej a pravej strane rovnice sa rovnajú po dosadení ľubovoľného čísla za premennú x.

$$\frac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+2}\Bigg/(x-3)(x^2+2)$$

$$5x^2-7x+9=A(x^2+2)+(Bx+C)(x-3)$$

$$x=3:\quad 45-21+9=A(9+2)+(3B+C)(3-3)$$
$$33=11A$$
$$\underline{\underline{A=3}}$$

$$x=0:\quad 9=3(0+2)+(0\cdot B+C)(0-3)$$
$$9=6-3C$$
$$\underline{\underline{C=-1}}$$

$$x=1:\quad 5-7+9=3(1+2)+(B-1)(1-3)$$
$$7=9-2B+2$$
$$\underline{\underline{B=2}}$$

Rozklad na elementárne zlomky je $\dfrac{5x^2-7x+9}{x^3-3x^2+2x-6}=\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{2x-1}{x^2+2}$.

OPERÁCIE S MATICAMI

Súčet a rozdiel matíc existuje len pre rovnaké typy matíc (ak $\mathbf{A}$ je matica typu $m\times n$, aj matica $\mathbf{B}$ musí byť typu $m\times n$).
Pre prvky matice $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ platí $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.
Pre prvky matice $\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$ platí $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Pre maticu $\mathbf{C}=k\cdot\mathbf{A}$, kde $k\in\mathbf{R}$ platí $c_{ij}=k\cdot a_{ij}$.

Súčin matíc $\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ je možné vypočítať, ak počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ je rovnaký ako počet riadkov matice $\mathbf{B}$, teda ak matica $\mathbf{A}$ je typu $(m\times n)$ a matica $\mathbf{B}$ je typu $(n\times p)$, potom matica $\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ bude typu $(m\times p)$.

Príklad 2.9 Vypočítajme $\mathbf{A}+\mathbf{B},\quad \mathbf{A}-\mathbf{B},\quad 2\cdot\mathbf{A},\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B},\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$, ak

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 5\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix},\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -4\end{pmatrix}.$$

Riešenie:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 5\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1 & -1+2 & 3-1\\ 2+0 & 1+3 & 5+0\\ -2+2 & 3+1 & -1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 5\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 5\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0-1 & -1-2 & 3-(-1)\\ 2-0 & 1-3 & 5-0\\ -2-2 & 3-1 & -1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 4\\ 2 & -2 & 5\\ -4 & 2 & -3\end{pmatrix},$$

$$2\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 5\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 0 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 3\\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 5\\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 3 & 2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 6\\ 4 & 2 & 10\\ -4 & 6 & -2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 5\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot 1-1\cdot 0+3\cdot 2 & 0\cdot 2-1\cdot 3+3\cdot 1 & 0\cdot(-1)-1\cdot 0+3\cdot 2\\ 2\cdot 1+1\cdot 0+5\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 3+5\cdot 1 & 2\cdot(-1)+1\cdot 0+5\cdot 2\\ -2\cdot 1+3\cdot 0-1\cdot 2 & -2\cdot 2+3\cdot 3-1\cdot 1 & -2\cdot(-1)+3\cdot 0-1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 6\\ 12 & 12 & 8\\ -4 & 4 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3-1\cdot(-4)\\ 0\cdot 2+3\cdot 3+0\cdot(-4)\\ 2\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 9\\ -1\end{pmatrix}.$$

Príklad 2.10 Nájdime hodnosť matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 9 & -1 & 0\\ 4 & 4 & 2 & 4\\ 9 & -1 & 5 & 8\\ 4 & 7 & 11 & 6\end{pmatrix}$.

Riešenie:

Hodnosť matice je počet nenulových riadkov stupňovitej (Gaussovej) matice, ktorú sme dostali pomocou ekvivalentných úprav zadanej matice.

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 11 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +4R_1 \\ +9R_1 \\ +4R_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 40 & -2 & 4 \\ 0 & 80 & -4 & 8 \\ 0 & 43 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2R_2 \\ \\ \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 40 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 43 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :2 \\ \\ \\ \end{matrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & -1 & 2 \\ 0 & 43 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 43 \\ \cdot (-20) \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 860 & -43 & 86 \\ 0 & -860 & -140 & -120 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +R_2 \end{matrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 860 & -43 & 86 \\ 0 & 0 & -183 & -34 \end{pmatrix}.$$

Počet nenulových riadkov matice je 3, teda hodnosť matice $\mathbf{A}$ je $h(\mathbf{A}) = 3$.

VÝPOČET DETERMINANTU

Príklad 2.11 Vypočítajme determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Riešenie:

Determinant rozmeru 2×2 sa vypočíta pomocou Sarusovho pravidla (Matematika I a jej využitie v ekonómii).

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 7.$$

Príklad 2.12 Vypočítajme determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Riešenie:

Determinant rozmeru 3×3 môžeme riešiť tiež pomocou Sarusovho pravidla (Matematika I a jej využitie v ekonómii).

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{array} = [2 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 0] - [3 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1)] = -8.$$

Determinanty rozmerov 4×4 a väčších, sa najčastejšie počítajú pomocou rozvoja determinantu podľa riadka alebo stĺpca.

$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$, resp. $|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$,

kde $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ je algebrický doplnok a M_{ij} je subdeterminant ku prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ (vznikne vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca matice $\mathbf{A}$).

Pred samotným výpočtom je výhodné determinant upraviť pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili ľubovoľný riadok, resp. stĺpec obsahujúci čo najviac núl. Vytvorený riadok, resp. stĺpec použijeme k rozvoju determinantu.

Príklad 2.13 Vypočítajme determinant $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Riešenie:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2R_2 \\ \\ \\ -2R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & \mathbf{0} & -2 \\ 2 & 4 & \mathbf{1} & 1 \\ 3 & 2 & \mathbf{0} & 2 \\ -3 & -5 & \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{1}\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\mathbf{0}\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{0}\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

VÝPOČET INVERZNEJ MATICE

Inverznú maticu k regulárnej matici A rádu n môžeme hľadať napríklad využitím adjungovanej matice

$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$ pomocou vzťahu $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$.

Príklad 2.14 K matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ nájdime inverznú maticu.

Riešenie:

Vypočítame determinant matice $\mathbf{A}$ a všetky algebrické doplnky tvoriace adjungovanú maticu.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Inverzná matica k matici $\mathbf{A}$ je $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & -4 & 13 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Iným spôsobom hľadania inverznej matice je napríklad spôsob využitím Gaussovej eliminácie (Matematika I a jej využitie v ekonómii).

Vpravo od zadanej matice napíšeme jednotkovú maticu. Ekvivalentnými úpravami, ktoré budú spoločné pre riadky oboch matíc vyrobíme jednotkovú maticu na mieste zadanej matice, teda vľavo. Matica, ktorá takto vznikne na pravej strane, teda na mieste jednotkovej matice, je inverznou maticou k zadanej matici $(A|I) \approx \cdots \approx (I|A^{-1})$.

Príklad 2.15 K matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ nájdime inverznú maticu.

Riešenie:

Inverznú maticu nájdeme v tomto prípade pomocou Gaussovej eliminácie.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3R_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} +2R_2 \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-1) \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Inverzná matica k matici $\mathbf{A}$ je $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

Sústavu lineárnych rovníc budeme riešiť tak, že ju prepíšeme do maticového tvaru a k výpočtu použijeme Gaussovu eliminačnú metódu (využívame pri tom všetky ekvivalentné úpravy matíc) alebo Cramerovo pravidlo.
.
Pri Gaussovej eliminačnej metóde rozšírenú maticu sústavy upravíme na stupňovitú (Gaussovu) maticu a na základe Frobeniovej vety (Matematika 1 a jej využitie v ekonómii) rozhodneme o počte riešení rovnice, v prípade nenulového počtu riešení, ich aj vyjadríme.

Príklad 2.16 Riešme sústavu rovníc
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 13 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 14 \end{array}.$$

Riešenie:

Sústavu rovníc prepíšeme do maticového tvaru
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -3R_1 \\ -4R_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \\ -7R_2 \end{array} \approx$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ +R_3 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 \end{array}\right).$$

Hodnosť matice je rovná 4 a hodnosť rozšírenej matice je takisto rovná 4 a je to zároveň aj počet neznámych. Na základe Frobeniovej vety má sústava práve jedno riešenie, ktoré sa dá jednoducho vyjadriť z upravenej matice.
Z posledného riadku upravenej matice je zrejmé, že

$$\begin{aligned} 40x_4 &= 40 \\ \underline{\underline{x_4 = 1}}&. \end{aligned}$$

Z tretieho riadku upravenej matice vypočítame

$$\begin{aligned} -4x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -4x_3 + 4\cdot 1 &= 0 \\ \underline{\underline{x_3 = 1}}& \end{aligned}.$$

Pomocou druhého riadku nájdeme

$$\begin{aligned} -x_2-2x_3-7x_4&=-10\\ -x_2-2\cdot 1-7\cdot 1&=-10\\ \underline{\underline{x_2=1}}& \end{aligned}.$$

Pomocou prvého riadku nájdeme

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=11\\ x_1+2\cdot 1+3\cdot 1+4\cdot 1&=11\\ \underline{\underline{x_1=2}}& \end{aligned}.$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2,1,1,1)^T$.

Príklad 2.17 Riešme sústavu rovníc
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3\\ 7x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2\\ -4x_1 & + & 3x_2 & + & -3x_3 & + & 2x_4 & = & -5\\ 6x_1 & + & 10x_2 & + & & + & 9x_4 & = & 1 \end{array}.$$

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcej úlohe.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 4 & 2 & 5 & 3\\ 7 & 3 & 1 & 2 & 2\\ -4 & 3 & -3 & 2 & -5\\ 6 & 10 & 0 & 9 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} +R_3\\ \\ \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 7 & -1 & 7 & -2\\ 7 & 3 & 1 & 2 & 2\\ -4 & 3 & -3 & 2 & -5\\ 6 & 10 & 0 & 9 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +7R_1\\ -4R_1\\ +6R_1 \end{array} \approx$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 7 & -1 & 7 & -2\\ 0 & 52 & -6 & 51 & -12\\ 0 & -25 & 1 & -26 & 3\\ 0 & 52 & -6 & 51 & -11 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ -R_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 7 & -1 & 7 & -2\\ 0 & 52 & -6 & 51 & -12\\ 0 & -25 & 1 & -26 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Hodnosť matice je rovná 3 a hodnosť rozšírenej matice je rovná 4. Na základe Frobeniovej vety sústava nemá riešenie.

Príklad 2.18 Riešme sústavu rovníc
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 4\\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -3\\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1\\ & - & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -3 \end{array}.$$

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcich úlohách.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -R_1 \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -5R_2 \\ +7R_2 \end{array} \approx$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ +2R_3 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hodnosť matice je rovná 3 a hodnosť rozšírenej matice je takisto rovná 3 ale počet neznámych je rovný 4. Na základe Frobeniovej vety má sústava nekonečne veľa riešení.

Tretí riadok upravenej matice obsahuje 2 neznáme, jednu z neznámych si zvolíme ako parameter $t \in \mathbf{R}$.

$$\underline{\underline{x_4 = t}}\,.$$

Ďalšiu neznámu potom vyjadríme pomocou parametra

$$\begin{aligned} 2x_3 - 4x_4 &= 12 \\ 2x_3 - 4t &= 12 \\ \underline{\underline{x_3 = 6 + 2t}} \end{aligned}\,.$$

Z druhého riadku

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_2 - (6 + 2t) + t &= -3 \\ \underline{\underline{x_2 = 3 + t}} \end{aligned}\,.$$

Z prvého riadku

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_1 - 2(3 + t) + 3(6 + 2t) - 4t &= 4 \\ \underline{\underline{x_1 = -8}} \end{aligned}$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-8, 3 + t, 6 + 2t, t)^T$, $t \in \mathbf{R}$.

CRAMEROVO PRAVIDLO

Sústavu lineárnych algebrických rovníc, ktorých matica je regulárna (štvorcová a jej determinant je nenulový), môžeme riešiť pomocou Cramerovho pravidla (Matematika I a jej využitie v ekonómii).

Ak riešime sústavu 3 lineárnych rovníc s 3 neznámymi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \, , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

k jej riešeniu môžeme použiť Cramerovo pravidlo, kde je nutné vypočítať determinanty

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{a}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

pričom matica, z ktorej sa vypočíta determinant D musí byť regulárna ($D \neq 0$).

Riešenie takejto sústavy je

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

Príklad 2.19 Riešme sústavu rovníc
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -5 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0\,. \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \end{array}$$

Riešenie:

Vypočítame determinanty $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$,

$$D_1 = \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -14, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -28$$

$$x_1 = \frac{0}{-14} = 0, \quad x_2 = \frac{-14}{-14} = 1, \quad x_3 = \frac{-28}{-14} = 2.$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3)^T = (0,1,2)^T$.

2.2 Neriešené úlohy

V nasledujúcich úlohách nájdite v množine **R** kanonický rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov:

		Výsledky:
1.	x^3-7x-6	$(x+2)(x-3)(x+1)$
2.	$2x^3+3x^2-8x+3$	$(2x-1)(x-1)(x+3)$
3.	$x^4-x^3-x^2-x-2$	$(x-2)(x+1)(x^2+1)$
4.	$x^4-2x^3+4x^2+2x-5$	$(x-1)(x+1)(x^2-2x+5)$
5.	$x^5-4x^4+7x^3-10x^2+10x-4$	$(x-1)^2(x-2)(x^2+2)$
6.	x^4-2x^2+1	$(x-1)^2(x+1)^2$
7.	$x^4-5x^2-8x-12$	$(x+2)(x-3)(x^2+x+2)$
8.	x^4-x^3-x+1	$(x-1)^2(x^2+x+1)$
9.	$4x^4-8x^3+9x^2-5x+1$	$(2x-1)^2(x^2-x+1)$
10.	$x^5-6x^4+10x^3-3x^2+4x-12$	$(x-2)^2(x-3)(x^2+x+1)$
11.	$x^4-7x^3+17x^2-17x+6$	$(x-1)^2(x-2)(x-3)$
12.	$4x^3-2x^2+2x-1$	$(2x-1)(2x^2+1)$
13.	$x^6-2x^5+6x^4-10x^3+9x^2-8x+4$	$(x-1)^2(x^2+1)(x^2+4)$
14.	$x^6+2x^5+7x^4+12x^3+15x^2+18x+9$	$(x+1)^2(x^2+3)^2$
15.	$4x^5-17x^4+24x^3-13x^2+2x$	$(4x-1)(x-1)^2(x-2)x$
16.	$3x^5+17x^4-6x^3-96x^2+32x$	$(3x-1)(x+4)^2(x-2)x$
17.	$3x^5-7x^4+5x^3-x^2$	$(3x-1)(x-1)^2x^2$
18.	$2x^5+9x^4+6x^3-81$	$(2x-3)(x+3)^2(x^2+3)$
19.	$5x^5+32x^4+72x^3+64x^2+16x$	$(5x+2)(x+2)^3x$
20.	$3x^5-5x^4+7x^2-9x+4$	$(3x+4)(x-1)^2(x^2-x+1)$
21.	$2x^5+11x^4+22x^3+18x^2-8$	$(2x-1)(x+2)^2(x^2+2x+2)$
22.	$5x^5-43x^4+117x^3-81x^2-54x$	$(5x+2)(x-3)^3x$
23.	$5x^5-3x^4-52x^3+128x+48$	$(5x+2)(x+2)^2(x-2)(x-3)$
24.	$2x^5-7x^4-2x^3+16x^2-9$	$(2x-3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$
25.	$3x^5+2x^4+3x^3-16x^2+8$	$(3x+2)(x-1)^2(x^2+2x+4)$
26.	$2x^5+3x^4-12x^3-20x^2$	$(2x-5)(x+2)^2x^2$
27.	$3x^5-28x^4+54x^3+60x^2-25x$	$(3x-1)(x-5)^2(x+1)x$
28.	$3x^5+20x^4+48x^3+48x^2+16x$	$(3x+2)(x+2)^3x$
29.	$2x^5-9x^4-2x^3+36x^2-27$	$(2x+3)(x-3)^2(x-1)(x+1)$
30.	$2x^5-3x^4-x^3-19x-15$	$(2x-5)(x+1)^2(x^2-x+3)$

V nasledujúcich úlohách rozložte v množine **R** racionálne funkcie na súčet elementárnych zlomkov:

31. $\dfrac{2x^2+10x-18}{x^3-2x^2-5x+6}$ $\qquad \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x-3}$

32. $\dfrac{6x^2-22x+18}{x^3-6x^2+11x-6}$ $\qquad \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$

33. $\dfrac{4x^3-3x^2-18x+1}{x^4+x^3-7x^2-x+6}$ $\qquad \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+3}$

34. $\dfrac{x^4+4x^3+x^2+30x+14}{x^3+4x^2-x-4}$ $\qquad x-\dfrac{6}{x+4}+\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}$

35. $\dfrac{6x^4-12x^3-11x^2+17x+4}{x^3-2x^2-x+2}$ $\qquad 6x-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

36. $\dfrac{x^4-3x^2+17x-23}{x^3-7x+6}$ $\qquad x+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}$

37. $\dfrac{x^4-2x^3-5x^2-7x+31}{x^3-4x^2+x+6}$ $\qquad x+2+\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}$

38. $\dfrac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}$ $\qquad 5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{x+2}$

39. $\dfrac{2x^4-3x^3-10x^2+17x-12}{x^3-2x^2-5x+6}$ $\qquad 2x+1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x-3}$

40. $\dfrac{4x^2+7x+2}{x^3+2x^2}$ $\qquad \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x+2}$

41. $\dfrac{x^2+3x+1}{x^3+5x^2+8x+4}$ $\qquad \dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$

42. $\dfrac{x^2+4x-2}{x^3-x^2}$ $\qquad \dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}$

43. $\dfrac{x^3+x^2-4x+5}{x^3-3x+2}$ $\qquad 1+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+2}$

44. $\dfrac{4x^2+3x+2}{2x^3+3x^2-1}$ $\qquad -\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{2x-1}$

45. $\dfrac{3x^3+4x^2-26x-36}{x^4+3x^3-2x^2-12x-8}$ $\qquad \dfrac{2}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}$

46. $\dfrac{3x^5-15x^4+21x^3+4x^2-28x+12}{x^4-5x^3+8x^2-4x}$ $\qquad 3x-\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{3}{x}$

47. $\dfrac{x^5-6x^4+5x^3+26x^2-65x+30}{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}$ $\qquad x-3-\dfrac{5}{(x-2)^2}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}$

48. $\dfrac{5x^5+27x^4+45x^3+11x^2-26x-12}{x^5+6x^4+13x^3+12x^2+4x}$ $\qquad 5-\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{(x+2)^2}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x}$

49. $\dfrac{6x+9}{x^3+x}$ $\qquad \dfrac{-9x+6}{x^2+1}+\dfrac{9}{x}$

50. $\dfrac{x^3+10x^2+21x+15}{x^4+5x^3+10x^2+9x+3}$ $\qquad \dfrac{3}{x^2+3x+3}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2}$

51. $\dfrac{x^2+x+13}{x^3-x^2+4x-4}$ $\qquad -\dfrac{2x+1}{x^2+4}+\dfrac{3}{x-1}$

52. $\dfrac{7x^4-23x^3+58x^2-63x+37}{x^4-4x^3+10x^2-12x+5}$ $\qquad 7+\dfrac{2x-3}{x^2-2x+5}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{(x-1)^2}$

53. $\dfrac{-x^4+5x^3-6x^2+3x+7}{x^5-2x^2-x-2}$ $\qquad \dfrac{x-1}{x^2-x+2}-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x-1}$

54. $\dfrac{-2x^3-6}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}$ $\qquad \dfrac{3}{x^2+3}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

55. $\dfrac{x^2-2x-4}{x^3-x^2+4x-4}$ $\qquad \dfrac{2x}{x^2+4}-\dfrac{1}{x-1}$

56. $\dfrac{4x^2+8x+16}{x^3+4x^2+9x+6}$ $\qquad \dfrac{x-2}{x^2+3x+6}+\dfrac{3}{x+1}$

57. $\dfrac{4}{x^4-1}$ $\qquad \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}$

58. $\dfrac{x^3-9x+2}{x^4-x^3-x+1}$ $\qquad -\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{x+4}{x^2+x+1}$

59. $\dfrac{x^3+6x^2-6x+7}{x^3-x^2+x-6}$ $\qquad 1+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4x-2}{x^2+x+3}$

60. $\dfrac{x-3}{x^4-3x^3+5x^2-5x+2}$ $\qquad \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{-x+1}{x^2-x+2}$

61. $\dfrac{4x^4+4x^3-13x^2+4x-12}{x^5-3x^3-4x}$ $\qquad \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{x}{x^2+1}$

62. $\dfrac{-3x^4-4x^3-23x^2-46x+36}{x^5+8x^3-9x}$ $\qquad -\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{x^2+9}$

63. $\dfrac{6x^3-2x-16}{x^4-5x^2-8x-12}$ $\qquad \dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{x+1}{x^2+x+2}$

64. $\dfrac{x^2+7x+3}{x^4+2x^3+x+2}$ $\qquad \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-x+1}$

65. $\dfrac{x^4+3x^3-6x^2+17x+36}{x^4+2x^3-4x^2+7x+30}$ $\qquad 1-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-3x+5}$

66. $\dfrac{x^3+5x^2+4x+2}{x^4+4x^3+6x^2+8x+8}$ $\qquad \dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{x}{x^2+2}$

67. $\dfrac{x^5-x^4+3x^3-6x^2-2x-4}{x^4-x^3+2x^2-2x}$ $\qquad x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2x}{x^2+2}$

68. $\dfrac{7x^5+14x^4+41x^3+72x^2+20x-6}{x^4+2x^3+6x^2+10x+5}$ $\quad 7x-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{2x-1}{x^2+5}$

69. $\dfrac{7x^4+41x^3+90x^2+88x+26}{x^4+5x^3+11x^2+11x+4}$ $\quad 7+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{3x-2}{x^2+3x+4}$

70. $\dfrac{5x^4-7x^3+20x^2+39x+6}{2x^5+x^4+2x^3-11x^2+2x+4}$ $\quad -\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{3x-2}{x^2+2x+4}$

V nasledujúcich úlohách pre dané matice vypočítajte

a) $3\cdot\mathbf{A}-2\cdot\mathbf{B}$, **b)** $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, **c)** $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, **d)** $\mathbf{A}^2$, **e)** $\mathbf{B}^2$, **f)** $\mathbf{A}^T$

71. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix}4&3&2\\-7&-4&1\end{pmatrix}$

b) c) d) e) neexistuje

f) $\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$

72. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\end{pmatrix}$

a) c) e) neexistuje

b) $\begin{pmatrix}4&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$

73. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$

a) b) d) neexistuje

c) $\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}3&4\\8&11\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}2&1\end{pmatrix}$

74. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$

a) b) c) d) e) neexistuje

f) $\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}^T$

75. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\3&4\end{pmatrix}$

a) c) d) e) neexistuje

b) $\begin{pmatrix}9&13\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}^T$

76. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$

a) c) e) neexistuje **b)** $\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

77. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) c) e) neexistuje

b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 8 \\ -4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

V nasledujúcich úlohách určte hodnosť matice:

78. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A}) = 3$

79. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A}) = 2$

80. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 27 & 26 & 25 \\ 19 & 18 & 17 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A}) = 2$

81. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A}) = 2$

82. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A}) = 3$

83. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 18 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=3$

84. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=3$

85. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=3$

86. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & -10 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=2$

87. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=4$

88. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -5 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -8 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 8 & 4 & 6 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=2$

V nasledujúcich úlohách vypočítajte determinanty matíc:

89. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $|\mathbf{A}|=-23$

90. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 30 \end{pmatrix}$ $|\mathbf{A}|=12$

91. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}15 & 10\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $\quad|\mathbf{A}|=0$

92. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ $\quad|\mathbf{A}|=0$

93. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix}$ $\quad|\mathbf{A}|=-8$

94. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 7 & 3\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}$ $\quad|\mathbf{A}|=-76$

95. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & 3 & -2\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad|\mathbf{A}|=-35$

96. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 5 & -3 & 2\\ 9 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad|\mathbf{A}|=-35$

97. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & 2 & -2\\ 1 & 5 & 2\\ 2 & 9 & 1\end{pmatrix}$ $\quad|\mathbf{A}|=-70$

98. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\\ 1 & -3 & 5\\ 2 & 1 & 9\end{pmatrix}$ $\quad|\mathbf{A}|=-175$

99. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad|\mathbf{A}|=12$

100. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 12 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad|\mathbf{A}|=24$

101. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}| = 36$

102. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}| = 60$

103. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}| = -4$

104. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}| = -6$

105. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}| = 1$

106. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}| = 900$

107. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}| = 6$

108. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}| = -5$

109. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $|\mathbf{A}|=18$

110. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $|\mathbf{A}|=14$

111. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -2 & 10 \\ -5 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $|\mathbf{A}|=-570$

112. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$ $|\mathbf{A}|=12$

113. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ $|\mathbf{A}|=-48$

114. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $|\mathbf{A}|=223$

115. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$ $|\mathbf{A}|=-24$

116. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $|\mathbf{A}|=-24$

V nasledujúcich úlohách vypočítajte inverznú maticu k danej matici:

117. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

118. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$

119. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

120. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4 & 9\\ 3 & -5\end{pmatrix}$

121. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$ neexistuje

122. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -6 & 3\end{pmatrix}$

123. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

124. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

125. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

126. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 5 & 4\\ 13 & 10 & 8\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ -4 & 5 & -2\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}$

127. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$

128. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{63}\begin{pmatrix}14 & -7 & 7\\ 8 & 14 & -5\\ -5 & 7 & 11\end{pmatrix}$

129. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & -5 & -2\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}-11 & -1 & 9\\ -17 & -6 & 5\\ 26 & -11 & 1\end{pmatrix}$

130. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 5 & 4\\ 13 & 10 & 8\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ -4 & 5 & -2\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}$

131. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}9 & 17 & 8\\ 18 & 34 & 17\\ 10 & 19 & 8\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}51 & -16 & -17\\ -26 & 8 & 9\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

132. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$

133. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -5 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 7\\ 2 & -10 & -18\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

134. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

135. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 7 & 5 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 9 & 4\\ 0 & 0 & 11 & 5\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2 & -5 & 4\\ -7 & 3 & 16 & -13\\ 0 & 0 & 5 & -4\\ 0 & 0 & -11 & 9\end{pmatrix}$

V nasledujúcich úlohách riešte sústavy lineárnych rovníc Gaussovou eliminačnou metódou:

136. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2\\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5\\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1\end{aligned}$ $(1, 3, 2)^T$

137. $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 1\\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$ $(2, -1, 0)^T$

138.
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$
$\emptyset$

139.
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array}$$
$(3+t,\, -1-2t,\, t)^T,\ t \in \mathbf{R}$

140.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 12 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & = & -1 \end{array}$$
$(3,\, 2,\, -2,\, -1)^T$

141.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 40 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 37 \end{array}$$
$(1,\, 2,\, 2,\, 0)^T$

142.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \end{array}$$
$(-2,\, 0,\, 1,\, -1)^T$

143.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x_1 & + & 9x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$
$(-\frac{2}{5},\, -\frac{6}{5},\, \frac{17}{5},\, 1)^T$

144.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & -8 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & -8 \end{array}$$
$(2,\, -2,\, 1,\, -1)^T$

145.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$
$(1,\, 2,\, 1,\, 3)^T$

146.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & -2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & -7 \end{array}$$
$(3, 0, -5, 11)^T$

147.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \end{array}$$
$\emptyset$

148.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 9x_1 & - & x_2 & + & 15x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \end{array}$$
$\emptyset$

149.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 12x_2 & + & 9x_3 & + & 25x_4 & = & 15 \\ 15x_1 & + & 34x_2 & + & 25x_3 & + & 64x_4 & = & 40 \\ 20x_1 & + & 46x_2 & + & 34x_3 & + & 89x_4 & = & 70 \\ 10x_1 & + & 23x_2 & + & 17x_3 & + & 44x_4 & = & 25 \end{array}$$
$\emptyset$

150.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array}$$
$\emptyset$

151.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 12x_1 & - & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 21x_4 & = & 3 \\ 11x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & + & 24x_4 & = & 1 \\ 7x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 17x_4 & = & 0 \\ 8x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & 9 \end{array}$$
$$\left(-\frac{3}{2}-\frac{13}{2}t-\frac{5}{2}s, -\frac{7}{2}-\frac{19}{2}t-\frac{7}{2}s, s, t\right)^T, \; s,t \in \mathbf{R}$$

152.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 8x_1 & + & 12x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & - & 7x_4 & = & 3 \end{array}$$
$$\left(\frac{5}{8}-3t-s, 2t, 8s, -\frac{1}{4}+10s\right)^T, \; s, t \in \mathbf{R}$$

153.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\
x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\
5x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 12
\end{array}$$

$(6-26t+17s,\ -1+7t-5s,\ t,\ s)^T,\ s, t \in \mathbf{R}$

154.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
5x_1 & + & 12x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 10 \\
11x_1 & + & 11x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 8 \\
2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \\
7x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 6x_4 & = & -4
\end{array}$$

$(8-9t-4s,\ t,\ s,\ -10+11t+5s)^T,\ s, t \in \mathbf{R}$

155.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\
2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 2 \\
3x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\
2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & -6
\end{array}$$

$(0,\ 2,\ \frac{5}{3},\ -\frac{4}{3})^T$

156.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
4x_1 & & & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\
-6x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & -1
\end{array}$$

$(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{5}{3})^T$

157.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\
2x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 3 \\
-3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\
 & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1
\end{array}$$

$(1,\ 1,\ -1,\ 0)^T$

158.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\
7x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\
-4x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \\
6x_1 & + & 10x_2 & & & + & 9x_4 & = & 1
\end{array}$$

$\emptyset$

159.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\
 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 3
\end{array}$$

$(2-t,\ 3-3t,\ t,\ 3-2t)^T,\ t \in \mathbf{R}$

160.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{15}{4}t,\ -\frac{3}{2}+\frac{13}{4}t,\ \frac{1}{2}-\frac{5}{4}t,\ t\right)^T,\ t\in \mathbf{R}$$

161.
$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -2 \\ 6x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{7}-t-\frac{5}{14}u,\ t,\ u,\ \frac{8}{7}-t-\frac{13}{14}u\right)^T,\ t,u\in \mathbf{R}$$

162.
$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$$(a,\ b,\ 13,\ 19-3a-3b,\ -34)^T,\ a,b\in \mathbf{R}$$

163.
$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(a,\ b,\ \frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b,\ -1-\frac{14}{3}a-\frac{7}{3}b,\ 2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b\right)^T,\ a,b\in \mathbf{R}$$

164.
$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= -6 \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 - x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$\emptyset$

165.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 7x_4 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & -1 \\ 7x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 10x_4 & = & -2 \\ 7x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 9x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & & & - & 2x_3 & - & 4x_4 & = & -6 \end{array}$$

$$\left(2, -\frac{9}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)^T$$

166.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 5 \\ 11x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & & & = & 4 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 9x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \end{array}$$

$$\left(2-8t, -\frac{9}{2}+13t, 6t, \frac{5}{2}-7t\right)^T, t \in \mathbf{R}$$

167.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 7x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \end{array}$$

$$(t, t, 1+t, 1)^T, t \in \mathbf{R}$$

168.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 15 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

$$(3, 0, -2, 0, 1)^T$$

169.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & + & 6x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 6x_5 & = & -1 \end{array}$$

$$\emptyset$$

V nasledujúcich úlohách riešte sústavy lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla:

170. $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \end{array}$ $(3, 1)^T$

171. $\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & = & -6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 18 \end{array}$ $(2, 3)^T$

172. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}$ $(3, -1, 2)^T$

173. $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}$ $(2, 1, -1)^T$

174. $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{array}$ $(2, 3, 5)^T$

175. $\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 30 \\ 3x_1 & - & 13x_2 & + & 2x_3 & = & 21 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 15 \end{array}$ $(2, -1, 1)^T$

176. $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \end{array}$ $(1, -2, 0)^T$

177. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -6 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 17 \end{array}$ $(1, -1, 2)^T$

178. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ -x_1 & + & 3x_2 & & & = & -4 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 17 \end{array}$ $(1, -1, 2)^T$

179. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \end{array}$ $(2, -1, 0)^T$

180. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \end{array}$ $(1, 2, 3)^T$

181. $\begin{aligned} 4x_1 &+ x_2 - 3x_3 = 11 \\ 2x_1 &- 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 &+ x_2 + x_3 = -3 \end{aligned}$ $(2, -3, -2)^T$

182. $\begin{aligned} 6x_2 + 4x_3 &= -12 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 9 \\ 2x_1 - 3x_3 &= 10 \end{aligned}$ $(5, -2, 0)^T$

183. $\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 17x_3 &= 0 \end{aligned}$ $\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$

184. $\begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$ $(4, -3, 2)^T$

185. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -4 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$ $(-1, 2, 1)^T$

186. $\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$ $(2, -3, 3)^T$

187. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 6x_1 + 6x_2 + 12x_3 &= 13 \\ 12x_1 + 9x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1\right)^T$

188. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$ $(1, 1, 1)^T$

189. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_3 &= -4 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$ $\left(2, \frac{1}{2}, -1\right)^T$

190. $\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 16 \end{aligned}$ $(1, 2, 3)^T$

191.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$
$(2, -2, 3)^T$

192.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$
$(1, 1, 0, 0)^T$

193.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 &= 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 37 \end{aligned}$$
$(1, 2, 2, 0)^T$

194.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3 \end{aligned}$$
$(-2, 0, 1, -1)^T$

195.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= -8 \end{aligned}$$
$(2, -2, 1, -1)^T$

196.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$
$(1, 2, 1, 3)^T$

V nasledujúcich príkladoch riešte slovné úlohy:

197. V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu a náklady na materiál pri výrobe dvoch modelov chladničiek, modelu A a modelu B.

model	**prac. sila**	**materiál**
A	80 €	120 €
B	100 €	160 €

Vypočítajte koľko chladničiek modelu A a koľko chladničiek modelu B je potrebné vyrobiť za týždeň, keď na pracovnú silu máme týždenne k dispozícii 3 000 €, na materiál 4 680 € a chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

A=15 kusov, B=18 kusov

198. V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu a náklady na materiál pri výrobe dvoch modelov DVD prehrávačov.

náklady	**A**	**B**
prac. sila	12 €	16 €
materiál	21 €	30 €

Vypočítajte koľko prehrávačov modelu A a koľko prehrávačov modelu B je potrebné vyrobiť za deň, keď na pracovnú silu máme denne k dispozícii 920 €, na materiál 1 680 € a chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

A=30 kusov, B=35 kusov

199. V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu a náklady na materiál pri výrobe dvoch modelov CD prehrávačov.

náklady	**A**	**B**
prac. sila	12 €	16 €
materiál	21 €	28 €

Vypočítajte koľko prehrávačov modelu A a koľko prehrávačov modelu B je potrebné vyrobiť za deň, keď na pracovnú silu máme denne k dispozícii 920 €, na materiál 1 610 € a chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

Systém rovníc má riešenie $(t,\ 230/4-3/4t)^T$, $t\in\langle 0,\ 76\rangle$.

200. V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu, náklady na materiál a náklady na reklamu pri výrobe troch modelov hodiniek.

model	**prac. sila**	**materiál**	**reklama**
A	10 €	15 €	5 €
B	8 €	6 €	2 €
C	12 €	16 €	8 €

a) Vypočítajte koľko kusov hodiniek modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď na pracovnú silu máme týždenne k dispozícii 620 €, na materiál 750 € a na reklamu 330 €, pričom chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

b) Ako by sa zmenila výroba, ak peniaze na reklamu využijeme na iný účel?

a) A=10 kusov, B=20 kusov, C=30 kusov.

b) Systém rovníc má riešenie $(-46+2{,}8t,\ t,\ 90-3t)^T$, $t\in\langle 17,\ 30\rangle$.

201. V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu, náklady na materiál a náklady na reklamu pri výrobe troch modelov fotoaparátov.

náklady	**A**	**B**	**C**
prac. sila	12 €	16 €	20 €
materiál	16 €	20 €	25 €
reklama	2 €	4 €	7 €

Vypočítajte koľko kusov fotoaparátov modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď na pracovnú silu máme týždenne k dispozícii 664 €, na materiál 845 € a na reklamu 177 €, pričom chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

A=15 kusov, B=14 kusov, C=13 kusov.

202. V tabuľke sú uvedené náklady na pracovnú silu, náklady na materiál a náklady na reklamu pri výrobe troch modelov videokamier.

náklady	**A**	**B**	**C**
prac. sila	12 €	16 €	20 €
materiál	16 €	20 €	24 €
reklama	2 €	4 €	6 €

Vypočítajte koľko kusov videokamier modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď na pracovnú silu máme týždenne k dispozícii 664 €, na materiál 832 € a na reklamu 164 €, pričom chceme využiť všetky na to vyhradené peniaze.

Systém rovníc má riešenie $(2+t,\ 40-2t,\ t)^T$, $t \in \langle 0,\ 20 \rangle$.

203. V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu postelí troch modelov A, B a C na jednotlivých výrobných oddeleniach.

model	**stolárske odd.**	**čalúnnické odd.**	**expedícia**
A	3,6 hod.	3,2 hod.	0,4 hod.
B	4,4 hod.	4,0 hod.	0,4 hod.
C	4,0 hod.	4,8 hod.	0,4 hod.

a) Vypočítajte koľko kusov postelí modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za mesiac, keď pre stolárske oddelenie máme mesačne k dispozícii 302 hodín, pre čalúnnické oddelenie 296 hodín a pre expedíciu 30 hodín, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.

b) Predpokladáme, že zo všetkých modelov sa spracuje rovnaký počet postelí na stolárskom oddelení, rovnaký počet na čalúnnickom oddelení a takisto rovnaký počet na expedícii. Vypočítajte tieto počty pre jednotlivé oddelenia, keď pre model A máme mesačne k dispozícii 63,2 hodín, pre model B 77,6 hodín a pre model C 80 hodín, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.

c) Ako by sa zmenila výroba v prípade **b)**, ak výrobu modelu A vynecháme?

d) Ako by sa zmenila výroba v prípade **a)**, ak výrobu modelu A vynecháme?

a) A=25 kusov, B=30 kusov, C=20 kusov.
b) Na stol. odd. po 10 kusov, na čalún. odd. po 8 kusov, na exped. po 4 kusy.
c) Systém rovníc má riešenie $(-6+2t, t, 260-32t)^T$, $t \in \langle 3, 8 \rangle$
d) Nemá riešenie.

204. V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu troch modelov taburetiek A, B a C na jednotlivých výrobných oddeleniach.

oddelenie	A	B	C
stolárske	1,5 hod.	1,0 hod.	1,2 hod.
čalúnnické	1,5 hod.	1,2 hod.	1,8 hod.
expedícia	0,2 hod.	0,2 hod.	0,3 hod.

a) Vypočítajte koľko kusov taburetiek modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za mesiac, keď pre stolárske oddelenie máme mesačne k dispozícii 145 hodín, pre čalúnnické oddelenie 183 hodín a pre expedíciu 29 hodín, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.
b) Predpokladáme, že zo všetkých modelov sa spracuje rovnaký počet taburetiek na stolárskom oddelení, rovnaký počet na čalúnnickom oddelení a takisto rovnaký počet na expedícii. Vypočítajte tieto počty pre jednotlivé oddelenia, keď pre model A máme denne k dispozícii 4,7 hodín, pre model B 3,6 hodín a pre model C 5,1 hodín, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.
c) Ako by sa zmenila výroba **a)**, ak vynecháme expedíciu?

a) A=30 kusov, B=40 kusov, C=50 kusov.
b) Na stol. odd po1 kuse, na čalún. odd. po 2 kusy, na exped. po 1 kuse.
c) Systém rovníc má riešenie $(-30+1.2t, 190-3t, t)^T$, $t \in \left\langle 25, \frac{190}{3} \right\rangle$.

205. V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu troch modelov A, B a C určitého výrobku na jednotlivých výrobných linkách.

linka	A	B	C
1.	40 min.	30 min.	25 min.
2.	25 min.	20 min.	20 min.
3.	10 min.	10 min.	5 min.

a) Vypočítajte koľko kusov výrobkov modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď pre 1. linku máme týždenne k dispozícii 4 500 minút, pre 2. linku 3 050 minút a pre 3. linku 1 200 minút, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.
b) Ako by sa zmenila výroba, ak odstavíme 3. linku?
c) Ako by sa zmenila výroba, ak odstavíme 2. linku?

a) A=50 kusov, B=50 kusov, C=40 kusov.
b) Systém rovníc má riešenie $(-30+2t, 190-3{,}5t, t)^T$, $t \in \langle 15, 54 \rangle$.
c) Systém rovníc má riešenie $(150-2t, t, 2t-60)^T$, $t \in \langle 30, 75 \rangle$.

206. V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu troch modelov A, B a C určitého výrobku na jednotlivých výrobných linkách.

model	**1. linka**	**2. linka**	**3. linka**
A	24 min.	48 min.	16 min.
B	16 min.	40 min.	12 min.
C	8 min.	24 min.	8 min.

a) Vypočítajte koľko kusov výrobkov modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za mesiac, keď pre 1. linku máme mesačne k dispozícii 8 080 minút, pre 2. linku 19 200 minút a pre 3. linku 6 160 minút, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.

b) Ako by sa zmenila výroba, ak odstavíme 3. linku?

a) A=150 kusov, B=180 kusov, C=200 kusov

b) Systém rovníc má riešenie $\left(210-\frac{1}{3}t,\, t,\, 380-t\right)^T$, $t\in\langle 0,\,380\rangle$.

3 LIMITA A SPOJITOSŤ FUNKCIE

3.1 Riešené úlohy

LIMITA FUNKCIE

Pri počítaní limít bez použitia derivácií postupujeme takto:
- zistíme typ neurčitosti (typ limity),
- vhodnou úpravou odstránime neurčitosť,
- dosadením limitu vypočítame.

Príklad 3.1 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

Riešenie:

Po dosadení $x=2$ do funkcie zistíme, že sa jedná o neurčitosť typu $\dfrac{0}{0}$, to znamená, že číslo $x=2$ je koreňom polynómu v čitateli aj v menovateli. V takomto prípade predelíme aj čitateľa aj menovateľa výrazom $(x-2)$, potom

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x-10)}=\frac{-1}{-8}=\frac{1}{8}.$$

Príklad 3.2 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

Riešenie:

Po dosadení $x=0$ do funkcie zistíme, že sa jedná o neurčitosť typu $\dfrac{0}{0}$, ale pri počítaní takejto limity je vhodná úprava tzv. násobenie „vhodnou jednotkou“, v našom prípade v tvare $\dfrac{\sqrt{1+3x}+1}{\sqrt{1+3x}+1}$. Táto úprava využitím vzťahu $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ odstráni odmocninu v menovateli.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+3x}+1}{\sqrt{1+3x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+3x}+1)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Príklad 3.3 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Riešenie:

V prípadoch, keď počítame limitu funkcie, v ktorej vystupuje goniometrická funkcia a typ neurčitosti $\frac{0}{0}$, využijeme zväčša vzorec $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Našou úlohou je funkciu najprv vhodne upraviť (násobiť „vhodnou jednotkou"), aby sme mohli uvedený vzorec použiť.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Príklad 3.4 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-5}{3x^2+6x+2}$.

Riešenie:

Počítame limitu neurčitosti typu $\frac{\infty}{\infty}$, kde sa najčastejšie využíva úprava „delenie čitateľa aj menovateľa s najvyššou mocninou x v menovateli".

V tomto prípade je v menovateli najvyššou mocninou x^2. Preto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5}{3x^2+6x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{5}{x^2}}{3+\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{2-0}{3+0+0} = \frac{2}{3}.$$

Príklad 3.5 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-5}{3x^4+6x+2}$.

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade, ale čitateľa a menovateľa funkcie delíme x^4.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5}{3x^4+6x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^4}}{3+\frac{6}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = \frac{0-0}{3+0+0} = 0.$$

Príklad 3.6 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^6+10x^2+5}{100x^3-2}$.

Riešenie:

Tak, ako v oboch predchádzajúcich príkladoch, aj tu riešime limitu funkcie s neurčitosťou $\frac{\infty}{\infty}$, ale čitateľa a menovateľa funkcie delíme x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^6+10x^2+5}{100x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}}{100-\frac{2}{x^3}}=\frac{\infty+0+0}{100-0}=\infty\,.$$

Príklad 3.7 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{4x-3}$.

Riešenie:

Po dosadení zistíme, že táto limita je typu 1^{∞}. Pri počítaní takýchto limít využijeme vzťah $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{1}$, resp. jeho zovšeobecnenie $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$, $k\in\mathbf{R}$.

Našou úlohou je teda upraviť výraz v limite tak, aby sme mohli použiť uvedený vzorec.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{4x-3}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x\left(1+\frac{1}{3x}\right)}{3x\left(1-\frac{2}{3x}\right)}\right]^{4x-3}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{3x}\right)}{\left(1-\frac{2}{3x}\right)}\right]^{4x-3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}\right]^{4}\cdot\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{-3}}{\left[\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{x}\right]^{4}\cdot\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{x}\right)^{n}\right]^{4}\cdot 1}{\left[\left(1-\frac{\frac{2}{3}}{x}\right)^{n}\right]^{4}\cdot 1}=\frac{\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^{4}}{\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)^{4}}=e^{4}.$$

SPOJITOSŤ FUNKCIE

Bod nespojitosti prvého druhu je taký bod nespojitosti funkcie, v ktorom jednostranné limity funkcie existujú a sú konečné (vlastné čísla).

Bod nespojitosti druhého druhu je taký bod nespojitosti funkcie, v ktorom aspoň jedna jednostranná limita funkcie je nevlastná alebo neexistuje.

Príklad 3.8 Nájdime body nespojitosti funkcie $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$ a určme, o aký typ nespojitosti ide.

Riešenie:

Jedná sa o racionálnu funkciu, body nespojitosti sú body, v ktorých menovateľ je rovný nule.

$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2$

Pretože $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x-3}{x-2} = \dfrac{5}{4}$ aj

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x-3}{x-2} = \dfrac{5}{4}$,

bod $x_1 = -2$ je bodom nespojitosti prvého druhu.

Pretože $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-3}{x-2} = +\infty$ a

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-3}{x-2} = -\infty$,

bod $x_1 = 2$ je bodom nespojitosti druhého druhu.

Príklad 3.9 Nájdime také hodnoty konštanty A, aby funkcia $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & x < -1 \\ Ax + 11 & x \geq -1 \end{cases}$ bola spojitá na celom definičnom obore.

Riešenie:

Ak je funkcia v bode spojitá zľava aj sprava, je v tomto bode spojitá. Vypočítame jednostranné limity v bode $x = -1$ a dáme ich do rovnosti,

$-2 \cdot (-1) + 4 = A \cdot (-1) + 11$,

odkiaľ dostaneme $A = 5$.

ASYMPTOTY GRAFU FUNKCIE

Ak je x_0 bod nespojitosti funkcie, stačí, aby aspoň jedna z jednostranných limít v bode x_0 bola nevlastné číslo $+\infty$ alebo $-\infty$ a priamka $x = x_0$ bude asymptota bez smernice (ABS) grafu funkcie.

Asymptota so smernicou (ASS) pre $x \to \infty$ je priamka $y = k_1 x + q_1$, ktorej koeficienty $k_1 = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ a $q_1 = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - k_1 x]$ musia byť vlastné čísla.

Asymptota so smernicou (ASS) pre $x \to -\infty$ je priamka $y = k_2 x + q_2$, ktorej koeficienty $k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ a $q_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x]$ musia byť vlastné čísla.

Príklad 3.10 Nájdime všetky asymptoty ku grafu funkcie $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$.

Riešenie:

Bod nespojitosti je bod $x_0 = -1$ a jednostranné limity v ňom sú

$\lim\limits_{x\to 1^+} = \dfrac{x^2+2}{x-1} = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^-} = \dfrac{x^2+2}{x-1} = -\infty$.
Obe sú nevlastné čísla, preto asymptota bez smernice (ABS) je priamka $x=1$.

Pri hľadaní asymptoty so smernicou (ASS) počítame koeficienty

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x(x-1)} = 1,$$

$$q_1 = \lim_{x\to\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$$

a koeficienty

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x(x-1)} = 1,$$

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2+2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1.$$

Pretože $k_1 = k_2 = 1$ a $q_1 = q_2 = 1$, ASS je jediná a je to priamka $y = x+1$.

3.2 Neriešené úlohy

V nasledujúcich úlohách vypočítajte limity funkcií, ak existujú:

		Výsledky:
1.	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x^2-3}$	9
2.	$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4} + 1\right)$	$\dfrac{3}{4}$
3.	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$	4
4.	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$	0
5.	$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$	-2
6.	$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+6x+5}$	$-\dfrac{1}{2}$
7.	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x-12}$	$\dfrac{3}{4}$
8.	$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$	$-\dfrac{2}{5}$
9.	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$	$\dfrac{1}{2}$

10.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
11.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$	$\dfrac{1}{4}$
12.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$	0
13.	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$	$\dfrac{1}{4}$
14.	$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{36-x^2}{\sqrt{3+x}-3}$	-72
15.	$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{49-x^2}{1-\sqrt{8-x}}$	-28
16.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$	$-\dfrac{1}{3}$
17.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$	3
18.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$	3
19.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{x}$	5
20.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$	$\dfrac{2}{3}$
21.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}$	$\dfrac{11}{3}$
22.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{\sin 5x}$	$\dfrac{2}{5}$
23.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\mathrm{tg}6x}$	$\dfrac{5}{6}$
24.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x.\sin x}$	2
25.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$	1
26.	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\mathrm{tg}x}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
27.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$	0
28.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4-5x}{10x^2-3x+1}$	∞
29.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$	$\dfrac{1}{2}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$ -1

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$ 0

32. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$ 0

33. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ 0

34. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$ $\dfrac{5}{2}$

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2}}{3x}$ $\dfrac{2}{3}$

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{16x^4+5x}}{10x^2-3x+1}$ $\dfrac{2}{5}$

37. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{9x^2-1}}$ 1

38. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x}}{\sqrt{9x^2-12}}$ $\dfrac{2}{3}$

39. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ e^2

40. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$ e^{-3}

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+3}\right)^x$ e^2

42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+1}\right)^{x-1}$ e^{-3}

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x+2}\right)^{2x}$ e^{-1}

44. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x$ e^{-1}

45. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$ e^{-2}

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x-1}$ e

47. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^2+1}$ e^{-1}

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^{\frac{x}{2}}$ $e^{-\frac{1}{2}}$

49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{2x-1}\right)^{x}$ $\quad 0$

50. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{4x-3}\right)^{x-1}$ $\quad 0$

51. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{2x}\right)^{x}$ $\quad \infty$

52. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2-5}{2x^2-1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ $\quad \infty$

V nasledujúcich úlohách nájdite body nespojitosti (BN) funkcie a na základe jednostranných limít v bodoch nespojitosti určte, o aký typ nespojitosti ide:

53. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ $\quad x=2$ je BN 1.druhu

54. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ $\quad x=1$ je BN 1.druhu

$x=0,\ x=-1$
sú BN 2.druhu

55. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$ $\quad x=3$ je BN 1.druhu

$x=4$ je BN 2.druhu

56. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+6x+5}$ $\quad x=-1$ je BN 1.druhu

$x=-5$ je BN 2.druhu

57. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x-12}$ $\quad x=2$ je BN 1.druhu

$x=-6$ je BN 2.druhu

58. $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ $\quad x=-2$ je BN 1.druhu

$x=3$ je BN 2.druhu

59. $f(x)=\dfrac{(x-1)(2x+3)}{x^2-1}$ $\quad x=1$ je BN 1.druhu

$x=-1$ je BN 2.druhu

60. $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-3)}{x^2-x-2}$ $\quad x=-1$ je BN 1.druhu

$x=2$ je BN 2.druhu

61. $f(x)=\dfrac{x^2+4x}{x^2+2x-8}$ $\quad x=-4$ je BN 1.druhu

$x=2$ je BN 2.druhu

V nasledujúcich úlohách nájdite také hodnoty konštanty A, aby daná funkcia bola spojitá na celom definičnom obore:

62. $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x<2 \\ Ax+3 & x\geq 2 \end{cases}$ $A=1$

63. $f(x)=\begin{cases} Ax+2 & x<-1 \\ -2x+5 & x\geq -1 \end{cases}$ $A=$ -5

64. $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & x<1 \\ 3x-A & x\geq 1 \end{cases}$ $A=5$

65. $f(x)=\begin{cases} Ax^2+x-1 & x<1 \\ 2x & x\geq 1 \end{cases}$ $A=2$

66. $f(x)=\begin{cases} x^2-Ax+1 & x<2 \\ 2x-3 & x\geq 2 \end{cases}$ $A=2$

67. $f(x)=\begin{cases} 7-x & x<0 \\ x^2+A & x\geq 0 \end{cases}$ $A=7$

V nasledujúcich úlohách nájdite všetky asymptoty (bez smernice aj so smernicou) ku grafu danej funkcie a načrtnite ich:

68. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ **ABS:** $x=2$ **ASS:** $y=x+2$

69. $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$ **ABS:** $x=-2$ **ASS:** $y=-x+2$

70. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ **ABS:** $x=0$ **ASS:** $y=x$

71. $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ **ABS:** $x=0$ **ASS:** neex.

72. $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ **ABS:** $x=1$ **ASS:** $y=0$

73. $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ **ABS:** $x=0$ **ASS:** $y=x$

74. $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$ **ABS:** $x=\pm 2$ **ASS:** $y=-1$

75. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ **ABS:** $x=\pm 1$ **ASS:** $y=0$

76. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$ **ABS:** neex. **ASS:** $y=1$

77. $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ **ABS:** $x=-1$ **ASS:** $y=\dfrac{1}{2}x-1$

4 DERIVÁCIA FUNKCIE

4.1 Riešené úlohy

DERIVÁCIA FUNKCIE

Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú v bode x_0 derivácie $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$, nech $c \in \mathbf{R}$. Potom funkcie cf, $f+g$, fg a ak $g(x_0) \neq 0$, tak aj funkcia $\frac{f}{g}$ majú derivácie v bode x_0 pre ktoré platí:

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$,
- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

Nech funkcia $f(g(x))$ je definovaná v okolí bodu x_0. Nech funkcia g má v bode x_0 deriváciu $g'(x_0)$ a funkcia f má v bode $g(x_0)$ deriváciu $f'(g(x_0))$. Potom má funkcia $f(g(x))$ deriváciu v bode x_0 $[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Základné vzorce pre výpočet derivácie platné na množine, kde derivácie existujú:

$(a)' = 0$,	$a \in \mathbf{R}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$a \in \mathbf{R}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
$(e^x)' = e^x$	
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
$(\sin x)' = \cos x$	
$(\cos x)' = -\sin x$	
$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
$(\mathrm{cotg}\, x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	

Príklad 4.1 Vypočítajme deriváciu funkcie $f(x) = x^5 + x^{\frac{7}{3}} - 2$.

Riešenie:

$$f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} + \frac{7}{3} \cdot x^{\frac{7}{3}-1} - 0 = 5x^4 + \frac{7}{3} x^{\frac{4}{3}} = 5x^4 + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}\ .$$

Príklad 4.2 Vypočítajme deriváciu funkcie $f(x) = \sqrt[3]{x} + e^x + 5 \cdot 4^x - \log_2 x$.

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} + e^x + 5 \cdot 4^x \cdot \ln 4 - \frac{1}{x \ln 2} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + e^x + 5 \cdot 4^x \cdot \ln 4 - \frac{1}{x \ln 2} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + e^x + 5 \cdot 4^x \cdot \ln 4 - \frac{1}{x \ln 2}.$$

Príklad 4.3 Vypočítajme deriváciu funkcie $f(x) = e^x \cdot \sin x$.

Riešenie:
Funkcia f je v tvare súčinu

$$f'(x) = (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

Príklad 4.4 Vypočítajme deriváciu funkcie $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Riešenie:

Funkcia f je v tvare podielu

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{tg} x)' \cdot x - \operatorname{tg} x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x - \operatorname{tg} x \cdot 1}{x^2} = \frac{x - \cos x \cdot \sin x}{x^2 \cdot \cos^2 x}$$

Príklad 4.5 Vypočítajme deriváciu funkcie $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Riešenie:

Funkciu vyjadríme v tvare $f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ a potom použijeme vzorec pre deriváciu zloženej funkcie

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Príklad 4.6 Vypočítajme deriváciu funkcie $f(x)=\sin^2 x^5$.

Riešenie:

Funkciu upravíme na tvar $f(x)=(\sin x^5)^2$ a znova použijeme vzorec pre deriváciu zloženej funkcie

$$f'(x)=2(\sin x^5)^{2-1}\cdot(\sin x^5)'=2(\sin x^5)(\cos x^5)\cdot(x^5)'=2(\sin x^5)(\cos x^5)5x^{5-1}=$$
$$=2(\sin x^5)(\cos x^5)5x^4=10x^4(\sin x^5)(\cos x^5).$$

Príklad 4.7 Vypočítajme deriváciu funkcie $f(x)=(x^2+1)^{\sin x}$.

Riešenie:

Funkciu upravíme na tvar $f(x)=e^{\sin x\cdot\ln(x^2+1)}$ a derivujeme ju ako zloženú funkciu

$$f'(x)=e^{\sin x\cdot\ln(x^2+1)}\cdot[\sin x\cdot\ln(x^2+1)]'=$$
$$=e^{\sin x\cdot\ln(x^2+1)}\cdot[(\sin x)'\cdot\ln(x^2+1)+\sin x\cdot(\ln(x^2+1))']=$$
$$=(x^2+1)^{\sin x}(\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\sin x\cdot\frac{2x}{x^2+1})=$$
$$=(x^2+1)^{\sin x}(\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}).$$

DOTYČNICA A NORMÁLA KU GRAFU FUNKCIE

Derivácia funkcie $y=f(x)$ v bode x_0 je smernica k_t dotyčnice ku grafu tejto funkcie v dotykovom bode $T[x_0,y_0]$, čiže $k_t=f'(x_0)$ a smernica normály je $k_n=-\frac{1}{f'(x_0)}$.

Rovnica dotyčnice je $t: y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Rovnica normály, ak $f'(x_0)\neq 0$ je $n: y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Príklad 4.8 Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)=x^2+1$ v bode $T=[1,?]$.

Riešenie:

Najprv vypočítame y- ovú súradnicu dotykového bodu T. Keďže bod T je dotykový, leží teda na parabole danej funkciou $f(x)=x^2+1$, y- ová súradnica je vlastne funkčná hodnota $f(1)=2$.

Bod $T=[1,2]$.

Do rovnice dotyčnice potrebujeme dosadiť aj smernicu, čiže

$$f'(x_0) = f'(1) = [2x]_{x_0=1} = 2\,.$$

Rovnica dotyčnice t je

$$y - 2 = 2(x-1)$$
$$2x - y = 0.$$

Rovnica normály n je

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1)$$
$$x + 2y - 5 = 0.$$

L´HOSPITALOVA VETA

Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$ a nech existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje aj $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Pre výpočet limít s neurčitosťou $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$ použijeme priamo toto pravidlo.

Pri neurčitostiach ostatných typov $0\cdot\infty, \infty - \infty$ je potrebné funkciu upraviť na neurčitosť typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.

I. Ak počítame limitu s neurčitosťou $0\cdot\infty$, čiže počítame $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$, aby sme dostali neurčitosť typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$, upravíme ju takto:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{alebo} \quad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\,.$$

II. Ak počítame limitu s neurčitosťou $\infty - \infty$, teda počítame $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$ a pritom je možná úprava na spoločného menovateľa, po jej použití dostaneme limitu s neurčitosťou $\frac{0}{0}$.

Príklad 4.9 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x}$.

Riešenie:

Po dosadení $x = 0$ dostaneme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, takže priamo použijeme L´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1} = 0.$$

Príklad 4.10 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+x}$.

Riešenie:

V tomto prípade je to neurčitosť typu $\frac{\infty}{\infty}$ a opäť použijeme L´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)'}{(2x^2+x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x+1}.$$

Po dosadení dostaneme znova neurčitosť typu $\frac{\infty}{\infty}$ a opäť môžeme použiť L´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)'}{(2x^2+1)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(4x+1)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Príklad 4.11 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$.

Riešenie:

Počítame s neurčitosťou typu $0\cdot(-\infty)$, postupujeme ako v I.

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Príklad 4.12 Vypočítajme $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

Riešenie:

Počítame s neurčitosťou typu $\infty-\infty$, postupujeme ako v II.

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x-x}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}\right)=$$
$$=\frac{0}{2}=0\,.$$

4.2 Neriešené úlohy

V nasledujúcich úlohách nájdite derivácie funkcií:

Výsledky:

1. $f(x)=x^5-7x^2+3x-5$ — $5x^4-14x+3$

2. $f(x)=2x^8+5x^{-4}+6x^{2/3}+4x^{-3/2}$ — $16x^7-\dfrac{20}{x^5}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{6}{\sqrt{x^5}}$

3. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^3}}$ — $-\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

4. $f(x)=e^x+5^x-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+\dfrac{5^x}{2^x}$ — $e^x+5^x\cdot\ln5-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\ln\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{5}{2}\right)^x\cdot\ln\dfrac{5}{2}$

5. $f(x)=\ln x+\log_2 x-\log_{\frac{3}{4}} x$ — $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\ln2}-\dfrac{1}{x\ln\frac{3}{4}}$

6. $f(x)=2\sin x-3\cos x+\mathrm{tg}\,x-\mathrm{cotg}\,x$ — $2\cos x+3\sin x+\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}$

7. $f(x)=(x^5+2x+1)(x^4-7x^2+3x)$

$(5x^4+2)(x^4-7x^2+3x)+(x^5+2x+1)(4x^3-14x+3)$

8. $f(x)=(5x^2+12x-3)(2x^2-x-3)$

$(10x+12)(2x^2-x-3)+(5x^2+12x-3)(4x-1)$

9. $f(x)=(x^3+1)\,e^x$ — $(x^3+3x^2+1)\,e^x$

10. $f(x)=(x^2-1)\sin x$ — $2x\sin x+(x^2-1)\cos x$

11. $f(x)=(x^3-x+1)\cos x$ — $(3x^2-1)\cos x-(x^3-x+1)\sin x$

12. $f(x)=(2-5x)\,\mathrm{tg}\,x$ — $-5\,\mathrm{tg}\,x+\dfrac{2-5x}{\cos^2 x}$

13. $f(x)=(3+x-2x^2)\,\mathrm{cotg}\,x$ — $(1-4x)\,\mathrm{cotg}\,x-\dfrac{3+x-2x^2}{\sin^2 x}$

14. $f(x)=2^x\log_2 x$ — $2^x\left(\ln2\cdot\log_2 x+\dfrac{1}{x\ln2}\right)$

15.	$f(x) = x10^{-x}$	$10^{-x}(1 - x\ln 10)$
16.	$f(x) = \dfrac{x+4}{x+1}$	$-\dfrac{3}{(x+1)^2}$
17.	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+10}$	$\dfrac{x^2 + 20x + 1}{(x+10)^2}$
18.	$f(x) = \dfrac{2x-5}{2x^2 - x}$	$\dfrac{-4x^2 + 20x - 5}{(2x^2 - x)^2}$
19.	$f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 2}{x^2 - 5x + 1}$	$\dfrac{-10x^2 - 2x + 15}{(x^2 - 5x + 1)^2}$
20.	$f(x) = \dfrac{\sin x}{x-1}$	$\dfrac{(x-1)\cos x - \sin x}{(x-1)^2}$
21.	$f(x) = \dfrac{\mathrm{tg} x}{x}$	$\dfrac{1}{x\cos^2 x} - \dfrac{\mathrm{tg} x}{x^2}$
22.	$f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$	$\dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$
23.	$f(x) = e^{\mathrm{tg}\, x}$	$\dfrac{e^{\mathrm{tg}\, x}}{\cos^2 x}$
24.	$f(x) = e^{2x+4}$	$2e^{2x+4}$
25.	$f(x) = e^{\cos 3x}$	$-3(\sin 3x) \cdot e^{\cos 3x}$
26.	$f(x) = \ln \sin 2x$	$2\mathrm{cotg} 2x$
27.	$f(x) = \ln(x^3 + 4x^2)$	$\dfrac{3x^2 + 8x}{x^3 + 4x^2}$
28.	$f(x) = \ln \dfrac{5+4x}{3+7x}$	$\dfrac{-23}{28x^2 + 47x + 15}$
29.	$f(x) = \log 5^x$	$\dfrac{\ln 5}{\ln 10}$
30.	$f(x) = \log_2(\cos x)$	$-\dfrac{\mathrm{tg} x}{\ln 2}$

31. $f(x)=(x^2+2x+2^x)^{20}$ $\qquad$ $20(x^2+2x+2^x)^{19}(2x+2+2^x\ln 2)$

32. $f(x)=\left(\dfrac{10-x^2}{x+2}\right)^6$ $\qquad$ $-6\left(\dfrac{10-x^2}{x+2}\right)^5\dfrac{x^2+4x+10}{(x+2)^2}$

33. $f(x)=\sin^3(\ln x)$ $\qquad$ $3\dfrac{\sin^2(\ln x)\cdot\cos(\ln x)}{x}$

34. $f(x)=\ln^2(1+\cos 5x)$ $\qquad$ $-10\dfrac{\sin 5x}{1+\cos 5x}\ln(1+\cos 5x)$

35. $f(x)=\sqrt{1+2\mathrm{tg}x}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\mathrm{tg}x}}$

36. $f(x)=\sqrt{\sin\dfrac{2x}{3}}$ $\qquad$ $\dfrac{\cos\dfrac{2x}{3}}{3\sqrt{\sin\dfrac{2x}{3}}}$

37. $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2x+x+\mathrm{tg}x$ $\qquad$ $\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}+1$

38. $f(x)=\sin\sqrt{1+x^2}+\sin(\sin x)$ $\qquad$ $\dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}+\cos x\cdot\cos(\sin x)$

39. $f(x)=\ln^4\sin x+\ln(x^2-2x)$ $\qquad$ $4\mathrm{cotg}x\cdot\ln^3\sin x+\dfrac{2x-2}{x^2-2x}$

40. $f(x)=\sqrt[3]{\ln\sin\dfrac{x}{2}}$ $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{cotg}\dfrac{x}{2}}{6\cdot\sqrt[3]{\left(\ln\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}}$

41. $f(x)=x^x$ $\qquad$ $x^x(1+\ln x)$

42. $f(x)=x^{\sin x}$ $\qquad$ $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

43. $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$ $\qquad$ $(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\cdot\ln\sin x\right)$

44. $f(x)=x^{\ln x}$ $\qquad$ $2x^{\ln x-1}\ln x$

45. $f(x)=(\sin x)^x$ $\qquad (\sin x)^x(\ln\sin x + x\operatorname{cotg}x)$

46. $f(x)=\sqrt[x]{x}$ $\qquad \sqrt[x]{x}\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)$

47. $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}$ $\qquad \dfrac{1-x^2}{x^4}+\dfrac{x}{1+x^2}$

48. $f(x)=\ln\cos\left(\operatorname{tg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$ $\qquad -\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\dfrac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\mathrm{e}^x-e^{-x}}{2}\right)}{\cos^2\dfrac{\mathrm{e}^x-e^{-x}}{2}}$

49. $f(x)=x(\sin x)^2-2x$ $\qquad (\sin x)^2+x\sin 2x-2$

50. $f(x)=2\sqrt{1-x^2}\cdot\sin x$ $\qquad -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\sin x+2\sqrt{1-x^2}\cdot\cos x$

51. $f(x)=\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1}$ $\qquad \dfrac{x^2-6x+1}{2(x^4-1)}$

V nasledujúcich úlohách nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$ v dotykovom bode $T[x_0, y_0]$:

52. $f(x)=x^3-2x$, $T[1,?]$ $\qquad t: x-y-2=0$, $n: x+y=0$

53. $f(x)=x^2-7x+4$, $T[1,?]$ $\qquad t: 5x+y-3=0$, $n: x-5y-11=0$

54. $f(x)=x^3+9x+2$, $T[0,?]$ $\qquad t: 9x-y+2=0$, $n: x+9y-18=0$

55. $f(x)=\sqrt{x^3}$, $T[1,?]$ $\qquad t: 3x-2y-1=0$, $n: 2x+3y-5=0$

56. $f(x)=\sqrt{2x}$, $T\left[\dfrac{1}{2},?\right]$ $\qquad t: 2x-2y+1=0$, $n: 2x+2y-3=0$

57. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, $T[0,?]$ $\qquad t: 2x-y+1=0$, $n: x+2y-2=0$

58. $f(x)=2x\ln x$, $T[1,?]$ $\qquad t: 2x-y-2=0$, $n: x+2y-1=0$

59. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $T[1,?]$ $\qquad t: x-y-1=0$, $\quad n: x+y-1=0$

60. $f(x)=\dfrac{e^x}{2}+1$, $T[0,?]$ $\qquad t: x-2y+3=0$, $\quad n: 4x+2y-3=0$

61. $f(x)=2\sqrt{2}\sin x$, $T\left[\dfrac{\pi}{4},?\right]$ $\qquad t: 4x-2y+4-\pi=0$, $\quad n: 4x+8y-16-\pi=0$

V nasledujúcich úlohách nájdite druhú deriváciu funkcií:

62. $f(x)=x^5-7x^2+3x-5$ $\qquad 20x^3-14$

63. $f(x)=2x^8+5x^{-4}+6x^{2/3}+4x^{-3/2}$ $\qquad 112x^6+\dfrac{100}{x^6}-\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}+\dfrac{15}{\sqrt{x^7}}$

64. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^3}}$ $\qquad \dfrac{12}{x^5}-\dfrac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{3}{4\sqrt{x^5}}$

65. $f(x)=e^x+5^x-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+\dfrac{5^x}{2^x}$ $\qquad e^x+5^x\cdot\ln^2 5-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\ln^2\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{5}{2}\right)^x\cdot\ln^2\dfrac{5}{2}$

66. $f(x)=\ln x+\log_2 x-\log_{\frac{3}{4}} x$ $\qquad -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2\ln 2}+\dfrac{1}{x^2\ln\frac{3}{4}}$

67. $f(x)=2\sin x-3\cos x+\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x$

$$-2\sin x+3\cos x+\frac{2\sin x}{\cos^3 x}-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

68. $f(x)=(x^5+2x+1)\,x^4$ $\qquad 72x^7+40x^3+12x^2$

69. $f(x)=(x^3+1)\,e^x$ $\qquad (x^3+6x^2+6x+1)\,e^x$

70. $f(x)=(x^2-1)\sin x$ $\qquad 2\sin x+4x\cos x-(x^2-1)\sin x$

71. $f(x)=(x^3-x+1)\cos x$ $\qquad 6x\cos x-2(3x^2-1)\sin x-(x^3-x+1)\cos x$

72. $f(x)=x10^x$ $\qquad 2\cdot 10^x\cdot\ln x+x10^x\cdot\ln^2 10$

73. $f(x)=\dfrac{x+4}{x+1}$ $\qquad \dfrac{6}{(x+1)^3}$

74. $f(x)=e^{\operatorname{tg} x}$ $\qquad \dfrac{1+\sin 2x}{\cos^4 x}e^{\operatorname{tg} x}$

75. $f(x)=e^{2x+4}$ $\qquad 4e^{2x+4}$

76. $f(x)=e^{\cos 3x}$ $\qquad 9(\sin^2 x-\cos x)\,e^{\cos 3x}$

77. $f(x)=\ln\sin 2x$ $\qquad -\dfrac{4}{\sin^2 2x}$

78. $f(x)=\ln(x^3+4x^2)$ $\qquad -\dfrac{3x^2+16x+32}{(x^2+4x)^2}$

79. $f(x)=\ln\dfrac{5+4x}{3+7x}$ $\qquad \dfrac{23(56x+47)}{(28x^2+47x+15)^2}$

80. $f(x)=\log 5^x$ $\qquad 0$

V nasledujúcich úlohách vypočítajte limity pomocou L´Hospitalovho pravidla:

81. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ $\qquad 4$

82. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ $\qquad 0$

83. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$ $\qquad -2$

84. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+6x+5}$ $\qquad -\dfrac{1}{2}$

85. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x-12}$ $\qquad \dfrac{3}{4}$

86. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ $\qquad -\dfrac{2}{5}$

87. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$ $\qquad 2$

88. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ $\qquad 3$

89. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{x}$ $\qquad 5$

90. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$ $\qquad \dfrac{2}{5}$

91.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\mathrm{tg}6x}$	$\dfrac{5}{6}$
92.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$	$\dfrac{2}{3}$
93.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}$	$\dfrac{11}{3}$
94.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$	$\dfrac{1}{6}$
95.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x.\sin x}$	2
96.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$	1
97.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 2^x}{2^x-1}$	$\dfrac{1}{\ln 2}$
98.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-3^x}{x}$	$\ln 2$
99.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{x^2}$	$-\dfrac{3}{2}$
100.	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\mathrm{tg}x}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
101.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$	1
102.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-2x-1}{\sin 3x}$	$\dfrac{2}{3}$
103.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$	0
104.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4-5x}{10x^2-3x+1}$	∞
105.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$	$\dfrac{1}{2}$
106.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$	-1
107.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^2}$	∞
108.	$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\mathrm{cotg}x}$	0
109.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0
110.	$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$	$\dfrac{4}{9}$

111. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \dfrac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\mathrm{tg}x}$ $\qquad 0$

112. $\lim\limits_{x\to 1+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ $\qquad \dfrac{1}{2}$

113. $\lim\limits_{x\to 1+}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$ $\qquad -1$

114. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad 0$

115. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$ $\qquad -\infty$

116. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ $\qquad \dfrac{1}{2}$

117. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$ $\qquad 0$

118. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$ $\qquad \infty$

119. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{4}$ $\qquad -\dfrac{4}{\pi}$

5 APLIKÁCIE DERIVÁCIE V EKONÓMII

5.1 Riešené úlohy

DERIVÁCIA A DIFERENCIÁL V APLIKAČNÝCH ÚLOHÁCH

Výraz $df(x_0) = f'(x_0)\cdot \Delta x$ nazývame diferenciálom funkcie $f(x)$ v bode x_0 pre prírastok $\Delta x = x - x_0$.

Keďže $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, tak $f'(x_0) \doteq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, z čoho vyplýva, že $f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x$.

Posledný uvedený vzťah sa často využíva na približný výpočet hodnoty funkcie pomocou diferenciálu.

Príklad 5.1 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 120\cdot L^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 900 hodín. Odhadnime pomocou diferenciálu, o koľko jednotiek sa zmení denná produkcia, ak:

a) Zvýšime počet pracovných hodín na 930.

b) Znížime počet pracovných hodín na 860.

Riešenie:
Odhad zmeny produkcie je vlastne rozdiel $Q(L) - Q(L_0) \doteq dQ(L_0) = Q'(L_0)\cdot \Delta L$, pričom $Q'(L) = 60\cdot L^{-\frac{1}{2}}$

a) $L_0 = 900$ hodín, $L = 930$ hodín a $\Delta L = L - L_0 = 30$ hodín,

$$Q(930) - Q(900) \doteq dQ(900) = Q'(900)\cdot \Delta L = \frac{60}{\sqrt{900}}\cdot 30 = 60.$$

Denná produkcia sa zvýši asi o 60 jednotiek.

b) $L_0 = 900$ hodín, $L = 860$ hodín a $\Delta L = L - L_0 = -40$ hodín.

$$Q(860) - Q(900) \doteq dQ(900) = Q'(900)\cdot \Delta L = \frac{60}{\sqrt{900}}\cdot (-40) = -80.$$

Denná produkcia sa zníži asi 80 jednotiek.

Príklad 5.2 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 120\cdot L^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii

900 hodín. Odhadnime pomocou diferenciálu, o koľko sa musí zmeniť počet hodín, aby sa denná produkcia zvýšila o 160 jednotiek.

Riešenie:
Postupujeme podobne ako v Príklade 5.1.

$Q(L)-Q(L_0)=160$ a $L_0=900$ hodín

Zo vzťahu $Q(L)-Q(L_0)\doteq Q'(L_0)\cdot\Delta L$ je potrebné vyjadriť a vypočítať $\Delta L \doteq \dfrac{Q(L)-Q(L_0)}{Q'(L_0)}=\dfrac{160}{60}\cdot\sqrt{900}=80$.

Aby sa denná produkcia zvýšila o 160 jednotiek, je potrebné počet hodín zvýšiť asi o 80.

MARGINÁLNA VELIČINA

Marginálnou veličinou veličiny $f(x)$ nazývame jej deriváciu $f'(x)$. Ak vo vzorci pre približný výpočet pomocou diferenciálu je $\Delta x=1$, potom $f(x+1)-f(x)\doteq f'(x)$, teda marginálna veličina približne predstavuje prírastok celkovej veličiny pripadajúci na jednotkový prírastok objemu činnosti z hodnoty x na hodnotu $x+1$.

Príklad 5.3 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L)=120\cdot L^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 900 hodín. Použime marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 pracovná hodina navyše.

Riešenie:
V tomto prípade je $\Delta L=1$ a $L=900$, môžeme použiť vzťah $Q(L+1)-Q(L)\doteq Q'(L)$.

$$Q(L+1)-Q(L)\doteq Q'(L)=\frac{60}{\sqrt{900}}=2.$$

Ak zvýšime počet pracovných hodín o 1 hodinu denne, denná produkcia podniku sa zvýši približne o 2 jednotky.

Príklad 5.4 Predpokladajme, že celkové náklady na produkciu x výrobkov sú dané funkciou $C(x)=2x^2-3x+260$ eur. Odhadnime náklady na výrobu 90. výrobku.

Riešenie:
$C'(x)=4x-3$

Zaujíma nás rozdiel $C(90)-C(89)$, ktorý vieme približne vypočítať takto:

$C(90)-C(89)\doteq C'(89)=4\cdot 89-3=353$.

Náklady na výrobu 90. výrobku sú teda asi 353 eur.

ELASTICITA FUNKCIE

Číslo $\eta(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$ nazývame elasticitou funkcie $f(x)$.

Ak $\eta(f(x)) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$, potom zvýšením (znížením) hodnoty argumentu x o 1%, narastie (klesne) hodnota funkcie f o $\eta(f(x))$%.

Ak $\eta(f(x)) < 0$ pre $x \in (0, \infty)$, potom zvýšením (znížením) hodnoty argumentu x o 1%, klesne (narastie) hodnota funkcie f o $|\eta(f(x))|$%.

Príklad 5.5 Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 120 \cdot L^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. O koľko percent vzrastie produkcia, ak sa veľkosť pracovnej sily zvýši o 1% ?

Riešenie:

V tejto úlohe počítame vlastne elasticitu funkcie $Q(L) = 120 \cdot L^{\frac{1}{2}}$.

Elasticita je $\eta(Q(L)) = \frac{Q'(L)}{Q(L)} \cdot L = \frac{60L^{-\frac{1}{2}}}{120L^{\frac{1}{2}}} \cdot L = 0{,}5$.

Ak sa veľkosť pracovnej sily zväčší o 1%, produkcia sa zvýši o 0,5%.

Nech $q = D(p)$ je funkcia dopytu, kde p je cena výrobku a q je dopyt po tomto výrobku. Elasticita funkcie dopytu je $\eta(D(p)) = -\frac{D'(p)}{D(p)} \cdot p$.

Nech $p = d(q)$ je funkcia dopytu, kde p je cena výrobku a q je dopyt po tomto výrobku. Elasticita funkcie dopytu je $\eta(d(q)) = -\frac{d(q)}{d'(q)} \cdot \frac{1}{q}$.

Príklad 5.6 Rovnica dopytu určitého tovaru je $D(p) = 60 - 0{,}3p$ pre $0 \le p \le 200$ eur.

a) Vyjadrime elasticitu dopytu ako funkciu ceny tovaru *p*.
b) Vypočítajme elasticitu dopytu pri cene $p = 60$ eur.
c) Pri akej cene je elasticita dopytu rovná 1 ?

Riešenie:

a) Elasticitu dopytu je $\eta(D(p)) = -\frac{D'(p)}{D(p)} \cdot p = \frac{0{,}3p}{60 - 0{,}3p}$.

b) Elasticita dopytu pri cene $p = 60$ eur je vlastne funkčná hodnota predchádzajúcej funkcie $\eta(D(60)) = \frac{0{,}3 \cdot 60}{60 - 0{,}3 \cdot 60} = \frac{3}{7} \doteq 0{,}43$.

c) Zostavíme rovnicu $\frac{0,3p}{60-0,3p}=1$, ktorej riešením je $p=100$ eur.

5.2 Neriešené úlohy

1. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L)=240\cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 1 000 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu, o koľko jednotiek sa zmení denná produkcia, ak:

a) Zvýšime počet pracovných hodín na 1 050.
b) Zvýšime počet pracovných hodín na 1 100.
c) Znížime počet pracovných hodín na 950.
d) Znížime počet pracovných hodín na 900.

a) 40, **b)** 80, **c)** -40, **d)** -80

2. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L)=243\cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu, o koľko jednotiek sa zmení denná produkcia, ak:

a) Zvýšime počet pracovných hodín na 750.
b) Zvýšime počet pracovných hodín na 780.
c) Znížime počet pracovných hodín na 700.
d) Znížime počet pracovných hodín na 680.

a) 21, **b)** 51, **c)** -29, **d)** -49

3. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L)=384\cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 512 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu, o koľko jednotiek sa zmení denná produkcia, ak:

a) Zvýšime počet pracovných hodín na 530.
b) Zvýšime počet pracovných hodín na 550.
c) Znížime počet pracovných hodín na 500.
d) Znížime počet pracovných hodín na 480.

a) 36, **b)** 76, **c)** -24, **d)** -64

4. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L)=441\cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 343 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu, o koľko jednotiek sa zmení denná produkcia, ak:

a) Zvýšime počet pracovných hodín na 350.
b) Zvýšime počet pracovných hodín na 363.
c) Znížime počet pracovných hodín na 322.
d) Znížime počet pracovných hodín na 315.

a) 21, **b)** 60, **c)** -63, **d)** -84

5. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 240 \cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 1 000 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu:

a) Na akú hodnotu sa musí zmeniť počet hodín, aby sa denná produkcia zvýšila o 160 jednotiek.

b) Na akú hodnotu sa musí zmeniť počet hodín, aby sa denná produkcia znížila o 240 jednotiek.

a) 1 200, **b)** 700

6. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 243 \cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu:

a) Na akú hodnotu sa musí zmeniť počet hodín, aby sa denná produkcia zvýšila o 200 jednotiek.

b) Na akú hodnotu sa musí zmeniť počet hodín, aby sa denná produkcia znížila o 150 jednotiek.

a) 929, **b)** 579

7. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 384 \cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 512 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu:

a) Na akú hodnotu sa musí zmeniť počet hodín, aby sa denná produkcia zvýšila o 80 jednotiek.

b) Na akú hodnotu sa musí zmeniť počet hodín, aby sa denná produkcia znížila o 30 jednotiek.

a) 552, **b)** 497

8. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 441 \cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 343 hodín. Odhadnite pomocou diferenciálu:

a) Na akú hodnotu sa musí zmeniť počet hodín, aby sa denná produkcia zvýšila o 66 jednotiek.

b) Na akú hodnotu sa musí zmeniť počet hodín, aby sa denná produkcia znížila o 90 jednotiek.

a) 365, **b)** 313

9. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 240 \cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 1 000 hodín. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 pracovná hodina navyše.

nárast produkcie o 0,8 jednotiek

10. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 243 \cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 hodín. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 pracovná hodina navyše.

nárast produkcie o 1 jednotku

11. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 384 \cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 512 hodín. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 pracovná hodina navyše.

nárast produkcie o 2 jednotky

12. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(L) = 441 \cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. V súčasnosti je denne k dispozícii 343 hodín. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 pracovná hodina navyše.

nárast produkcie o 3 jednotky

13. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 500 \cdot K^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 625 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu, o koľko jednotiek sa zmení denná produkcia, ak:

a) Zvýšime kapitál o 1 200 eur.
b) Zvýšime kapitál o 2 000 eur.
c) Znížime kapitál o 600 eur.
d) Znížime kapitál o 1 500 eur.

a) 12, **b)** 20, **c)** -6, **d)** -15

14. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 540 \cdot K^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu, o koľko jednotiek sa zmení denná produkcia, ak:

a) Zvýšime kapitál o 15 000 eur.
b) Zvýšime kapitál o 8 000 eur.
c) Znížime kapitál o 5 000 eur.
d) Znížime kapitál o 2 000 eur.

a) 150, **b)** 80, **c)** -50, **d)** -20

15. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 416 \cdot K^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 676 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu, o koľko jednotiek sa zmení denná produkcia, ak:

a) Zvýšime kapitál o 2 400 eur.
b) Zvýšime kapitál o 900 eur.
c) Znížime kapitál o 1 200 eur.
d) Znížime kapitál o 800 eur.

a) 19.2, **b)** 7.2, **c)** -9.6, **d)** -6.4

16. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 240 \cdot K^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 576 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu, o koľko jednotiek sa zmení denná produkcia, ak:

a) Zvýšime kapitál o 1 400 eur.
b) Zvýšime kapitál o 700 eur.
c) Znížime kapitál o 1 400 eur.
d) Znížime kapitál o 1 000 eur.

a) 7, **b)** 3.5, **c)** -7, **d)** -5

17. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 500 \cdot K^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 625 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu:

a) Na akú hodnotu sa musí zmeniť kapitálová investícia, aby sa denná produkcia zvýšila o 15 tisíc jednotiek.
b) Na akú hodnotu sa musí zmeniť kapitálová investícia, aby sa denná produkcia znížila o 20 tisíc jednotiek.

a) 626.5 tis. eur, **b)** 623 tis. eur

18. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 540 \cdot K^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu:

a) Na akú hodnotu sa musí zmeniť kapitálová investícia, aby sa denná produkcia zvýšila o 70 tisíc jednotiek.
b) Na akú hodnotu sa musí zmeniť kapitálová investícia, aby sa denná produkcia znížila o 90 tisíc jednotiek.

a) 736 tis. eur, **b)** 720 tis. eur

19. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K) = 416 \cdot \sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 676 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu:

a) Na akú hodnotu sa musí zmeniť kapitálová investícia, aby sa denná produkcia zvýšila o 48 tisíc jednotiek.
b) Na akú hodnotu sa musí zmeniť kapitálová investícia, aby sa denná produkcia znížila o 32 tisíc jednotiek.

a) 682 tis. eur, **b)** 672 tis. eur

20. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K)=240\cdot K^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 576 tisíc eur. Odhadnite pomocou diferenciálu:

a) Na akú hodnotu sa musí zmeniť kapitálová investícia, aby sa denná produkcia zvýšila o 15 tisíc jednotiek.

b) Na akú hodnotu sa musí zmeniť kapitálová investícia, aby sa denná produkcia znížila o 10 tisíc jednotiek.

a) 579 tis. eur, **b)** 574 tis. eur

21. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K)=500\cdot K^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 625 tisíc eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 000 eur navyše.

nárast produkcie o 10 jednotiek

22. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K)=540\cdot K^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 729 tisíc eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 000 eur navyše.

nárast produkcie o 10 jednotiek

23. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K)=416\cdot\sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 676 tisíc eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 000 eur navyše.

nárast produkcie o 8 jednotiek

24. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K)=240\cdot\sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je denne k dispozícii 576 tisíc eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 000 eur navyše.

nárast produkcie o 5 jednotiek

25. Predpokladáme, že celkové náklady na výrobu x výrobkov sú $C(x)=x^2+4x+104$ eur.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 10. výrobku.

b) Vypočítajte náklady na výrobu 10. výrobku priamo z funkcie nákladov.

a) 22 eur, **b)** 23 eur

26. Predpokladáme, že celkové náklady na výrobu x výrobkov sú $C(x)=2x^2+12x+68$ eur.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 11. výrobku.

b) Vypočítajte náklady na výrobu 11. výrobku priamo z funkcie nákladov.

a) 52 eur, **b)** 54 eur

27. Predpokladáme, že celkové náklady na výrobu q výrobkov sú $C(q)=3q^2+6q+50$ eur.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 15. výrobku.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 15. výrobku priamo z funkcie nákladov.

a) 90 eur, **b)** 93 eur

28. Predpokladáme, že celkové náklady na výrobu q výrobkov sú $C(q)=4q^2+40q+200$ eur.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 14. výrobku.
b) Vypočítajte náklady na výrobu 14. výrobku priamo z funkcie nákladov.

a) 144 eur, **b)** 148 eur

29. Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q výrobkov sú dané funkciou $C(q)=1{,}2q^2+30q+10$.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 5. výrobku.
b) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 10. výrobku.

a) 39.6, **b)** 51.6

30. Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q výrobkov sú dané funkciou $C(q)=q^2+28q+750$.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 10. výrobku.
b) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 50. výrobku.

a) 46, **b)** 126

31. Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q výrobkov sú dané funkciou $C(q)=0{,}8q^2+70q+420$.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 35. výrobku.
b) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 70. výrobku.

a) 124.4, **b)** 180.4

32. Celkové náklady v eurách na produkciu x výrobkov sú dané funkciou $C(x)=x^3-2x^2+10x+320$.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 1. výrobku.
b) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 3. výrobku.

a) 10, **b)** 14

33. Celkové náklady v dolároch na výrobu q výrobkov sú dané funkciou $C(q)=15+e^{0{,}1q}$.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 6. výrobku.

b) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 16. výrobku.

a) 0.16, **b)** 0.45

34. Celkové náklady v dolároch na výrobu q výrobkov sú dané funkciou $C(q) = 120 + 0{,}75e^{0{,}3q}$.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 10. výrobku.
b) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 15. výrobku.

a) 3.35, **b)** 15

35. Celkové náklady v dolároch na výrobu q výrobkov sú dané funkciou $C(q) = 95 + \frac{2}{3}e^{0{,}2q}$.

a) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 13. výrobku.
b) Použite marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 23. výrobku.

a) 1.47, **b)** 10.86

36. Výskumom bolo zistené, že krajčírka, ktorá začne pracovať o 7.00 hodine, bude mať o x hodín ušitých $f(x) = 15x - x^2$ sukní.

a) Približne koľko sukní ušije medzi 10.00 a 11. 00 hod.?
b) Približne koľko sukní ušila medzi 13.00 a 13. 20 hod.?

a) 9, **b)** 1

37. Zistilo sa, že strojník, ktorý začne pracovať o 6.30 hodine, vyrobí $f(x) = -0{,}5x^2 + 10x$ súčiastok po x hodinách práce.

a) Približne koľko súčiastok bude mať vyrobených medzi 10.30 a 11.00 hod.?
b) Približne koľko súčiastok vyrobí medzi 11.00 a 11.30 hod.?

a) 3, **b)** 2.75

38. Podľa štúdie produktivity práce v podniku bude mať priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 8.00 hodine, poskladaných $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ prístrojov po x hodinách práce.

a) Približne koľko prístrojov bude mať poskladaných medzi 11.00 a 12. 00 hod.?
b) Približne koľko prístrojov poskladá medzi 10.00 a 10. 45 hod.?

a) 24, **b)** 20.25

39. Podľa štúdie produktivity práce v podniku, priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 8.00 hod., bude mať poskladaných $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$ výrobkov o x hodín neskôr. Približne koľko výrobkov vyrobí pracovník:

a) Medzi 8.00 a 8.15 hod.?
b) Medzi 9.00 a 9.15 hod.?
c) Medzi 10.00 a 10.10 hod.?
d) Počas 3. hodiny?

a) 1.5, **b)** 4.75, **c)** 6.33, **d)** 38

40. Podľa štúdie produktivity práce v podniku, priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 8.00 hod., bude mať poskladaných $f(x)=x^3+3x^2+2x$ výrobkov o x hodín neskôr. Približne koľko výrobkov vyrobí pracovník:

a) Medzi 8.00 a 8.20 hod.?
b) Medzi 10.00 a 10.20 hod.?
c) Medzi 11.00 a 11.30 hod.?
d) Počas 4. hodiny?

a) 0.67, **b)** 8.67, **c)** 23.5, **d)** 47

41. Podľa štúdie produktivity práce v podniku, priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 7.00 hod., bude mať poskladaných $f(x)=x^3+4x^2+3x$ výrobkov o x hodín neskôr. Približne koľko výrobkov vyrobí pracovník:

a) Medzi 8.00 a 8.20 hod.?
b) Medzi 10.00 a 10.20 hod.?
c) Medzi 11.00 a 11.30 hod.?
d) Počas 5. hodiny?

a) 4.67, **b)** 18, **c)** 41.5, **d)** 83

42. Podľa štúdie produktivity práce v podniku, priemerný pracovník, ktorý začne pracovať o 7.00 hod., bude mať poskladaných $f(x)=x^3+6x^2+8x$ výrobkov o x hodín neskôr. Približne koľko výrobkov vyrobí pracovník:

a) Medzi 8.00 a 8.15 hod.?
b) Medzi 9.00 a 9.15 hod.?
c) Medzi 12.00 a 12.30 hod.?
d) Počas 6. hodiny?

a) 5.75, **b)** 11, **c)** 71.5, **d)** 143

43. Podľa odhadu bude počet obyvateľov mestskej časti o t rokov $P(t)=20-\dfrac{6}{t+1}$ tisíc.

a) Približne o koľko narastie počet obyvateľov počas prvého roka?
b) Približne o koľko narastie počet obyvateľov počas deviateho roka?

a) 6 tis., **b)** 0,074 tis.

44. Denná produkcia pracovníka po t týždňoch pracovnej činnosti je daná funkciou $Q(t)=50-30e^{-0,4t}$.

a) Približne koľko výrobkov vyrobí počas prvého týždňa?
b) Približne koľko výrobkov vyrobí počas 5. týždňa?

a) 1.2 tis., **b)** 0,24 tis.

45. Podľa zdravotných záznamov t týždňov po vypuknutí chrípky bol počet ochorení $f(t)=\dfrac{2}{1+3e^{-0,8t}}$ tisíc.

a) Približne koľko ľudí ochorelo počas 1. týždňa?
b) Približne koľko ľudí ochorelo počas 3. týždňa?

a) 0.3 tis., **b)** 0.38 tis.

46. Podľa predpokladov t týždňov po vypuknutí chrípky bude počet ochorení $Q(t)=\dfrac{800}{4+76e^{-1,2t}}$ tisíc.

a) Približne koľko ľudí ochorelo počas 1. týždňa?
b) Približne koľko ľudí ochorelo počas 4. týždňa?

a) 11.4 tis., **b)** 53.99 tis.

47. Podľa zdravotných záznamov t týždňov po vypuknutí infekčnej žltačky bol počet ochorení $f(t)=\dfrac{60}{1+5e^{-0,5t}}$ tisíc.

a) Približne koľko ľudí ochorelo počas 1. týždňa?
b) Približne koľko ľudí ochorelo počas 3. týždňa?

a) 4.17 tis., **b)** 6.84 tis.

48. Odhaduje sa, že o t rokov bude počet obyvateľov krajiny $P(t)=\dfrac{20}{2+3e^{-0,06t}}$ miliónov.

a) Približne o koľko by mal narásť počet obyvateľov počas 10. roka?
b) Približne o koľko by mal narásť počet obyvateľov počas 20. roka?

a) 0.15 mil., **b)** 0.13 mil.

49. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K)=500\cdot K^{\frac{1}{2}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. O koľko percent vzrastie produkcia, ak sa kapitálová investícia zvýši o 1% ?

0,5%

50. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K)=540\cdot\sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. O koľko percent vzrastie produkcia, ak sa kapitálová investícia zvýši o 1% ?

0,5%

51. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K)=441\cdot K^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. O koľko percent vzrastie produkcia, ak sa kapitálová investícia zvýši o 1% ?

0,33%

52. Denná produkcia podniku je daná funkciou $Q(K)=240\cdot\sqrt[3]{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. O koľko percent vzrastie produkcia, ak sa kapitálová investícia zvýši o 1% ?

0,33%

53. Rovnica dopytu určitého tovaru je $D(p)=40-0,2p$ pre $0\le p\le 200$ eur.

a) Vyjadrite elasticitu dopytu ako funkciu ceny tovaru *p*.
b) Vypočítajte elasticitu dopytu pri cene $p=80$ eur.
c) Pri akej cene je elasticita dopytu rovná 1 ?

a) $E_D(p) = \frac{p}{200 - p}$, **b)** 0.67, **c)** 100 eur

54. Rovnica dopytu určitého tovaru je $D(p) = 80 - 0{,}1p$ pre $0 \le p \le 800$ eur.
a) Vyjadrite elasticitu dopytu ako funkciu ceny tovaru *p*.
b) Vypočítajte elasticitu dopytu pri cene $p = 350$ eur.
c) Pri akej cene je elasticita dopytu rovná 1 ?

a) $E_D(p) = \frac{p}{800 - p}$, **b)** 0.78, **c)** 400 eur

55. Rovnica dopytu určitého tovaru je $D(p) = 1\,800 - 2p^2$ pre $0 \le p \le 30$ eur.
a) Vyjadrite elasticitu dopytu ako funkciu ceny tovaru *p*.
b) Vypočítajte elasticitu dopytu pri cene $p = 20$ eur.
c) Pri akej cene je elasticita dopytu rovná 1 ?

a) $E_D(p) = \frac{2p^2}{900 - p^2}$, **b)** 1.6, **c)** 17.32 eur

56. Rovnica dopytu určitého tovaru je $D(p) = 1\,225 - p^2$ pre $0 \le p \le 35$ eur.
a) Vyjadrite elasticitu dopytu ako funkciu ceny tovaru *p*.
b) Vypočítajte elasticitu dopytu pri cene $p = 15$ eur.
c) Pri akej cene je elasticita dopytu rovná 1 ?

a) $E_D(p) = \frac{2p^2}{1\,225 - p^2}$, **b)** 0.45, **c)** 20.21 eur

57. Predajca športových potrieb predáva cyklistické okuliare po 11 eur za kus. Dopyt po tomto type okuliarov vzhľadom na predajnú cenu odhadol funkciou $D(p) = 4\,000 - p^3$ kusov pre $0 \le p \le 10\sqrt[3]{4}$. Čo odporúčate majiteľovi predajne, zvýšiť alebo znížiť cenu?

$E_D(11) = 1.496$; znížiť cenu

58. Predajca športových potrieb predáva plavecké okuliare po 9 eur za kus. Dopyt po tomto type okuliarov vzhľadom na predajnú cenu odhadol funkciou $D(p) = 8\,000 - 2p^3$ kusov pre $0 \le p \le 10\sqrt[3]{4}$. Čo odporúčate majiteľovi predajne, zvýšiť alebo znížiť cenu?

$E_D(9) = 0.6$; zvýšiť cenu

59. Predajca športových potrieb predáva plavecké čiapky po 4 eur za kus. Dopyt po tomto type čiapok vzhľadom na predajnú cenu odhadol funkciou $D(p) = 500 - p^3$ kusov pre $0 \le p \le \sqrt[3]{100}$. Čo odporúčate majiteľovi predajne, zvýšiť alebo znížiť cenu?

$E_D(4) = 0.44$; zvýšiť cenu

60. Predajca športových potrieb predáva cyklistické rukavice po 6 eur za pár. Dopyt po tomto type rukavíc vzhľadom na predajnú cenu odhadol funkciou

$D(p)=1\,000-2p^3$ kusov pre $0 \le p \le \sqrt[3]{500}$. Čo odporúčate majiteľovi predajne, zvýšiť alebo znížiť cenu?

$E_D(6)=2.28$; znížiť cenu

61. Rovnica dopytu uvažovaného tovaru je $D(p)=1\,080-0{,}1p^2$ pre $0 \le p \le 60\sqrt{3}$ eur.

a) Určte, kde je dopyt elastický, neelastický a kde má jednotkovú elasticitu vzhľadom na cenu.

b) Využite výsledok **a)** na to, aby ste určili intervaly rastu a klesania funkcie celkových príjmov $R(p)$ a cenu, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

c) Vyjadrite explicitne funkciu celkových príjmov a použite prvú deriváciu na určenie intervalov rastu a klesania a určenie ceny, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

a) $(0, 60)$ neelastický, $(60, 60\sqrt{3})$ elastický, 60 jednotková elasticita

b) $(0, 60)$ rastúce, $(60, 60\sqrt{3})$ klesajúce, 60 maximálne

c) $(0, 60)$ rastúce, $(60, 60\sqrt{3})$ klesajúce, 60 maximálne

62. Rovnica dopytu uvažovaného tovaru je $D(p)=750-0{,}1p^2$ pre $0 \le p \le 50\sqrt{3}$ eur.

a) Určte, kde je dopyt elastický, neelastický a kde má jednotkovú elasticitu vzhľadom na cenu.

b) Využite výsledok **a)** na to, aby ste určili intervaly rastu a klesania funkcie celkových príjmov $R(p)$ a cenu, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

c) Vyjadrite explicitne funkciu celkových príjmov a použite prvú deriváciu na určenie intervalov rastu a klesania a určenie ceny, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

a) $(0, 50)$ neelastický, $(50, 50\sqrt{3})$ elastický, 50 jednotková elasticita

b) $(0, 50)$ rastúce, $(50, 50\sqrt{3})$ klesajúce, 50 maximálne

c) $(0, 50)$ rastúce, $(50, 50\sqrt{3})$ klesajúce, 50 maximálne

63. Rovnica dopytu uvažovaného tovaru je $D(p)=1\,470-0{,}1p^2$ pre $0 \le p \le 70\sqrt{3}$ eur.

a) Určte, kde je dopyt elastický, neelastický a kde má jednotkovú elasticitu vzhľadom na cenu.

b) Využite výsledok **a)** na to, aby ste určili intervaly rastu a klesania funkcie celkových príjmov $R(p)$ a cenu, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

c) Vyjadrite explicitne funkciu celkových príjmov a použite prvú deriváciu na určenie intervalov rastu a klesania a určenie ceny, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

a) $(0, 70)$ neelastický, $(70, 70\sqrt{3})$ elastický, 70 jednotková elasticita

b) $(0, 70)$ rastúce, $(70, 70\sqrt{3})$ klesajúce, 70 maximálne

c) $(0, 70)$ rastúce, $(70, 70\sqrt{3})$ klesajúce, 70 maximálne

64. Rovnica dopytu uvažovaného tovaru je $D(p)=2\,160-0{,}2p^2$ pre $0\le p\le 60\sqrt{3}$ eur.

a) Určte, kde je dopyt elastický, neelastický a kde má jednotkovú elasticitu vzhľadom na cenu.

b) Využite výsledok **a)** na to, aby ste určili intervaly rastu a klesania funkcie celkových príjmov $R(p)$ a cenu, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

c) Vyjadrite explicitne funkciu celkových príjmov a použite prvú deriváciu na určenie intervalov rastu a klesania a určenie ceny, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

a) (0, 60) neelastický, $(60,\ 60\sqrt{3})$ elastický, 60 jednotková elasticita

b) (0, 60) rastúce, $(60,\ 60\sqrt{3})$ klesajúce, 60 maximálne

c) (0, 60) rastúce, $(60,\ 60\sqrt{3})$ klesajúce, 60 maximálne

65. Rovnica dopytu uvažovaného tovaru je $D(p)=1\,500-0{,}2p^2$ pre $0\le p\le 50\sqrt{3}$ eur.

a) Určte, kde je dopyt elastický, neelastický a kde má jednotkovú elasticitu vzhľadom na cenu.

b) Využite výsledok **a)** na to, aby ste určili intervaly rastu a klesania funkcie celkových príjmov $R(p)$ a cenu, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

c) Vyjadrite explicitne funkciu celkových príjmov a použite prvú deriváciu na určenie intervalov rastu a klesania a určenie ceny, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

a) (0, 50) neelastický, $(50,\ 50\sqrt{3})$ elastický, 50 jednotková elasticita

b) (0, 50) rastúce, $(50,\ 50\sqrt{3})$ klesajúce, 50 maximálne

c) (0, 50) rastúce, $(50,\ 50\sqrt{3})$ klesajúce, 50 maximálne

66. Rovnica dopytu uvažovaného tovaru je $D(p)=2\,940-0{,}2p^2$ pre $0\le p\le 70\sqrt{3}$ eur.

a) Určte, kde je dopyt elastický, neelastický a kde má jednotkovú elasticitu vzhľadom na cenu.

b) Využite výsledok **a)** na to, aby ste určili intervaly rastu a klesania funkcie celkových príjmov $R(p)$ a cenu, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

c) Vyjadrite explicitne funkciu celkových príjmov a použite prvú deriváciu na určenie intervalov rastu a klesania a určenie ceny, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

a) (0, 70) neelastický, $(70,\ 70\sqrt{3})$ elastický, 70 jednotková elasticita

b) (0, 70) rastúce, $(70,\ 70\sqrt{3})$ klesajúce, 70 maximálne

c) (0, 70) rastúce, $(70,\ 70\sqrt{3})$ klesajúce, 70 maximálne

6 PRIEBEH FUNKCIE

6.1 Riešené úlohy

Pri vyšetrovaní priebehu funkcie postupujeme takto:

- **A1** nájdeme definičný obor funkcie,
- **A2** vypočítame limity v koncových bodoch definičného oboru,
- **A3** vypočítame jednostranné limity v bodoch nespojitosti a napíšeme rovnice pre asymptoty bez smernice (ABS), [stačí, aby aspoň jedna z jednostranných limít v bode x_0 bola nevlastné číslo $+\infty$ alebo $-\infty$ a priamka $x = x_0$ bude ABS],
- **A4** nájdeme asymptoty so smernicou (ASS), [ASS je priamka $y = kx + q$, ktorej koeficienty počítame takto: $\begin{matrix} k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ q_1 = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - k_1 x] \end{matrix}$ alebo $\begin{matrix} k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ q_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - k_2 x] \end{matrix}$, pričom koeficienty k a q musia byť vlastné čísla],
- **A5** vyšetrime párnosť, nepárnosť funkcie,
- **A6** nájdeme priesečníky so súradným systémom, [priesečník s osou o_y tak, že položíme $x = 0$ a dopočítame y, priesečníky s o_x tak, že položíme $y = 0$ a dopočítame x],
- **A7** vypočítame prvú deriváciu funkcie a na základe toho vyšetríme monotónnosť a lokálne extrémy funkcie,
  - o na intervaloch, kde je prvá derivácia kladná, teda $f'(x) > 0$, je funkcia $f(x)$ rastúca ↗
  - o na intervaloch, kde je prvá derivácia záporná, teda $f'(x) < 0$, je funkcia $f(x)$ klesajúca ↘
  - o monotónnosť funkcie sa môže meniť v bodoch, v ktorých $f'(x) = 0$ alebo v bodoch, v ktorých $f'(x)$ neexistuje,
  - o body, v ktorých $f'(x) = 0$, sa nazývajú stacionárne body (SB),
  - o ak na intervale vľavo od SB funkcia klesá a vpravo rastie, je v tomto SB extrém – lokálne minimum, ↘ SB ↗
  - o ak na intervale vľavo od SB funkcia rastie a vpravo klesá, je v tomto SB extrém – lokálne maximum, ↗ SB ↘
- **A8** vypočítame druhú deriváciu funkcie a na základe toho vyšetríme konvexnosť, konkávnosť a inflexné body (IB) funkcie,
  - o na intervaloch, kde $f''(x) > 0$, je funkcia $f(x)$ konvexná $\cup$,
  - o na intervaloch, kde $f''(x) < 0$, je funkcia $f(x)$ konkávna $\cap$,
  - o konvexnosť a konkávnosť funkcie sa môže meniť v bodoch, v ktorých $f''(x) = 0$ alebo v bodoch, v ktorých $f''(x)$ neexistuje,
  - o body, v ktorých $f''(x) = 0$ a mení sa v nich konvexnosť a konkávnosť sa nazývajú inflexné body (IB),
  - o ak na intervale vľavo od bodu, v ktorom $f''(x) = 0$ je funkcia konvexná a vpravo konkávna, bod nazývame inflexný bod $\cup$ IB $\cap$

- o ak na intervale vľavo od bodu, v ktorom $f''(x)=0$ je funkcia konkávna a vpravo konvexná, bod nazývame inflexný bod $\cap$ IB $\cup$
- **A9** stacionárne body, inflexné body a body, v ktorých neexistuje prvá a druhá derivácia funkcie rozdelia celý definičný obor na intervaly, na ktorých budeme zisťovať znamienko prvej a druhej derivácie funkcie, všetky informácie zaznačíme do tabuľky,
- **A10** načrtneme graf funkcie $f(x)$.

V niektorých funkciách môžeme niečo z bodov **A3** až **A8** vynechať, lebo tieto informácie získame z iných bodov.

Príklad 6.1 Vyšetrime priebeh funkcie $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ a načrtnime jej graf.

Riešenie:

A1 Funkcia je definovaná pre všetky čísla x, pre ktoré je menovateľ $x-2\neq 0$, teda $x\neq 2$.
Definičný obor funkcie $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.

A2 Limity na začiatku a konci definičného oboru sú

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-2}=+\infty$$

A3 Jednostranné limity v bode nespojitosti $x=2$ sú

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2}{x-2}=+\infty$$

preto, že jednostranné limity sú nevlastné čísla, priamka $x=2$ je ABS.

A4
$$\begin{aligned} k_1&=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=1\\ q_1&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-2}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{x-2}\right]=2\end{aligned},$$

ASS pre $x\to\infty$ je priamka $y=x+2$,

$$\begin{aligned} k_2&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=1\\ q_2&=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x-2}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{x-2}\right]=2\end{aligned},$$

ASS pre $x\to-\infty$ je takisto priamka $y=x+2$.

A5 $\underline{\underline{f(-x)}} = \dfrac{(-x)^2}{-x-2} = -\dfrac{x^2}{x+2} \neq \underline{\underline{\pm f(x)}}$, z toho vyplýva, že funkcia nie je ani párna ani nepárna.

A6 Vo funkcii $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ položíme $x = 0$ a vypočítame $y = \dfrac{0}{0-2} = 0$.

Vo funkcii $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ položíme $y = 0$ a vypočítame $0 = \dfrac{x^2}{x-2}$

$$0 = x^2$$
$$0 = x$$

priesečník s osou o_x a s osou o_y je bod $[0,0]$.

A7 Prvá derivácia funkcie je

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-2}\right)' = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

Položíme $y' = 0$ a vypočítame SB.

$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0$$
$$x(x-4) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

Prvá derivácia y' neexistuje v bode nespojitosti prvej derivácie, čiže v bode $x = 2$, ktorý zároveň nepatrí do definičného oboru funkcie $f(x)$.

A8 Druhá derivácia funkcie je

$$y'' = \left(\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

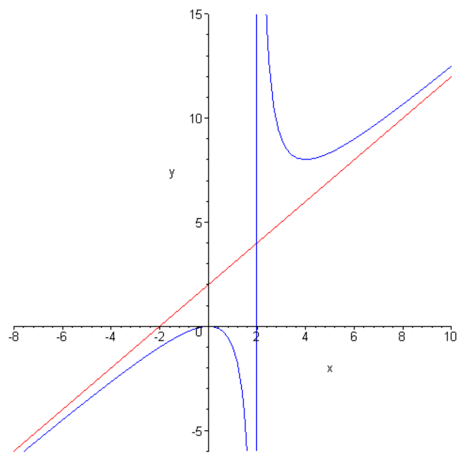
Druhá derivácia $y'' \neq 0$, preto funkcia $f(x)$ nemá inflexné body.

Druhá derivácia y'' neexistuje v bode nespojitosti druhej derivácie, čiže v bode $x = 2$, ktorý zároveň nepatrí do definičného oboru funkcie $f(x)$.

A9 Body $x = 0$ a $x = 4$ rozdelia celý definičný obor funkcie na ďalšie intervaly, kde budeme zisťovať znamienko prvej a druhej derivácie a na základe toho určíme monotónnosť, konvexnosť, konkávnosť funkcie, lokálne extrémy a inflexné body.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,\infty)$
y'	+		-	*	-		+
y	↗	MAX	↘	*	↘	MIN	↗
y''	-		-	*	+		+
y	$\cap$	0	$\cap$	ABS	$\cup$	8	$\cup$

A10 Do súradného systému nakreslíme ASS, ABS, priesečníky so súradným systémom a použijeme všetky informácie z tabuľky k načrtnutiu grafu funkcie.



Príklad 6.2 Vyšetrime priebeh funkcie $y = \dfrac{\ln x}{x}$ a načrtnime jej graf.

Riešenie:

A1 Funkcia je definovaná pre všetky čísla x, pre ktoré je menovateľ $x \neq 0$ a súčasne $x > 0$.
Definičný obor funkcie $D(f) = (0,\infty)$.

A2 Limity na začiatku a konci definičného oboru sú

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

A3 Počítame jednostrannú limitu v bode nespojitosti $x = 0$. V tomto prípade má zmysel počítať len limitu sprava ale tú sme už vypočítali v **A2.** Pretože jednostranná limita je nevlastné číslo, priamka $x = 0$ je ABS.

A4
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln x}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0,$$
$$q=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln x}{x}-0\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

ASS pre $x\to\infty$ je priamka $y=0$,
ASS pre $x\to-\infty$ nemá zmysel počítať, lebo funkcia pre záporné čísla nie je definovaná.

A5 Funkcia nie je ani párna ani nepárna.

A6 Priesečník s o_y neexistuje.

Vo funkcii $y=\frac{\ln x}{x}$ položíme $y=0$ a vypočítame
$$0=\frac{\ln x}{x}$$
$$x=1$$

priesečník s osou o_x je bod $[1,0]$.

A7 Prvá derivácia funkcie je $y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Položíme $y'=0$ a vypočítame SB.
$$\frac{1-\ln x}{x^2}=0$$
$$1-\ln x=0$$
$$x=e$$

y' neexistuje v bode nespojitosti prvej derivácie, čiže v bode $x=0$, ktorý zároveň nepatrí do definičného oboru funkcie $f(x)$.

A8 Druhá derivácia funkcie je $y''=\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\ln x)2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$.

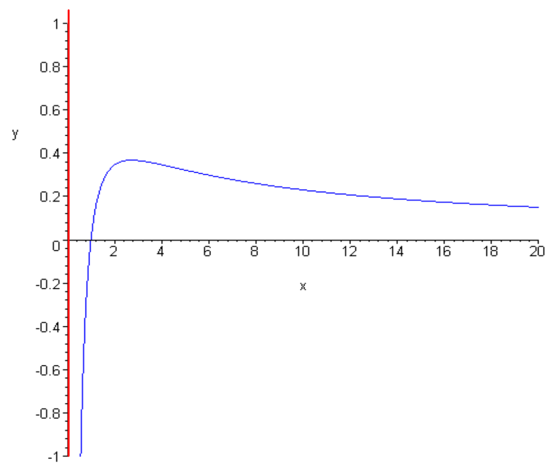
Položíme $y''=0$
$$\frac{2\ln x-3}{x^3}=0$$
$$2\ln x-3=0$$
$$x=\sqrt{e^3}$$

y'' neexistuje v bode nespojitosti druhej derivácie, čiže v bode $x=0$, ktorý zároveň nepatrí do definičného oboru funkcie $f(x)$.

A9 Body $x=e$ a $x=\sqrt{e^3}$ rozdelia celý definičný obor funkcie na ďalšie intervaly, v ktorých budeme zisťovať znamienko prvej a druhej derivácie a na základe toho určíme monotónnosť, konvexnosť, konkávnosť funkcie, lokálne extrémy a inflexné body.

	$(0,e)$	e	$(e,\sqrt{e^3})$	$\sqrt{e^3}$	$(\sqrt{e^3},\infty)$
y'	+		-		-
y	↗	MAX	↘		↘
y''	-		-		+
y	$\cap$	$\frac{1}{e}$	$\cap$	IB $\frac{3}{2\sqrt{e^3}}$	$\cup$

A10 Do súradného systému nakreslíme ASS, ABS, priesečníky so súradným systémom a použijeme všetky informácie z tabuľky k načrtnutiu grafu funkcie.



Príklad 6.3 Vyšetrime priebeh funkcie $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ a načrtnime jej graf.

Riešenie:

A1 Funkcia je definovaná pre všetky čísla x, pre ktoré je menovateľ $(x+1)^2 \neq 0$, teda $x \neq -1$.
Definičný obor funkcie $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$.

A2 Limity na začiatku a konci definičného oboru sú

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\infty$$

A3 Jednostranné limity v bode nespojitosti $x = -1$ sú

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$

preto, že jednostranné limity sú nevlastné čísla, priamka $x = -1$ je ABS.

A4
$$k_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$q_1 = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot x \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} \right] = -1$$

ASS pre $x \to \infty$ je priamka $y = \frac{1}{2}x - 1$,

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$q_2 = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot x \right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} \right] = -1$$

ASS pre $x \to -\infty$ je $y = \frac{1}{2}x - 1$.

A5 $\underline{\underline{f(-x)}} = \frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = -\frac{x^3}{2(1-x)^2} \neq \underline{\underline{\pm f(x)}}$, z toho vyplýva, že funkcia nie je ani párna ani nepárna.

A6 Vo funkcii $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ položíme $x = 0$ a vypočítame $y = \frac{0}{2} = 0$.

Vo funkcii $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ položíme $y = 0$ a vypočítame

$$0 = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$
$$0 = x^3$$
$$0 = x$$

Priesečník s osou o_x a s osou o_y je bod $[0,0]$.

A7 Prvá derivácia funkcie je

$$y' = \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} \right)' = \frac{3x^2 \cdot 2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot 2(x+1)}{4(x+1)^4} = \frac{x^3 + 3x^2}{2(x+1)^3} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Položíme $y' = 0$ a vypočítame SB.

$$\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} = 0$$

$$x^2(x+3) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -3$$

y' neexistuje v bode nespojitosti prvej derivácie, čiže v bode $x = -1$, ktorý zároveň nepatrí do definičného oboru funkcie $f(x)$.

A8 Druhá derivácia funkcie je

$$y'' = \left(\frac{x^3 + 3x^2}{2(x+1)^3}\right)' = \frac{(3x^2 + 6x)2(x+1)^3 - (x^3 + 3x^2)\cdot 2\cdot 3(x+1)^2}{4(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Položíme $y'' = 0$

$$\frac{3x}{(x+1)^4} = 0$$

$$3x = 0$$

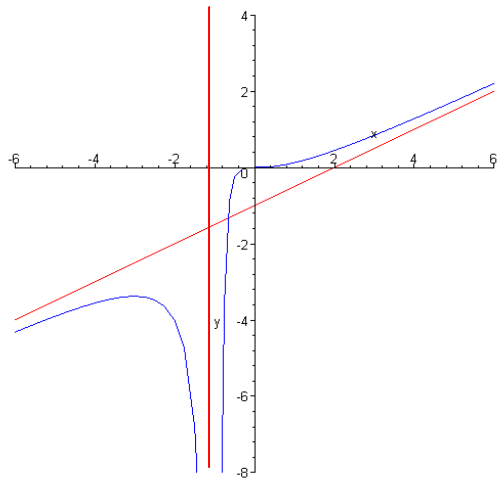
$$x = 0$$

y'' neexistuje v bode nespojitosti druhej derivácie, čiže v bode $x = -1$, ktorý zároveň nepatrí do definičného oboru funkcie $f(x)$.

A9 Body $x = -3$ a $x = 0$ rozdelia celý definičný obor funkcie na ďalšie intervaly, kde budeme zisťovať znamienko prvej a druhej derivácie a na základe toho určíme monotónnosť, konvexnosť, konkávnosť funkcie, lokálne extrémy a inflexné body.

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
y'	+		-	*	+		+
y	↗	MAX	↘	*	↗		↗
y''	-		-	*	-		+
y	$\cap$	$-\frac{27}{8}$	$\cap$	ABS	$\cap$	IB 0	$\cup$

A10 Do súradného systému nakreslíme ASS, ABS, priesečníky so súradným systémom a použijeme všetky informácie z tabuľky k načrtnutiu grafu funkcie.



6.2 Neriešené úlohy

V nasledujúcich úlohách určte intervaly rastu, klesania a lokálne extrémy funkcií:

Výsledky:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

rastie $(3/2, \infty)$
klesá $(-\infty, 3/2)$
lok. min. v $x = 3/2$

2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

rastie $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
klesá $(0,1)$
lok. min. v $x = 1$
lok. max. v $x = 0$

3. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

rastie $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$
klesá $(-2, 0)$
lok. min. v $x = 0$
lok. max. v $x = -2$

4. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 5$

rastie $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
lok. min. neex
lok. max. neex.

5. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$

rastie $(0,1) \cup (1, \infty)$
klesá $(-\infty, 0)$
lok. min. v $x = 0$

6. $f(x)=x^5-5x^4+100$

rastie $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$
klesá $(0,4)$
lok. min. v $x=4$
lok. max. v $x=0$

7. $f(x)=(x-1)^5$

rastie $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$
lok. min. neex.
lok. max. neex.

8. $f(x)=(x^2-1)^4$

rastie $(-1,0)\cup(1,\infty)$
klesá $(-\infty,-1)\cup(0,1)$
lok. min. v $x=\pm 1$
lok. max. v $x=0$

9. $f(x)=(2-x^2)^2$

rastie $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},\infty)$
klesá $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$
lok. min. v $x=\pm\sqrt{2}$
lok. max. v $x=0$

10. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

rastie $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$
klesá $(0,2)\cup(2,4)$
lok. min. v $x=4$
lok. max. v $x=0$

11. $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$

rastie $(-3,-2)\cup(-2,-1)$
klesá $(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$
lok. min. v $x=-3$
lok. max. v $x=-1$

12. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

rastie $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
klesá $(-1,0)\cup(0,1)$
lok. min. v $x=1$
lok. max. v $x=-1$

13. $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$

rastie $(\sqrt[3]{1/2},\infty)$
klesá $(-\infty,0)\cup(0,\sqrt[3]{1/2})$
lok. min. v $x=\sqrt[3]{1/2}$

14. $f(x)=\dfrac{10x}{(x+2)^2}$

rastie $(-2,2)$

klesá $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

lok. max. v $x=2$

15. $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

rastie $(0,1)$

klesá $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

lok. min. v $x=0$

16. $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

rastie $(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(0,\infty)$

klesá $(-3,-1)$

lok. max. v $x=-3$

17. $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

rastie $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

lok. min. neex.

lok. max. neex.

18. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{x^2}$

rastie $(-\infty,-4/3)\cup(0,\infty)$

klesá $(-4/3,0)$

lok. max. v $x=-4/3$

19. $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$

rastie $(0,2)\cup(2,\infty)$

klesá $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

lok. min. v $x=0$

20. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

rastie $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

klesá $(0,1)\cup(1,\infty)$

lok. max. v $x=0$

21. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

rastie $(-1,1)$

klesá $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

lok. min. v $x=-1$

lok. max. v $x=1$

22. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

rastie $(0,\infty)$

klesá $(-\infty,0)$

lok. min. v $x=0$

23. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

rastie $(0,e)$
klesá (e,∞)
lok. max. v $x=e$

24. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

rastie (e,∞)
klesá $(0,1)\cup(1,e)$
lok. min. v $x=e$

25. $f(x)=x.\ln x$

rastie (e^{-1},∞)
klesá $(0,e^{-1})$
lok. min. v $x=e^{-1}$

26. $f(x)=\ln(1+x^2)$

rastie $(0,\infty)$
klesá $(-\infty,0)$
lok. min. v $x=0$

27. $f(x)=\ln(4-x^2)$

rastie $(-2,0)$
klesá $(0,2)$
lok. max. v $x=0$

28. $f(x)=xe^x$

rastie $(-1,\infty)$
klesá $(-\infty,-1)$
lok. min. v $x=-1$

29. $f(x)=xe^{-x}$

rastie $(-\infty,1)$
klesá $(1,\infty)$
lok. max. v $x=1$

30. $f(x)=x^2e^{-x}$

rastie $(0,2)$
klesá $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$
lok. min. v $x=0$
lok. max. v $x=2$

31. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

klesá $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
lok. min. neex.
lok. max. neex.

32. $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$

klesá $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
lok. min. neex.

lok. max. neex.

V nasledujúcich úlohách určte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexné body funkcií:

33. $f(x)=x^2-3x+2$

$\cup$ na $(-\infty,\infty)$
IB neex.

34. $f(x)=2x^3-3x^2$

$\cup$ na $(1/2,\infty)$
$\cap$ na $(-\infty,1/2)$
IB v $x=1/2$

35. $f(x)=x^3+3x^2-2$

$\cup$ na $(-1,\infty)$
$\cap$ na $(-\infty,-1)$
IB v $x=-1$

36. $f(x)=2x^3+6x^2+6x+5$

$\cup$ na $(-1,\infty)$
$\cap$ na $(-\infty,-1)$
IB v $x=-1$

37. $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+2$

$\cup$ na $(-\infty,1/3)\cup(1,\infty)$
$\cap$ na $(1/3,1)$
IB v $x=1/3$, $x=1$

38. $f(x)=x^5-5x^4+100$

$\cup$ na $(3,\infty)$
$\cap$ na $(-\infty,0)\cup(0,3)$
IB v $x=3$

39. $f(x)=(x-1)^5$

$\cup$ na $(1,\infty)$
$\cap$ na $(-\infty,1)$
IB v $x=1$

40. $f(x)=(2-x^2)^2$

$\cup$ na $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\infty\right)$

$\cap$ na $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

IB v $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

41. $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$

$\cup$ na $(2,\infty)$

$\cap$ na $(-\infty,2)$
IB neex.

42. $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$

$\cup$ na $(-\infty,-2)$
$\cap$ na $(-2,\infty)$
IB neex.

43. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

$\cup$ na $(0,\infty)$
$\cap$ na $(-\infty,0)$
IB neex.

44. $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$

$\cup$ na $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$
$\cap$ na $(-1,0)$
IB v $x=-1$

45. $f(x)=\dfrac{10x}{(x+2)^2}$

$\cup$ na $(4,\infty)$
$\cap$ na $(-\infty,-2)\cup(-2,4)$
IB v $x=4$

46. $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

$\cup$ na $(-1/2,1)\cup(1,\infty)$
$\cap$ na $(-\infty,-1/2)$
IB v $x=-1/2$

47. $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

$\cup$ na $(0,\infty)$
$\cap$ na $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$
IB v $x=0$

48. $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

$\cup$ na $(-\infty,0)$
$\cap$ na $(0,\infty)$
IB neex.

49. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{x^2}$

$\cup$ na $(-\infty,-2)$
$\cap$ na $(-2,0)\cup(0,\infty)$
IB v $x=-2$

50. $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$

$\cup$ na $(-2,2)$
$\cap$ na $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

IB neex.

51. $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

$\cup$ na $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

$\cap$ na $(-1,1)$

IB neex.

52. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

$\cup$ na $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},\infty)$

$\cap$ na $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$

IB v $x=\pm\sqrt{3}$

53. $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$

$\cup$ na $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}},\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$

$\cap$ na $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{4}{3}},\infty\right)$

IB v $x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

54. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$\cup$ na $\left(\sqrt{e^3},\infty\right)$

$\cap$ na $\left(0,\sqrt{e^3}\right)$

IB v $x=\sqrt{e^3}$

55. $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

$\cup$ na $(1,\infty)$

$\cap$ na $(0,1)$

IB neex.

56. $f(x)=x.\ln x$

$\cup$ na $(0,\infty)$

IB neex.

57. $f(x)=\ln(1+x^2)$

$\cup$ na $(-1,1)$

$\cap$ na $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

IB v $x=\pm 1$

58. $f(x)=\ln(4-x^2)$

$\cap$ na $(-2,2)$

IB neex.

59. $f(x) = xe^{x}$

$\cup$ na $(-2, \infty)$
$\cap$ na $(-\infty, -2)$
IB v $x = -2$

60. $f(x) = xe^{-x}$

$\cup$ na $(2, \infty)$
$\cap$ na $(-\infty, 2)$
IB v $x = 2$

61. $f(x) = x^2 e^{-x}$

$\cup$ na $(-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, \infty)$
$\cap$ na $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$
IB v $x = 2 \pm \sqrt{2}$

62. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$\cup$ na $(-1/2, 0) \cup (0, \infty)$
$\cap$ na $(-\infty, -1/2)$
IB v $x = -1/2$

63. $f(x) = \dfrac{1}{e^{x} - 1}$

$\cup$ na $(0, \infty)$
$\cap$ na $(-\infty, 0)$
IB neex.

V nasledujúcich úlohách určte priebeh funkcie a načrtnite graf:

64. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

65. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

66. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

67. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 5$

68. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$

69. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 100$

70. $f(x) = (x-1)^5$

71. $f(x) = (x^2 - 1)^4$

72. $f(x) = (2 - x^2)^2$

73. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

74. $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x+2}$

75. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

76. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

77. $f(x) = \dfrac{10x}{(x+2)^2}$

78. $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

79. $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

80. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

81. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{x^2}$

82. $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$

83. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

84. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}+x$

85. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

86. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

87. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

88. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

89. $f(x)=x.\ln x$

90. $f(x)=\ln(1+x^2)$

91. $f(x)=\ln(5-x^2)$

92. $f(x)=xe^x$

93. $f(x)=xe^{-x}$

94. $f(x)=x^2e^{-x}$

95. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

96. $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$

97. $f(x)=\dfrac{0{,}05x^2-0{,}8x+96{,}8}{x}$

98. $f(x)=\dfrac{12x^2+30x+432}{x}$

99. $f(x)=\dfrac{0{,}2x^2+10x+320}{x}$

100. $f(x)=\dfrac{x^2+13x+625}{x}$

101. $f(x)=\dfrac{3x^2+17x+3072}{x}$

102. $f(x)=\dfrac{-x^2+34x-81}{x}$

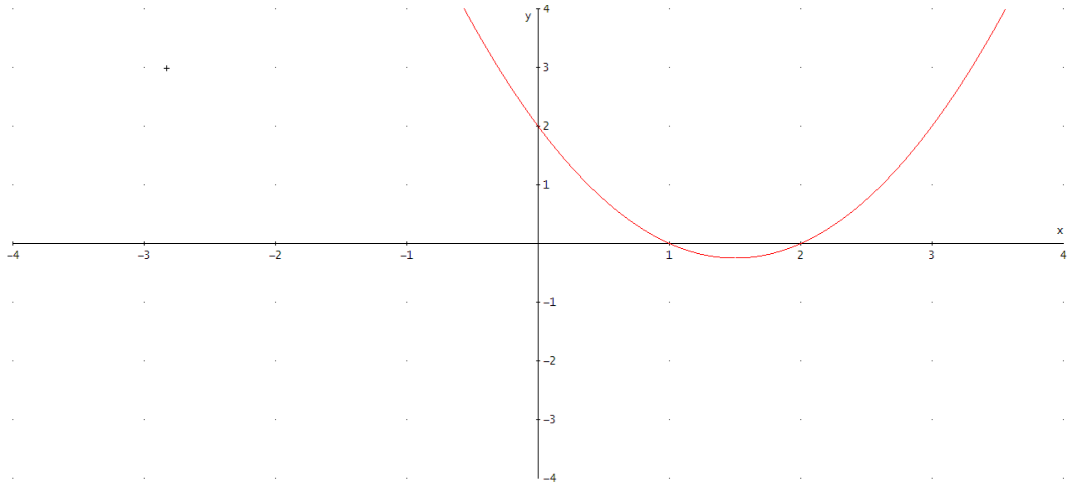
103. $f(x)=\dfrac{-3x^2+102x-300}{x}$

104. $f(x)=\dfrac{-2x^2+56x-288}{x}$

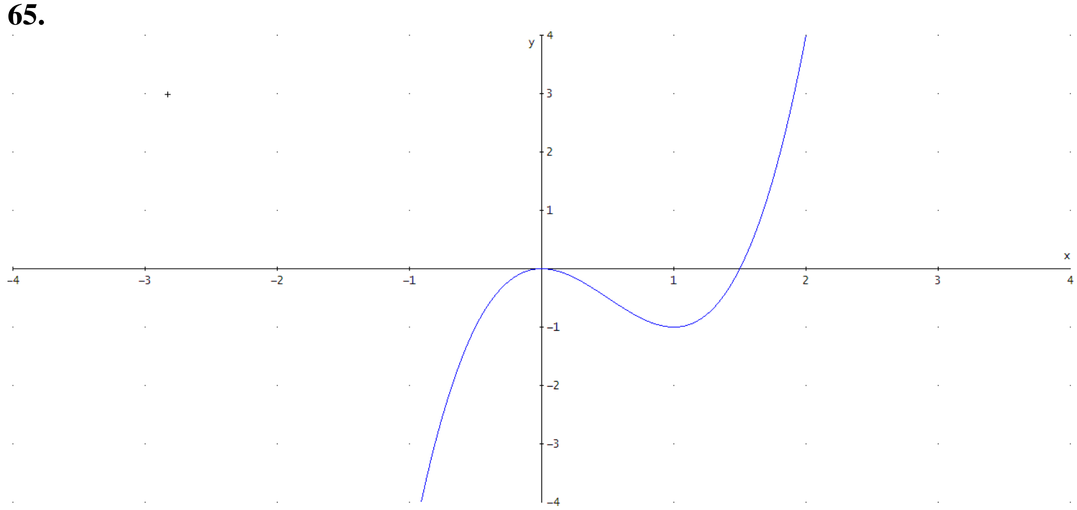
105. $f(x)=\dfrac{-x^2+72x-225}{x}$

Výsledky:

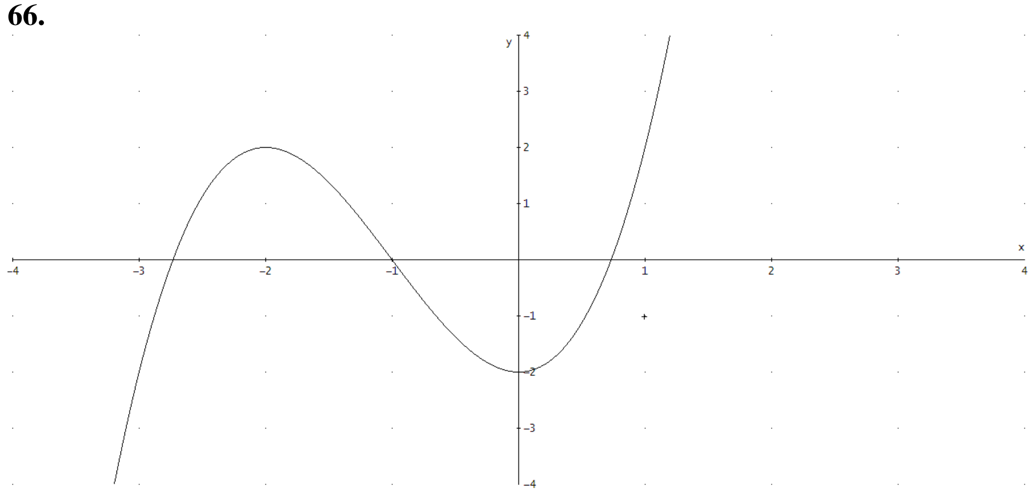
64.



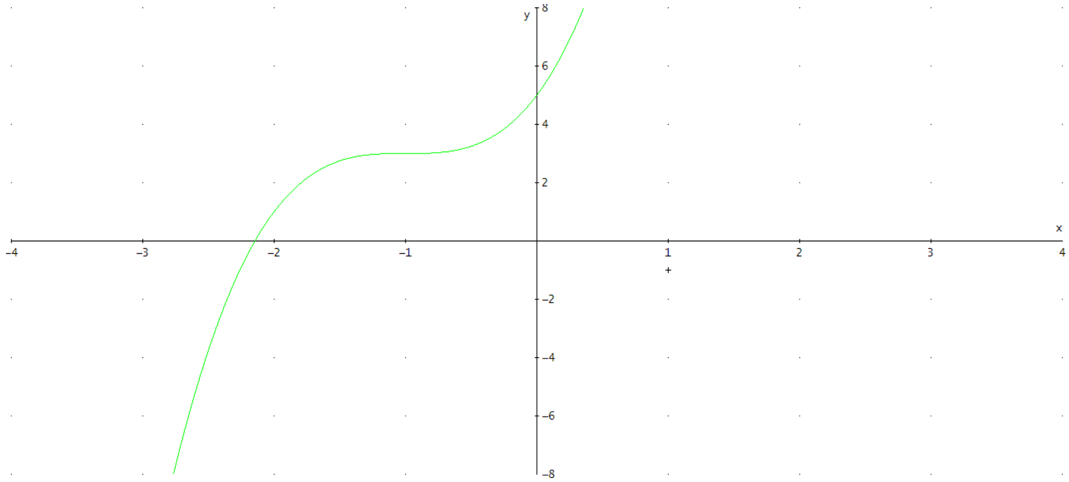
65.



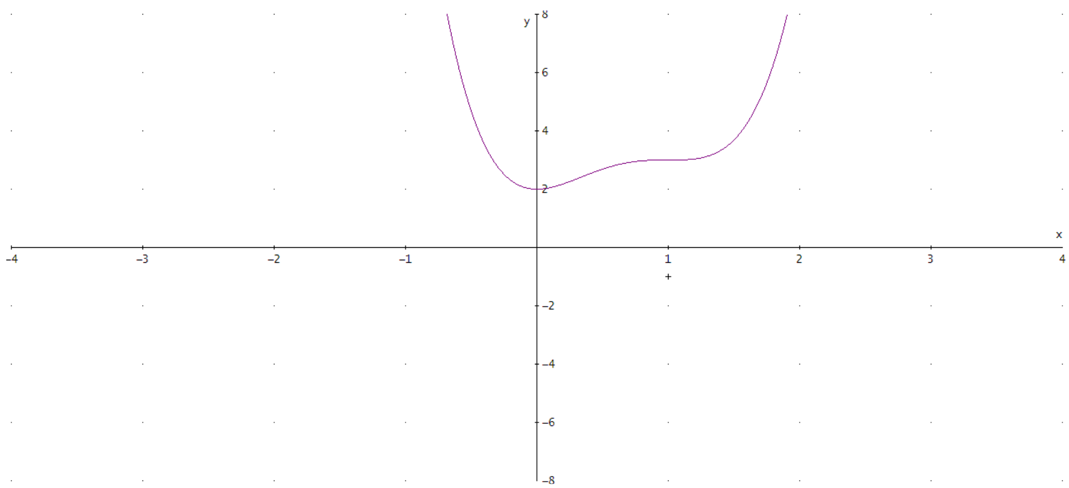
66.



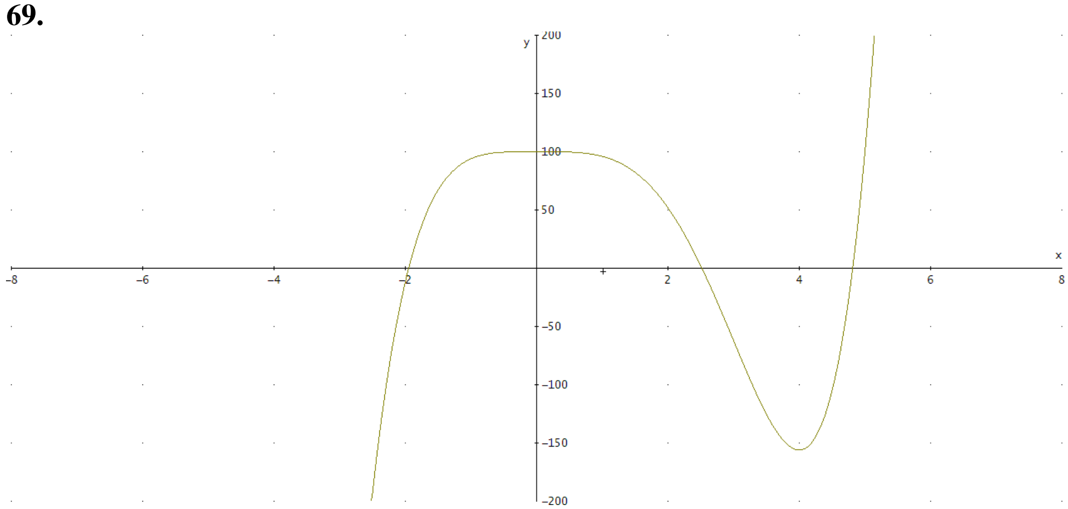
67.


y
8
6
4
2
x
–4
–3
–2
–1
1
2
3
4
–2
–4
–6
–8

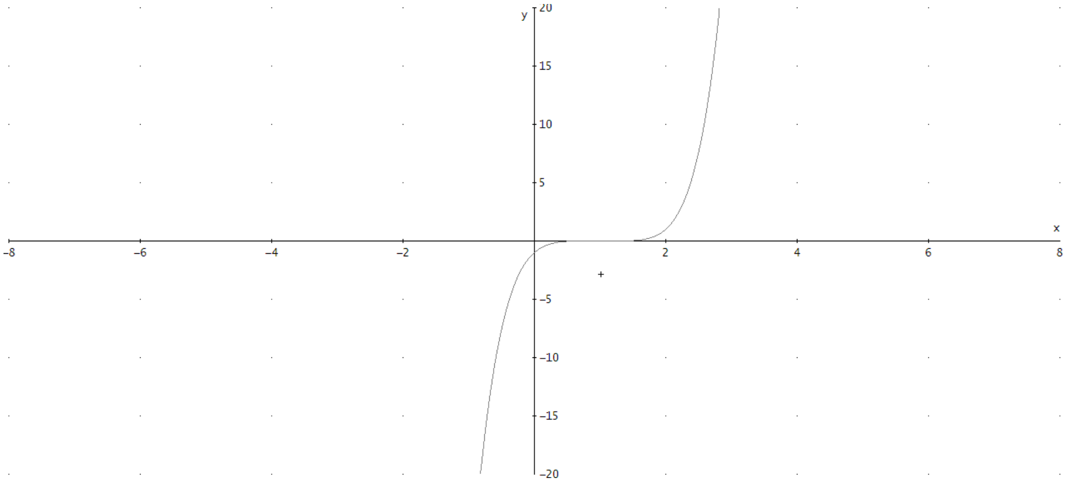
68.


y
8
6
4
2
x
–4
–3
–2
–1
1
2
3
4
–2
–4
–6
–8

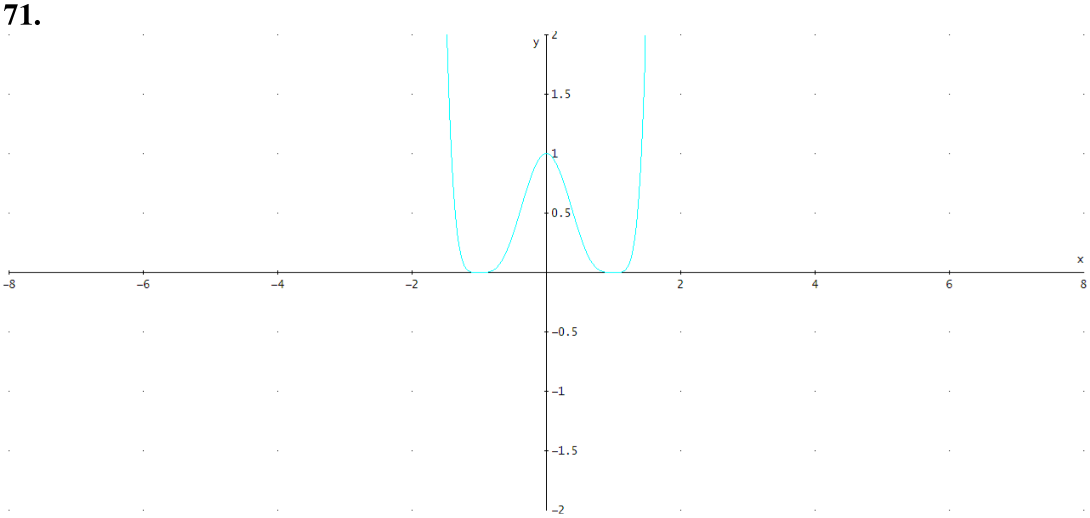
69.


y
200
150
100
50
x
–8
–6
–4
–2
2
4
6
8
–50
–100
–150
–200

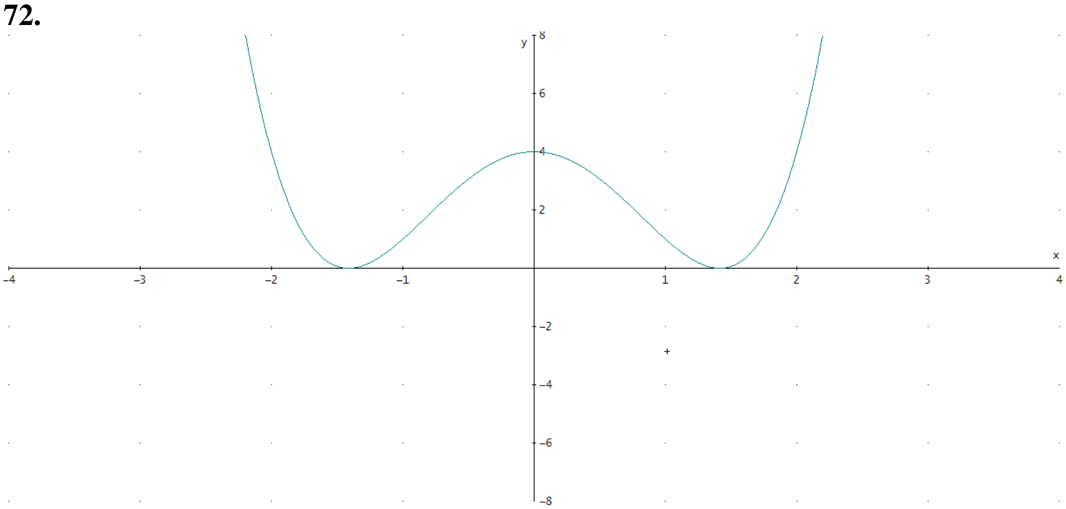
70.


y
20
15
10
5
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
−5
−10
−15
−20

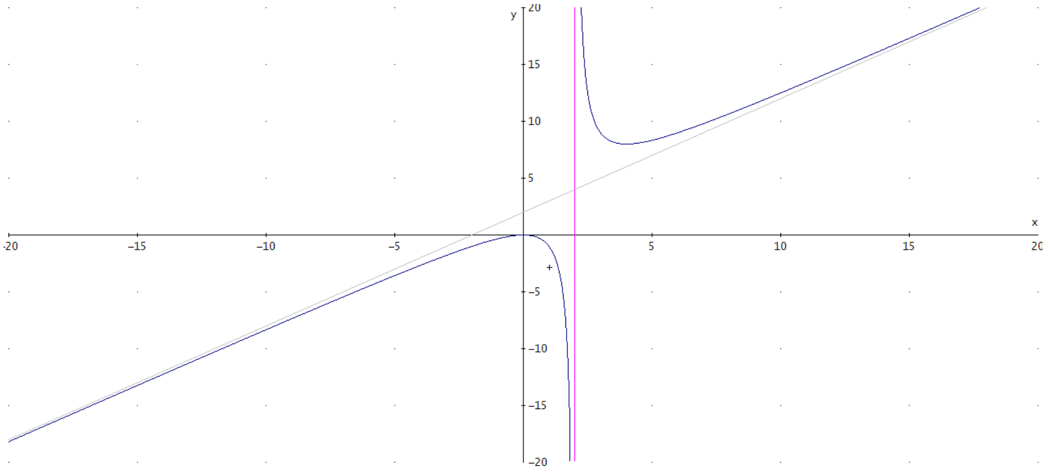
71.


y
2
1.5
1
0.5
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
−0.5
−1
−1.5
−2

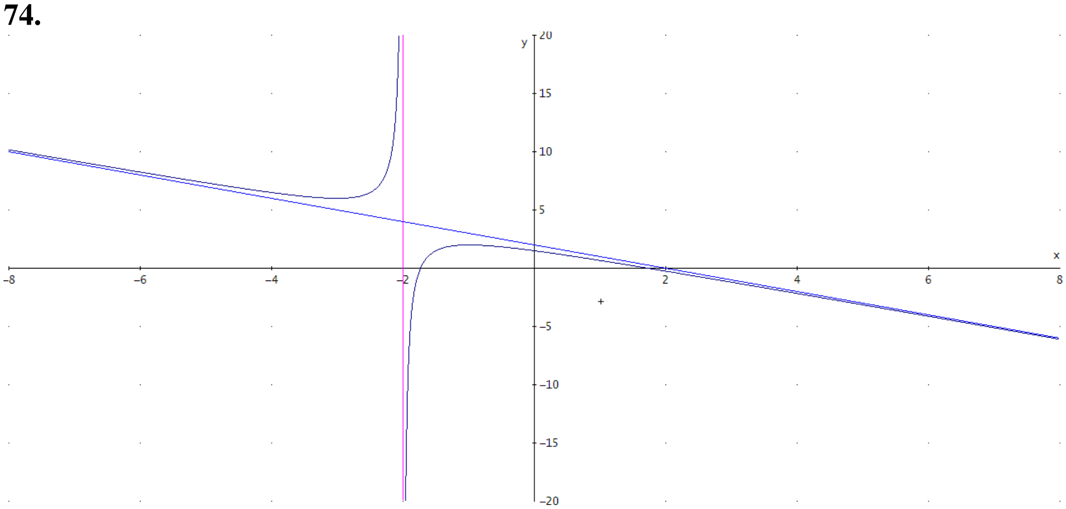
72.


y
8
6
4
2
x
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
−2
−4
−6
−8

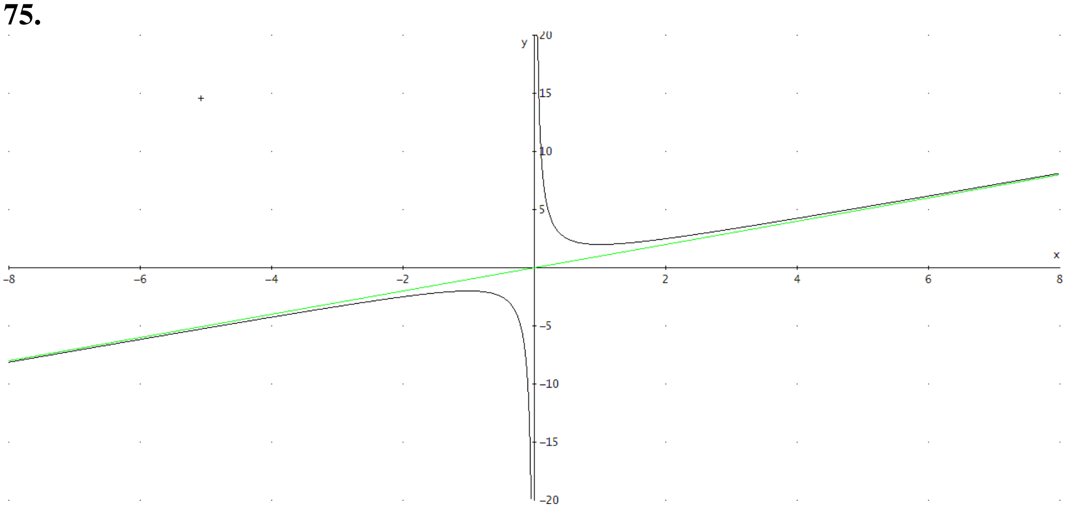
73.


y
x
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
-15
-10
-5
5
10
15

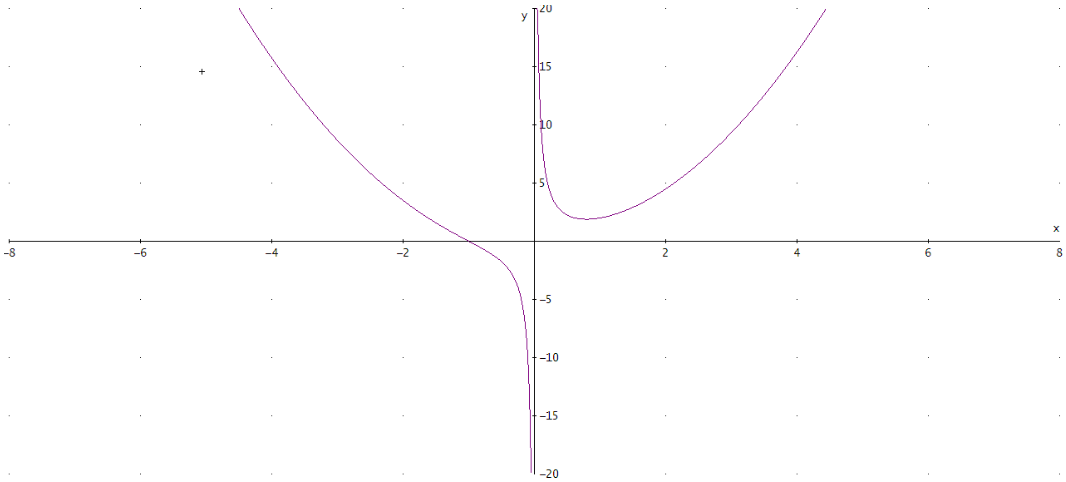
74.


y
x
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8

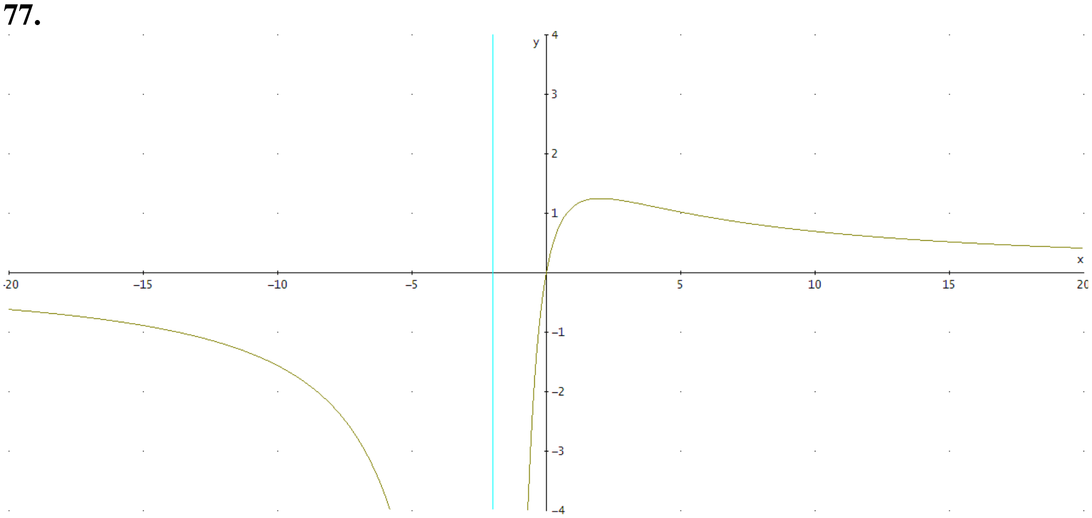
75.


y
x
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8

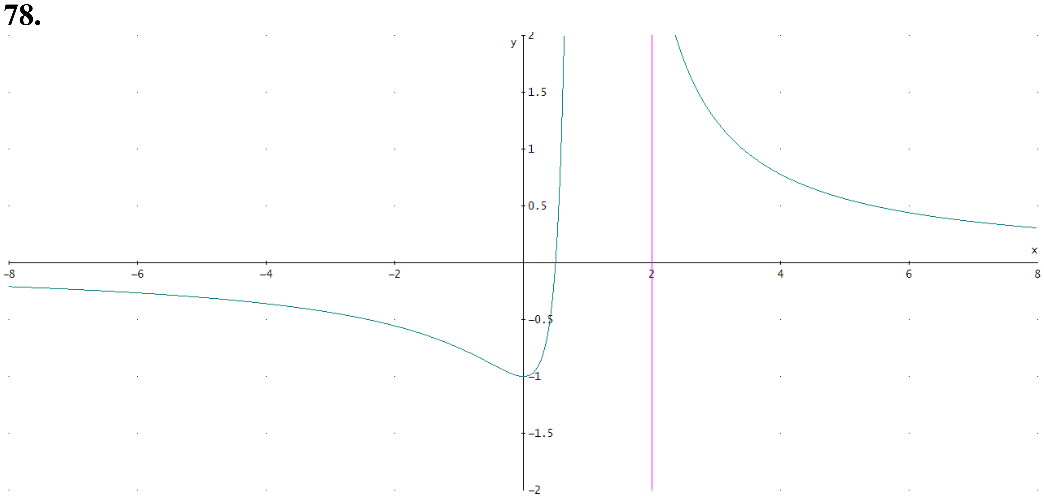
76.


x
y
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20

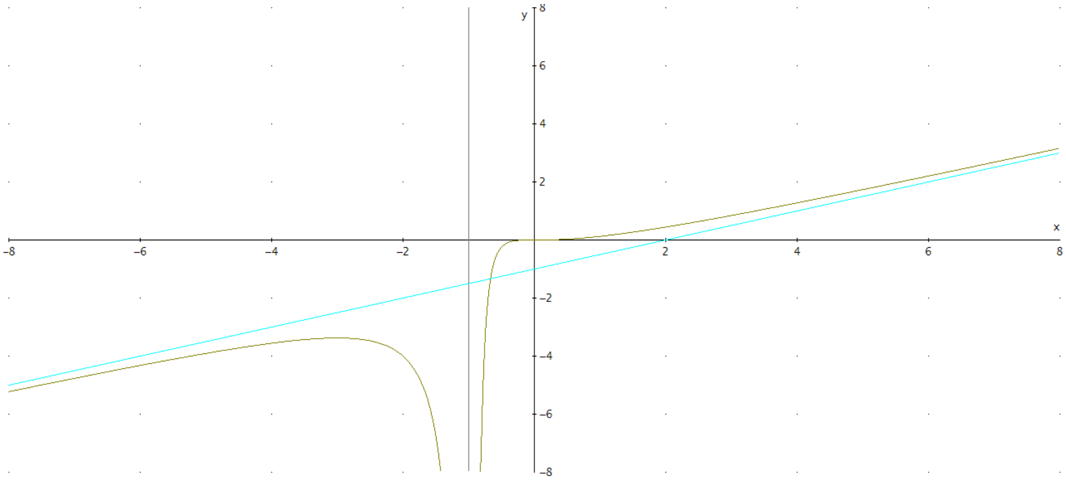
77.


x
y
-20
-15
-10
-5
5
10
15
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4

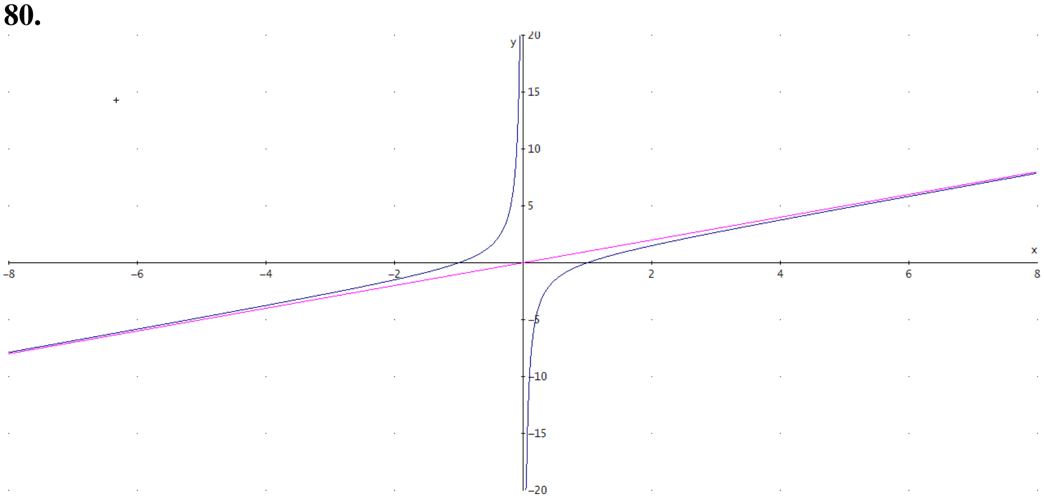
78.


x
y
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2

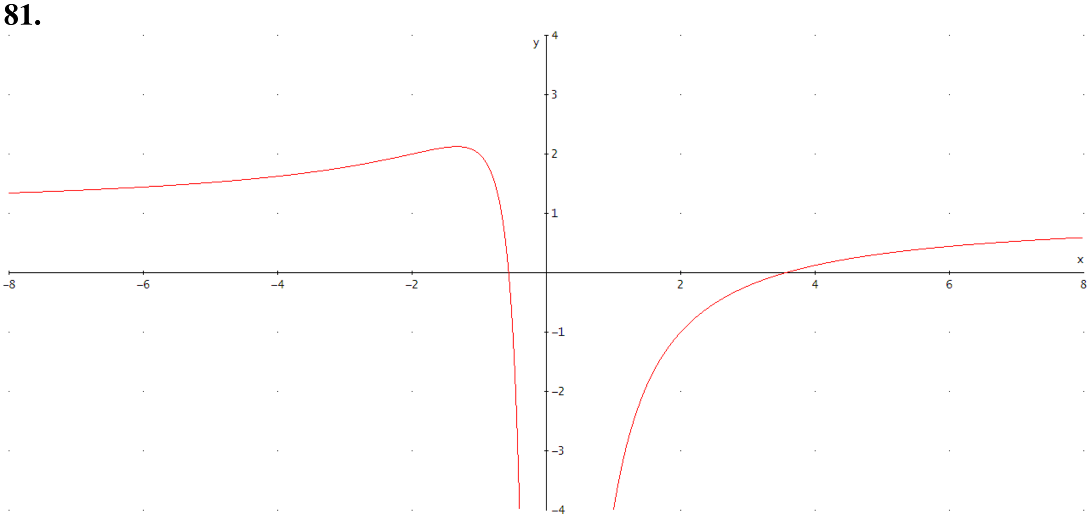
79.


y
8
6
4
2
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
−2
−4
−6
−8

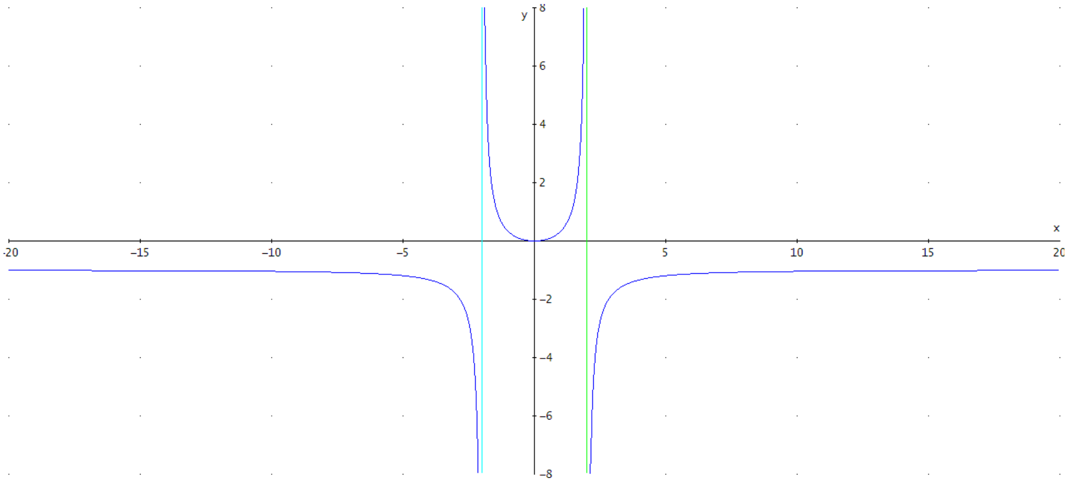
80.


y
20
15
10
5
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
−5
−10
−15
−20

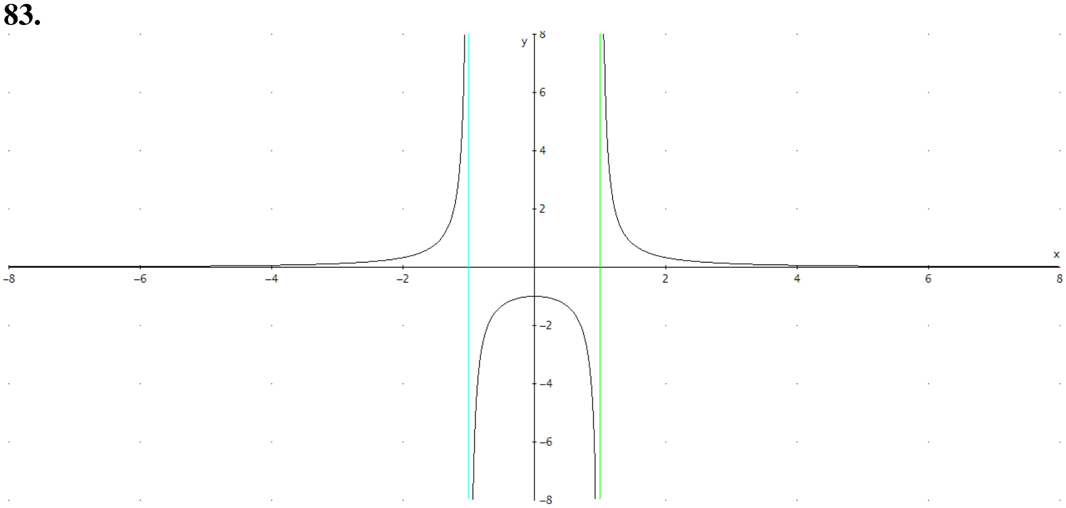
81.


y
4
3
2
1
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
−1
−2
−3
−4

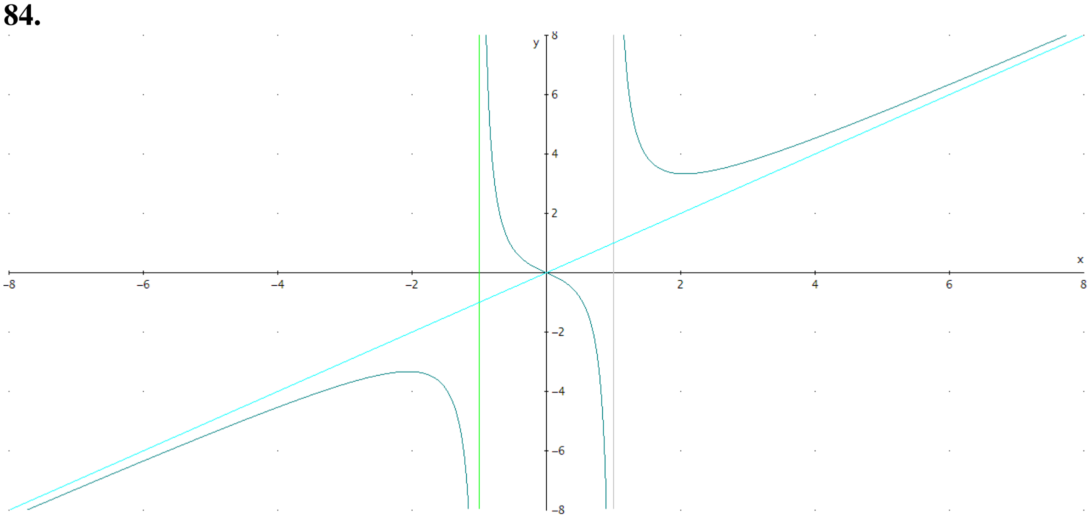
82.


y
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
x
-20
−15
−10
−5
5
10
15
20

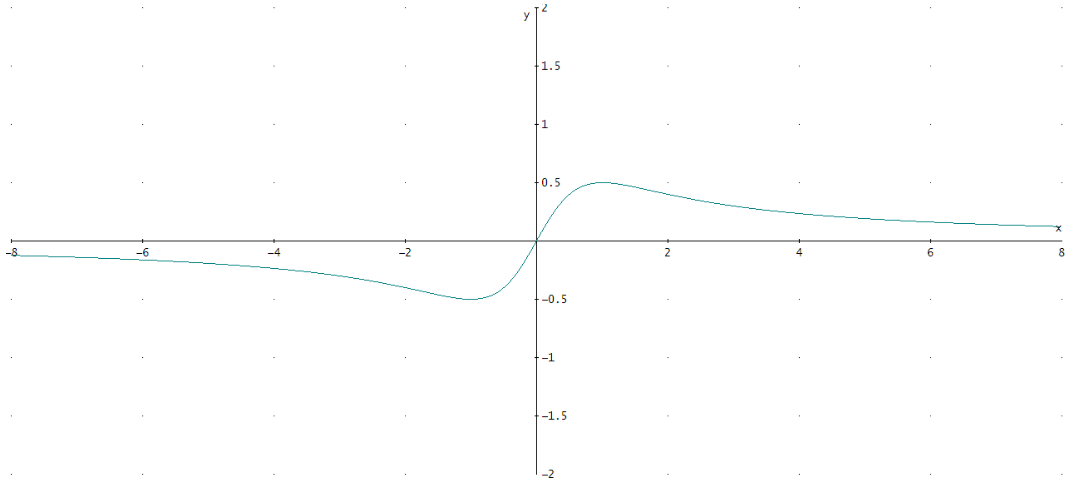
83.


y
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

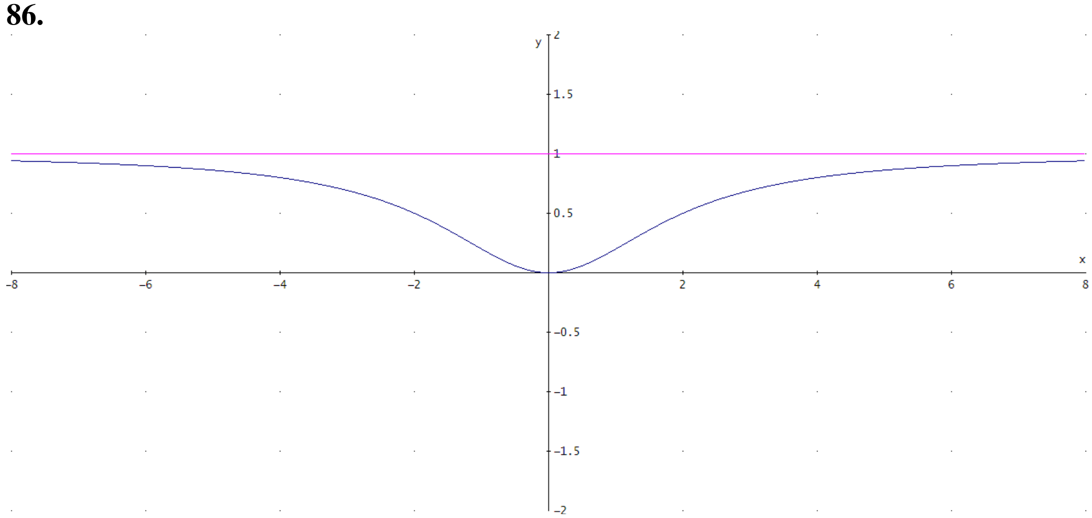
84.


y
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

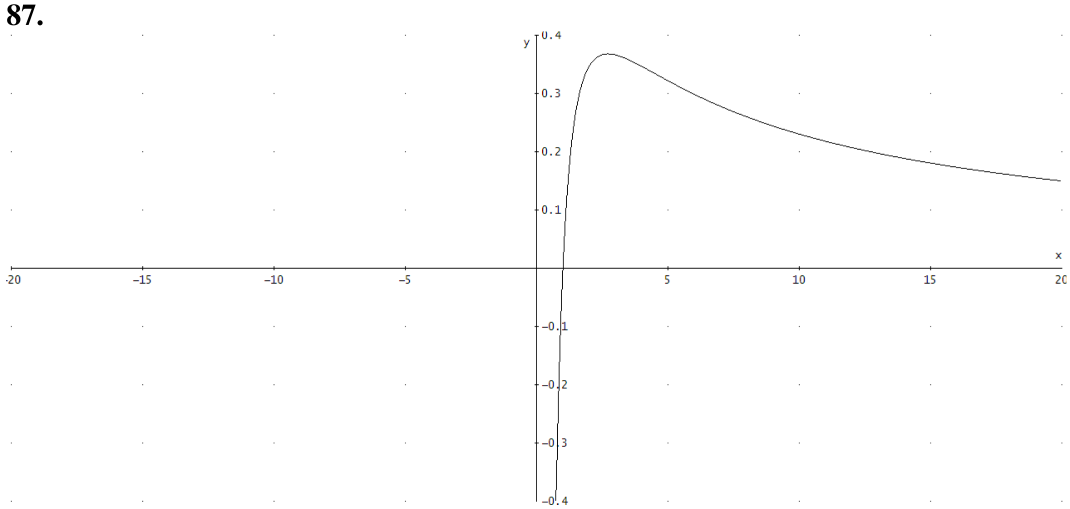
85.


y
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

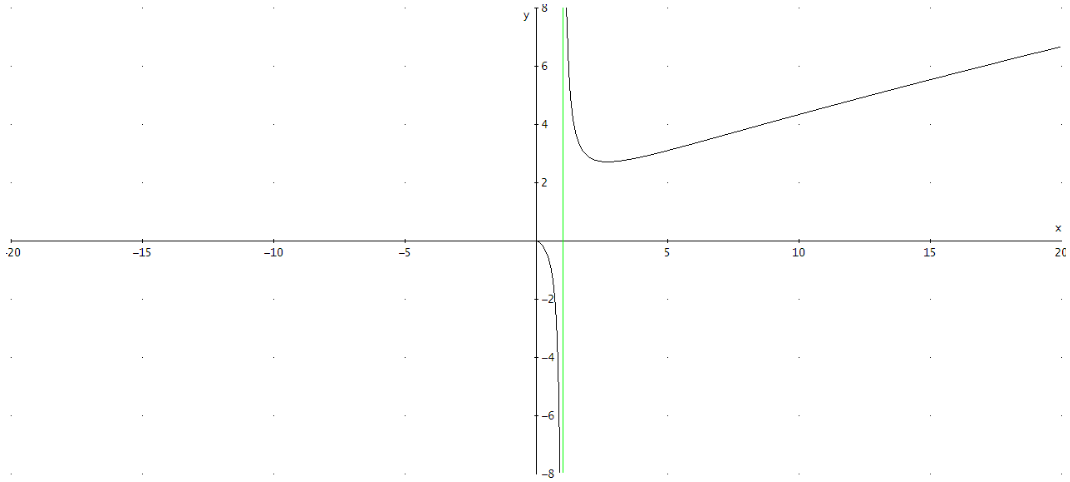
86.


y
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

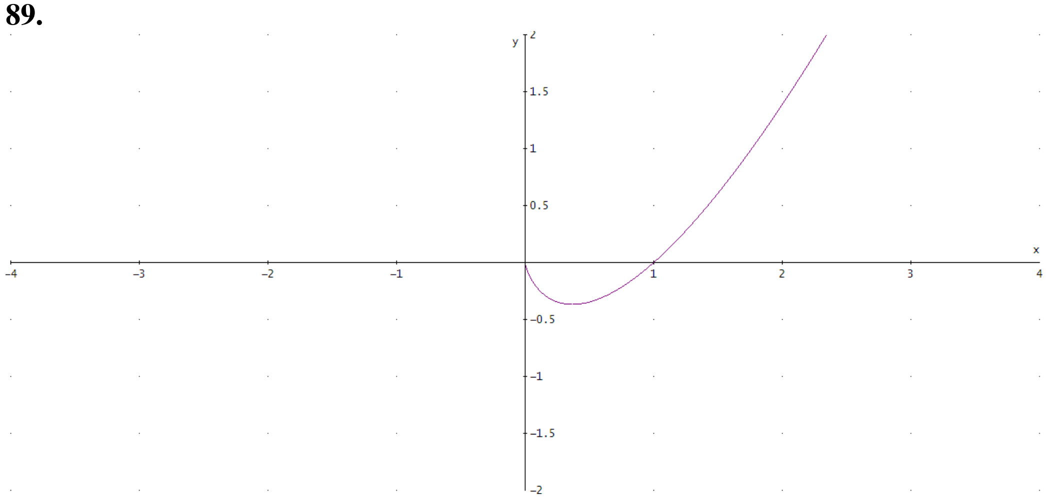
87.


y
0.4
0.3
0.2
0.1
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
x
−20
−15
−10
−5
5
10
15
20

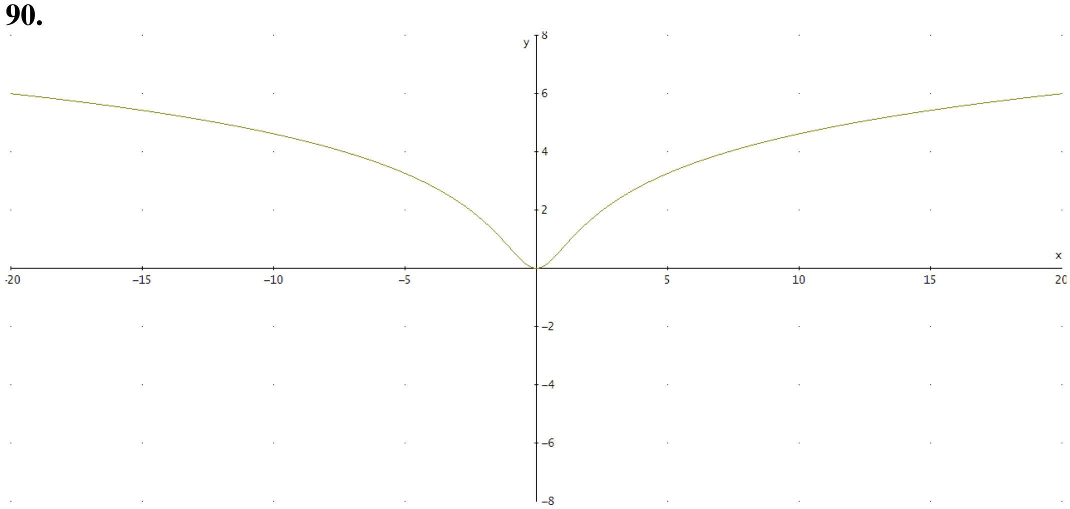
88.


y
8
6
4
2
x
-20
-15
-10
-5
5
10
15
20
-2
-4
-6
-8

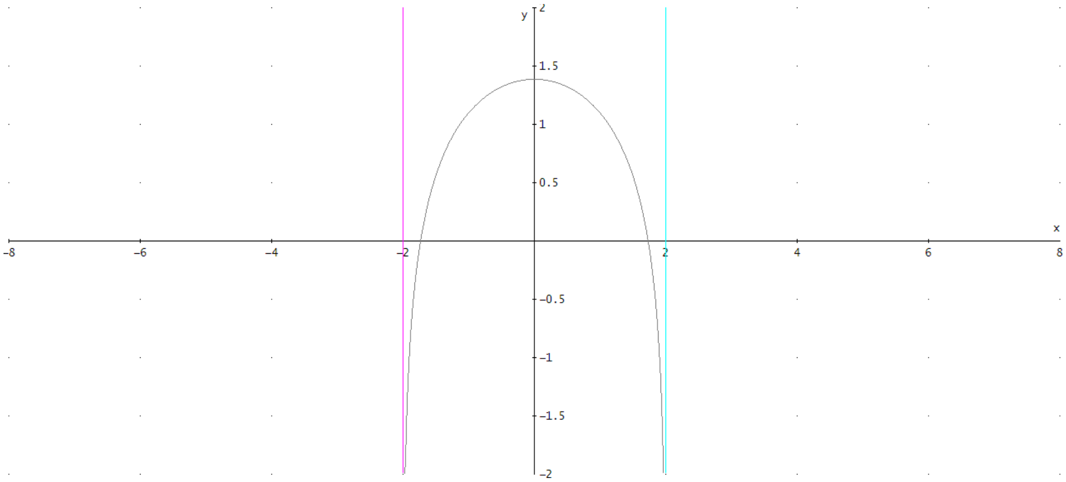
89.


y
2
1.5
1
0.5
x
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-0.5
-1
-1.5
-2

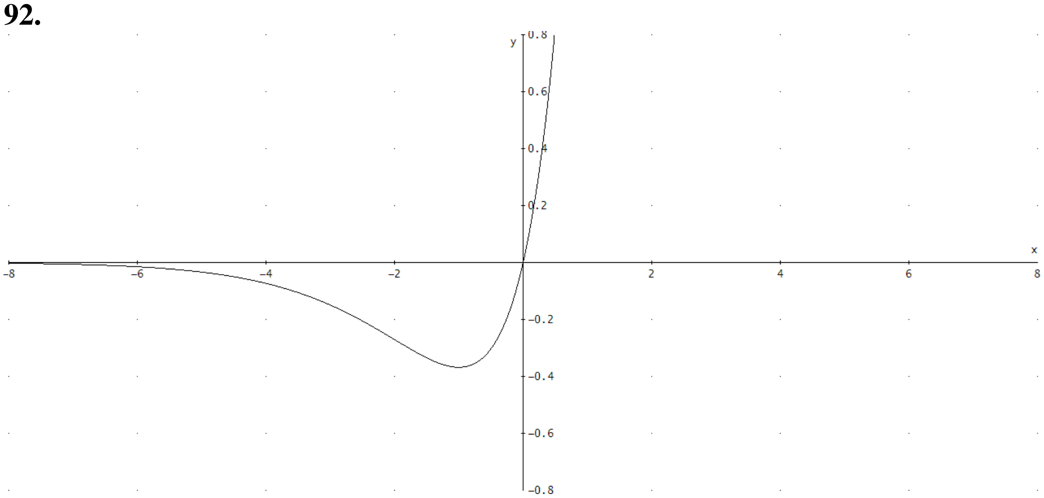
90.


y
8
6
4
2
x
-20
-15
-10
-5
5
10
15
20
-2
-4
-6
-8

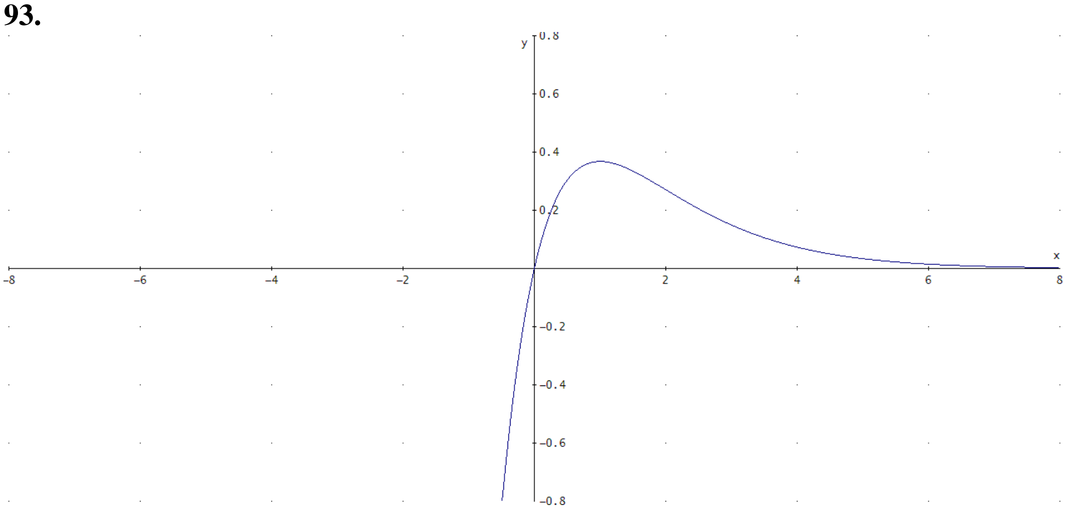
91.


y
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

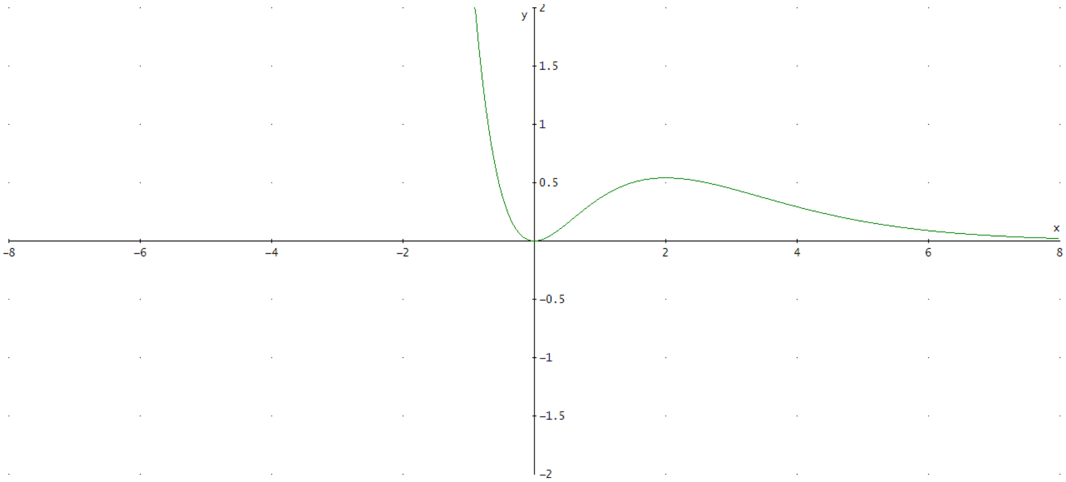
92.


y
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

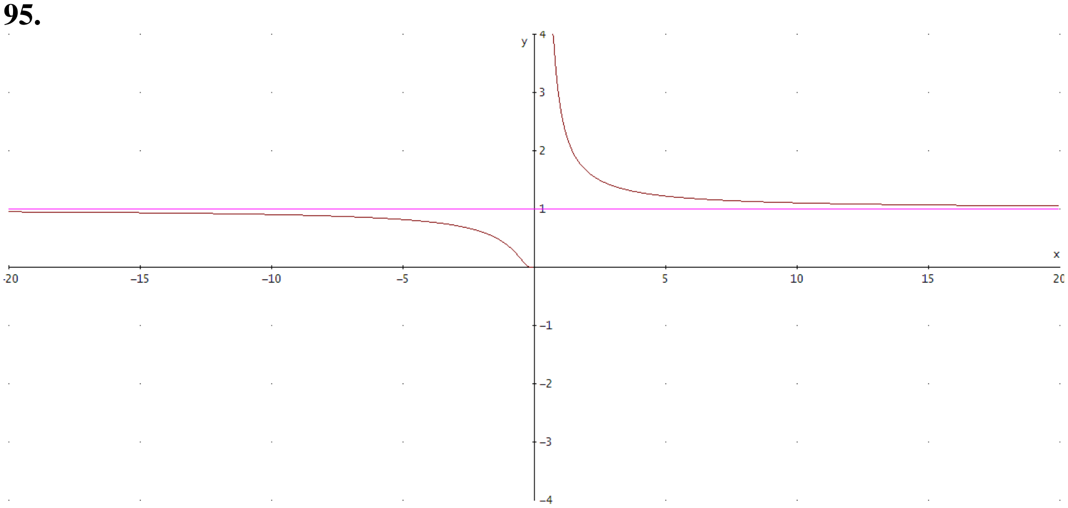
93.


y
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

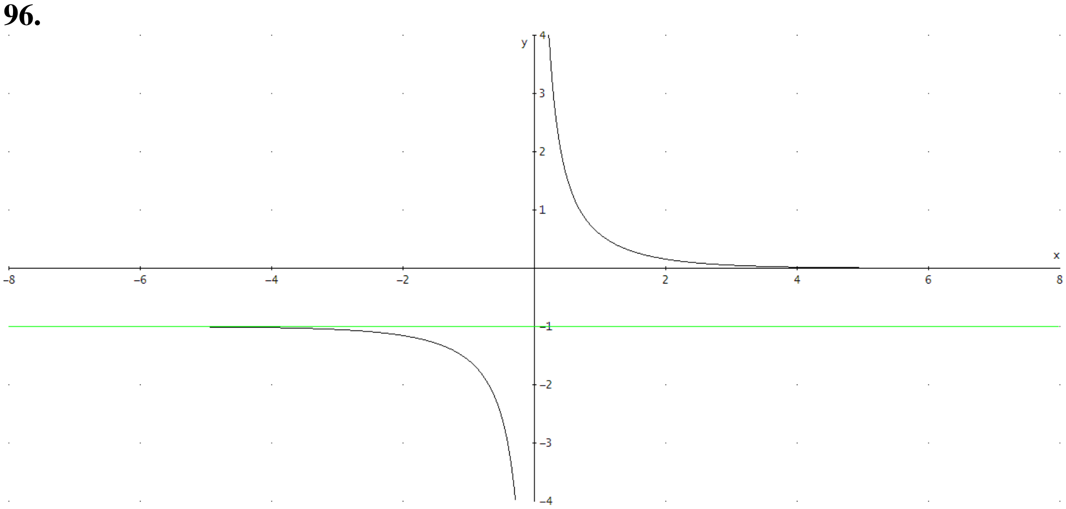
94.


y
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

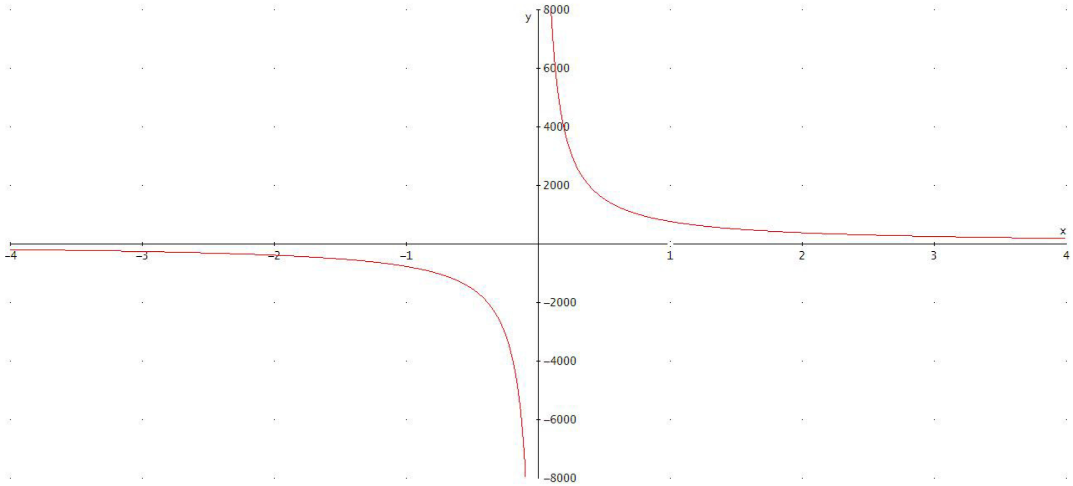
95.


y
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
x
-20
−15
−10
−5
5
10
15
20

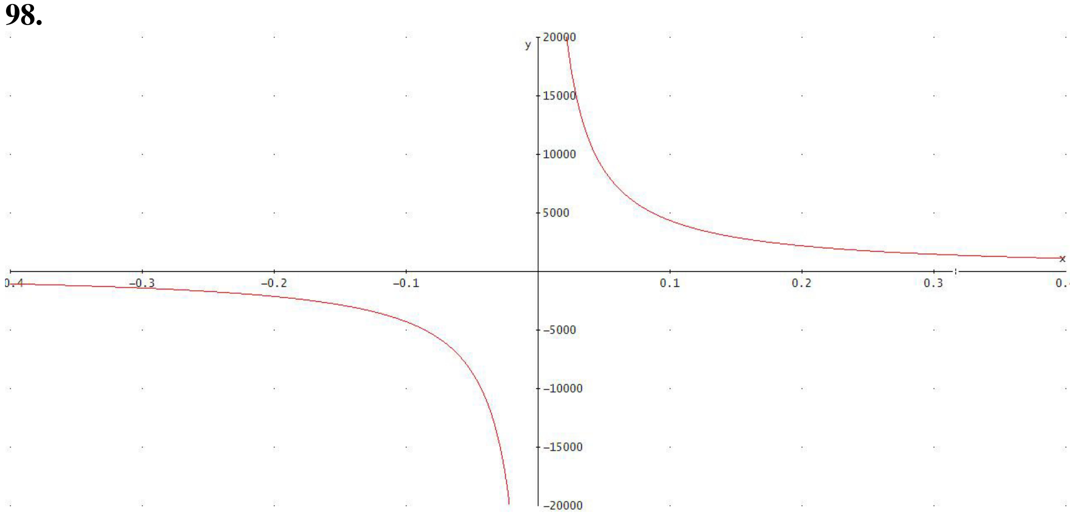
96.


y
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
x
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8

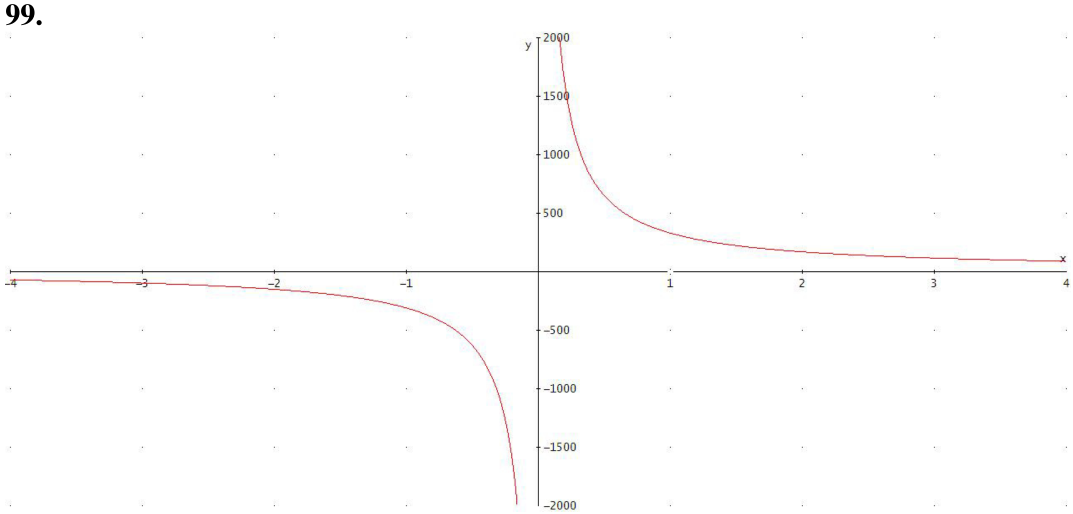
97.


y
8000
6000
4000
2000
−2000
−4000
−6000
−8000
x
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

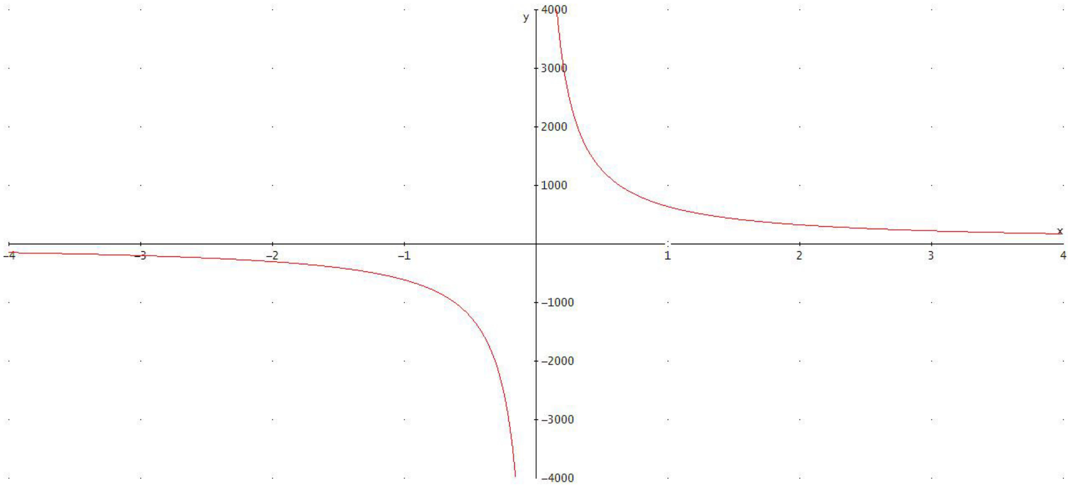
98.


y
20000
15000
10000
5000
−5000
−10000
−15000
−20000
x
−0.3
−0.2
−0.1
0.1
0.2
0.3

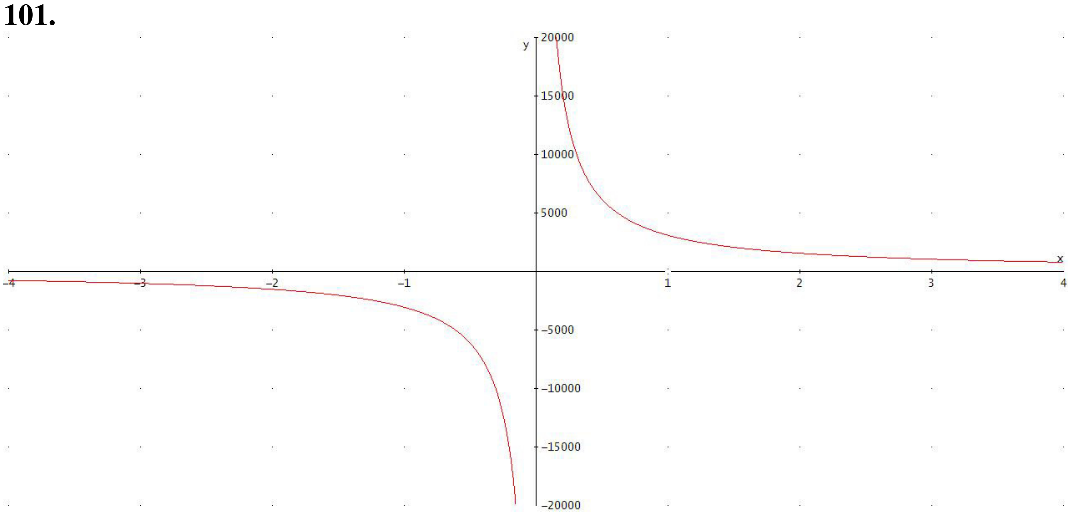
99.


y
2000
1500
1000
500
−500
−1000
−1500
−2000
x
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

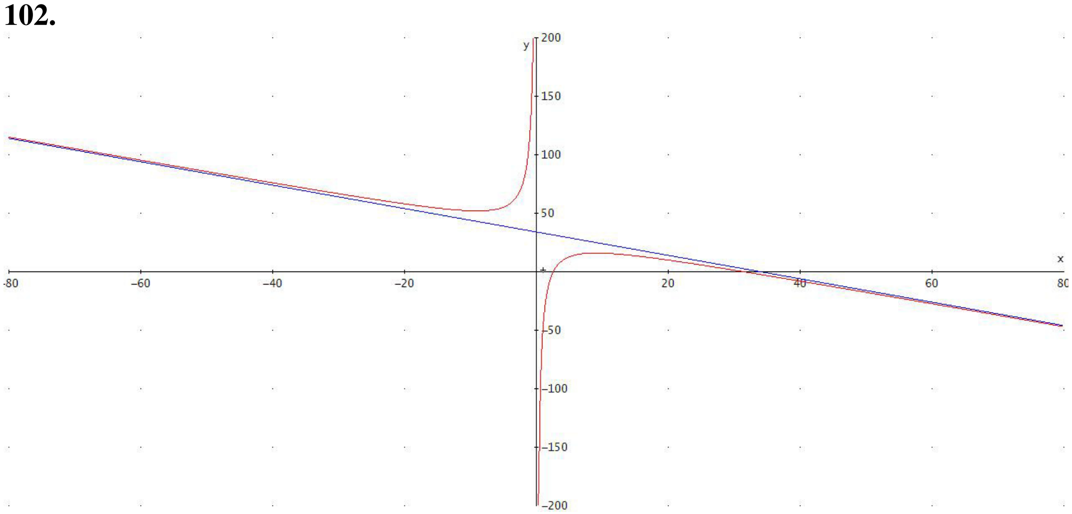
100.


y
4000
3000
2000
1000
−1000
−2000
−3000
−4000
x
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

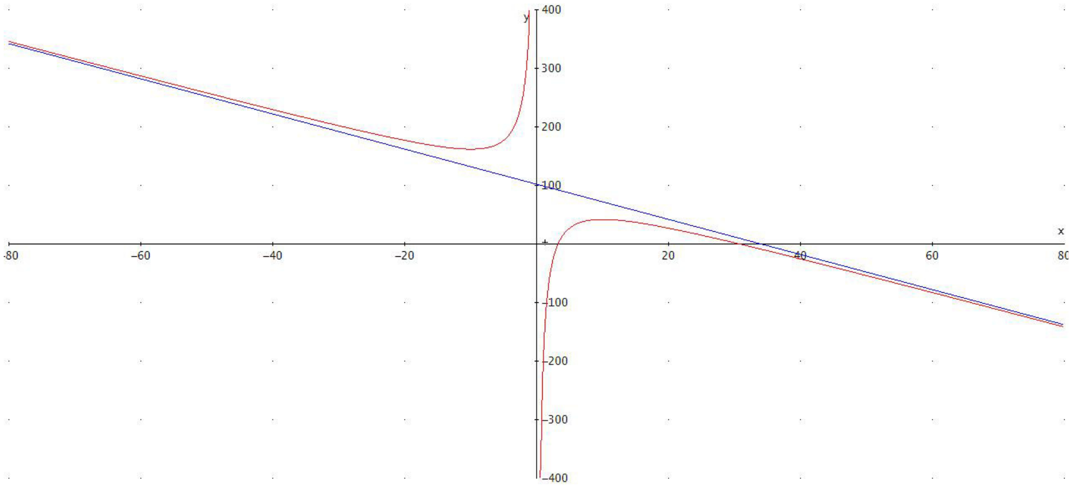
101.


y
20000
15000
10000
5000
−5000
−10000
−15000
−20000
x
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

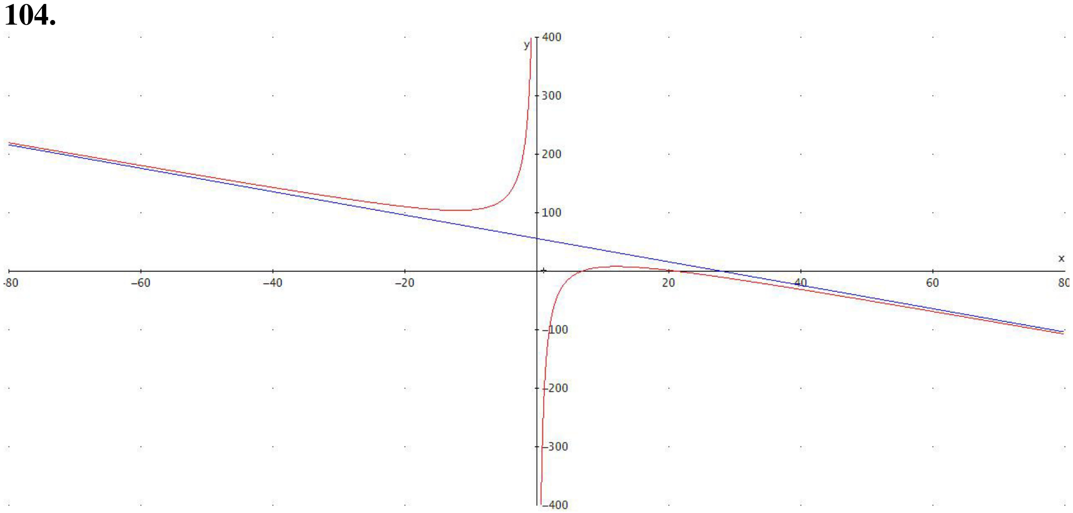
102.


y
200
150
100
50
−50
−100
−150
−200
x
-80
−60
−40
−20
20
40
60
80

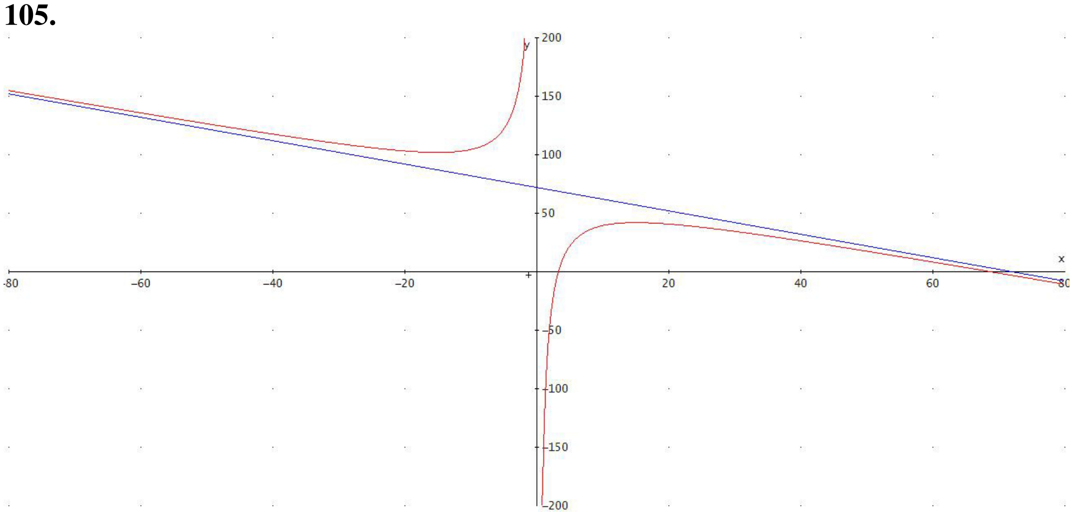
103.


y
400
300
200
100
-100
-200
-300
-400
x
-80
-60
-40
-20
20
40
60
80

104.


y
400
300
200
100
-100
-200
-300
-400
x
-80
-60
-40
-20
20
40
60
80

105.


y
200
150
100
50
-50
-100
-150
-200
x
-80
-60
-40
-20
20
40
60
80

7 OPTIMALIZAČNÉ ÚLOHY

7.1 Riešené úlohy

V daných úlohách je potrebné hľadať extrémy funkcie. Predpokladáme existenciu prvej a druhej derivácie funkcie. Pomocou 1. derivácie funkcie nájdeme stacionárne body x_0, v ktorých sa môžu vyskytovať extrémy ($f'(x_0)=0$). Pomocou 2. derivácie funkcie zistíme, o aký typ extrému sa jedná.

Ak je $f''(x_0)>0$, funkcia $f(x)$ nadobúda v bode x_0 lokálne minimum.
Ak je $f''(x_0)<0$, funkcia $f(x)$ nadobúda v bode x_0 lokálne maximum.
Ak je $f''(x_0)=0$, je potrebný výpočet vyšších derivácií (Matematika I a jej využitie v ekonómii).

Ďalšou možnosťou na určenie extrému v stacionárnom bode je využitie monotónnosti funkcie (Matematika I a jej využitie v ekonómii).

Príklad 7.1 Náklady na výrobu tovaru sú 5 eur a odhaduje sa, že ak sa bude tovar predávať za x eur, kúpia zákazníci približne $18-x$ kusov tovaru za deň. Ako stanoviť cenu tovaru, aby sa dosiahol maximálny denný zisk?

Riešenie:
V tejto úlohe je potrebné zostaviť funkciu zisku $P(x)=R(x)-C(x)$, kde $R(x)$ je funkcia príjmov a $C(x)$ je funkcia nákladov a potom hľadať jej maximum.

$R(x)=x(18-x)$ a $C(x)=5(18-x)$, potom $P(x)=(x-5)(18-x)$

$P'(x)=23-2x$, $23-2x=0 \Leftrightarrow x=11{,}5$

$P''(x)=-2<0$, z čoho vyplýva, že vo všetkých bodoch x a teda aj v stacionárnom bode $x=11{,}5$ nadobúda funkcia zisku lokálne maximum.

Aby sa dosiahol maximálny denný zisk, je potrebné predávať tovar za 11,5 eur.

Príklad 7.2 Pestovateľ ovocia odhaduje, že ak má zasadených 40 broskýň, priemerná úroda z jedného stromu je 600 broskýň. Každá dodatočne zasadená broskyňa znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 6 broskýň. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

Riešenie:
V tejto úlohe je potrebné zostaviť funkciu, ktorá popisuje veľkosť úrody $U(x)$, ktorú získame vynásobením počtu stromov počtom kusov ovocia na jednom strome.

$U(x)=(40+x)(600-6x)$

$U'(x)=360-12x$, $360-12x=0 \Leftrightarrow x=30$

$U''(x) = -12 < 0$, z čoho vyplýva, že v stacionárnom bode $x = 30$ nadobúda funkcia úrody lokálne maximum.

Aby sa dosiahla maximálna úroda, je potrebné zasadiť ešte 30 stromov.

Príklad 7.3 Celkové denné náklady v dolároch na výrobu x kusov výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 0{,}04x^2 + 140x + 15\,000$. Predajná cena bola stanovená na $300 - 0{,}06x$ dolárov za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.
b) Určte ponuku, ktorá maximalizuje denné výnosy.
c) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny denný zisk.

Riešenie:

a) Výroba zisková, keď $P(x) = R(x) - C(x) > 0$.

$$P(x) = -0{,}1x^2 + 160x - 15\,000 > 0 \Leftrightarrow x \in (100{,}1500).$$

b) Denné výnosy sú vytvorené funkciou príjmu $R(x) = -0{,}06x^2 + 300x$.

$$R'(x) = -0{,}12x + 300$$

$$-0{,}12x + 300 = 0 \Leftrightarrow x = 2\,500$$

$$R''(x) = -0{,}12 < 0$$

Denné výnosy budú maximálne, keď sa vyrobí 2 500 výrobkov.

c) Maximálny denný zisk určíme z funkcie zisku $P(x) = -0{,}1x^2 + 160x - 15\,000$.

$$P'(x) = -0{,}2x + 160$$
$$-0{,}2x + 160 = 0 \Leftrightarrow x = 800$$
$$P''(x) = -0{,}2 < 0$$

Denný zisk bude maximálny, keď sa vyrobí 800 výrobkov.

Príklad 7.4 Celkové denné náklady v eurách na výrobu q kusov tovaru sú dané funkciou $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$.

a) Pri akej výške produkcie sú priemerné denné náklady na jeden kus tovaru minimálne?
b) Pri akej výške produkcie sú priemerné denné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?

Riešenie:

a) Funkcia priemerných nákladov je $AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{3q^2 + 5q + 75}{q}$. Pri hľadaní extrému postupujeme podobne ako v predchádzajúcich úlohách.

$AC'(q) = \dfrac{3q^2 - 75}{q^2}$, $\dfrac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \Leftrightarrow q = \pm 5$. Z ekonomického hľadiska je ako riešenie prípustný iba koreň $q = 5$.

$AC''(q) = \dfrac{150}{q^3} \Rightarrow AC''(5) = \dfrac{150}{5^3} > 0$, preto v stacionárnom bode $q = 5$ nadobúda funkcia priemerných denných nákladov lokálne minimum.

b) Z teórie vieme, že priemerné náklady na výrobu q_0 výrobkov sú rovné marginálnym nákladom na výrobu q_0 výrobkov práve v bode q_0, v ktorom funkcia priemerných nákladov nadobúda lokálne minimum, teda platí $= MC(q_0) = AC(q_0)$.

Marginálne náklady $MC(q) = C'(q) = 6q + 5$ a $MC(5) = 35$.

Priemerné náklady $AC(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ a $AC(5) = 35$. Teda ľavá strana sa rovná pravej.

7.2 Neriešené úlohy

1. Náklady na výrobu tovaru sú 4 eurá a odhaduje sa, že ak sa bude tovar predávať za x eur, kúpia zákazníci približne $20 - x$ kusov tovaru za deň. Ako stanoviť cenu tovaru, aby sa dosiahol maximálny denný zisk?

12 eur

2. Náklady na výrobu tovaru sú 7 eur a odhaduje sa, že ak sa bude tovar predávať za x eur, kúpia zákazníci približne $46 - 2x$ kusov tovaru za deň. Ako stanoviť cenu tovaru, aby sa dosiahol maximálny denný zisk?

15 eur

3. Náklady na výrobu tovaru sú 12 eur a odhaduje sa, že ak sa bude tovar predávať za x eur, kúpia zákazníci približne $126 - 3x$ kusov tovaru za týždeň. Ako stanoviť cenu tovaru, aby sa dosiahol maximálny týždenný zisk?

27 eur

4. Obchod predáva rádiá po 40 eur za kus a pri tejto cene predá 51 kusov mesačne. Majiteľ obchodu chce zvýšiť cenu a očakáva, že každé euro zvýšenia ceny prinesie zníženie mesačného predaja o 3 rádiá. Ak obchod nakupuje rádiá po 25 eur za kus, pri akej cene bude jeho mesačný zisk maximálny?

41 eur

5. Autopredajca nakupuje určitú značku áut po 3 800 eur a predáva ich po 6 400 eur. Pri tejto cene ich mesačne predá 10. Autopredajca zníži cenu a očakáva, že každé zníženie o 100 eur prinesie zvýšenie mesačného predaja o 1 auto. Pri akej cene za auto bude mesačný zisk maximálny?

5 600 eur

6. Výrobca predáva lampy po 6 dolárov a pri tejto cene predá 3000 kusov mesačne. Výrobca chce zvýšiť cenu a očakáva zvýšenie zisku, pričom každé zvýšenie ceny o 1 dolár prinesie o 250 kusov menej predaných lámp za mesiac.

Výrobné náklady sú 4 doláre. Pri akej cene sa dosiahne maximálny mesačný zisk?

11 dolárov

7. Pestovateľ citrusov odhaduje, že ak má zasadených 60 pomarančovníkov, priemerná úroda z jedného stromu je 400 pomarančov. Každý dodatočne zasadený pomarančovník znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 4 pomaranče. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

20 pomarančovníkov

8. Pestovateľ citrusov odhaduje, že ak má zasadených 60 citrónovníkov, priemerná úroda z jedného stromu je 475 citrónov. Každý dodatočne zasadený citrónovník znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 5 citrónov. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

18 citrónovníkov

9. Pestovateľ citrusov odhaduje, že ak má zasadených 40 stromov mandarínok, priemerná úroda z jedného stromu je 600 plodov mandarínok. Každý dodatočne zasadený strom znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 6 plodov mandarínok . Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

30 stromov

10. Pestovateľ ovocia odhaduje, že ak má zasadených 10 jabloní, priemerná úroda z jedného stromu je 240 jabĺk. Každá dodatočne zasadená jabloň znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 4 jablká. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

25 jabloní

11. Pestovateľ ovocia odhaduje, že ak má zasadených 30 orechov, priemerná úroda z jedného stromu je 1000 orechov. Každý dodatočne zasadený orech znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 10 orechov. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

35 orechov

12. Pestovateľ ovocia odhaduje, že ak má zasadených 50 jabloní, priemerná úroda z jedného stromu je 450 jabĺk. Každá dodatočne zasadená jabloň znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 5 jabĺk. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

20 jabloní

13. Pestovateľ ovocia odhaduje, že ak má zasadených 40 sliviek, priemerná úroda z jedného stromu je 600 sliviek. Každá dodatočne zasadená slivka znamená zníženie úrody na všetkých stromoch priemerne o 6 sliviek. Koľko stromov by mal pestovateľ ešte zasadiť, aby jeho úroda bola maximálna?

30 sliviek

14. Výskumom bolo zistené, že krajčírka, ktorá pracuje od 7.00 do 14.00 hod., bude mať o x hodín ušitých $f(x)=10x+15x^2-x^3$ sukní.

a) Kedy počas smeny je krajčírka najvýkonnejšia?

b) Kedy počas smeny krajčírka pracuje najpomalšie?

a) o 12.00, **b)** 7.00

15. Podľa štúdie produktivity práce v podniku bude mať priemerný pracovník, ktorý pracuje od 8.00 do 12.00 hod., poskladaných $f(x)=-x^3+6x^2+15x$ prístrojov po x hodinách práce.

a) Kedy počas smeny je pracovník najvýkonnejší?

b) Kedy počas smeny pracovník pracuje najpomalšie?

a) o 10.00, **b)** 8.00 a 12.00

16. Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x)=0{,}1x^2+x+700$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x)=38x$. Nakreslite grafy oboch funkcií v jednom súradnicovom systéme a zistite, kedy je výroba zisková. Určte úroveň produkcie, pri ktorej firma dosahuje maximálny zisk.

$x\in(20, 350)$, $x=185$

17. Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x)=0{,}04x^2+x+252$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x)=18{,}4x$. Nakreslite grafy oboch funkcií v jednom súradnicovom systéme a zistite, kedy je výroba zisková. Určte úroveň produkcie, pri ktorej firma dosahuje maximálny zisk.

$x\in(15, 420)$, $x=217{,}5$

18. Celkové týždenné náklady v tisícoch eur na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x)=15x+1696$. Funkcia celkových týždenných výnosov je $R(x)=100x-0{,}01x^2$. Nakreslite grafy oboch funkcií v jednom súradnicovom systéme a zistite, kedy je výroba zisková. Určte úroveň produkcie, pri ktorej firma dosahuje maximálny zisk.

$x\in(20, 8\,480)$, $x=4\,250$

19. Celkové mesačné náklady v tisícoch eur na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x)=50x+60\,000$. Funkcia celkových mesačných výnosov je $R(x)=1255x-0{,}1x^2$. Nakreslite grafy oboch funkcií v jednom súradnicovom systéme a zistite, kedy je výroba zisková. Určte úroveň produkcie, pri ktorej firma dosahuje maximálny zisk.

$x\in(50, 12\,000)$, $x=6\,025$

20. Celkové denné náklady v dolároch na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x)=10x+360$. Predajná cena bola stanovená na $76-x$ dolárov za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.

b) Určte ponuku, ktorá maximalizuje denné výnosy.

c) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny denný zisk.

a) $(6, 60)$, **b)** $x = 38$, **c)** $x = 33$

21. Celkové mesačné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = x + 90$. Predajná cena bola stanovená na $2 - 0{,}001x$ eur za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.
b) Určte ponuku, ktorá maximalizuje mesačné výnosy.
c) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny mesačný zisk.

a) $(100, 900)$, **b)** $x = 1\,000$, **c)** $x = 500$

22. Celkové mesačné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 2x + 72$. Predajná cena bola stanovená na $7{,}8 - 0{,}1x$ eur za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.
b) Určte ponuku, ktorá maximalizuje mesačné výnosy.
c) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny mesačný zisk.

a) $(18, 40)$, **b)** $x = 39$, **c)** $x = 29$

23. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 22(x + 4)$. Predajná cena bola stanovená na $70 - 2x$ eur za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.
b) Určte ponuku, ktorá maximalizuje týždenné výnosy.
c) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny týždenný zisk.

a) $(2, 22)$, **b)** $x = 17{,}5$, **c)** $x = 12$

24. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 360 + 40x + 0{,}1x^2$. Predajná cena bola stanovená na 60 eur za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.
b) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny týždenný zisk.

a) $(20, 180)$, **b)** $x = 100$

25. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 360 + 10x + 0{,}2x^2$. Predajná cena bola stanovená na $50 - 0{,}2x$ eur za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.
b) Určte ponuku, ktorá maximalizuje týždenné výnosy.
c) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny týždenný zisk.

a) $(10, 90)$, **b)** $x = 125$, **c)** $x = 50$

26. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 2\,000 + 40x + x^2$. Predajná cena bola stanovená na 130 eur za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.
b) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny týždenný zisk.

a) $(40, 50)$, **b)** $x = 45$

27. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu x výrobkov sú dané funkciou $C(x) = 15\,000 + 35x + 0{,}1x^2$. Predajná cena bola stanovená na $385 - 0{,}9x$ eur za kus.

a) Určte, kedy je výroba zisková.
b) Určte ponuku, ktorá maximalizuje týždenné výnosy.
c) Určte úroveň produkcie, pri ktorej sa dosiahne maximálny týždenný zisk.

a) $(50, 300)$, **b)** $x = 213{,}89$, **c)** $x = 175$

28. Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q) = 10q$. Jednotková cena pri predaji q kusov výrobku, je určená cenou dopytu $p = 50 - 4q$ eur za kus.

a) Vypočítajte objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti.
b) Vypočítajte objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti, ak je každý predaný výrobok zdaňovaný extra daňou t eur.
c) Predpokladajme, že si spoločnosť zvolí objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk. Ako by mal výberca dane stanoviť výšku dane, aby dosiahol maximálny daňový výnos?

a) $q = 5$, **b)** $q = 5 - \frac{t}{8}$, **c)** $t = 20$

29. Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q) = 8q + 20$. Jednotková cena pri predaji q kusov výrobku, je určená cenou dopytu $p = 88 - 5q$ eur za kus.

a) Vypočítajte objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti.
b) Vypočítajte objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti, ak je každý predaný výrobok zdaňovaný extra daňou t eur.
c) Predpokladajme, že si spoločnosť zvolí objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk. Ako by mal výberca dane stanoviť výšku dane, aby dosiahol maximálny daňový výnos?

a) $q = 8$, **b)** $q = 8 - \frac{t}{10}$, **c)** $t = 40$

30. Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q) = q^2 + 10$. Jednotková cena pri predaji q kusov výrobku, je určená cenou dopytu $p = 70 - 6q$ eur za kus.

a) Vypočítajte objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti.
b) Vypočítajte objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti, ak je každý predaný výrobok zdaňovaný extra daňou t eur.
c) Predpokladajme, že si spoločnosť zvolí objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk. Ako by mal výberca dane stanoviť výšku dane, aby dosiahol maximálny daňový výnos?

a) $q = 5$, **b)** $q = 5 - \frac{t}{14}$, **c)** $t = 35$

31. Výrobná spoločnosť má náklady na výrobu q kusov výrobku $C(q)=2q^2+16$. Jednotková cena pri predaji q kusov výrobku, je určená cenou dopytu $p=72-4q$ eur za kus.

a) Vypočítajte objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti.

b) Vypočítajte objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk spoločnosti, ak je každý predaný výrobok zdaňovaný extra daňou t eur.

c) Predpokladajme, že si spoločnosť zvolí objem produkcie, ktorá maximalizuje zisk. Ako by mal výberca dane stanoviť výšku dane, aby dosiahol maximálny daňový výnos?

a) $q=6$, **b)** $q=6-\frac{t}{12}$, **c)** $t=36$

32. Predpokladajme, že celkové náklady v eurách na produkciu q výrobkov sú dané funkciou $C(q)=12q^2+30q+432$.

a) Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus tovaru minimálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?

c) Nakreslite grafy priemerných a marginálnych nákladov v jednom súradnicovom systéme.

a) $q=6$, **b)** $q=6$

33. Celkové náklady v eurách na produkciu q kusov tovaru vyrobených počas jednej smeny, sú dané funkciou $C(q)=0{,}2q^2+10q+320$.

a) Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus tovaru minimálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?

c) Nakreslite grafy priemerných a marginálnych nákladov v jednom súradnicovom systéme.

a) $q=40$, **b)** $q=40$

34. Celkové denné náklady v dolároch na výrobu q televízorov sú dané funkciou $C(q)=q^2+13q+625$.

a) Pri akej výške produkcie sú priemerné denné náklady na jeden kus tovaru minimálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné denné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?

c) Nakreslite grafy priemerných a marginálnych nákladov v jednom súradnicovom systéme.

a) $q=25$, **b)** $q=25$

35. Celkové týždenné náklady v dolároch na výrobu q áut sú dané funkciou $C(q)=3q^2+17q+3\,072$.

a) Pri akej výške produkcie sú priemerné týždenné náklady na jeden kus tovaru minimálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné týždenné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?

c) Nakreslite grafy priemerných a marginálnych nákladov v jednom súradnicovom systéme.

a) $q = 32$, **b)** $q = 32$

36. Celkové denné náklady v eurách na výrobu q DVD prehrávačov sú dané funkciou $C(q) = 0{,}3q^2 - 10q + 235{,}2$.

a) Pri akej výške produkcie sú priemerné denné náklady na jeden kus tovaru minimálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné denné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?

c) Nakreslite grafy priemerných a marginálnych nákladov v jednom súradnicovom systéme.

a) $q = 28$, **b)** $q = 28$

37. Celkové týždenné náklady v eurách na výrobu q práčok sú dané funkciou $C(q) = 0{,}05q^2 - 0{,}8q + 96{,}8$.

a) Pri akej výške produkcie sú priemerné týždenné náklady na jeden kus tovaru minimálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné týždenné náklady na jeden kus rovné marginálnym nákladom?

c) Nakreslite grafy priemerných a marginálnych nákladov v jednom súradnicovom systéme.

a) $q = 44$, **b)** $q = 44$

38. Celkové týždenné príjmy v eurách z predaja q chladničiek sú dané funkciou $R(q) = -q^2 + 34q - 81$.

a) Pri akej výške predaja sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus tovaru maximálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus rovné marginálnym príjmom?

c) Nakreslite grafy priemerných a marginálnych príjmov v jednom súradnicovom systéme.

a) $q = 9$, **b)** $q = 9$

39. Celkové týždenné príjmy v eurách z predaja q žehličiek sú dané funkciou $R(q) = -3q^2 + 102q - 300$.

a) Pri akej výške predaja sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus tovaru maximálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus rovné marginálnym príjmom?

c) Nakreslite grafy priemerných a marginálnych príjmov v jednom súradnicovom systéme.

a) $q = 10$, **b)** $q = 10$

40. Celkové týždenné príjmy v eurách z predaja q fotoaparátov sú dané funkciou $R(q) = -2q^2 + 56q - 288$.

a) Pri akej výške predaja sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus tovaru maximálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus rovné marginálnym príjmom?

c) Nakreslite grafy priemerných a marginálnych príjmov v jednom súradnicovom systéme.

a) $q = 12$, **b)** $q = 12$

41. Celkové týždenné príjmy v eurách z predaja q mrazničiek sú dané funkciou $R(q) = -q^2 + 72q - 225$.

a) Pri akej výške predaja sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus tovaru maximálne?

b) Pri akej výške produkcie sú priemerné týždenné príjmy na jeden kus rovné marginálnym príjmom?

c) Nakreslite grafy priemerných a marginálnych príjmov v jednom súradnicovom systéme.

a) $q = 15$, **b)** $q = 15$

8 ÚROKOVANIE

8.1 Riešené úlohy

Vzorce pre výpočet budúcej hodnoty jednorázového vkladu pre jednotlivé typy úrokovania, resp. diskontovania:

jednoduché úrokovanie $FV = PV\,(1 + i \cdot t)$

zložené úrokovanie $FV_n = PV\,(1+i)^n$ *alebo* $FV_n = PV\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m \cdot n}$

zmiešané úrokovanie $FV = PV\,(1+i)^n\,(1+i \cdot t)$

spojité úrokovanie $FV = PV \cdot e^{j \cdot n}$

jednoduché diskontovanie $FV = \dfrac{PV}{1 - d \cdot t}$, kde

PV - začiatočná (súčasná) hodnota kapitálu (Present Value),
FV - budúca hodnota kapitálu (Future Value),
t, n - dĺžka úrokového obdobia, vyjadrená v jednotkách úrokovej periódy,
m - počet konverzií za rok,
i - ročná úroková sadzba,
j - nominálna úroková sadzba,
i_d - sadzba dane zo zisku.

Príklad 8.1 Aký je úrok z vkladu 250 000 € za obdobie od 5. 4. 2006 do 31. 12. 2006 pri ročnej úrokovej miere 2 %? Počítajme pomocou bankovej aj exaktnej metódy.

Riešenie:

PV = 250 000 €, i = 0,02 . Počítame úrok I pri jednoduchom úrokovaní.
Počet dní úrokovania je $t_B = (30-5) + 8 \cdot 30 = 265$ (banková metóda)

$$I_B = PV \cdot i \cdot t_B = 250\,000 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{265}{360} = 3\ 680{,}60\ €.$$

Počet dní úrokovania je $t_E =$ (30-5) + 31+30+31+31+30+31+30+31 = 270 (exaktná metóda)

$$I_E = PV \cdot i \cdot t_E = 250\,000 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{270}{365} = 3\ 698{,}30\ €.$$

Príklad 8.2 Banka poskytuje na vkladoch 4,5% ročný úrok. Karol potrebuje o 9 mesiacov vrátiť dlžobu 8 500 €. Koľko musí teraz vložiť do banky, aby o 9 mesiacov mal túto sumu k dispozícii?

Riešenie:

$i = 0{,}045$, $t = \dfrac{9}{12}$, $FV = 8\ 500$ €.

Hľadáme súčasnú hodnotu vkladu pri jednoduchom úrokovaní

$$\mathrm{PV} = \frac{FV}{1+i\cdot t} = \frac{8500}{1+0{,}045\cdot\frac{9}{12}} = 8\ 222{,}50 \text{ €}.$$

Príklad 8.3 Vklad 60 000 Sk vzrástol pri zloženom úrokovaní na dvojnásobok za 12 rokov. Akou ročnou úrokovou sadzbou bol úročený?

Riešenie:

$PV = 60\ 000$ €, $FV = 120\ 000$ €, $n = 12$ rokov. Úrokovú sadzbu i si vyjadríme zo vzťahu pre výpočet budúcej hodnoty pri zloženom úrokovaní

$$i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{120\,000}{60\,000}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0{,}06\,.$$

Príklad 8.4 Do banky, ktorá ponúka nominálnu úrokovú sadzbu j = 0,045 pri polročnom úročení, sme vložili 10 000 €. Aká bude hodnota vkladu po dvoch rokoch?

Riešenie:

$PV = 10\ 000$ €, $j = 0{,}045$, $m= 2$, $n =2$ roky

$$FV = PV\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n} = 10\,000\left(1+\frac{0{,}045}{2}\right)^{2\cdot 2} = 10\ 930{,}80 \text{ €}.$$

Príklad 8.5 Koľko musíme dnes vložiť do banky, ktorá poskytuje ročnú úrokovú sadzbu 0,035 pri zmiešanom úrokovaní, keď o 2 roky a 52 dní potrebujeme mať usporených 25 000 €?

Riešenie:

$FV = 25\ 000$ €, $n = 2$ roky, $t = 52/360$ dní, $i = 0{,}035$. Zo vzťahu pre zmiešané úrokovanie vyjadríme súčasnú hodnotu PV

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n(1+i\cdot t)} = \frac{25000}{(1+0{,}035)^2\left(1+0{,}035\cdot\frac{52}{360}\right)} = 23\ 220{,}40 \text{ €}.$$

Príklad 8.6 Za aký čas sa môžeme stať milionárom, za predpokladu, že náš vklad 100 000 € bude dlhodobo spojito úrokovaný nominálnou úrokovou mierou 5 %?

Riešenie:

$PV = 100\ 000$ €, $j = 0{,}05$.

Zo vzťahu $FV = PV\cdot e^{j\cdot n}$ (spojité úrokovanie) vyjadríme čas n

$$n = \frac{1}{j}\cdot\ln\frac{FV}{PV} = \frac{1}{0{,}05}\cdot\ln\frac{1\,000\,000}{100\,000} \approx 46 \text{ rokov}.$$

Príklad 8.7 Rozhodli sme sa predať banke zmenku nominálnej hodnoty 25 000 €, 60 dní pred dobou splatnosti. Banka si zrazí diskont a vyplatí nám 24 583,30 €. Akú ročnú diskontnú sadzbu si banka uplatňuje?

Riešenie:

FV = 25 000 €, PV = 24 583,30 €, t = 60/360 dní .

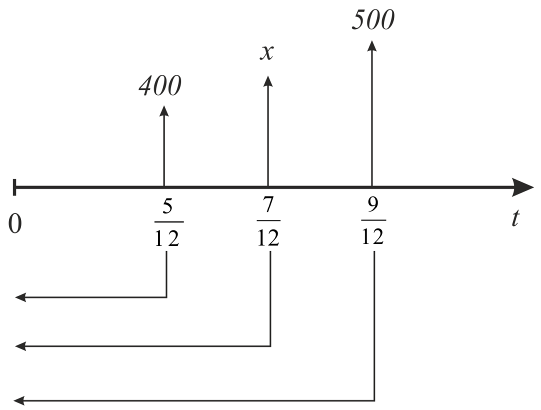
Zo vzťahu $FV = \dfrac{PV}{1-d\cdot t}$ si vyjadríme diskontnú sadzbu d

$$d = \frac{1}{t}\left(1-\frac{PV}{FV}\right) = \frac{360}{60}\left(1-\frac{24\,583{,}30}{25\,000}\right) \approx 0{,}1\,.$$

Príklad 8.8 Dlžník má podľa dohody zaplatiť veriteľovi 400 € o 5 mesiacov a 500 € o 9 mesiacov pri 6% ročnej úrokovej miere. Obidve splátky chce ale nahradiť jednou, ktorú vyplatí o 7 mesiacov. Aká bude jej výška?

Riešenie:

Pri jednoduchom úrokovaní zostavíme rovnicu ekvivalencie tak, že porovnáme hodnoty platieb v súčasnosti, čiže v nule pri oboch alternatívach (zaplatíme 2 splátky - pravá strana rovnice alebo 1 splátku - ľavá strana rovnice)



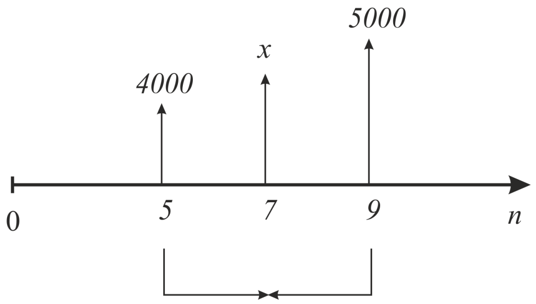
$$\frac{x}{1+0.06\cdot\frac{7}{12}} = \frac{400}{1+0.06\cdot\frac{5}{12}} + \frac{500}{1+0.06\cdot\frac{9}{12}}\text{, z toho}$$

$x = 899{,}12$ €.

Príklad 8.9 Dlžník má podľa dohody zaplatiť veriteľovi 4 000 € o 5 rokov a 5 000 € o 9 rokov pri 6% ročnej úrokovej miere. Obidve splátky chce ale nahradiť jednou, ktorú vyplatí o 7 rokov. Aká bude jej výška?

Riešenie:

Pri zloženom úrokovaní zostavíme rovnicu ekvivalencie tak, že porovnáme hodnoty platieb v ľubovoľnom čase, čiže napríklad aj v čase 7 rokov



$$x = 4\,000(1+0{,}06)^2 + \frac{5\,000}{(1+0{,}06)^2}, \text{ z toho}$$

$$x = 8\,944{,}38 \text{ €}.$$

OPTIMÁLNA DOBA VLASTNENIA

Predpokladajme, že vlastníme majetok, ktorého cena o t rokov odteraz sa dá vyjadriť rastúcou funkciou $V = V(t)$. Ak existuje banka, ktorá ponúka ročnú úrokovú sadzbu j pri spojitom úrokovaní a platí

ak $\frac{V'(t)}{V(t)} > j$, je výhodné majetok vlastniť naďalej,

ak $\frac{V'(t)}{V(t)} < j$, je výhodné majetok predať,

ak $\frac{V'(t)}{V(t)} = j$, z hľadiska ceny je to jedno.

Príklad 8.10 Predpokladajme, že vlastníme veterána, ktorého hodnota o t rokov odteraz bude $V(t) = 40t + 1000$. Ak by ročná úroková miera ostala na rovnakej úrovni 2,8 % a pripisovanie úrokov by bolo spojité, po akom čase by sa oplatilo veterána predať a získané peniaze uložiť na účet?

Riešenie:

$V(t) = 40t + 1000$, $V'(t) = 40$, $j = 0{,}028$

Veterána je výhodné predať o taký čas t, pre ktorý platí $\frac{V'(t)}{V(t)} = j$, čiže riešime rovnicu $\frac{40}{40t + 1000} = 0{,}028 \Leftrightarrow t \doteq 10{,}71$ rokov.

8.2 Neriešené úlohy

1. V banke môžete uložiť úspory pri 2,7% ročnej úrokovej miere. Aký veľký bude úrok po uplynutí 8 mesiacov pri vklade 15 000 €?

270 €

2. Pri akej ročnej úrokovej miere bude o 270 dní úrok 187,5 €, ak Váš vklad bol 10 000 €?

2,5 %

3. Koľko mesiacov sa v banke úročil kapitál 5 500 € pri 2% ročnej úrokovej miere, keď ste získali úrok vo výške 55 €?

6 mesiacov

4. Kapitál v hodnote 15 000 €, vložený do banky 14. 3. 2011 pri 2,1% ročnej úrokovej miere, priniesol úrok 113,75 €. Zistite dátum výberu peňazí.

24. 7. 2011

5. Aký by bol dátum výberu, ak by sme v predchádzajúcej úlohe uvažovali o exaktnej metóde?

23. 7. 2011

6. Po 11 mesiacoch ste v banke dostali úrok 104,5 €, pričom banka ponúka 3% ročnú úrokovú mieru. Aký veľký bol začiatočný kapitál?

3 800 €

7. Odberateľ Vám nezaplatil faktúru v hodnote 2 650 €, splatnú 4. 5. 2011. Podľa zmluvy účtujete penále vo výške 0,05 % z faktúrovanej sumy za každý deň oneskorenia platby. Aké veľké je penále k 15. 9. 2011?

177,55 €

8. Do banky si uložíte 7 000 €. Po 200 dňoch si vyberáte vklad aj s úrokom. Koľko vám banka vyplatí pri 2,5 % ročnej úrokovej miere?

7 097,22 €

9. Akú čiastku Vám vyplatí banka po uplynutí 300 dní, ak ste do banky vložili 5 000 € pri 3,2% ročnej úrokovej miere?

5 133,33 €

10. Aká je budúca hodnota pôžičky 4 000 €, ktorú ste dohodli s ročnou úrokovou sadzbou 0,03 a splatnosť pôžičky je po 8 mesiacoch?

4 080 €

11. O pol roka máte vrátiť veriteľovi 8 080 € pri 2% ročnej úrokovej miere. Aká je výška pôžičky?

8 000 €

12. Z banky, ktorá ponúka 4,5% ročnú úrokovú mieru potrebujete vybrať o 9 mesiacov čiastku 8 476,75 € na nákup auta. Koľko eur musíte vložiť do banky teraz?

8 200 €

13. Koľko eur musíte vložiť do banky dnes, ak chcete po 300 dňoch vybrať 10 729,33 € pri ponúkanej ročnej úrokovej miere 3,8 %?

10 400 €

14. Čiastka 6 300 € bude mať v banke po uplynutí 5 mesiacov hodnotu 6 386,625 €. Akú ročnú úrokovú mieru ponúka banka v takomto prípade?

3,3 %

15. Podľa zmluvy máte za pôžičku 3 300 € vyplatiť po 8 mesiacoch čiastku 3 564 €. Aká bola dohodnutá ročná úroková sadzba?

0,12

16. Aká veľká je ročná úroková miera, pri ktorej Vám za obdobie 270 dní od uloženia Vášho vkladu 1 800 € vyplatí banka 1 836,45 €?

2,7 %

17. Dnes máte k dispozícii sumu 4 400 €. Ako dlho budete musieť čakať, aby ste z banky ponúkajúcej 3,4% ročnú úrokovú mieru mohli na nákup stavebného materiálu vybrať 4 474,8 €?

6 mesiacov

18. O 3 mesiace budete potrebovať 3 650 € na vyplatenie faktúry za nákup tovaru. Oplatí sa vložiť hotovosť 3 600 € do banky s 3% ročnou úrokovou mierou alebo si vyberiete inú banku?

neoplatí sa

19. Koľko dní bude musieť klient čakať na vyplatenie sumy 2 835 € z banky, do ktorej uložil 2 800 € pri 1,5% ročnej úrokovej miere?

300 dní

20. Kapitál v hodnote 15 000 €, vložený 14. 3. 2011 do banky pri 2,9% ročnej úrokovej miere sa naúročil na čiastku 15 265,83 €. Zistite dátum výberu tejto čiastky.

24. 10. 2011

21. 100-dňová zmenka má ročnú diskontnú mieru 4,94 %. Aká je odpovedajúca ročná úroková sadzba pri jednoduchom úrokovaní?

0,05

22. Aká je ročná úroková a diskontná sadzba pokladničnej poukážky v cene 1 950 € s dobou splatnosti 100 dní a nominálnou hodnotou 2 000 €?

$i = 0{,}0923$, $d = 0{,}09$

23. Koľko vyplatí banka klientovi za eskont zmenky nominálnej hodnoty 10 000 €, 35 dní pred dobou splatnosti a pri 9% ročnej diskontnej miere?

9 912,50 €

24. Zmenka s nominálnou hodnotou 5 000 € je bankou niekoľko dní pred dobou splatnosti vyplatená klientovi v hodnote 4 983,33 € pri ročnej diskontnej sadzbe 0,08. O koľko dní sa jedná?

15 dní

25. Aká je nominálna hodnota zmenky, ktorú eskontujete banke 72 dní pred dobou splatnosti, keď si banka uplatňuje 7% ročnú diskontnú mieru a vyplatí 9 860 €?

10 000 €

26. Banka poskytuje na úvery 6,5% ročnú diskontnú mieru. Podnikateľ si zobral pôžičku, pričom má vrátiť o pol roka 20 000 €. Akú sumu dostal podnikateľ od banky?

19 350 €

27. Obchodník vlastní zmenku na 30 000 € splatnú 30. júna. Avšak peniaze potrebuje už 30. marca. Obráti sa na banku a predá jej svoju zmenku. Banka si za túto službu zrazí obchodný diskont pri 13% ročnej diskontnej miere. Určte obchodný diskont a sumu, ktorú dostane obchodník od banky.

975 €, 29 025 €

28. Podnikateľ potrebuje 15. mája hotovosť, ktorú chce získať predajom zmenky na 4 000 € splatnej 30. júna. Zmenku predá banke, ktorá si za túto službu zrazí obchodný diskont pri 8% ročnej diskontnej miere. Určte obchodný diskont a sumu, ktorú dostane obchodník od banky.

40 €, 3 960 €

29. Obchodník 15. mája vystavil firme zmenku s nominálnou hodnotou 5 000 € s 9% ročnou úrokovou mierou. Dátum splatnosti zmenky je 15. november. Dňa 1. júla firma eskontuje zmenku v banke, ktorá má 10% ročnú diskontnú mieru. Akú sumu vyplatí banka firme?

5 030,51 €

30. Zmenku na 3 500 € vystavenú 1. februára s dátumom splatnosti 30. októbra a s 5% ročnou úrokovou mierou majiteľ eskontuje banke 30. apríla. Banka má pre takéto zmenky 7% ročnú diskontnú mieru. Akú sumu vyplatí banka majiteľovi zmenky?

3 503,69 €

31. Nájdite dátum ekvivalencie dvoch zmeniek s 12% ročnou diskontnou mierou, ak prvá z nich s nominálnou hodnotou 5 800 € je splatná 16. septembra a druhá s nominálnou hodnotou 5 850 € je splatná 10. októbra.

4. marec

32. Nájdite dátum ekvivalencie dvoch zmeniek s 7,2% ročnou diskontnou mierou, ak prvá z nich s nominálnou hodnotou 29 520 € je splatná 22. júla a druhá s nominálnou hodnotou 29 700 € je splatná 22. augusta.

2. jún

33. Dlžník má podľa dohody zaplatiť veriteľovi 800 € o 5 mesiacov a 1 000 € o 9 mesiacov pri 6% ročnej úrokovej miere. Obidve splátky chce ale nahradiť jednou, ktorú vyplatí o 7 mesiacov. Aká bude jej výška?

1 798,2355 €

34. Dlžník má podľa dohody zaplatiť veriteľovi 500 € o 3 mesiace a ďalších 500 € o 6 mesiacov pri 5% ročnej úrokovej miere. Obidve splátky chce ale nahradiť jednou, ktorú vyplatí o 5 mesiacov. Aká bude jej výška?

1 002,0827 €

35. Dlžník má podľa dohody zaplatiť veriteľovi 200 € o 2 mesiace a 600 € o 6 mesiacov pri 8% ročnej úrokovej miere. Splátky chce ale nahradiť rovnako veľkými splátkami, ktoré vyplatí o 3 a 4 mesiace. Aká bude ich výška?

396,175 €

36. Dlžník má podľa dohody zaplatiť veriteľovi 350 € o 3 mesiace a 500 € o 8 mesiacov pri 7% ročnej úrokovej miere. Splátky chce ale nahradiť rovnako veľkými splátkami, ktoré vyplatí o 5 a 10 mesiacov. Aká bude ich výška?

428,734 €

37. Na dvojročný termínovaný účet vložíte 2 500 €, ktoré banka úročí ročnou úrokovou mierou 3,4%. Akú čiastku budete môcť vybrať po uplynutí dvoch rokov?

2 672,89 €

38. Na akú hodnotu sa v banke počas 6 rokov naakumuluje kapitál 4 000 € úročený 2% ročnou úrokovou mierou ?

4 504,65 €

39. Banka poskytuje na detské vkladné knižky 4% ročnú úrokovú mieru, na študentské vkladné knižky (od 12 rokov) 5% ročnú úrokovú mieru. Keď mal Peter 6 rokov, založili mu rodičia detskú vkladnú knižku s vkladom 2 000 €. Po 6 rokoch pridali ďalších 2 000 € a všetko preložili na študentskú vkladnú knižku. Koľko eur bude na nej, keď bude mať Peter 18 rokov?

6 071,49 €

40. Podnikateľ si pri 6% ročnej úrokovej miere požičal kapitál, ktorý v dobe splatnosti o 10 rokov bude mať hodnotu 700 000 €. Vďaka úspešným obchodom vráti pôžičku už po 7 rokoch. Koľko zaplatí?

587 733,50 €

41. O 2,5 roka plánujete nákup auta v cene 22 700 €. Koľko musíte vložiť teraz do banky pri 2,5% ročnej úrokovej miere, aby ste v danom čase mali pripravenú potrebnú hotovosť?

21 341,07 €

42. Karol pri návšteve USA vložil do tamojšej banky 1 000 dolárov pri 10 % ročnej úrokovej miere. O koľko rokov si tam môže prísť jeho potomok vybrať milión dolárov?

72, 48 roka

43. Za aký čas sa zdvojnásobí vklad uložený do banky pri 4% ročnej úrokovej miere?

17,67 roka

44. Máte dva kapitály. Jeden z nich v hodnote 17 000 € je uložený pri 4% ročnej úrokovej miere, druhý v hodnote 18 500 € je uložený pri 3,5% ročnej úrokovej miere. Vypočítajte o koľko rokov budú mať rovnaké budúce hodnoty.

17,55 roka

45. Akú ročnú úrokovú mieru poskytuje banka, v ktorej Vám počas troch rokov narástol kapitál 15 000 € na hodnotu 16 630,77 €?

3,5 %

46. Pri akej ročnej úrokovej miere v banke počas 4 rokov narastie kapitál 12 000 € na hodnotu 14 038,30 €?

4 %

47. K 1.3. 2001 chcete mať hotovosť 50 000 €. Preto 1.3.1996 a 1.3.1998 vložíte do banky 18 000 € pri 3% ročnej úrokovej miere. Koľko musíte vložiť 1.3.2000, aby ste potrebnú hotovosť mali v požadovanom termíne k dispozícii?

9 188,33 €

48. Otec vkladal do banky pre deti pri 2,5% ročnej úrokovej miere nasledujúce vklady: 1. rok 2 000 €, 2.rok 1 400 € a 3. rok 2 500 €. Koľko musí vložiť v 5. roku, aby v 7. roku mohol vybrať 10 000 €?

3 176,31 €

49. Dlh má byť zaplatený o 5 rokov splátkou vo výške 50 000 €. Chcete ju nahradiť ekvivalentnou platbou za 7 rokov realizovanou pri 8% ročnej úrokovej miere. Aká veľká by mala byť táto platba?

58 320 €

50. Pôžička na podnikanie s 9% ročnou úrokovou mierou mala byť zaplatená o 8 rokov jedinou splátkou vo výške 80 000 €. Keďže sa podnikateľovi dobre darilo, chce ju zaplatiť už po uplynutí 5 rokov. Aká by mala byť jej výška?

61 774,67 €

51. Akou ekvivalentnou platbou má dlžník nahradiť splatenie dlžoby vo výške 15 000 €, ktorá mala byť vyplatená po 2 rokoch pri 8% ročnej úrokovej miere, ak chce dlžobu splatiť až po 3,5 rokoch?

16 835,53 €

52. Dlžník má veriteľovi zaplatiť pri 6% ročnej úrokovej miere nasledujúce platby: 1 000 € o rok, 1 500 € o 3 roky a 1 800 € o 5 rokov. Chce ich nahradiť jedinou ekvivalentnou platbou o 4 roky. Aká bude jej výška?

4 479,13 €

53. Dlžník má veriteľovi zaplatiť pri 5% ročnej úrokovej miere nasledujúce platby: 1 000 € o 2 roky, 1 500 € o 3 roky a 2 000 € o 4 roky. Chce ich nahradiť jedinou ekvivalentnou platbou o 5 rokov. Aká bude jej výška?

4 911,38 €

54. Dlžník má veriteľovi zaplatiť pri 7% ročnej úrokovej miere nasledujúce platby: 800 € o 2 roky, 1 200 € o 3 roky, 1 800 € o 5 rokov a 2 000 € o 6 rokov. Chce ich nahradiť jedinou ekvivalentnou platbou o 5 rokov. Aká bude jej výška?

6 023,07 €

55. Dlžník má veriteľovi zaplatiť pri 6% ročnej úrokovej miere dve platby: 7 500 € o rok, 5 500 € o 3,5 roka. Chce ich nahradiť jedinou ekvivalentnou platbou o 1,5 roka. Aká bude jej výška?

12 616,70 €

56. Zistite, či je pre veriteľa výhodnejšie žiadať zaplatiť 25 000 € o 3 roky alebo zaplatiť 15 000 € o rok a 11 000 € o 4 roky pri ročnej úrokovej miere 6%.

nie je

57. Zistite, či je pre veriteľa výhodnejšie žiadať zaplatiť 18 000 € o 2,5 roka alebo zaplatiť 5 000 € teraz a 10 000 € o 3,5 roka pri ročnej úrokovej miere 7%.

je

58. Zistite, či je pre dlžníka výhodné zameniť dlžobu 45 000 € splatnú o 4 roky za splatenie sumy 20 000 € o 2 roky a 23 000 € o 4 roky pri 7% ročnej úrokovej miere.

nie je

59. Zistite, či je pre dlžníka výhodné zameniť dlžobu 60 000 € splatnú o 3 roky za splatenie sumy 40 000 € o 2,5 roka a 20 000 € o 4 roky pri 6,5% ročnej úrokovej miere.

nie je

60. Na termínovaný účet vložíte 2 500 €, ktoré banka úročí polročne nominálnou úrokovou mierou 3,4%. Akú čiastku budete môcť vybrať po uplynutí troch rokov?

2 766,09 €

61. Na akú hodnotu sa v banke počas 4 rokov naakumuluje kapitál 14 000 € úročený mesačne 2,4% nominálnou úrokovou mierou?

15 409,15 €

62. Na koľko narastie vklad 15 000 € uložený 3 roky pri 2,5% nominálnej úrokovej miere, keď sa úroky pripisujú polročne, štvrťročne, resp. mesačne?

16 160,75 €, 16 164,49 €, 16 167 €

63. Podnikateľ si pri 6% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení požičal kapitál, ktorý v dobe splatnosti o 6 rokov bude mať hodnotu 71 288.04 €. Koľko si dnes požičal?

50 000 €

64. O 2 roky plánujete kúpiť stavebný pozemok v cene 40 000 €. Koľko musíte vložiť teraz do banky pri 2,5% nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úrokovaní, aby ste v danom čase mali pripravenú potrebnú hotovosť?

38 055,10 €

65. Karol pri návšteve USA vložil do tamojšej banky 1 000 dolárov pri 6% nominálnej úrokovej miere a mesačnom úrokovaní. O koľko rokov si tam môže prísť jeho potomok vybrať milión dolárov?

115,42 roka

66. Za aký čas sa zdvojnásobí vklad uložený do banky pri 4% nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úrokovaní?

17,42 roka

67. Máte dva kapitály. Jeden z nich v hodnote 17 000 € je uložený pri 4% nominálnej úrokovej miere a polročnom úrokovaní, druhý v hodnote 18 500 € je uložený pri 3,5% nominálnej úrokovej miere a mesačnom úrokovaní. Vypočítajte o koľko rokov budú mať rovnaké budúce hodnoty.

18,16 roka

68. Akú nominálnu úrokovú mieru poskytuje banka pri mesačnom úročení, v ktorej Vám počas troch rokov narástol kapitál 15 000 € na hodnotu 16 410,77 €?

3 %

69. Uvažujete o nákupe vkladového listu o nominálnej hodnote 20 000 €, ktorý má mať o 5 rokov hodnotu 25 997,62 € za predpokladu štvrťročného úrokovania. Akej nominálnej úrokovej miere odpovedá výnos z tohto vkladového listu?

5,28 %

70. Do banky si dnes uložíte 18 000 € pri štvrťročnom úrokovaní a 4% nominálnej úrokovej miere. Po troch rokoch si z konta vyberiete 6 000 €. Koľko budete mať na konte po uplynutí ďalších piatich rokov?

17 427,79 €

71. V banke si otvoríte účet s vkladom 20 000 €. Banka poskytuje 3% nominálnu úrokovú mieru pri polročnom úrokovaní. Na konci prvého a druhého roka zvýšite vždy vklad o ďalších 5 000 €. Akú sumu budete mať po uplynutí 7 rokov od prvého vkladu?

36 415,91 €

72. Rozhodli ste sa svojmu práve narodenému dieťaťu založiť účet spojený so 4% nominálnou úrokovou mierou a dnes uložiť na účet takú hotovosť, aby vaše dieťa v deň svojich 18. narodenín mohlo z účtu vybrať 100 000 €. Koľko musíte vložiť dnes na účet pri mesačnom úrokovaní?

48 733,54 €

73. Do banky, ktorá ponúka 2% ročnú úrokovú mieru bolo na začiatku roka uložených 100 000 €. Akú hodnotu bude mať vklad po 30 mesiacoch, keď je pre medziobdobie kratšie ako 1 rok používané jednoduché úrokovanie?

105 080,40 €

74. Banka poskytuje 1,5% ročný úrok pri zmiešanom úrokovaní. Koľko musíme vložiť dnes, ak potrebujeme 2 400 € o 2 roky a 4 mesiace?

2 318 €

75. Do banky, ktorá ponúka 1,5% ročnú úrokovú mieru bolo ku začiatku marca uložených 100 000 €. Akú hodnotu bude mať vklad po 40 mesiacoch, keď je pre medziobdobie kratšie ako 1 rok používané jednoduché úrokovanie?

105 092,61 €

76. Ján získal v banke, ktorá ponúka 2,1% ročnú úrokovú mieru pri zmiešanom úrokovaní 15 124 €. Koľko eur vložil do banky pred 785 dňami?

14 453,45 €

77. Na termínovaný účet vložíte 2 500 €, ktoré banka úročí spojite nominálnou úrokovou mierou 3,4%. Akú čiastku budete môcť vybrať po uplynutí troch rokov?

2 768,46 €

78. Na akú hodnotu sa v banke počas 4 rokov naakumuluje kapitál 14 000 € úročený spojite 2,4% nominálnou úrokovou mierou?

15 410,63 €

79. Na koľko narastie vklad 15 000 € uložený 3 roky pri 2,5% nominálnej úrokovej miere pri spojitom úrokovaní?

16 168,26 €

80. O 3 roky plánujete kúpiť malý byt v cene 60 000 €. Koľko musíte vložiť teraz do banky pri 3,3% nominálnej úrokovej miere, aby ste v danom čase mali pripravenú potrebnú hotovosť, ak sa úroky pripisujú spojite?

54 344,56 €

81. Karol pri návšteve USA vložil do tamojšej banky 1 000 dolárov pri 4% nominálnej úrokovej miere a spojitom úrokovaní. O koľko rokov si tam môže prísť jeho potomok vybrať 100 000 dolárov?

115,13 roka

82. Za aký čas sa zdesaťnásobí vklad uložený do banky pri 2,8% nominálnej úrokovej miere a spojitom úrokovaní?

82,24 roka

83. Máte dva kapitály. Jeden z nich v hodnote 17 000 € je uložený pri 4% nominálnej úrokovej miere a spojitom úrokovaní, druhý v hodnote 18 500 € je uložený pri 3,5% nominálnej úrokovej miere a spojitom úrokovaní. Vypočítajte o koľko rokov budú mať rovnaké budúce hodnoty.

16,91 roka

84. Máte dva kapitály. Jeden z nich v hodnote 17 000 € je uložený pri 4% nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úrokovaní, druhý v hodnote 18 500 € je uložený pri 3,5% nominálnej úrokovej miere a spojitom úrokovaní. Vypočítajte o koľko rokov budú mať rovnaké budúce hodnoty.

17,61 roka

85. Máte dva kapitály. Jeden z nich v hodnote 17 000 € je uložený pri 4% nominálnej úrokovej miere a spojitom úrokovaní, druhý v hodnote 18 500 € je uložený pri 3,5% nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úrokovaní. Vypočítajte o koľko rokov budú mať rovnaké budúce hodnoty.

16,41 roka

86. Akú nominálnu úrokovú mieru poskytuje banka, v ktorej Vám počas troch rokov narástol kapitál 15 000 € na hodnotu 16 216,84 € pri spojitom úrokovaní?

2,6%

87. Uvažujete o nákupe vkladového listu o nominálnej hodnote 20 000 €, ktorý má mať o 5 rokov hodnotu 29 099,83 € za predpokladu spojitého úrokovania. Akej nominálnej úrokovej miere odpovedá výnos z tohto vkladového listu?

7,5%

88. Do banky si dnes uložíte 18 000 € pri spojitom úrokovaní a 4% nominálnej úrokovej miere. Po troch rokoch si z konta vyberiete 6 000 €. Koľko budete mať na konte po uplynutí ďalších piatich rokov?

17 459,88 €

89. V banke si otvoríte účet s vkladom 20 000 €. Banka poskytuje 2% nominálnu úrokovú mieru pri spojitom úrokovaní. Na konci prvého a druhého roka zvýšite vždy vklad o ďalších 5 000 €. Akú sumu budete mať po uplynutí 7 rokov od prvého vkladu?

34 168,82 €

90. Otec vkladal do banky pre deti pri 2,5% nominálnej úrokovej miere a spojitom úrokovaní nasledujúce vklady: 1. rok 2 000 €, 2. rok 1 400 € a 3. rok 2 500 €. Koľko musí vložiť v 5. roku, aby v 7. roku mohol vybrať 10 000 €?

3 164,74

91. Rozhodli ste sa svojmu práve narodenému dieťaťu založiť účet spojený so 4% nominálnou úrokovou mierou a dnes uložiť na účet takú hotovosť, aby vaše dieťa v deň svojich 18. narodenín mohlo z účtu vybrať 100 000 €. Koľko musíte vložiť dnes na účet pri spojitom úrokovaní?

48 675,23 €

92. Do banky ponúkajúcej 2% nominálnu úrokovú mieru ste uložili 100 000 €. Akú hodnotu bude mať vklad po 30 mesiacoch, keď sa úroky pripisujú spojite?

105 127,11 €

93. Predpokladajme, že vlastníte zbierku známok, ktorých hodnota o t rokov odteraz bude $V(t) = 50t + 1300$ eur. Ak by nominálna úroková miera ostala na rovnakej úrovni 3,5% a pripisovanie úrokov by bolo spojité, po akom čase by sa oplatilo známky predať a získané peniaze uložiť na účet?

2,57 roka

94. Predpokladajme, že vlastníte nehnuteľnosť, ktorej hodnota o t rokov odteraz bude $V(t) = 5000e^{\sqrt{t}}$ eur. Ak by nominálna úroková miera ostala na rovnakej úrovni 5% a pripisovanie úrokov by bolo spojité, po akom čase by sa oplatilo nehnuteľnosť predať a získané peniaze uložiť na účet?

100 rokov

95. Predpokladajme, že vlastníte zbierku umeleckej hodnoty, ktorej hodnota o t rokov odteraz bude $V(t) = 7\,000e^{0,3\sqrt{t}}$ eur. Ak by nominálna úroková miera ostala na rovnakej úrovni 6% a pripisovanie úrokov by bolo spojité, po akom čase by sa oplatilo zbierku predať a získané peniaze uložiť na účet?

6,25 roka

96. Predpokladajme, že vlastníte zbierku historickej hodnoty, ktorej hodnota o t rokov odteraz bude $V(t) = 2\,500e^{\frac{t-1}{25}}$ eur. Ak by nominálna úroková miera ostala na rovnakej úrovni 4,5% a pripisovanie úrokov by bolo spojité, po akom čase by sa oplatilo zbierku predať a získané peniaze uložiť na účet?

zbierku je potrebné predať

97. Predpokladajme, že ročná úroková miera v banke je 10%, a že sme si uložili 1000 €. 10% sa môže zdať ako výhodná investícia. Ak však ročná inflácia je 6%, aký bude po roku reálny úrok našej investície?

37,74 €

98. Klient má v Slovenskej sporiteľni na bežnom účte s 0,1% ročnou úrokovou mierou 30 000 €. Rozhoduje sa, ako s nimi naloží. Najprv však chce zistiť, akú hodnotu budú mať jeho úspory o 5 rokov, pričom ročná inflácia sa pohybuje priemerne okolo 2,4 %.

cca 26 778,85 €

99. Fero zarobí mesačne 836,00 €. Ak sa jeho mzda nezvýši, akú bude mať reálnu hodnotu o 3 roky, ak priemerná ročná miera inflácie bude 2,5%.

776,31 €

100. Vypočítajte ročnú mieru inflácie v Poľsku v roku 1995, ak CPI mal v roku 1995 hodnotu 245,73 a v roku 1996 mal CPI hodnotu 328,65.

26,5 %

101. Ročná miera inflácie v istej krajine v roku 2011 bola 4,34%. Index spotrebiteľských cien v roku 2012 mal hodnotu 125 a v predchádzajúcom roku hodnotu 120. Porovnajte mieru inflácie v roku 2011 a v roku 2012.

$i_{infl} = 4{,}17$ % , mierny pokles oproti roku 2011

102. Aké budú reálne príjmy štvorčlennej rodiny v roku 2013, ak v roku 2012 predstavovali hodnotu 1 652 €? Predpokladajme, že 2,5% ročná miera inflácie z roku 2012 ostane zachovaná.

1 611,71 €

103. Aké budú reálne príjmy štvorčlennej rodiny v roku 2013, ak v roku 2012 predstavovali hodnotu 1 652 €, pričom sa počíta s 5% nárastom príjmov? Predpokladajme, že 2,5% ročná miera inflácie z roku 2012 ostane zachovaná.

1 692,29 €

9 RENTOVÝ A UMOROVACÍ POČET

9.1 Riešené úlohy

Základné vzorce pre výpočet budúcej a súčasnej hodnoty polehotnej, resp. predlehotnej renty.

Budúca hodnota polehotnej renty $$S_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Súčasná hodnota polehotnej renty $$A_n = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Budúca hodnota p termínovej polehotnej renty pri m konverziách ročne

$$S_n = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

Súčasná hodnota p termínovej polehotnej renty pri m konverziách ročne

$$A_n = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

Budúca hodnota p termínovej polehotnej renty pri spojitom úrokovaní

$$S_n = R \cdot \frac{e^{j \cdot n} - 1}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

Súčasná hodnota p termínovej polehotnej renty pri spojitom úrokovaní

$$A_n = R \cdot \frac{1-e^{-j \cdot n}}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

Budúca hodnota polehotnej renty s rovnomerne rastúcou splátkou

$$S_n = \frac{R}{i-\alpha} \cdot (1+i)^n \cdot \left[1-\left(\frac{1+\alpha}{1+i}\right)^n\right]$$

Súčasná hodnota polehotnej renty s rovnomerne rastúcou splátkou

$$A_n = \frac{R}{i-\alpha} \cdot \left[1 - \left(\frac{1+\alpha}{1+i}\right)^n\right]$$

Budúca hodnota predlehotnej renty $\ddot{S}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Súčasná hodnota predlehotnej renty $\ddot{A}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Budúca hodnota p termínovej predlehotnej renty pri m konverziách ročne

$$\ddot{S}_n = R \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

Súčasná hodnota p termínovej predlehotnej renty pri m konverziách ročne

$$\ddot{A}_n = R \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

Súčasná hodnota polehotnej večnej renty

$$A_\infty = \frac{R}{i}$$

Súčasná hodnota p termínovej polehotnej večnej renty pri m konverziách ročne

$$A_\infty = \frac{R}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

Súčasná hodnota p termínovej polehotnej večnej renty pri spojitom úrokovaní

$$A_\infty = \frac{R}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

Budúca hodnota polehotnej odloženej renty s čakacou dobou t

$$ {}_tS_n = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} $$

Súčasná hodnota polehotnej odloženej renty s čakacou dobou t

$$ {}_tA_n = (1+i)^{-t}\cdot R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} $$

Budúca hodnota p termínovej polehotnej odloženej renty s čakacou dobou t pri m konverziách ročne

$$ {}_tS_n = R\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} $$

Súčasná hodnota p termínovej polehotnej odloženej renty s čakacou dobou t pri m konverziách ročne

$$ {}_tA_n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot t}\cdot R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} $$

A_n - súčasná hodnota n - ročnej renty,
S_n - budúca hodnota n - ročnej renty,
R - veľkosť lehotnej platby (splátky)
t, n - dĺžka úrokového obdobia, vyjadrená v jednotkách úrokovej periódy,
i - ročná úroková sadzba,
j - nominálna úroková sadzba,
m - počet konverzií ročne,
p - počet ročných splátok,
α - ročný nárast platby (splátky).

Príklad 9.1 Do banky si koncom každého roka vložíme 12 000 € pri 6% ročnej úrokovej miere. Akú sumu budeme mať v banke po 10 rokoch?

Riešenie:
Pre budúcu hodnotu polehotnej renty platí

$$ S_n = R\frac{(1+i)^n-1}{i} = 12\,000\frac{(1+0{,}06)^{10}-1}{0{,}06} = 158\,169{,}54 \text{ €}. $$

Príklad 9.2 Bude nám stačiť suma, ktorú usporíme počas 6 rokov pri pravidelných mesačných vkladoch 8 000 € pri 4% nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úročení na kúpu pozemku, ktorý by mal o 6 rokov stáť 600 000 €?

Riešenie:

Počítame budúcu hodnotu vkladov R počas n rokov pri m konverziách a p splátkach ročne a nominálnej úrokovej miere j polehotnej renty

$$S_n = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = 8\,000\frac{\left(1+\frac{0,04}{4}\right)^{4.6}-1}{\left(1+\frac{0,04}{4}\right)^{\frac{4}{12}}-1} = 649\,516,27 \text{ €}.$$ Usporená suma bude stačiť.

Príklad 9.3 Vlastníme obchod s potravinami, v ktorom chceme zamestnancom mesačne vyplatiť 8 500 € v nasledujúcich troch rokoch. K tomu, aby sme zabezpečili stále platby (aj v prípade nulového zisku z obchodu), si v banke založíme účet pri 10% nominálnej úrokovej miere a mesačnom úrokovaní. Koľko musíme dnes vložiť do banky?

Riešenie:

R = 8 500 Sk, n=3, m=12, p=12, j = 0,1. Počítame vlastne súčasnú hodnotu polehotnej renty

$$A_n = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = 8\,500\frac{1-\left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{-3\cdot 12}}{\left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{\frac{12}{12}}-1} = 263\,436 \text{ €}.$$

Príklad 9.4 O 4 roky budeme potrebovať sumu 50 000 €. Banka nám poskytuje 3,6% nominálnu úrokovú mieru pri spojitom úrokovaní. Rozhodneme sa každý mesiac vložiť určitú čiastku. Aká bude jej veľkosť?

Riešenie:

S_n = 50 000 €, p = 12, d = 4, j = 0,036.

Veľkosť jednotlivých vkladov R vyjadríme zo vzťahu pre výpočet budúcej hodnoty polehotnej renty pri spojitom úrokovaní

$$R = S_n \cdot \frac{e^{\frac{j}{p}}-1}{e^{j\cdot n}-1} = 50\,000\frac{e^{\frac{0,036}{12}}-1}{e^{0,036\cdot 4}-1} = 970 \text{ €}.$$

Príklad 9.5 Do banky si začiatkom každého roka vložíme 12 000 € pri 6% ročnej úrokovej miere. Akú sumu budeme mať v banke po 10 rokoch?

Riešenie:
R = 12 000 €, i = 0.06, n = 10 rokov

Pre budúcu hodnotu predlehotnej renty platí

$$\ddot{S}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 12\,000(1+0{,}06)\frac{(1+0{,}06)^{10} - 1}{0{,}06} = 167\,659{,}71 \text{ €}.$$

Príklad 9.6 Bude nám stačiť suma, ktorú usporíme počas 6 rokov pri pravidelných vkladoch 8 000 € začiatkom každého mesiaca pri 4% ročnej nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úročení na kúpu pozemku, ktorý by mal o 6 rokov stáť 600 000 €?

Riešenie:

R = 8 000 €, j = 0.04, m = 4, p = 12, n = 6 rokov
Počítame budúcu hodnotu vkladov R počas n rokov pri m konverziách a p splátkach ročne a nominálnej úrokovej miere j predlehotnej renty

$$\ddot{S}_n = R \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 4\,000\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{\frac{4}{12}} \frac{\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{4.6} - 1}{\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1} = 651\,674{,}15$$

€. Usporená suma bude stačiť.

Príklad 9.7 O 4 roky budeme potrebovať sumu 50 000 €. Banka nám poskytuje 3,6% nominálnu úrokovú mieru pri spojitom úrokovaní. Rozhodneme sa každý mesiac vložiť určitú čiastku. Aká bude jej veľkosť?

Riešenie:

S_n = 50 000 €, p = 12, d = 4, j = 0,036.
Veľkosť jednotlivých vkladov R vyjadríme zo vzťahu pre výpočet budúcej hodnoty pri spojitom úrokovaní

$$R = S_n \cdot \frac{e^{\frac{j}{p}} - 1}{e^{j \cdot n} - 1} = 50\,000\frac{e^{\frac{0{,}036}{12}} - 1}{e^{0{,}0364} - 1} = 970 \text{ €}.$$

Príklad 9.8 Aká veľká by mala byť ročná úroková sadzba pre nekonečné vyplácanie sumy 20 000 € na konci každého roka, ak sme teraz do banky vložili 200 000 €?

Riešenie:

R = 20 000 €, A_∞ = 200 000 €.
Úrokovú sadzbu si vyjadríme zo vzťahu pre výpočet súčasnej hodnoty nekonečnej (večnej) renty

$$i = \frac{R}{A_\infty} = \frac{20\,000}{200\,000} = 0{,}1.$$

Príklad 9.9 Splátková spoločnosť umožňuje nákup áut s 2 ročným odkladom splácania s tým, že klient bude pôžičku na auto splácať po dobu 10 rokov na konci každého mesiaca čiastkou 120 € pri ročnej úrokovej miere 4 %. Aká je súčasná cena auta?

Riešenie:

t = 2 roky, R = 120 €, p = 12, n = 10 rokov, j = 0,04, m = 1.
V tomto prípade sa jedná o odloženú rentu.

Pomocou vzťahu $A_n = R \cdot \dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = 11\,892{,}30$ vypočítame súčasnú hodnotu auta po 2 rokoch odteraz, teda po dvojročnom odklade.

Ak chceme vypočítať dnešnú súčasnú hodnotu auta, musíme hodnotu A_n odúročiť o spomínané 2 roky, potom ${}_tA_n = \dfrac{A_n}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m\cdot t}} = 10\,995$ €.

Príklad 9.10 Zobrali sme si pôžičku 80 000 €, ktorú budeme v nasledujúcich 5 mesiacoch pravidelne splácať rovnakými mesačnými umorovacími čiastkami. Zostavte umorovací plán, keď za každou splátkou je potrebné platiť mesačný úrok? Nominálna ročná úroková miera pre pôžičku je 24%.

Riešenie:

D = 80 000 €, $g = \dfrac{0{,}24}{12} = 0{,}02$, $Q_t = \dfrac{80\,000}{5} = 16\,000$€.

Jedná sa o rovnomerné splácanie pôžičky (umorovacia splátka je konštantná).

Obdobie t	Zostatok úveru $D_t = D_{t-1} - Q_{t-1}$	Úrok $u_t = g \cdot D_t$	Umor. splátka $Q_t = A_t - u_t$	Celk.splátka A_t
1	80 000	1 600	16 000	17 600
2	64 000	1 280	16 000	17 280
3	48 000	960	16 000	16 960
4	32 000	640	16 000	16 640
5	16 000	320	16 000	16 320
Súčet		4 800	80000	84 800

Príklad 9.11 Ideme urobiť plán splácania pôžičky 200 000 €. Budeme ju splácať 5 rokov rovnakými celkovými ročnými splátkami. Predpokladajme, že ročná úroková miera na krátkodobé úvery je 30%.

Riešenie:

D = 200 000 €, g = 0,3, n = 5 rokov.
Jedná sa o anuitné splácanie pôžičky (celková splátka je konštantná). Najprv potrebujeme vypočítať veľkosť jednej splátky $A = D\dfrac{g}{1-(1+g)^{-n}} = 82\,116{,}30$ €.

Obdobie t	Zostatok úveru $D_t = D_{t-1} - Q_{t-1}$	Úrok $u_t = g \cdot D_t$	Umor. splátka $Q_t = A_t - u_t$	Celk.splátka A_t
1	200 000	60 000	22 116,30	82 116,30
2	177 883,70	53 365,10	28 751,20	82 116,30
3	149 132,50	44 739,80	37 376,50	82 116,30
4	111 755,90	33 526,80	48 589,10	82 116,30
5	63 166,40	18 949,90	63 166,40	82 116,30
Súčet		210 581.60	199 999,50	410 581,50

Príklad 9.12 Dlh v sume 10 000 € je vydaný pri 3% ročnej úrokovej miere a musí byť vrátený o 4 roky. Zostavme umorovací plán za predpokladu, že ročné splátky do fondu sú konštantné a banka poskytuje 4% ročnú nominálnu úrokovú mieru, pričom úročenie je polročné.

Riešenie:

D = 10 000 €, g = 0.03, n = 4 roky, j = 0.04, p = 1, m = 2

Jedná sa o splácanie pôžičky jednorázovou splátkou na konci posledného obdobia pri ročnej úrokovej sadzbe g, pričom na splatenie pôžičky máme vytvorený v banke pri ročnej nominálnej úrokovej sadzbe j tzv. zabezpečovací fond.

Splátka do fondu $a = D \cdot \dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1} = 10\,000 \cdot \dfrac{\left(1+\dfrac{0{,}04}{2}\right)^{\frac{2}{1}} - 1}{\left(1+\dfrac{0{,}04}{2}\right)^{2 \cdot 4} - 1} = 2\,353{,}50$ €

Celková splátka $A = D \cdot g + A = 10\,000 \cdot 0{,}03 + 2\,353{,}50$ €

Obdobie t	Úrok za pôžičku $D \cdot g$	Splátka do fondu a	Celková splátka $A = D \cdot g + a$	Zúročená splátka vo fonde $a \cdot \left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m \cdot \left(n - \frac{t}{p}\right)}$
1	300	2 353,50	2 653,50	2 650,42
2	300	2 353,50	2 653,50	2 547,50
3	300	2 353,50	2 653,50	2 448,58
4	300	2 353,50	2 653,50	2 353,50
Súčet	1 200	9 414	10 614	10 000

9.2 Neriešené úlohy

1. Počas 5 rokov ukladá Andrea na konci každého roka do banky pri 2,5% ročnej úrokovej miere 2 500 €. Koľko sa jej podarí nasporiť za toto obdobie?

13 140,82 €

2. Na konci každého z nasledujúcich 10 rokov vloží Boris do banky, ktorá ponúka 2,8% ročnú úrokovú mieru po 3 000 €. Koľko si naspori za uvažované obdobie?

34 076,55 €

3. Akou čiastkou Cyril sporil, ak počas 6 rokov, koncoročným vkladaním do banky s 3% ročnou úrokovou mierou, nasporil 7 762,09 €?

1 200 €

4. Za 8 rokov sa Denise podarilo nasporiť 28 862,60 € v banke s 3,4% ročnou úrokovou mierou. Koľko eur vkladala do banky koncom každého roka?

3200 €

5. Brat má sestre vyplatiť dedičský podiel 350 000 € o 5 rokov. Koľko musí uložiť koncom každého roka na účet v banke, aby nasporil dedičský podiel pri 11% ročnej úrokovej miere?

56 200 €

6. Uvažujeme o ročnej úrokovej miere 4%. Ako dlho vkladala Eva koncom každého roka sumu 4 000 €, ak sa jej naakumuloval kapitál 16 985,86 €?

4 roky

7. František si z banky na konci sporenia vybral 27 752,43 €. Koncom každého roka si sporil čiastkou 3 600 €, pričom ročná úroková sadzba bola 0,032. Koľko vkladov urobil?

7

8. Aká je súčasná hodnota všetkých vkladov vo výške 2 500 €, ktoré chce Gabriela ukladať do banky s 2,5% ročnou úrokovou mierou počas 5 rokov, stále na konci roka?

11 614,57 €

9. Henrieta bude 10 rokov splácať pôžičku s 7,8% ročnou úrokovou mierou koncoročnými splátkami vo výške 3 692,20 €. Koľko eur si požičala?

25 000 €

10. Koľko eur musí Ivan vložiť do banky pri 3% ročnej úrokovej miere, keď chce na konci z nasledujúcich 6 rokov vyberať po 1 200 € až do vyčerpania účtu?

6 500,63 €

11. Postačí Jane suma 22 000 € vložená do banky, ak chce vyberať na konci každého z nasledujúcich 8 rokov 3 200 €, pričom ročná úroková miera je 3,4%?

nie

12. Otec odkázal v závete 60 000 € uložených v cenných papieroch úročených 8 % ročnou úrokovou mierou svojim trom synom, ktorí mali v čase jeho smrti 14, 16 a 18 rokov. Každý syn má v osemnástich rokoch dostať rovnakú čiastku. Aká veľká bude táto čiastka?

23 144,86 €

13. Ako dlho si bude môcť Karol užívať koncoročné vyberanie čiastky 4 000 €, ak 17 000 €, ktoré získal z dedičstva, uloží do banky so 4% ročnou úrokovou mierou?

4,75 roka

14. Na koľko rokov vystačí Lívii suma 22 260,92 € vložená do banky, ak ju banka bude úročiť ročnou úrokovou mierou 3,2 % a Lívia si bude koncoročne vyberať po 3 600 €?

7 rokov

15. Koľko splátok potrebujete na vyplatenie pôžičky vo výške 150 000 €, ak koncom každého roka platíte 35 000 € pri ročnej úrokovej miere 8,5 %?

5,55 splátok

16. Počas 5 rokov ukladá Martin na konci každého mesiaca do banky pri 2,5% nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úročení 250 €. Koľko sa mu podarí nasporiť za toto obdobie?

15 958,06 €

17. Na konci každého mesiaca počas nasledujúcich 10 rokov vloží Norbert do banky, ktorá ponúka 2,8% nominálnu úrokovú mieru a polročné úročenie 300 €. Koľko si nasporí za uvažované obdobie?

41 455 €

18. Pri narodení syna otec založil viazaný vklad, na ktorý prispieva mesačne sumou 100 €. Banka poskytuje na vklad mesačné úročenie pri nominálnej úrokovej sadzbe 0,025. Akú sumu dostane dieťa po dovŕšení 18. rokov?

27 243,76 €

19. Počas 2 rokov budete sporiť pri pravidelných štvrťročných vkladoch 2 100 € pri 2,5% nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úročení na kúpu zariadenia bytu, pričom predpokladáte, že zariadenie bude stáť 18 000 €. Nasporíte si za tento čas potrebnú čiastku?

nie

20. Akou čiastkou Olívia sporila, ak pravidelným sporením koncom každého štvrťroka počas 6 rokov v banke s 3% ročnou úrokovou mierou, nasporila 8 372,14 €?

320 €

21. Za 8 rokov sa Petre podarilo nasporiť 13 204,61 € v banke s 3,4% nominálnou úrokovou mierou a polročným úročením. Koľko eur vkladala do banky koncom každého mesiaca?

120 €

22. Uvažujeme o banke s nominálnou úrokovou mierou 4% a štvrťročnom úročení. Ako dlho vkladal Roman koncom každého mesiaca sumu 400 €, ak sa mu naakumuloval kapitál 20 778,32 €?

4 roky

23. Stanislav si z banky na konci sporenia vybral 31 230,77 €. Koncom každého štvrťroka si sporil čiastkou 1 000 €, pričom nominálna úroková sadzba bola 0,032 a banka úročila vklady polročne. Koľko vkladov urobil?

28 vkladov

24. Klient koncom každého roka v priebehu rokov 1980-1995 vrátane, vkladal na účet v banke 20 000 Sk. Na konci roka 1998 všetky úspory vybral. O akú sumu išlo, keď banka úrokovala vklady s 8,5 % ročnou úrokovou mierou?

808 064,50 Sk

25. Koľko eur vložila Tatiana do banky, ak počas 5 rokov, stále na konci mesiaca až do vyčerpania účtu vyberala z banky so štvrťročným úročením a 2,5% nominálnou úrokovou mierou čiastku 248,43 €?

14 000 €

26. Uršuľa bude 8 rokov splácať pôžičku s 8,5% ročnou úrokovou mierou koncomesačnými splátkami vo výške 426,93 €. Koľko eur si požičala?

30 000 €

27. Viktor vložil do banky pri 3,1% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení 25 000 € z výhry. Akú čiastku môže v priebehu nasledujúcich 10 rokov na konci každého štvrťroka vyberať až do vyčerpania účtu?

728,85 €

28. Xénia spláca koncom každého mesiaca počas dvoch rokov pôžičku vo výške 16 000 €. Pôžička je úročená 12% ročnou úrokovou mierou. Aká veľká je mesačná splátka?

748,59 €

29. Koľko celých rokov bude môcť Yvona vyberať koncom každého štvrťroka po 500 € z banky, v ktorej sa štvrťročne úročí jej začiatočný vklad 7 700 € pri 1,8% nominálnej úrokovej miere?

4 roky

30. Koľko celých rokov bude Zuzana splácať pôžičku 10 000 € banke, ak ju banka bude úročiť ročnou úrokovou mierou 6,5% a Zuzana bude splácať koncomesačné splátky vo výške 80 €?

17 rokov

31. Počas 5 rokov ukladá Martin na konci každého mesiaca do banky pri 2,5% nominálnej úrokovej miere a spojitom úročení 250 €. Koľko sa mu podarí nasporiť za toto obdobie?

15 961,18 €

32. Na konci každého mesiaca počas nasledujúcich 10 rokov vloží Norbert do banky, ktorá ponúka 2,8% nominálnu úrokovú mieru a spojité úročenie 300 €. Koľko si nasporí za uvažované obdobie?

41 496,81 €

33. Pri narodení syna otec založil viazaný vklad, na ktorý prispieva mesačne sumou 100 €. Banka poskytuje na vklad spojité úročenie pri nominálnej úrokovej sadzbe 0,025. Akú sumu dostane dieťa po dovŕšení 18. rokov?

27 250,58 €

34. Počas 2 rokov budete sporiť pri pravidelných štvrťročných vkladoch 2 100 € pri 2,5% nominálnej úrokovej miere a spojitom úročení na kúpu zariadenia bytu, pričom predpokladáte, že zariadenie bude stáť 18 000 €. Nasporíte si za tento čas potrebnú čiastku?

nie

35. Akou čiastkou Olívia sporila, ak pravidelným sporením koncom každého štvrťroka počas 6 rokov v banke s 3% nominálnou úrokovou mierou a spojitým úročením, nasporila 8 383,09 €?

320 €

36. Za 8 rokov sa Petre podarilo nasporiť 13 220,23 € v banke s 3,4% nominálnou úrokovou mierou a spojitým úročením. Koľko eur vkladala do banky koncom každého mesiaca?

120 €

37. Uvažujeme o banke s nominálnou úrokovou mierou 4% a spojitom úročení. Ako dlho vkladal Roman koncom každého mesiaca sumu 400 €, ak sa mu naakumuloval kapitál 20 786,62 €?

4 roky

38. Stanislav si z banky na konci sporenia vybral 31 258,51 €. Koncom každého štvrťroka si sporil čiastkou 1 000 €, pričom nominálna úroková sadzba bola 0,032 a banka úročila vklady spojite. Koľko vkladov urobil?

28 vkladov

39. Koľko eur vložila Tatiana do banky, ak počas 5 rokov, stále na konci mesiaca až do vyčerpania účtu vyberala z banky so spojitým úročením a 2,5% nominálnou úrokovou mierou čiastku 248,48 €?

14 000 €

40. Koľko eur vložila Svetlana do banky, ak si koncom každého mesiaca neobmedzene dlho môže vyberať z banky s mesačným úročením a 2,5% nominálnou úrokovou mierou čiastku 105 €?

50 400 €

41. Ako by sa zmenil výsledok z predchádzajúcej úlohy, ak by úročenie bolo spojité?

50 347,52 €

42. Jozef vložil do banky pri 3,1% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení 25 000 € z výhry. Akú čiastku môže vyberať na konci každého mesiaca, aby hodnota vkladu ostala zachovaná?

64,17 €

43. Karol vyhral v ŠPORTKE 258 000 €. Uložil ich na účet do banky, ktorá poskytuje spojité úročenie pri 2,6% nominálnej úrokovej miere. Aké veľké sumy môže vyberať každý mesiac, aby začiatočná hodnota vkladu zostala zachovaná?

559,61 €

44. Určte, koľko eur musí mať Helena na účte v banke pri 1,8% ročnej úrokovej miere, ak jej majú byť poskytnuté pravidelné platby na konci každého polroka v sume 2 000 € na neobmedzenú dobu?

223 217,80 €

45. Akým kapitálom musí disponovať Boris, aby si zabezpečil mesačnú rentu vo výške 250 € na neobmedzenú dobu v banke s 2,3% nominálnou úrokovou mierou a spojitom úrokovaní?

130 309,80 €

46. Adriana na konci roka uloží do banky pri 2,5% ročnej úrokovej miere 2 500 €, pričom každý jej ďalší koncoročný vklad bude o 2% vyšší ako predchádzajúci počas nasledujúcich 4 rokov. Koľko sa jej podarí nasporiť za toto obdobie?

13 663,71 €

47. Na konci každého z nasledujúcich 10 rokov bude Miroslav vkladať peniaze do banky tak, že jeho prvý vklad bude 3 000 € a každý ďalší vklad bude o 5% vyšší. Banka ponúka 2,8% ročnú úrokovú mieru. Koľko si Miroslav nasporí za uvažované obdobie?

42 388,21 €

48. Aký veľký bol prvý Félixov vklad, ak počas 6 rokov, koncoročným vkladaním do banky s 3% ročnou úrokovou mierou, nasporil 9 900,15 €, ak svoje vklady každoročne zvyšoval o 10%?

1 200 €

49. Za 8 rokov sa Denise podarilo nasporiť 9 973,77 € v banke s 3,4% ročnou úrokovou mierou. Koľko eur vložila do banky prvý rok, ak jej ďalšie vklady do banky koncom každého roka boli stále o 3% väčšie?

1 000 €

50. Aká je súčasná hodnota všetkých vkladov, ktoré každoročne narastajú o 4%, ak ich Svetlana bude ukladať do banky s 2,5% ročnou úrokovou mierou počas 5 rokov, stále na konci roka, pričom prvá vložená čiastka je 2 500 €?

12 557,31 €

51. Alžbeta bude na základe dohody 10 rokov splácať pôžičku so 7,8% ročnou úrokovou mierou koncoročnými rovnomerne o 5% rastúcimi splátkami. Jej prvá splátka bola výške 3 025,18 €. Koľko eur si požičala?

25 000 €

52. Koľko eur musí Alojz vložiť do banky pri 3% ročnej úrokovej miere, keď chce na konci z nasledujúcich 6 rokov čerpať rovnomerne o 5% rastúcu rentu, ak prvý výber bude vo výške 800 €?

4 892,36 €

53. Etela vložila do banky peniaze z dedičstva vo výške 10 000 €, z ktorých chce koncom každého z nasledujúcich 10 rokov až do vyčerpania účtu vyberať rovnomerne o 10% rastúcu čiastku. Koľko eur si môže vybrať na konci prvého roka, keď banka peniaze úročí 3,4% ročnou úrokovou mierou?

770,48 €

54. Viera dostala od banky pôžičku, ktorú bude splácať na konci mesiaca splátkou 137,21 € počas 8 rokov od prvej splátky pri 6,5% ročnej úrokovej miere. S bankou sa dohodla, že prvú splátku vyplatí na konci siedmeho mesiaca. Aká veľká je Vierina pôžička?

10 000 €

55. Pôžičku na auto vo výške 32 000 €, bude Klára splácať na konci mesiaca 12 rokov od prvej splátky pri 5,6% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení. S bankou sa dohodla, že prvú splátku vyplatí na konci tretieho štvrťroka. Aká bude veľkosť mesačnej splátky?

316,06 €

56. Lízingová spoločnosť ponúka na predaj autá s tým, že ich klient bude splácať 10 rokov na konci každého mesiaca v splátkach 100 €. Spoločnosť poskytuje 2 ročný odklad splácania, teda prvú splátku zaplatí klient po 2 rokoch a 1 mesiaci od zakúpenia auta. Vypočítajte súčasnú hodnotu auta, ak nominálna úroková miera je 4 % a úrokovanie je polročné.

9 138,96 €

57. Ako by sa zmenil výsledok z predchádzajúcej úlohy, ak by lízingová spoločnosť súhlasila, že sa splácanie nielen odloží, ale po 5 rokoch splácania sa preruší a pokračovať sa bude po roku, teda ďalšia splátka príde po roku a 1 mesiaci, pričom veľkosť splátky sa zmení na 150 €?

10 958,33 €

58. Lízingová spoločnosť ponúka na predaj autá s tým, že ich klient bude splácať 10 rokov na konci každého mesiaca v splátkach 100 €. Spoločnosť poskytuje 2 ročný odklad splácania, teda prvú splátku zaplatí klient po 2 rokoch a 1 mesiaci od zakúpenia auta. Vypočítajte budúcu hodnotu ceny auta po jeho splatení, ak nominálna úroková miera je 4 % a úrokovanie je polročné.

14 699,44 €

59. Ako by sa zmenil výsledok z predchádzajúcej úlohy, ak by lízingová spoločnosť súhlasila, že sa splácanie nielen odloží, ale po 5 rokoch splácania sa preruší a pokračovať sa bude po roku, teda ďalšia splátka príde po roku a 1 štvrťroku pričom veľkosť splátky sa zmení na 300 € a splácať sa bude štvrťročne?

15 003,82 €

60. Alena počas 5 rokov ukladá na začiatku každého roka do banky pri 2,5% ročnej úrokovej miere 2 500 €. Koľko sa jej podarí nasporiť za toto obdobie?

13 469,34 €

61. Na začiatku každého z nasledujúcich 10 rokov vloží Maximilián do banky, ktorá ponúka 2,8% ročnú úrokovú mieru po 3 000 €. Koľko si nasporí za uvažované obdobie?

35 030,69 €

62. Akou čiastkou Marián sporil, ak počas 6 rokov, na začiatku roka vkladaním do banky s 3% ročnou úrokovou mierou, nasporil 7 994,95 €?

1 200 €

63. Za 8 rokov sa Simone podarilo nasporiť 29 843,93 € v banke s 3,4% ročnou úrokovou mierou. Koľko eur vkladala do banky začiatkom každého roka?

3200 €

64. Uvažujeme o ročnej úrokovej miere 4 %. Ako dlho vkladala Daniela začiatkom každého roka sumu 4 000 €, ak sa jej naakumuloval kapitál 17 665,29 €?

4 roky

65. Eugen si z banky na konci sporenia vybral 28 640,51 €. Začiatkom každého roka si sporil čiastkou 3 600 €, pričom ročná úroková sadzba bola 0,032. Koľko vkladov urobil?

7

66. Aká je súčasná hodnota všetkých vkladov vo výške 2 500 €, ktoré chce Zdenka ukladať do banky s 2,5% ročnou úrokovou mierou počas 5 rokov, stále na začiatku roka?

11 904,93 €

67. Koľko eur musí Pavol vložiť do banky pri 3% ročnej úrokovej miere, keď chce na začiatku z nasledujúcich 6 rokov vyberať po 1 200 € až do vyčerpania účtu?

6 695,65 €

68. Na koľko rokov vystačí Elvíre suma 22 973,27 € vložená do banky, ak ju banka bude úročiť ročnou úrokovou mierou 3,2 % a Elvíra si bude na začiatku roka vyberať po 3 600 €?

7 rokov

69. Akou čiastkou sporila Martina, ak pravidelným sporením začiatkom každého štvrťroka počas 6 rokov v banke s 3% ročnou úrokovou mierou, nasporila 8 434,24 €?

320 €

70. Za 8 rokov sa Hedvige podarilo nasporiť 13 241,76 € v banke s 3,4% nominálnou úrokovou mierou a polročným úročením. Koľko eur vkladala do banky začiatkom každého mesiaca?

120 €

71. Uvažujeme o banke s nominálnou úrokovou mierou 4 % a štvrťročnom úročení. Ako dlho vkladal Ján začiatkom každého mesiaca sumu 400 €, ak sa mu naakumuloval kapitál 20 847,35 €?

4 roky

72. Marcel si z banky na konci sporenia vybral 31 479,63 €. Začiatkom každého štvrťroka si sporil čiastkou 1 000 €, pričom nominálna úroková sadzba bola 0,032 a banka úročila vklady polročne. Koľko vkladov urobil?

28 vkladov

73. Koľko eur vložila Miriam do banky, ak počas 5 rokov, stále na začiatku mesiaca až do vyčerpania účtu vyberala z banky so štvrťročným úročením a 2,5% nominálnou úrokovou mierou čiastku 247,92 €?

14 000 €

74. Eleonóra bude 8 rokov splácať pôžičku s 8,5% ročnou úrokovou mierou splátkami vo výške 424,05 € na začiatku mesiaca. Koľko eur si požičala?

30 000 €

75. Marek vložil do banky pri 3,1% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení 25 000 € z výhry. Akú čiastku môže v priebehu nasledujúcich 10 rokov na začiatku každého štvrťroka vyberať až do vyčerpania účtu?

723,27 €

76. Hedviga spláca začiatkom každého mesiaca počas dvoch rokov pôžičku vo výške 16 000 €. Pôžička je úročená 12% ročnou úrokovou mierou. Aká veľká je mesačná splátka?

741,56 €

77. Dlh vo výške 5 400 € má byť splatený ročnými splátkami v priebehu 4 rokov tak, aby na umorenie dlhu pripadali každoročne rovnaké čiastky. Zostavte umorovací plán, ak ročná úroková sadzba je 0,08.

Q=1 350 €

78. Dlh vo výške 10 000 € má byť splatený ročnými splátkami v priebehu 5 rokov tak, aby na umorenie dlhu pripadali každoročne rovnaké čiastky. Zostavte umorovací plán pri ročnej úrokovej miere 12%.

Q=2 000 €

79. Dlh vo výške 17 000 € má byť splatený ročnými splátkami v priebehu 5 rokov tak, aby na umorenie dlhu pripadali každoročne rovnaké čiastky. Zostavte umorovací plán, ak ročná úroková sadzba je 0,095.

Q=3 400 €

80. Dlh vo výške 9 000 € s nominálnou úrokovou mierou 6% a polročnom úrokovaní má byť splatený polročnými splátkami v priebehu 3 rokov tak, aby na umorenie dlhu pripadali každý polrok rovnaké čiastky. Zostavte umorovací plán.

Q=1 500 €

81. Dlh vo výške 8 500 € pri nominálnej úrokovej miere 7,5% a polročnom úrokovaní má byť splatený polročnými splátkami v priebehu 3 rokov tak, aby na umorenie dlhu pripadali každý polrok rovnaké čiastky. Zostavte umorovací plán.

Q=1 416,67 €

82. Dlh vo výške 3 000 € má byť splatený štvrťročnými splátkami v priebehu 1 roka tak, aby na umorenie dlhu pripadali každý štvrťrok rovnaké čiastky. Zostavte umorovací plán pri štvrťročnom úrokovaní, ak nominálna úroková sadzba je 0,078.

Q=750 €

83. Pôžička 6 500 € má byť splatená rovnakými ročnými splátkami behom 4 rokov pri ročnej úrokovej sadzbe 0,1. Zostavte umorovací plán.

A=2 050,56 €

84. Dlh 12 400 € dohodnutý s 8,5% ročnou úrokovou mierou má byť splatený konštantnými ročnými anuitami behom 4 rokov. Zostavte umorovací plán.

A=3 785,57 €

85. Pôžička 16 000 € má byť splatená konštantnými ročnými anuitami za 5 rokov pri 7% ročnej úrokovej miere. Zostavte umorovací plán.

A=3 902,25 €

86. Pôžička 9 200 € má byť splatená rovnakými polročnými splátkami za 2 roky pri nominálnej úrokovej sadzbe 0,08 a polročnom úročení. Zostavte umorovací plán.

A=2 534,51 €

87. Dlh 4 400 € má byť splatený konštantnými polročnými anuitami za 3 roky pri nominálnej úrokovej miere 5,2 % a polročnom úročení. Zostavte umorovací plán.

A=801,49 €

88. Pôžička 7 000 € s nominálnou úrokovou mierou 6,2 %, štvrťročným úročením a rovnakými štvrťročnými splátkami má byť splatená za 1 rok. Zostavte umorovací plán.

A=1 818,33 €

89. Pôžička 15 000 € s nominálnou úrokovou mierou 4,8 %, štvrťročným úročením a rovnakými polročnými splátkami má byť splatená za 3 roky. Zostavte umorovací plán.

A=2 715,46 €

90. Pôžička 15 000 € s nominálnou úrokovou mierou 4,8 %, štvrťročným úročením a rovnakými ročnými splátkami má byť splatená za 4 roky. Zostavte umorovací plán.

A=5 493,44 €

91. Dlh 16 000 € s nominálnou úrokovou mierou 3,6 %, s úročením každé 2 mesiace a rovnakými štvrťročnými splátkami má byť splatený za 2 roky. Zostavte umorovací plán.

A=2 081,97 €

92. Dlh 8 000 € s nominálnou úrokovou mierou 4,8 %, mesačným úročením a rovnakými polročnými splátkami má byť splatený za 3 roky. Zostavte umorovací plán.

A=1 448,72 €

93. Pôžička 12 000 € s ročnou úrokovou mierou 3 % má byť splatená rovnakými polročnými splátkami za 3 roky. Zostavte umorovací plán.

A=2 105,51 €

94. Pôžička 9 000 € s ročnou úrokovou mierou 6 % má byť splatená rovnakými štvrťročnými splátkami za 1 rok. Zostavte umorovací plán.

A=2 333,14 €

95. Dlh vo výške 28 000 € je vydaný pri 11% ročnej úrokovej miere. Zostavte umorovací plán, ak chcete dlh splatiť konštantnými ročnými anuitami v hodnote 9 000 €. Ako dlho budete pôžičku splácať. Aká bude posledná vyrovnávacia splátka ?

5 rokov, A_5=131,41 €

96. Pôžička vo výške 40 000 € má byť splácaná ročnými splátkami. Prvá splátka vo výške 10 000 € je splatná po 2. roku. Ďalšie splátky sa majú postupne zvyšovať o 5 000 €. Po koľkých rokoch bude dlh splatený pri ročnej úrokovej miere 18%? Aká bude výška poslednej splátky? Zostavte umorovací plán.

6 rokov, A_6 = 6 600,91 €

97. Pôžička vo výške 40 000 € má byť splácaná ročnými splátkami. Prvá splátka vo výške 10 000 € je splatná po 2. roku. Ďalšie splátky sa majú postupne zvyšovať o 6 000 €. Po koľkých rokoch bude dlh splatený pri ročnej úrokovej miere 18%? Aká bude výška poslednej splátky? Zostavte umorovací plán.

5 rokov, A_5 = 26 841,56 €

98. Pôžička vo výške 15 000 € má byť splácaná ročnými splátkami. Podľa dohody prvá splátka vo výške 6 000 € je splatná až po 3. roku. Ďalšie splátky sa majú postupne zvyšovať o 4 000 €. Po koľkých rokoch bude dlh splatený pri ročnej úrokovej sadzbe 0,1? Aká bude výška poslednej splátky? Zostavte umorovací plán.

5 rokov, A_5 = 5 897,65 €

99. Pôžička vo výške 15 000 € má byť splácaná ročnými splátkami. Podľa dohody prvá splátka vo výške 6 000 € je splatná až po 3. roku. Ďalšie splátky sa majú postupne zvyšovať o 2 000 €. Po koľkých rokoch bude dlh splatený pri ročnej úrokovej sadzbe 0,1? Aká bude výška poslednej splátky? Zostavte umorovací plán.

5 rokov, A_5 = 8 097,65 €

100. Dlh v sume 6 000 € je vydaný pri 3% ročnej úrokovej miere a musí byť naraz vrátený o 5 rokov. Na našetrenie tejto sumy je potrebné vytvoriť zabezpečovací fond v banke, ktorá poskytuje 4% ročnú úrokovú mieru. Zostavte umorovací plán za predpokladu, že ročné splátky do fondu sú konštantné.

a = 1 107,76 €

101. Dlh v sume 14 500 € je vydaný pri 2,5% ročnej úrokovej miere a musí byť naraz vrátený o 6 rokov. Na našetrenie tejto sumy je potrebné vytvoriť zabezpečovací fond v banke, ktorá poskytuje 3,2% ročnú úrokovú mieru. Zostavte umorovací plán za predpokladu, že ročné splátky do fondu sú konštantné.

a = 2 230,43 €

102. Pôžička 12 000 € sa spláca pri 2,5% ročnej úrokovej miere a musí byť naraz vrátená o 5 rokov. Na našetrenie tejto sumy je potrebné vytvoriť zabezpečovací fond v banke, ktorá poskytuje 3% nominálnu úrokovú mieru pri štvrťročnom úročení. Zostavte umorovací plán za predpokladu, že ročné splátky do fondu sú konštantné.

a = 2 258,72 €

103. Dlh v sume 15 000 € je vydaný pri 3% ročnej úrokovej miere a musí byť naraz vrátený o 3 roky. Na našetrenie tejto sumy je potrebné vytvoriť zabezpečovací fond v banke, ktorá poskytuje 4% nominálnu úrokovú mieru pri polročnom úročení. Zostavte umorovací plán za predpokladu, že polročné splátky do fondu sú konštantné.

a = 2 377,89 €

Tabuľky niektorých umorovacích plánov:

80.

t	**D**	**u**	**Q**	**A**
1	9 000	270	1 500	1 770
2	7 500	225	1 500	1 725
3	6 000	180	1 500	1 680
4	4 500	135	1 500	1 635
5	3 000	90	1 500	1 590
6	1 500	45	1 500	1 545

86.

t	D	u	Q	A
1	9 200,00	368,00	2 166,51	2 534,51
2	7 033,49	281,34	2 253,17	2 534,51
3	4 780,32	191,21	2 343,30	2 534,51
4	2 437,02	97,48	2 437,03	2 534,51

89.

t	D	u	Q	A
0,5	15 000,00	362,16	2 353,30	2 715,46
1	12 646,70	305,34	2 410,12	2 715,46
1,5	10 236,58	247,15	2 468,31	2 715,46
2	7 768,27	187,56	2 527,90	2 715,46
2,5	5 240,37	126,52	2 588,94	2 715,46
3	2 651,43	1 006,92	2 651,44	2 715,46

96.

t	D	u	Q	A
1	40 000,00	7 200,00	-7 200,00	0
2	47 200,00	8 496,00	1 504,00	10 000
3	45 696,00	8 225,28	6 774,72	15 000
4	38 921,28	7 005,83	12 994,17	20 000
5	25 927,11	4 666,88	20 333,12	25 000
6	5 593,99	1 006,92	5 593,99	6 600,91

103.

t	Dg	a	A=Dg+a	$a\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\left(n-\frac{t}{p}\right)}$
1	0	2 377,89	2 377,89	2 625,38
2	450	2 377,89	2 827,89	2 573,90
3	0	2 377,89	2 377,89	2 523,44
4	450	2 377,89	2 827,89	2 473,96
5	0	2 377,89	2 377,89	2 425,45
6	450	2 377,89	2 827,89	2 377,89

10 FINANČNÉ TOKY

10.1 Riešené úlohy

Pri oceňovaní investičných projektov pomocou kritéria čistej súčasnej hodnoty NPV vychádzame z toho, že projekt s finančnými tokmi CF_j pri cene kapitálu i je akceptovateľný, ak jeho NPV je kladná hodnota. Ak porovnávame viacero projektov s porovnateľnou životnosťou n, najlepší je ten, ktorého čistá súčasná hodnota je najväčšia.

Vzorec pre výpočet čistej súčasnej hodnoty $NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{X_t}{(1+i)^t}$.

Vzorec pre výpočet čistej súčasnej hodnoty $NPV = X_0 + X \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ za predpokladu, že finančné toky X_t sú počas celej životnosti projektu konštantné a X_0 je začiatočná investícia.

Ďalším kritériom pre oceňovanie investičných projektov je vnútorná miera výnosu IRR, ktorá je definovaná ako úroková miera, pre ktorú je čistá súčasná hodnota rovná nule.

Ak je NPV klesajúca funkcia úrokovej miery, potom $IRR = r \cdot 100\%$ ($r \in (0,1)$) je najväčšia hodnota úrokovej miery, pri ktorej je daný projekt ešte akceptovateľný.

Príklad 10.1 Podnik zvažuje kúpu novej výrobnej linky, ktorá môže zabezpečiť vyššie zisky. Cena linky je 480 000 € a kúpa zvýši čisté finančné toky o 84 000 € v každom z nasledujúcich osemnástich rokov. Predpokladajme, že cena kapitálu je 16 %. Aká je čistá súčasná hodnota tohto projektu?

Riešenie:

n = 18 rokov, X = 84 000 €, X_0 = - 480 000 €, i = 0,16

$$NPV = X_0 + X\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = -480\,000 + 84\,000\frac{1-(1{,}16)^{-18}}{0{,}16} = 8\,699{,}30\,€.$$

Príklad 10.2 Investícia do projektu je 3 000 €. V prvom roku to bude ešte finančná strata veľkosti 8 000 € ale v druhom roku už príjem 16 000 €. Aká je jeho vnútorná miera výnosu?

Riešenie:

Vnútornú mieru výnosu IRR nášho projektu nájdeme riešením rovnice

$$0 = \frac{-8\,000}{1+r} + \frac{16\,000}{(1+r)^2} - 3\,000 \text{ na intervale } (0,1).$$

Po substitúcii $d = \dfrac{1}{1+r}$ dostávame rovnicu

$16d^2 - 8d - 3 = 0$,

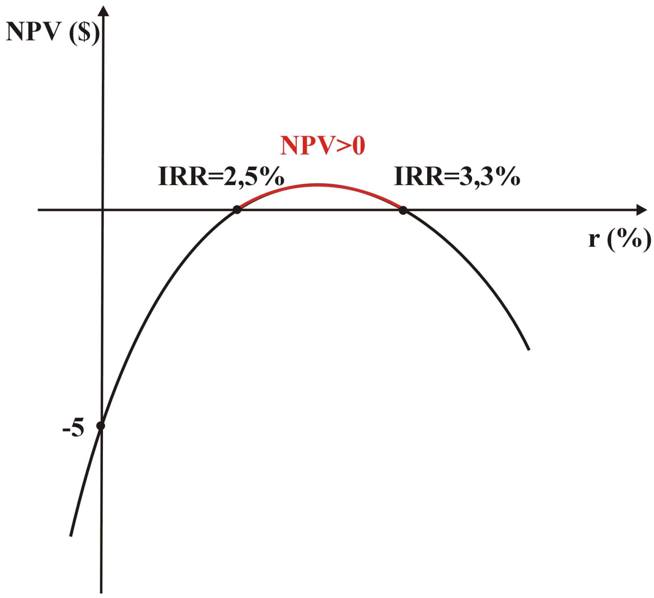
ktorá má dve riešenia $d_1 = \dfrac{3}{4}$ a $d_2 = -\dfrac{1}{4}$. Vyhovuje len riešenie $d = \dfrac{1}{1+r} = \dfrac{3}{4}$ s odpovedajúcim r = 0,33 a teda IRR = 33%.

Príklad 10.3 Máme projekt, do ktorého sme na začiatku investovali 60 dolárov. V 1. roku predpokladáme zisk 155 dolárov. V druhom roku ale musíme investovať do projektu 100 dolárov. Na základe *IRR* zistíme, kedy je projekt akceptovateľný.

Riešenie:

Vnútornú mieru výnosu *IRR* nášho projektu nájdeme podobne ako v predchádzajúcej úlohe riešením rovnice

$NPV = \dfrac{155}{1+r} + \dfrac{-100}{(1+r)^2} - 60$, pričom $r_1 = 0{,}25$ a $r_2 = 0{,}33$.



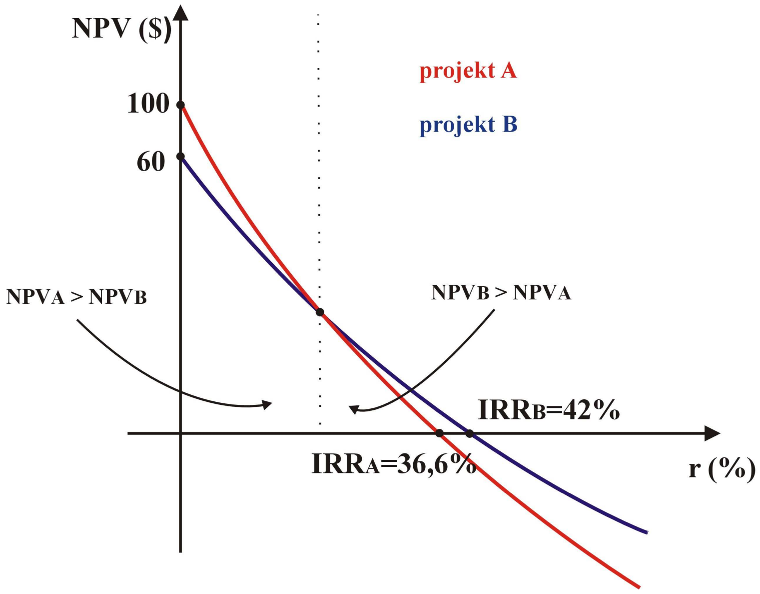
Z obrázka je zrejmé, že projekt je akceptovateľný iba pre hodnoty úrokovej miery $25 < IRR < 33{,}3$.

Príklad 10.4 Z hľadiska IRR porovnajme projekty A=(-100, 100, 50) \$ a B=(-60, 50, 50) \$.

Riešenie:

Podobným spôsobom ako v predchádzajúcich úlohách vypočítame vnútorné miery oboch projektov

$IRR_A = 36{,}6\%$ a $IRR_B = 42\%$ a oba grafy sa pretínajú pri $r = 0{,}25$.



Z výpočtov a na základe obrázka je zrejmé, že projekt A je výhodnejší ako projekt B pre hodnoty úrokovej miery z intervalu $(0, 25)$ a naopak projekt B je výhodnejší ako projekt A na intervale $(25, 36.6)$ a pre $i \in (36.6, 42)$ je výhodné investovať iba do projektu B.

10.2 Neriešené úlohy

1. Kupónová obligácia v nominálnej hodnote 200 € vynesie majiteľovi na konci každého z nasledujúcich 8 rokov kupónovú platbu 15 € a na konci doby splatnosti aj nominálnu hodnotu. Túto obligáciu môžete teraz kúpiť za 120 €, pričom uvažujeme 12% ročnú úrokovú mieru? Je vhodné investovať do takéhoto projektu?

35,29 €, vhodná investícia

2. Obchodník uvažuje o investícii, ktorá vyžaduje okamžitý výdaj 10 000 € a prinesie v ďalších troch rokoch po 4 500 €. Posúďte investíciu z hľadiska NPV, ak cena kapitálu je 0,08.

1 596,90 €, prijateľná

3. Začiatočná investícia do projektu je 5 000 €. Životnosť projektu je 5 rokov. Predpokladané ročné výnosy sú postupne 600, 1 800, 2 000, 2 800 a 3 000 €. Rozhodnite, či projekt bude akceptovaný na základe NPV, ak cena kapitálu je 16% .

1 111 €, akceptovaný

4. Podnikateľ chce kúpiť stroj, ktorého cena je 1 700 000 € a životnosť 20 rokov. Prevádzka stroja si vyžaduje každý rok vynaložiť 60 000 €, ale zaručuje príjmy 220 000 € ročne pri cene kapitálu 7%. Posúďte jeho prijateľnosť.

NPV = - 4 957,72 €, neprijateľný

5. Nákup jednej obligácie vyžaduje začiatočnú investíciu vo výške 28 €. Nominálna hodnota obligácie je 100 € s ročnými kupónmi 10 €, doba splatnosti je 15 rokov a požadovaná výnosnosť 8,5%. Je výhodné kúpiť túto obligáciu?

84,46 €, výhodná kúpa

6. Spoločnosť uvažuje o podnikateľskom projekte, ktorý vyžaduje okamžité náklady 65 000 € a bude vytvárať príjmy 20 000 € na konci každého z nasledujúcich šiestich rokov, pričom predpokladáme 13% ročnú úrokovú mieru. Na základe hodnoty NPV rozhodnite, či projekt bude akceptovaný.

14 951 €, akceptovaný

7. Ak je cena kapitálu 11%, rozhodnite z hľadiska NPV o prijatí projektu, ktorý vyžaduje začiatočnú investíciu 200 000 € a z ktorého sa očakávajú príjmy 45, 60, 100, 100 a 110 tis. €.

93 509,77 €

8. Investícia do výstavby komplexu budov predpokladá výdavky na kúpu pozemku 2 000 000 € a ďalších 900 000 € na konci 1. roku a 900 000 na konci 2. roku na výstavbu. Budovy budú postavené na konci 3. roku a staviteľská firma ich plánuje hneď predať za cenu 6 000 000 €. Určte NPV tejto investície pri 14% ročnej úrokovej miere.

567 834,60 €

9. Máme projekt, do ktorého sme na začiatku investovali 60 dolárov. V 1. roku predpokladáme príjem 155 dolárov. V druhom roku ale musíme investovať do projektu 100 dolárov. Aká je hodnota NPV pri 10% ročnej úrokovej miere?

-1,74 $

10. Máte možnosť investovať do dvoch projektov A(- 4 000, 1 000, 1 500, 1 300, 1 500) tis. € a B(- 4 000, 1 900, 1 700, 800, 600) tis. € pri cene kapitálu 10 %. Ktorý projekt uprednostníte?

NPV_A = 149,99 tis. €, NPV_B = 143,09 tis. €, projekt A

11. Uvažujte dva vzájomne sa vylučujúce investičné projekty :
A: I = 2 000 €, X = 1 200 € počas siedmich rokov,
B: I = 3 000 €, X = 1 850 € počas 5 rokov.
Ktorý projekt budete preferovať, ak cena kapitálu je 10 %?

NPV_A = 3 842,10 €, NPV_B = 4 012,96 €, preferovať budete B

12. Máte dva nezlučiteľné projekty A(-2 000, 1 500, 2 000) € a B(-3 000, 2 400, 1 440) €. Porovnajte ich z hľadiska NPV cene kapitálu 9 %.

NPV_A = 1 059,51 €, NPV_B = 413,85 €

13. Môžete investovať do projektov A(-10, 10, 20,-10, 30) tis. € a B(-20, 20, -5, 10) tis € pri ročnej úrokovej miere 12 %. Ktorý z projektov uprednostníte?

NPV_A = 26,82 tis. €, NPV_B = 0,99 €, projekt A

14. Vyberte vhodnú investíciu spomedzi príležitostí A(-0.2, -0.3, 1.1, 0.6), B(-0.7, 0.3, 0.6, 0.5, 0.1), C(-0.8, -0.1, 1.0, 0.1), D(-2.0, 0.7, 1.2, 1.0) mil. €. Použite metódu NPV pri cene kapitálu 15 %.

NPV_A = 0,7654 mil €, NPV_B = 0,4 mil. €,
NPV_C = -0,0651 mil. €, NPV_D = 0,1736 mil. €,
najlepší je projekt A

15. Investícia do projektu je teraz 20 tis. eur, predpokladaný výnos o rok je 25 tis. eur. Porovnajte čistú súčasnú hodnotu pri cene kapitálu 10 % a 30 %. Vypočítajte vnútornú mieru výnosu a urobte analýzu, kedy je výhodné do projektu investovať.

NPV_{10}=2,73 tis. €, NPV_{30}=-0,77 tis. €, IRR=25 %, $i \in (0, 25)$

16. Máme projekt, do ktorého sme na začiatku investovali 60 dolárov. V 1. roku predpokladáme príjem 155 dolárov. V druhom roku ale musíme investovať do projektu 100 dolárov. Aká je hodnota IRR? Pri akých hodnotách ročnej úrokovej miery je vhodné investovať do projektu?

IRR_1=25 %, IRR_2=33,33 % , $i \in (25, 33.33)$

17. Projekt stojí 40 000 € a prinesie 25 000 € o rok a 20 000 € o dva roky. Určte IRR projektu. Pri akých hodnotách ročnej úrokovej miery je vhodné investovať do projektu?

IRR=8,56 %, $i \in (0, 8.56)$

18. Začiatočná investícia do projektu je 75 000 € a prinesie 275 000 € o rok ale v druhom roku je potrebné doinvestovať 250 000 €. Aká je hodnota IRR? Pri akých hodnotách ročnej úrokovej miery je vhodné do projektu investovať?

IRR=66,67 %, $i \in (66.67, 100)$

19. Máme projekt, do ktorého sme na začiatku investovali 225 tis. dolárov. V 1. roku predpokladáme príjem 525 tis. dolárov. V druhom roku ale musíme investovať do projektu ďalších 250 tis. dolárov. Aká je vnútorná miera výnosu tohto projektu? Pri akých hodnotách ročnej úrokovej miery je vhodné investovať do projektu?

IRR=66,67 % , $i \in (0, 66.67)$

20. Aká je vnútorná miera výnosu projektu A(- 7, 8,-7, 8) tis. €. Pri akých hodnotách ročnej úrokovej miery je vhodné investovať do projektu?

IRR_A = 14,29 %, $i \in (0, 14.29)$

21. Aká je vnútorná miera výnosu projektu B(- 10, 16, -5, 8) tis. €. Pri akých hodnotách ročnej úrokovej miery je vhodné investovať do projektu?

IRR_B = 60 %, $i \in (0, 60)$

22. Aká je vnútorná miera výnosu projektu C(- 12, 13, 1, 4) tis. €. Pri akých hodnotách ročnej úrokovej miery je vhodné investovať do projektu?

IRR_C= 33,33 %, $i \in (0, 33.33)$

23. Aká je vnútorná miera výnosu projektu D(- 16, -4, 22, 10) tis. €. Pri akých hodnotách ročnej úrokovej miery je vhodné investovať do projektu?

IRR_D = 25 %, $i \in (0, 25)$

24. Aká je vnútorná miera výnosu projektu E(- 0.85, -0.7, 1.15, 1) mil. €. Pri akých hodnotách ročnej úrokovej miery je vhodné investovať do projektu?

IRR_E = 17,65 %, $i \in (0, 17.65)$

25. Máte dva projekty A(-2 000, 1 500, 2 000) € a B(-3 000, 2 400, 1 440) €. Vypočítajte IRR pre obidva projekty. Urobte analýzu, kedy je výhodné investovať do daných projektov.

IRR_A = 44,30 %, IRR_B = 20 %
pre $i \in (0, 20)$ je výhodnejší projekt A
pre $i \in (20, 44.30)$ je výhodné investovať iba do projektu A

26. Máte dva projekty A(-304, 300, 100) € a B(-364, 380, 200) €. Vypočítajte IRR pre obidva projekty. Urobte analýzu, kedy je výhodné investovať do daných projektov.

IRR_A = 25 %, IRR_B = 42,86 %
pre $i \in (0, 25)$ je výhodnejší projekt B
pre $i \in (25, 42.86)$ je výhodné investovať iba do projektu B

27. Máte dva projekty A(-12, 9, 11) tis. € a B(-12, -1, 18) tis. €. Vypočítajte IRR pre obidva projekty. Urobte analýzu, kedy je výhodné investovať do daných projektov.

IRR_A = 40,32 %, IRR_B = 18,38 %
pre $i \in (0, 18.38)$ je výhodnejší projekt A
pre $i \in (18.38, 40.32)$ je výhodné investovať iba do projektu A

28. Máte dva projekty A(-845, 650, 1 000) € a B(-975, 850, 1 000) €. Vypočítajte IRR pre obidva projekty. Urobte analýzu, kedy je výhodné investovať do daných projektov.

IRR_A = IRR_B =53,85 %,
projekt A aj B je výhodný pre $i \in (0, 53.85)$,
pre $i \in (0, 53.85)$ je výhodnejšie investovať do projektu B

29. Máte dva projekty A(-164, 118, 100) € a B(-85, 15, 100) €. Vypočítajte IRR pre obidva projekty. Urobte analýzu, kedy je výhodné investovať do daných projektov.

IRR_A = 21,95 %, IRR_B = 17,65 %

pre $i \in (0, 17.65)$ je výhodnejší projekt A

pre $i \in (17.65, 21.95)$ je výhodné investovať iba do projektu A

30. Máte dva projekty A(-8, 3, 6) tis. € a B(-5, 3, 3) tis. €. Vypočítajte IRR pre obidva projekty. Urobte analýzu, kedy je výhodné investovať do daných projektov.

IRR_A = 7,36 %, IRR_B = 13,07 %

pre $i \in (0, 7.36)$ je lepší projekt B,

pre $i \in (7.36, 13.07)$ je výhodné investovať iba do projektu B

31. Máte dva projekty A(-150, 100, 100) € a B(-220, 100, 200) €. Vypočítajte IRR pre obidva projekty. Urobte analýzu, kedy je výhodné investovať do daných projektov.

IRR_A = 21,53 %, IRR_B = 20,74 %

pre $i \in (0, 19.52)$ je lepší projekt B, pre $i \in (19.52, 20.74)$ je lepší projekt A

pre $i \in (20.74, 21.53)$ je výhodné investovať iba do projektu A

32. Máte dva projekty A(- 1 000, 1 000, 500) a B(- 2 000, 1 700, 1 000). Obidva v tis. €. Vypočítajte vnútorné miery výnosu investícií. Urobte analýzu, kedy je výhodné investovať do daných projektov.

IRR_A = 36,60 %, IRR_B = 25 %

pre $i \in (0, 13.90)$ je výhodnejší projekt B

pre $i \in (13.89, 25)$ je výhodnejší projekt A

pre $i \in (25, 36.6)$ je výhodné investovať iba do projektu A

33. Máte dva projekty A(-3, 4, 1) tis. € a B(-5, 3, 6) tis. €. Vypočítajte IRR pre obidva projekty. Urobte analýzu, kedy je výhodné investovať do daných projektov.

IRR_A = 54,86 %, IRR_B = 43,58 %

pre $i \in (0, 35.08)$ je výhodnejší projekt B

pre $i \in (35.08, 43.58)$ je výhodnejší projekt A

pre $i \in (43.58, 54.86)$ je výhodné investovať iba do projektu A

34. Máte dva projekty A(-6, 4, 7) tis. € a B(-4, 5, 2) tis. €. Vypočítajte IRR pre obidva projekty. Urobte analýzu, kedy je výhodné investovať do daných projektov.

IRR_A = 46,37 %, IRR_B = 56,87 %

pre $i \in (0, 35.08)$ je výhodnejší projekt A

pre $i \in (35.08, 46.37)$ je výhodnejší projekt B

pre $i \in (46.37, 56.87)$ je výhodné investovať iba do projektu B

POUŽITÁ LITERATÚRA

[1] *Baculíková, B. - Grinčová, A.*: **Matematika 1 v príkladoch**, elfa, 2009, ISBN 978-80-8086-120-9.

[2] *Brabec, J - Martan, F. - Rozenský, Z.*: **Matematická analýza** I, SNTL/ALFA, Praha 1985.

[3] *Demidovič, B. P.*: **Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu**, Nauka, Moskva 1977.

[4] *Džurina, J. - Grinčová, A. - Pirč, V.*: **Matematika I,** elfa, s. r. o., Košice, 2009, ISBN 978-80-8086-115-5.

[5] *Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.*: **Zbierka úloh z vyššej matematiky 1**, ALFA, Bratislava 1966.

[6] *Harshbarger, R. J. - Reynolds, J.*.: **Finite Mathematics,** D. C. HEATH AND COMPANY, Lexington, Massachusetts, Toronto, 1989, ISBN 0-669-19493-X.

[7] *Hoffmann, L. D. - Bradley, G. L.*: **CALCULUS For Business, Economics, and the Social and Life Sciences,** McGraw-Hill Publishing Company, New York - St.Louis - San Francisco – Auckland – Bogota – Caracas – Hamburg – Lisbon – London – Madrid – Mexico - Milan - Montreal - New Delhi - Oklahoma City – Paris - San Chuan - Sao Paulo - Singapore – Sydney – Tokyo – Toronto, 1989, ISBN 0-07-029334-1.

[8] *Ivan, J.*: **Matematika 1**, ALFA/SNTL, Bratislava 1983.

[9] *Jirásek, F. - Kriegelstein, E. - Tichý, Z.*: **Sbírka řešených přikladů z matematiky**, SNTL/ALFA, Praha 1982.

[10] *Kluvánek,I. - Mišík, L. - Švec, M.*: **Matematika I**, SVTL, Bratislava 1966.

[11] *Pirč, V. - Haščák, A.*: **Matematická analýza I**, elfa s.r.o. Košice 2000, ISBN 80-88786-92-4.

[12] *Pirč, V. - Sedláčková, A.*: **Finančná matematika**, elfa s.r.o. Košice 2002, ISBN 80-89066-21-6.

[13] *Šoltés, V. - Juhásová, Z.*: **Zbierka úloh z vyššej matematiky I**, Edičné stredisko TU v Košiciach 1992.

[14] *Šoltés, V. - Hudec, O.- Penjak, V. - Lacková, D., - Réveszová, L.*: **Matematika I s ekonomickými aplikáciami**, EkF TU v Košiciach, 2007, ISBN 978-80-8073-843-3.

Názov: MATEMATIKA I a jej využitie v ekonómii

Zbierka riešených a neriešených úloh

Autori: Anna Grinčová, Monika Molnárová

Vydanie: prvé, r. 2012
Počet strán: 176

ISBN 978-80-553-1158-6

ISBN 978-80-553-1158-6