NEURČITÝ INTEGRÁL

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Veta

Nech funkcie u, v majú spojité derivácie na intervale I. Potom

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Metódu per partes najčastejšie používame pri integráloch typu:

- $\int P_n(x).e^{kx}\ dx$
- $\int P_n(x).\cos kx\ dx$
- $\int P_n(x).\sin kx\ dx,\ \ k \in R$

Pri týchto typoch integrálov polynóm derivujeme, teda

$$u(x) = P_n(x)$$

.

- $\int P_n(x).\ln x \; dx$
- $\int P_n(x).$arcsin x dx
- $\int P_n(x).$arccos x dx
- $\int P_n(x).$arctg x dx
- $\int P_n(x).$arccotg x dx

Pri týchto typoch integrálov polynóm integrujeme, teda

$$v'(x) = P_n(x)$$

.

Racionálna funkcia

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

- každú nerýdzoracionálnu funkciu môžeme vyjadriť ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_s(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

kde $st\ R(x) < m$

- každú rýdzoracionálnu funkciu vieme rozložiť na súčet elementárnych (parciálnych) zlomkov

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n},$$

kde A, B, C, α, p, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a trojčlen $x^2 + px + q$ nemá reálne korene

Racionálna funkcia

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

- každú nerýdzoracionálnu funkciu môžeme vyjadriť ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_s(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

  kde $st\ R(x) < m$

- každú rýdzoracionálnu funkciu vieme rozložiť na súčet elementárnych (parciálnych) zlomkov

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n},$$

  kde A, B, C, α, p, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a trojčlen $x^2 + px + q$ nemá reálne korene

1. $$\int \frac{1}{x-\alpha}\, dx = \ln|x-\alpha| + c$$

2. $$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\, dx = \frac{1}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + c,\ \ k \neq 1$$

3. $$\int \frac{1}{x^2+px+q}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{\alpha}} + c,$$

   kde $\alpha = q - \frac{p^2}{4}$ a predpokladáme $p^2 - 4q < 0$.

1. $$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + c$$

2. $$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \frac{1}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + c,\ \ k \neq 1$$

3. $$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{\alpha}} + c,$$

   kde $\alpha = q - \frac{p^2}{4}$ a predpokladáme $p^2 - 4q < 0$.

1. $$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + c$$

2. $$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \frac{1}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + c,\ \ k \neq 1$$

3. $$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{\alpha}} + c,$$

   kde $\alpha = q - \frac{p^2}{4}$ a predpokladáme $p^2 - 4q < 0$.

- $$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}\, dx =$$
  $$\frac{B}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{C - \frac{Bp}{2}}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arctg} \frac{x + p/2}{\sqrt{\alpha}} + c,$$
  kde $\alpha = q - \frac{p^2}{4}$ a predpokladáme $p^2 - 4q < 0$.