

NEURČITÝ INTEGRÁL

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

1.

$$\int R \left[x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \dots, x^{\frac{1}{k_n}} \right] dx, \quad k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$$

substitúciou

$$t = x^{\frac{1}{k}}, \text{ kde } k = \text{nsn}\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$$

prevedieme integrál na integrál z racionálnej funkcie

2.

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{k_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{k_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{k_n}} \right] dx,$$

$$k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}, a, b, c, d \in R, ad \neq bc$$

substitúciou

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{k}}, \text{ kde } k = \text{nsn}\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$$

prevedieme integrál na integrál z racionálnej funkcie

3.

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

výraz pod odmocninou upravíme na štvorec a použijeme jeden z integračných vzorcov:

$$\bullet \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c \quad \text{alebo}$$

$$\bullet \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + c$$

4.

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Integrál riešime tzv. Ostrogradského metódou neurčitých koeficientov:

$$\begin{aligned} & \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \\ & = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + k \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \end{aligned}$$

$Q_{n-1}(x)$ je neznámy polynóm stupňa $n - 1$ a k je neznáma konštanta

1.

$$\int R[\sin x] \cos x \, dx$$

použijeme substitúciu

$$t = \sin x$$

2.

$$\int R[\cos x] \sin x \, dx$$

použijeme substitúciu

$$t = \cos x$$

V oboch prípadoch prevedieme integrál na integrál z racionálnej funkcie.

3. Integrovanie využitím vzťahov, ktoré platia pre goniometrické funkcie, napr.:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

4.

$$\int R[\sin x, \cos x] dx$$

substitúciou

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

prevedieme integrál na integrál z racionálnej funkcie.