URČITÝ INTEGRÁL

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Definícia

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na $\langle a, b\rangle$. Nech pre ľubovoľnú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a, b\rangle$ a ľubovoľnú voľbu bodov t_i v čiastočných intervaloch existuje $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$, potom hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a túto limitu nazývame určitým integrálom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$. Teda

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{D_n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

kde a je dolná hranica a b je horná hranica určitého integrálu.

Veta (Newton –Leibnizov vzorec)

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech má na intervale $\langle a, b\rangle$ primitívnu funkciu F. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b .$$

Nech $a < b$ a nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Veta (Newton –Leibnizov vzorec)

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech má na intervale $\langle a, b\rangle$ primitívnu funkciu F. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Nech $a < b$ a nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Veta (Newton –Leibnizov vzorec)

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech má na intervale $\langle a, b\rangle$ primitívnu funkciu F. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Nech $a < b$ a nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Veta

Nech funkcie f, g sú integrovateľné funkcie na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí

1. $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$
2. $$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$$

Veta

Nech c je konštantná funkcia, potom platí

$$\int_a^b c\, dx = c\,(b - a)$$

Veta

Nech funkcie f, g sú integrovateľné funkcie na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí

1. $$\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$
2. $$\int_a^b \alpha f(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx$$

Veta

Nech c je konštantná funkcia, potom platí

$$\int_a^b c \, dx = c \, (b - a)$$

Veta

Nech funkcie f, g sú integrovateľné funkcie na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí

1. $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$
2. $$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$$

Veta

Nech c je konštantná funkcia, potom platí

$$\int_a^b c\, dx = c\,(b - a)$$

Veta

Nech $a < b < c$. Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech je integrovateľná na intervale $\langle b, c\rangle$. Potom je funkcia f integrovateľná aj na intervale $\langle a, c\rangle$ a platí

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Veta

Nech funkcie f, g sú integrovateľné funkcie na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Veta

Nech $a < b < c$. Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech je integrovateľná na intervale $\langle b, c\rangle$. Potom je funkcia f integrovateľná aj na intervale $\langle a, c\rangle$ a platí

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Veta

Nech funkcie f, g sú integrovateľné funkcie na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Veta

Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle -a, a\rangle$ a je

- *párna*, *tak* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
- *nepárna*, *tak* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Veta

Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle -a, a\rangle$ a je

- *párna, tak* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
- *nepárna, tak* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Veta

Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, tak je na tomto intervale integrovateľná.

Veta

Nech funkcia f je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle$ a má v tomto intervale konečný počet bodov nespojitosti, potom je na tomto intervale integrovateľná.

Veta

Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, tak je na tomto intervale integrovateľná.

Veta

Nech funkcia f je ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle$ a má v tomto intervale konečný počet bodov nespojitosti, potom je na tomto intervale integrovateľná.

Veta

Nech funkcia f spojitá na intervale $\langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle$ a nech φ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom platí

$$\int_a^b f\left[\varphi(x)\right] \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x = a \to t = \varphi(a) \\ x = b \to t = \varphi(b) \end{array} \right| = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Veta

Nech funkcie u, v majú spojité derivácie na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definícia

Nech funkcie f, g sú spojité funkcie definované na intervale $\langle a, b\rangle$, $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Nech pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $g(x) \le f(x)$. Potom množinu

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b;\ g(x) \le y \le f(x)\}$$

nazývame elementárna oblasť v $\mathbb{R}^2$ vzhľadom na os O_x.

Definícia

Nech funkcie u, v sú spojité funkcie definované na intervale $\langle c, d\rangle$, $u : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, $v : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$. Nech pre každé $y \in \langle c, d\rangle$ je $u(y) \le v(y)$. Potom množinu

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ c \le y \le d;\ u(y) \le x \le v(y)\}$$

nazývame elementárna oblasť v $\mathbb{R}^2$ vzhľadom na os O_y.

Definícia

Nech funkcie f, g sú spojité funkcie definované na intervale $\langle a, b\rangle$, $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Nech pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $g(x) \leq f(x)$. Potom množinu

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b;\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

nazývame elementárna oblasť v $\mathbb{R}^2$ vzhľadom na os O_x.

Definícia

Nech funkcie u, v sú spojité funkcie definované na intervale $\langle c, d\rangle$, $u : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, $v : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$. Nech pre každé $y \in \langle c, d\rangle$ je $u(y) \leq v(y)$. Potom množinu

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ c \leq y \leq d;\ u(y) \leq x \leq v(y)\}$$

nazývame elementárna oblasť v $\mathbb{R}^2$ vzhľadom na os O_y.

Definícia

Plošný obsah elementárnej oblasti D sa počíta podľa vzorca

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Definícia

Plošný obsah elementárnej oblasti Q sa počíta podľa vzorca

$$P = \int_c^d [v(y) - u(y)]\, dx$$

Definícia

Plošný obsah elementárnej oblasti D sa počíta podľa vzorca

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$$

Definícia

Plošný obsah elementárnej oblasti Q sa počíta podľa vzorca

$$P = \int_c^d [v(y) - u(y)]\ dx$$

Definícia

Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti D okolo O_x sa počíta podľa vzorca

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] \, dx$$

Definícia

Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti Q okolo O_y sa počíta podľa vzorca

$$V = \pi \int_c^d \left[v^2(y) - u^2(y) \right] \, dy$$

Definícia

Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti D okolo O_x sa počíta podľa vzorca

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx$$

Definícia

Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti Q okolo O_y sa počíta podľa vzorca

$$V = \pi \int_c^d \left[v^2(y) - u^2(y) \right] dy$$

Definícia

Ak krivka C je grafom $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, ktorá má spojitú deriváciu, tak pre jej dĺžku s platí

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$