Funkcia

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Pojem funkcia

Definícia

Nech A, $B \subset \mathbb{R}$ sú dve neprázdne množiny a f je pravidlo, ktoré každému $x \in A$ priradí práve jeden prvok $f(x) \in B$. Predpis f nazývame funkciou, ktorá zobrazuje množinu A do množiny B. Množinu $D(f) = A$ nazývame definičným oborom funkcie f, číslo $f(x)$ hodnotou funkcie f v bode $x \in A$ a množinu $H(f) = \{f(x) : x \in A\}$ oborom hodnôt funkcie f.

Zápis:

$$f : A \longrightarrow B$$

Grafom funkcie f nazývame množinu $G(f) = \{[x, f(x)] \in A \times B;\ x \in A\}$

Ohraničená funkcia

Definícia

Funkciu f nazývame zhora (zdola) ohraničenou na množine $S \subset D(f)$, ak je zhora (zdola) ohraničená jej množina funkčných hodnôt $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$, t. j. existuje $K \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{R}$) také, že pre všetky $x \in S$ je

$$f(x) \quad \leq K \qquad (f(x) \geq k),$$

Ak je funkcia f na množine S ohraničená zhora aj zdola, tak hovoríme, že je na množine S ohraničená.

Najväčšia a najmenšia hodnota funkcie

Definícia

Ak existuje najväčší (najmenší) prvok množiny $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$, t. j. $M \in f(S)$ $(m \in f(S))$ také, že pre všetky $x \in S$ je

$$f(x) \leq M \qquad (f(x) \geq m),$$

tak ho nazývame najväčšou (najmenšou) hodnotou funkcie f na množine $S \subset D(f)$.

Zápis:

$$\begin{aligned} M &= \max_{x \in S} f(x) \\ m &= \min_{x \in S} f(x) \end{aligned}$$

Monotónne funkcie

Definícia

Funkciu f nazývame rastúcou (klesajúcou) na množine $S \subset D(f)$, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in S$, také že $x_1 < x_2$, platí

$$f(x_1) \quad < \quad f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Rastúce a klesajúce funkcie nazývame rýdzomonotónne funkcie.

Definícia

Funkciu f nazývame neklesajúcou (nerastúcou) na množine $S \subset D(f)$, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in S$, také že $x_1 < x_2$, platí

$$f(x_1) \quad \leq \quad f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Nerastúce a neklesajúce funkcie nazývame monotónne funkcie.

Párne a nepárne funkcie

Definícia

Funkciu f nazývame párnou (nepárnou), ak pre každý bod $x \in D(f)$ je $-x \in D(f)$ a platí

$$f(-x) = f(x)$$

$$(f(-x) = -f(x)).$$

- graf párnych funkcií je symetrický vzhľadom na os y
- graf nepárnych funkcií vzhľadom na začiatok súradného systému

Periodické funkcie

Definícia

Funkciu f nazývame periodickou, ak existuje také reálne číslo $p > 0$, že pre každý bod $x \in D(f)$ je $x + p \in D(f)$ a $x - p \in D(f)$ a platí

$$f(x) = f(x + p).$$

Najmenšie číslo p s horeuvedenou vlastnosťou nazývame periódou funkcie f.

Zložená funkcia

Definícia

Nech $g : A \longrightarrow B$, $f : B \longrightarrow C$. Funkciu $f \circ g : A \longrightarrow C$ nazývame zloženou funkciou.

Funkciu $u = g(x)$ nazývame vnútornou (vedľajšou) a funkciu $y = f(u)$ vonkajšou (hlavnou) zložkou funkcie $y = f(g(x))$.

Bijekcia

Definícia

Nech $f : A \longrightarrow B$.

- Hovoríme, že funkcia je injektívna (prostá), ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$, platí
$$f(x_1) \neq f(x_2).$$
- Hovoríme, že funkcia je surjektívna ("na"), ak pre každý bod $y \in B$ existuje také $x \in A$, že $y = f(x)$, t. j. $H(f) = B$.
- Hovoríme, že funkcia je bijektívna, ak je injektívna a surjektívna.

Inverzná funkcia

Definícia

Nech $f : A \longrightarrow B$ je bijektívna funkcia. Funkciu $f^{-1} : B \longrightarrow A$ nazývame inverznou funkciou k funkcii f práve vtedy, ak ku každému bodu $y \in B$ priradí také $x \in A$, že $y = f(x)$.

Zápis:

$$f^{-1}(y) = x$$

Veta

Nech $f : A \longrightarrow B$ je bijektívna funkcia. Nech $f^{-1} : B \longrightarrow A$ je k nej inverzná funkcia. Potom platí

- $\forall x \in A$: $f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in B$: $f(f^{-1}(y)) = y$

Konštantná a mocninová funkcia, funkcia n-tá odmocnina, algebrický polynóm

- konštantná funkcia: $f(x) = c \qquad c \in \mathbb{R}, \qquad D(f) = \mathbb{R}$
- mocninová funkcia: $f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad D(f) = \mathbb{R}$
- funkcia n-tá odmocnina: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad n \in \mathbb{N},$
    - n párne $D(f) =< 0, \infty)$
    - n nepárne $D(f) = \mathbb{R}$
- algebrický polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$:
  $f(x) = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n,\ a_0 \neq 0$
  $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sú koeficienty polynómu
  $D(f) = \mathbb{R}$

Racionálna funkcia, exponenciálna funkcia, logaritmická funkcia

- Racionálna funkcia: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $D(f) : Q(x) \neq 0$
  $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy
- exponenciálna funkcia: $f(x) = a^x$ $a > 0$, $a \neq 1$
  $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \infty)$
  - $a > 1$ funkcia je rastúca
  - $0 < a < 1$ funkcia je klesajúca
- logaritmická funkcia: $f(x) = \log_a x$ $a > 0$, $a \neq 1$
  $D(f) = (0, \infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$
  - $a > 1$ funkcia je rastúca
  - $0 < a < 1$ funkcia je klesajúca

Goniometrické funkcie

- Funkcia sínus: $f(x) = \sin x$, $\quad D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) =< -1, 1 >$
- Funkcia cosínus: $f(x) = \cos x$ $\quad D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) =< -1, 1 >$
- Funkcia tangens: $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

  $D(f) : \cos x \neq 0$, $H(f) = \mathbb{R}$
- Funkcia cotangens: $f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$,

  $D(f) : \sin x \neq 0$, $H(f) = \mathbb{R}$

Cyklometrické funkcie

- Funkcia arcussínus: $f(x) = \arcsin x$

  $D(f) =< -1, 1 >$, $H(f) =< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$

- Funkcia arcuscosínus: $f(x) = \arccos x$

  $D(f) =< -1, 1 >$, $H(f) =< 0, \pi >$

- Funkcia arcustangens: $f(x) = \operatorname{arctg} x$

  $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

- Funkcia arcuscotangens: $f(x) = \operatorname{arccotg} x$,

  $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \pi)$

Funkcia celkových nákladov a funkcia priemerných nákladov

Definícia

Funkcia celkových nákladov (total cost function) určuje celkové náklady TC na množstvo vyrobených jednotiek x, $TC = C(x)$. Pozostáva z fixných nákladov K, ktoré nezávisia na počte vyrobených jednotiek a variabilných nákladov $V(x)$, ktoré vyjadrujú bezprostredné výrobné náklady na výrobu x výrobkov.

Zápis: $$C(x) = K + V(x)$$

Definícia

Funkcia priemerných nákladov (average cost function) určuje náklady na jednotku produkcie AC, ak sa vyrobí x výrobkov.

Zápis: $$AC(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Príklad

Príklad:

Celkové náklady v eurách na produkciu x kusov výrobkov sú dané funkciou:

$$C(x) = x^3 - 2x^2 - 10x + 320.$$

1. Vypočítajte celkové náklady na produkciu 20 kusov výrobkov. [7 320]
2. Vypočítajte náklady na produkciu 20. výrobku v poradí. [1 053]
3. Vypočítajte priemerné náklady na produkciu jedného výrobku, ak bolo vyrobených 20, resp. 30 výrobkov. [366, resp.840,67]

Funkcia celkových príjmov a funkcia priemerných príjmov

Definícia

Funkcia celkových príjmov (total revenue function) určuje celkové príjmy TR z množstva vyrobených jednotiek x, $TR = R(x)$.

Definícia

Funkcia priemerných príjmov (average revenue function) určuje príjem AR pripadajúci na jednotku produkcie, ak sa predá x výrobkov.

Zápis:

$$AR(x) = \frac{R(x)}{x}$$

Funkcia celkového zisku a funkcia priemerného zisku

Definícia

Funkcia celkového zisku (total profit function) určuje celkový zisk TP z výroby a predaja x výrobkov, $TP = P(x) = R(x) - C(x)$.

Definícia

Funkcia priemerného zisku (average profit function) určuje zisk AP pripadajúci na výrobu a predaj jednotky produkcie, ak sa vyrobí a predá x výrobkov.

Zápis:

$$AP(x) = \frac{P(x)}{x}$$

Bod zlomu

Definícia

Množstvo výrobkov x, pre ktoré sú celkové náklady rovné celkovým príjmom, $C(x) = R(x)$, nazývame bod zlomu (break-even point).

Platí:

- Ak $C(x) < R(x)$, tak je výroba zisková
- Ak $C(x) > R(x)$, tak je výroba stratová

Príklad

Príklad:

Celkové týždenné náklady v eurách na produkciu x kusov výrobkov sú dané funkciou: $C(x) = 0,1x^2 + 35x + 15000$. Predajná cena bola stanovená na $385 - 0,9x$ eur za kus. Určte rovnicu funkcie celkových týždenných výnosov $R(x)$. Nakreslite grafy oboch funkcií, nájdite bod zlomu a určte, kedy je výroba zisková.
$[x_1 = 50,\ x_2 = 300,\ x \in (50,\ 300)]$

Funkcia dopytu, zákon dopytu

Definícia

Funkcia dopytu (demand function) vyjadruje vzťah medzi množstvom q jednotiek produkcie, o ktorú vyjadrujú spotrebitelia záujem na trhu, a cenou p za jednotku produkcie.

Zápis:

$$q = D(p)$$

Veta (zákon dopytu)

Ak cena výrobku stúpa, množstvo zakúpených výrobkov klesá.

Dôsledok: funkcia dopytu je klesajúca $\Longrightarrow p = d(q)$

Funkcia ponuky, zákon ponuky

Definícia

Funkcia ponuky (supply function) vyjadruje vzťah medzi množstvom q jednotiek produkcie, ktorú je ochotný producent vyrobiť a dodať na trh, a trhovou cenou p za jednotku produkcie.

Zápis:

$$q = S(p)$$

Veta (zákon ponuky)

Ak trhová cena výrobku stúpa, množstvo vyrobených a ponúkaných výrobkov stúpa.

Dôsledok: funkcia ponuky je rastúca $\Longrightarrow p = s(q)$

Rovnovážny stav

Definícia

Rovnovážny stav (market equilibrium) je taký stav trhu, keď sa ponuka rovná dopytu, $D(p) = S(p)$, resp. $d(q) = s(q)$. Cena zodpovedajúca rovnovážnemu stavu je rovnovážna cena p_E a množstvo zodpovedajúce rovnovážnemu stavu je rovnovážne množstvo q_E. Bod, v ktorom nastáva rovnovážny stav je rovnovážnym bodom (equilibrium point).

Príklad

Príklad:

Tovar má funkciu dopytu $q = 249 - 2p - p^2$ a funkciu ponuky $q = 33 + 4p + p^2$, ak p je cena tovaru v eurách. Nakreslite grafy oboch funkcií a určte rovnovážnu cenu. [$p_E = 9$]

Ďakujem za pozornosť.