SPOJITOSŤ FUNKCIE

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Definícia

Nech funkcia f je definovaná na okolí bodu $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a, ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a sprava, ak $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a zľava, ak $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Platí: Ak je funkcia v bode a spojitá sprava aj zľava, tak je v bode a spojitá.

Definícia

Nech funkcia f je definovaná na okolí bodu $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a, ak $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a sprava, ak
$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a zľava, ak
$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Platí: Ak je funkcia v bode a spojitá sprava aj zľava, tak je v bode a spojitá.

Definícia

Funkcia f je spojitá, ak je spojitá v každom bode definičného oboru.

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je spojitá na otvorenom intervale (a, b), ak je spojitá v každom bode tohto intervalu.

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$, ak je spojitá v každom bode intervalu (a, b) a naviac je spojitá v bode a sprava a spojitá v bode b zľava.

Definícia

Funkcia f je spojitá, ak je spojitá v každom bode definičného oboru.

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je spojitá na otvorenom intervale (a, b), ak je spojitá v každom bode tohto intervalu.

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$, ak je spojitá v každom bode intervalu (a, b) a naviac je spojitá v bode a sprava a spojitá v bode b zľava.

Definícia

Funkcia f je spojitá, ak je spojitá v každom bode definičného oboru.

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je spojitá na otvorenom intervale (a, b), ak je spojitá v každom bode tohto intervalu.

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$, ak je spojitá v každom bode intervalu (a, b) a naviac je spojitá v bode a sprava a spojitá v bode b zľava.

Definícia

Body, v ktorých nie je funkcia spojitá, nazývame body nespojitosti funkcie.

Body nespojitosti môžeme zatriediť do dvoch skupín:

1. body nespojitosti 1. druhu - ak existujú konečné jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
2. body nespojitosti 2. druhu - aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná

Definícia

Funkcia f sa nazýva po častiach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, ak má konečný počet bodov nespojitosti 1. druhu.

Definícia

Body, v ktorých nie je funkcia spojitá, nazývame body nespojitosti funkcie.

Body nespojitosti môžeme zatriediť do dvoch skupín:

1. body nespojitosti 1. druhu - ak existujú konečné jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
2. body nespojitosti 2. druhu - aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná

Definícia

Funkcia f sa nazýva po častiach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, ak má konečný počet bodov nespojitosti 1. druhu.

Definícia

Body, v ktorých nie je funkcia spojitá, nazývame body nespojitosti funkcie.

Body nespojitosti môžeme zatriediť do dvoch skupín:

1. body nespojitosti 1. druhu - ak existujú konečné jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
2. body nespojitosti 2. druhu - aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná

Definícia

Funkcia f sa nazýva po častiach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, ak má konečný počet bodov nespojitosti 1. druhu.

Definícia

Body, v ktorých nie je funkcia spojitá, nazývame body nespojitosti funkcie.

Body nespojitosti môžeme zatriediť do dvoch skupín:

1. body nespojitosti 1. druhu - ak existujú konečné jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
2. body nespojitosti 2. druhu - aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná

Definícia

Funkcia f sa nazýva po častiach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, ak má konečný počet bodov nespojitosti 1. druhu.

Veta

Nech funkcie $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ sú spojité v bode $a \in A$. Nech $c \in \mathbb{R}$. Potom v bode a sú spojité aj funkcie $f \pm g$, $c.f$, $f.g$, $|f|$ a ak $g(a) \neq 0$ je spojitá v bode a aj funkcia $\frac{f}{g}$.

Veta

Nech funkcia g je spojitá v bode a a funkcia f je spojitá v bode $g(a)$. Potom funkcia $f(g(x))$ je spojitá v bode a.

Veta

Každá elementárna funkcia je spojitá.

Veta

Nech funkcie $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ *sú spojité v bode* $a \in A$. *Nech* $c \in \mathbb{R}$. *Potom v bode a sú spojité aj funkcie* $f \pm g$, $c.f$, $f.g$, $|f|$ *a ak* $g(a) \neq 0$ *je spojitá v bode a aj funkcia* $\frac{f}{g}$.

Veta

Nech funkcia g je spojitá v bode a a funkcia f je spojitá v bode $g(a)$. *Potom funkcia* $f(g(x))$ *je spojitá v bode a.*

Veta

Každá elementárna funkcia je spojitá.

Veta

Nech funkcie $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ *sú spojité v bode* $a \in A$. *Nech* $c \in \mathbb{R}$. *Potom v bode* a *sú spojité aj funkcie* $f \pm g$, $c.f$, $f.g$, $|f|$ *a ak* $g(a) \neq 0$ *je spojitá v bode* a *aj funkcia* $\frac{f}{g}$.

Veta

Nech funkcia g *je spojitá v bode* a *a funkcia* f *je spojitá v bode* $g(a)$. *Potom funkcia* $f(g(x))$ *je spojitá v bode* a.

Veta

Každá elementárna funkcia je spojitá.

Veta

Nech funkcie $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom

- *f nadobúda minimum aj maximum,*
- *f nadobúda aj každú hodnotu medzi minimom a maximom.*

Veta (Bolzanova veta)

Nech funkcie $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a naviac nech $f(a).f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $f(c) = 0$.

Veta

Nech funkcie $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom

- *f nadobúda minimum aj maximum,*
- *f nadobúda aj každú hodnotu medzi minimom a maximom.*

Veta (Bolzanova veta)

Nech funkcie $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a naviac nech $f(a).f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $f(c) = 0$.

ASYMPTOTY GRAFU FUNKCIE

Definícia

Nech funkcia f je definovaná na istom okolí $O^o(x_0)$ bodu x_0. Priamka $x = x_0$ sa nazýva asymptota bez smernice grafu funkcie, ak funkcia f má v bode x_0 aspoň jednu nevlastnú jednostrannú limitu.

Definícia

Nech funkcia f je definovaná na nejakom intervale $(-\infty, a)$, resp. (a, ∞). Priamka $y = kx + q$, pre ktorú platí, že

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx - q] = 0, \text{ resp. } \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx - q] = 0$$

sa nazýva asymptota so smernicou grafu funkcie f v nevlastnom bode $-\infty$, resp. ∞.

Definícia

Nech funkcia f je definovaná na istom okolí $O^o(x_0)$ bodu x_0. Priamka $x = x_0$ sa nazýva asymptota bez smernice grafu funkcie, ak funkcia f má v bode x_0 aspoň jednu nevlastnú jednostrannú limitu.

Definícia

Nech funkcia f je definovaná na nejakom intervale $(-\infty, a)$, resp. (a, ∞). Priamka $y = kx + q$, pre ktorú platí, že

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx - q] = 0, \text{ resp. } \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx - q] = 0$$

sa nazýva asymptota so smernicou grafu funkcie f v nevlastnom bode $-\infty$, resp. ∞.

Veta

Priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v nevlastnom bode $-\infty$ práve vtedy, keď

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx] \in \mathbb{R}.$$

Priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v nevlastnom bode ∞ práve vtedy, keď

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] \in \mathbb{R}.$$

Veta

Priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v nevlastnom bode $-\infty$ práve vtedy, keď

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx] \in \mathbb{R}.$$

Priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v nevlastnom bode ∞ práve vtedy, keď

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] \in \mathbb{R}.$$