Diskrétna matematika

Zbierka riešených a neriešených príkladov

Emília Draženská

Košice 2022

Recenzoval: RNDr. Štefan Berežný, PhD.
RNDr. Juraj Valiska, PhD.

Prvé vydanie

ISBN

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedá autor.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.
Sadzba programom pdfLaTeX.

Obsah

Úvod

Táto vysokoškolská učebnica je zbierkou riešených a neriešených príkladov a je určená predovšetkým študentom druhého ročníka bakalárskeho štúdia Fakulty elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach. Má slúžiť ako pomôcka pri štúdiu predmetu Diskrétna matematika.

Učebnica je rozdelená do ôsmych kapitol. Prvá sa venuje teórii čísel, druhá množinám a binárnym reláciam, tretia čiastočne usporiadaným množinám a zväzom, štvrtá boolovským funkciám a výrokovej logike, piata algebraickým štruktúram, šiesta teórii grafov, siedma digrafom a posledná grafovým algoritmom. Každá z nich má niekoľko podkapitol. Preberané učivo je ilustrované na riešených príkladoch. Na konci každej podkapitoly sú uvedené úlohy na samostatné riešenie spolu s ich výsledkami.

Poďakovanie patrí RNDr. Štefanovi Berežnému, PhD. a RNDr. Jurajovi Valiskovi, PhD. za cenné pripomienky, ktoré prispeli k skvalitneniu textu.

Autor

Kapitola 1

Teória čísel

1.1 Deliteľnosť, najväčší spoločný deliteľ

Definícia 1.1.1 *Nech $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Hovoríme, že **číslo** a **delí číslo** b, označujeme $a \mid b$, ak existuje také celé číslo q, že $b = aq$. Namiesto „a delí b" hovoríme, že b je deliteľné číslom a, alebo a je deliteľ čísla b, alebo b je násobok čísla a.*

Veta 1.1.1 *Nech $a \in \mathbb{N}$[1], $b \in \mathbb{Z}$. Potom existuje jediná dvojica celých čísel q, r, že*

$$b = aq + r, pričom 0 \leqq r < a.$$

*Číslo r sa nazýva **zvyšok** čísla b po delení číslom a.*

Zvyšok čísla 195 po delení číslom 7 je 6, pretože $195 = 7 \cdot 27 + 6$. Číslo -195 po delení číslom 7 má zvyšok 1, keďže $-195 = 7 \cdot (-28) + 1$, číslo -386 po delení číslom 5 má zvyšok 4, pretože $-386 = 5 \cdot (-78) + 4$.

Číslo d sa nazýva **spoločný deliteľ** čísel a, b, ak $d \mid a$ a zároveň $d \mid b$. V množine všetkých spoločných deliteľov čísel a, b, existuje najväčší prvok, ktorý nazývame **najväčší spoločný deliteľ** čísel a, b, označujeme $\mathrm{nsd}(a, b)$. Platí, že $\mathrm{nsd}(a, b)$ sa dá napísať ako lineárna kombinácia čísel a, b, t.j. existujú celé čísla k, l, že $\mathrm{nsd}(a, b) = k \cdot a + l \cdot b$. Akým spôsobom vieme nájsť čísla k, l ilustrujme v nasledujúcom príklade. Ešte dodajme, že ak $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$, tak čísla a, b nazývame **nesúdeliteľnými**.

Príklad 1.1.1 Pomocou Euklidovho algoritmu nájdime najväčší spoločný deliteľ daných dvoch čísel a potom ho zapíšme ako ich lineárnu kombináciu.

a) $243, 765$,

b) $2002, 2100$,

c) $7299, 1377$.

[1] $0 \notin \mathbb{N}$

Riešenie. Euklidov algoritmus na nájdenie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch prirodzených čísel $a, b,\ b > a$ nájdeme na základe vety 1.1.1. V prvom kroku nájdeme zvyšok r čísla b po delení číslom a. Teda chceme zapísať číslo b nasledovne: $b = aq + r$, pričom $0 \leqq r < a$ a q je nejaké celé číslo. Potom tento krok opakujeme s tým, že do b vložíme a a do a vložíme r. Algoritmus končí, keď týmto postupom získame zvyšok r rovný 0. Najväčším spoločným deliteľom čísel a, b je posledný nenulový zvyšok.

Aplikujme tento postup na čísla zo zadania.

a) Na začiatku máme $b = 765, a = 243$. Nájdeme zvyšok čísla 765 po delení číslom 243. Keďže $765 = 243 \cdot 3 + 36$, zvolíme nové a a b, a to $b = 243$ a $a = 36$. Krok opakujeme, máme $243 = 36 \cdot 6 + 27$, potom v ďalšom $b = 36$ $a = 27$ a $36 = 27 + 9$. Nakoniec, máme $b = 27$ $a = 9$, pričom $27 = 9 \cdot 3 + 0$, teda $\mathrm{nsd}(765, 243) = 9$. Teraz zapíšeme číslo 9 ako lineárnu kombináciu čísel 765 a 243. Z predchádzajúcich rovností postupne vyjadríme nenulové zvyšky r. Postupujeme od konca. Dostávame

$$9 = 36 - 27 = 36 - (243 - 36 \cdot 6) = -243 + 36 \cdot 7 = -243 + 7 \cdot (765 - 243 \cdot 3) = \\ = 7 \cdot 765 - 22 \cdot 243.$$

b) Aplikovaním Euklidovho algoritmu dostávameme

$2100 = 2002 + 98$
$2002 = 98 \cdot 20 + 42$
$98 = 42 \cdot 2 + 14$
$42 = 14 \cdot 3 + 0.$
Teda $\mathrm{nsd}(2002, 2100) = 14$.
Vyjadríme $\mathrm{nsd}(2002, 2100)$ ako lineárnu kombináciu čísel 2002 a 2100.
$14 = 98 - 42 \cdot 2 = 98 - (2002 - 98 \cdot 20) \cdot 2 = -2 \cdot 2002 + 41 \cdot 98 = -2 \cdot 2002 +$
$+ 41 \cdot (2100 - 2002) = -43 \cdot 2002 + 41 \cdot 2100.$

c) $7299 = 1377 \cdot 5 + 414$
$1377 = 414 \cdot 3 + 135$
$414 = 135 \cdot 3 + 9$
$135 = 9 \cdot 15 + 0.$
Teda $\mathrm{nsd}(7299, 1377) = 9$.
Vyjadríme $\mathrm{nsd}(7299, 1377)$ ako lineárnu kombináciu čísel 7299 a 1377.
$9 = 414 - 135 \cdot 3 = 414 - (1377 - 414 \cdot 3) \cdot 3 = -3 \cdot 1377 + 10 \cdot 414 =$
$= -3 \cdot 1377 + 10 \cdot (7299 - 1377 \cdot 5) = -53 \cdot 1377 + 10 \cdot 7299.$ ■

Úlohy

1.1 Pomocou Euklidovho algoritmu nájdite najväčší spoločný deliteľ daných dvoch čísel a následne ho zapíšte ako ich lineárnu kombináciu.

a) $2016, 927,$

b) $164, 48,$

c) $1404, 1920$,

d) $731, 195$.

Výsledky

1.1 a) $\text{nsd}(2016, 927) = 9 = 87 \cdot 927 - 40 \cdot 2016$,

b) $\text{nsd}(164, 48) = 4 = 5 \cdot 164 - 17 \cdot 48$,

c) $\text{nsd}(1404, 1920) = 12 = 49 \cdot 1920 - 67 \cdot 1404$,

d) $\text{nsd}(731, 195) = 1 = 15 \cdot 195 - 4 \cdot 731$.

1.2 Kongruencie

Definícia 1.2.1 *Nech $n \in \mathbb{N}$. Hovoríme, že dve celé* ***čísla*** *a, b* ***sú kongruentné modulo*** *n, $a \equiv b \pmod{n}$, práve vtedy, keď čísla a aj b majú rovnaký zvyšok po delení číslom n.*

Medzi kongruenciami platia určité vzťahy. Tie, ktoré budeme používať, uvedieme priamo v príklade.

Príklad 1.2.1 Aký je zvyšok čísla 2355^{1245} po delení číslom 8?

Riešenie. Vieme, že $2355 \equiv 3 \pmod 8$.

Použijeme tvrdenie, že pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ platí:

$$\textbf{ak}\,\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \ (\bmod\ \mathbf{n}), \textbf{tak}\,\mathbf{a}^{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{b}^{\mathbf{k}} \ (\bmod\ \mathbf{n}). \tag{1.1}$$

Chceme zvoliť (ak sa dá) konštantu k tak, aby číslo 3^k malo „pekný“ zvyšok po delení číslom 8, napríklad 1. Nech $k = 2$. Potom dostávame $2355^2 \equiv 1 \pmod 8$. Predchádzajúci vzťah použijeme ešte raz. Teraz zvolíme mocninu k takú, aby sme sa priblížili k číslu 2355^{1245}. Nech $k = 622$, dostávame $(2355^2)^{622} \equiv 1^{622} \pmod 8$, teda $2355^{1244} \equiv 1 \pmod 8$.

Pre nenulové c platí:

$$\textbf{ak}\,\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \ (\bmod\ \mathbf{n}), \textbf{tak}\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \equiv \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \ (\bmod\ \mathbf{n}). \tag{1.2}$$

Zvoľme $c = 2355$, máme $2355^{1244} \cdot 2355 \equiv 1 \cdot 2355 \pmod 8$ a keďže číslo 2355 má zvyšok 3 po delení číslom 8, tak aj číslo 2355^{1245} má zvyšok 3 po delení číslom 8. ■

Príklad 1.2.2 Ukážme, že číslo 1999^{2022} končí číslom 1.

Riešenie. Ak máme pretransformovať našu úlohu na úlohu týkajúcu sa zvyškov, tak ukázať, že nejaké číslo končí číslom 1 je to isté ako ukázať, že toto číslo má zvyšok 1 po delení číslom 10. Vieme, že $1999 \equiv 9 \pmod{10}$. Keďže číslo -1 má zvyšok 9 po delení číslom 10, môžeme písať tiež $1999 \equiv -1 \pmod{10}$. Využitím vzťahu 1.1, dostávame $1999^{2022} \equiv (-1)^{2022} \pmod{10}$, t. j. $1999^{2022} \equiv 1 \pmod{10}$, čo sme chceli ukázať. ∎

Príklad 1.2.3 Ukážme, že číslo $17^{19} + 19^{17}$ je deliteľné číslom 36.

Riešenie. Ukázať, že číslo $17^{19} + 19^{17}$ je deliteľné číslom 36, znamená ukázať, že číslo $17^{19} + 19^{17}$ má zvyšok 0 po delení číslom 36. Platí, že ak nejaké číslo je deliteľné dvomi navzájom nesúdeliteľnými číslami, tak je deliteľné tiež ich súčinom. V našej úlohe, ak číslo je deliteľné číslom 4 a súčasne je deliteľné aj číslom 9 (4 a 9 sú nesúdeliteľné čísla), tak je deliteľné aj číslom 36. Vieme, že $17 \equiv 1 \pmod 4$ a $19 \equiv -1 \pmod 4$. Teda $17^{19} \equiv 1^{19} \pmod 4$ a $19^{17} \equiv (-1)^{17} \pmod 4$.

Platí tvrdenie:

$$\mathbf{ak\, a} \equiv \mathbf{b} \ (\bmod \ \mathbf{n})\ \mathbf{a\ zárove\check{n}\, c} \equiv \mathbf{d} \ (\bmod\ \mathbf{n}), \mathbf{tak\, a+c} \equiv \mathbf{b+d} \ (\bmod\ \mathbf{n}). \quad (1.3)$$

Na základe tohto vzťahu dostávame $17^{19} + 19^{17} \equiv 1 + (-1) \pmod 4$. Teda $17^{19} + 19^{17} \equiv 0 \pmod 4$. To znamená, že číslo $17^{19} + 19^{17}$ je deliteľné číslom 4. Podobne ukážeme deliteľnosť deviatimi. Vieme, že $17 \equiv -1 \pmod 9$ a tiež $19 \equiv 1 \pmod 9$, potom $17^{19} \equiv (-1)^{19} \pmod 9$ a $19^{17} \equiv 1^{17} \pmod 9$. Dostávame $17^{19} + 19^{17} \equiv (-1) + 1 \pmod 9$. Teda $17^{19} + 19^{17}$ je deliteľné aj číslom 9. ∎

Príklad 1.2.4 Vyriešme lineárnu kongruenciu

a) $2 \cdot x \equiv 4 \pmod 6$,

b) $171 \cdot x \equiv 2 \pmod{263}$.

Riešenie. Úlohu vyriešime pomocou nasledujúcej vety:

Veta 1.2.1 *Nech* $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. *Nech* $m \nmid a$. *Potom* $a \cdot x \equiv b \pmod m$ *má riešenie práve vtedy, keď* $\operatorname{nsd}(a, m) \mid b$.

A ako vyzerajú tieto riešenia? Platí, že ak $\operatorname{nsd}(a, m) = k \cdot a + l \cdot m$, tak $k \cdot \frac{b}{\operatorname{nsd}(a,m)}$ je riešenie kongruencie. A ak nejaké číslo r je riešenie kongruencie, tak $r - \frac{m}{\operatorname{nsd}(a,m)}$ a $r + \frac{m}{\operatorname{nsd}(a,m)}$ je predchádzajúcim resp. nasledujúcim riešením kongruencie.

a) V kongruencii $2 \cdot x \equiv 4 \pmod 6$ je $a = 2, b = 4, m = 6$, $6 \nmid 2$, $\operatorname{nsd}(a, m) = \operatorname{nsd}(2, 6) = 2$ a $2 \mid 4$. Keďže $\operatorname{nsd}(2, 6) = 2 = 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0$, máme $k = 1$ a $k \cdot \frac{b}{\operatorname{nsd}(a,m)} = 2$ je riešením danej lineárnej kongruencie. Potom rozdiel dvoch za sebou idúcich riešení je $\frac{m}{\operatorname{nsd}(a,m)} = \frac{6}{2} = 3$. Teda $x \in \{\dots, -5, -1, 2, 5, 8, \dots\}$.

b) V kongruencii $171 \cdot x \equiv 2 \pmod{263}$ je $a = 171, b = 2, m = 263$. Použitím Euklidovho algoritmu dostaneme $\operatorname{nsd}(a, m) = 1 = 20 \cdot 171 - 13 \cdot 263$. Teda $k = 20$ a $k \cdot \frac{b}{\operatorname{nsd}(a,m)} = 40$ je riešením danej lineárnej kongruencie. Potom rozdiel dvoch za sebou idúcich riešení je $\frac{m}{\operatorname{nsd}(a,m)} = \frac{263}{1} = 263$. Teda $x \in \{\dots, -486, -223, 40, 303, 566, 829, \dots\}$. ∎

Úlohy

1.1 Určte poslednú číslicu čísla

a) 765^{567},

b) 247^{742},

c) 123^{347},

d) 355^{477}.

1.2 Aký je zvyšok čísla 355^{47} po delení číslom 9?

1.3 Vyriešte lineárnu kongruenciu

a) $243 \cdot x \equiv 4 \pmod{625}$,

b) $71 \cdot x \equiv 1 \pmod{101}$,

c) $14 \cdot x \equiv -63 \pmod{35}$,

d) $10 \cdot x \equiv 2 \pmod{12}$,

e) $6 \cdot x \equiv 1 \pmod{10}$,

f) $4 \cdot x \equiv 1 \pmod{5}$,

g) $7 \cdot x \equiv 46 \pmod{21}$.

Výsledky

1.1 a) 5,

b) 9,

c) 7,

d) 5.

1.2 8.

1.3 a) $x \equiv 553 \pmod{625}$,
b) $x \equiv 37 \pmod{101}$,
c) $x \equiv 3 \pmod{5}$,
d) $x \equiv 5 \pmod{6}$,
e) neexistuje riešenie,
f) $x \equiv 4 \pmod{5}$,
g) neexistuje riešenie.

Kapitola 2

Množiny a binárne relácie

2.1 Základné pojmy teórie množín

Príklad 2.1.1 Množiny zapisujeme pomocou charakteristickej vlastnosti, ktorú majú jej prvky alebo priamo vymenovaním prvkov. Napríklad, množinu A prvočísel, nie väčších ako 20, vieme zapísať ako množinu $A = \{x \in \mathbb{N}; x \leqq 20 \text{ a } x \text{ je prvočíslo}\}$ alebo vymenovaním všetkých prvkov $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. ∎

Definícia 2.1.1 *Hovoríme, že množina A je* ***podmnožina*** *množiny B, $A \subseteq B$*[1]*, práve vtedy, keď každý prvok množiny A je aj prvkom množiny B.*

Príklad 2.1.2 Uveďme príklady podmnožín.
$\{3, 8\} \subseteq \{2, 3, 4, 5, 8, 11, 12\}$,
$\emptyset \subseteq \{a, b, c, d\}$,
$\{\triangle, \square\} \subseteq \{\square, \triangle\}$, $\{\{b\}, \{a, c\}\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. ∎

Definícia 2.1.2 Potenčná množina *množiny A, $\mathcal{P}(A)$, je množina všetkých podmnožín množiny A.*

Príklad 2.1.3 Nech $A = \{a, b, c\}$.
Potom $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. ∎

Na nasledujúcom príklade si zopakujme operácie s množinami.

Príklad 2.1.4 Majme množiny $A = \{1, 2\}$ a $B = \{2, 3, 4\}$, pričom univerzálna množina je množina prirodzených čísel. Potom
zjednotenie množín A a B je množina $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$,
prienik množín A a B je množina $A \cap B = \{2\}$,
rozdiel množín A a B je množina $A - B = \{1\}$,

[1] Niektorí autori používajú na označenie podmnožiny symbol $\subset$.

rozdiel množín B a A je množina $B - A = \{3, 4\}$,
doplnok množiny A je množina $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$,
doplnok množiny B je množina $\overline{B} = \{1, 5, 6, 7, \dots\}$,
symetrická diferencia množín A a B je množina $A \div B = \{1, 3, 4\}$,
symetrická diferencia množín B a A je množina $B \div A = \{1, 3, 4\}$,
karteziánsky súčin množín A a B je množina $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$,
karteziánsky súčin množín B a A je množina $B \times A = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$. ∎

Definícia 2.1.3 ***Rozklad množiny*** *A je systém množín $\{A_1, A_2, \dots A_n\}$, pre ktorý platí:*

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$$

a

$$A_i \cap A_j = \emptyset \; pre \; i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j.$$

Príklad 2.1.5 Množina $\{\{7\}, \{2, 5\}, \{4, 8\}, \{1, 3, 6, 9\}\}$ je jedným z možných rozkladov množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ∎

Úlohy

2.1 Napíšte prvky množiny:

a) $A = \{x \in \mathbb{N};\ -13 < -2x - 1 \leqq 3 \text{ a } x \text{ je párne}\}$,

b) $B = \{x \in \mathbb{Z};\ x \equiv 0 \pmod 4\}$,

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ x^2 = y \text{ a } y < 11\}$.

2.2 Nech $A = \{x \in \mathbb{Z};\ x \equiv 0 \pmod 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N};\ x \leqq 5\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Napíšte prvky množiny:

a) $A \cup B \cup C$,

b) $A \cap B \cap C$,

c) $A \cap (C - B)$,

d) $(A \cap B) \div C$,

e) $C \div (C \div B)$.

2.3 Nech $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{1, 2\}$. Napíšte prvky množín $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$.

2.4 Napíšte prvky potenčnej množiny $\mathcal{P}(A)$ množiny:

a) $A = \{1, 2\}$,

b) $A = \{a, b, c, d\}$.

2.5 Nájdite všetky rozklady množiny:

a) $A = \{1, 2\}$,

b) $B = \{a, b, c\}$.

Výsledky

2.1 a) $\{-2, 0, 2, 4\}$,

b) $\{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$,

c) $\{(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4), (-3, 9), (3, 9)\}$.

2.2 a) $A \cup \{-3, -1, 1, 3, 5\}$,

b) $\{2\}$,

c) $\{-2, 0\}$,

d) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 3, 4\}$,

e) B.

2.3 $A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$,

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$,

$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

2.4 a) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$,

b) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.

2.5 a) $\{\{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}\}$,

b) $\{\{\emptyset, \{a, b, c\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \{\{a\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{a, c\}\}, \{\{c\}, \{a, b\}\}\}$.

2.2 Binárne relácie a ich vlastnosti

Definícia 2.2.1 ***Binárna relácia z množiny*** *A* ***do množiny*** *B je ľubovoľná podmnožina $\mathcal{R}$ karteziánského súčinu $A \times B$. Ak uvažujeme binárne relácie, v ktorých $A = B$, teda $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, tak hovoríme, že $\mathcal{R}$ je* ***binárna relácia na množine*** *A.*

Ak $(a, b) \in \mathcal{R}$, hovoríme, že prvok a je v relácii $\mathcal{R}$ s prvkom b. Zapisujeme $a\mathcal{R}b$.

Analogicky namiesto $(a, b) \notin \mathcal{R}$ píšeme $a\overline{\mathcal{R}}b$.

Definícia 2.2.2 *Binárna relácia $\mathcal{R}$ na množine M sa nazýva*

reflexívna *práve vtedy, keď*	$(\forall x \in M)\, x\mathcal{R}x$
symetrická *práve vtedy, keď*	$(\forall x, y \in M)\, [x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x]$
antisymetrická *práve vtedy, keď*	$(\forall x, y \in M)\, [(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y]$
tranzitívna *práve vtedy, keď*	$(\forall x, y, z \in M)\, [(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z]$

Definícia 2.2.3 *Relácia $\mathcal{R}$ na množine M sa nazýva* ***ekvivalencia*** *práve vtedy, keď je reflexívna, symetrická a tranzitívna.*

Veta 2.2.1 *Každá ekvivalencia $\mathcal{R}$ na množine A určuje rozklad tejto množiny a každý rozklad množiny A definuje ekvivalenciu.*

Trieda rozkladu množiny A podľa ekvivalencie $\mathcal{R}$, ktorá obsahuje prvok $x \in A$, $[x]_{\mathcal{R}}$, je množina všetkých prvkov z A, ktoré sú v relácii s prvkom x. Teda

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A; x\mathcal{R}y\}.$$

Príklad 2.2.1 Majme reláciu $\mathcal{R}$ na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definovanú nasledovne: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x - y| \geqq 3$. Vymenujme prvky relácie $\mathcal{R}$ a určme, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Riešenie. Prvkami relácie $\mathcal{R}$ sú všetky usporiadané dvojice $(x, y) \in A \times A$ pre ktoré platí $|x - y| \geqq 3$. Teda $\mathcal{R} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (5, 2), (5, 1), (4, 1)\}$. Keďže žiaden prvok z množiny M nie je v relácii sám so sebou, daná relácia nie je reflexívna. Relácia je symetrická, pretože ak $(x, y) \in \mathcal{R}$, tak aj $(y, x) \in \mathcal{R}$. Relácia nie je antisymetrická, lebo $(1, 4) \in \mathcal{R}$ aj $(4, 1) \in \mathcal{R}$, ale $(1, 1) \notin \mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ nie je ani tranzitívna, lebo $(1, 5) \in \mathcal{R}$ aj $(5, 2) \in \mathcal{R}$, ale $(1, 2) \notin \mathcal{R}$. ■

Príklad 2.2.2 Na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je daná relácia $\mathcal{S} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 4), (5, 5)\}$. Určme, či relácia $\mathcal{S}$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna. Určme najmenšiu ekvivalenciu ε na množine M, ktorá obsahuje reláciu $\mathcal{S}$ a určme rozklad množiny M určený ekvivalenciou ε.

Riešenie. Relácia $\mathcal{S}$ nie je reflexívna, lebo napr. pre $1 \in M$ je $(1, 1) \notin \mathcal{S}$ (t.j. $1\overline{\mathcal{S}}1$).

Relácia nie je ani symetrická, keďže $(1, 2) \in \mathcal{S}$, ale $(2, 1) \notin \mathcal{S}$.

Pretože podmienka $(x, y) \in \mathcal{S}$ a $(y, x) \in \mathcal{S}$ nie je splnená pre žiadne $x, y \in M$, implikácia $((x, y) \in \mathcal{S} \wedge (y, x) \in \mathcal{S}) \Rightarrow x = y$ platí pre ľubovoľné $x, y \in M$, takže relácia je antisymetrická.

Nakoniec, relácia nie je ani tranzitívna, lebo $(1, 2) \in \mathcal{S}$ aj $(2, 3) \in \mathcal{S}$, ale $(1, 3) \notin \mathcal{S}$.

Relácia $\mathcal{S}$ nie je ekvivalencia, lebo nie je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Najmenšiu ekvivalenciu ε nájdeme pridaním minimálneho počtu usporiadaných dvojíc tak, aby vzniknutá relácia mala vlastnosti ekvivalencie.

Relácia $\mathcal{S}$ bude reflexívna, ak do $\mathcal{S}$ pridáme usporiadané dvojice $(1,1),(2,2)$, $(3,3)$. Po pridaní dvojíc $(2,1),(3,2)$ bude vzniknutá relácia aj symetrická. A nakoniec pridaním usporiadanej dvojice $(1,3)$ (a potom, aby zostala symetrická, je nutné pridať aj $(3,1)$) je relácia aj tranzitívna. Teda relácia $\varepsilon = \mathcal{S} \cup \{(1,1),(2,2),$ $(3,3)$, $(2,1),(3,2),(1,3),(3,1)\}$ je reflexívna, symetrická a tranzitívna a navyše je to najmenšia relácia s týmito vlastnosťami obsahujúca reláciu $\mathcal{S}$.

Nakoniec nájdeme triedy rozkladu množiny M podľa ekvivalencie ε. Trieda rozkladu $[x]_\varepsilon$ prislúchajúca prvku $x \in M$ obsahuje všetky prvky množiny M, ktoré sú s prvkom x v relácii ε, t.j.

$$[x]_\varepsilon = \{y \in M; x\varepsilon y\}.$$

Teda $[1]_\varepsilon = \{1,2,3\} = [2]_\varepsilon = [3]_\varepsilon$. Keďže prvok 4 je v relácii iba sám so sebou a to isté platí aj o prvku 5, tak $[4]_\varepsilon = \{4\}, [5]_\varepsilon = \{5\}$. Rozklad množiny M určený ekvivalenciou ε je $\{\{1,2,3\},\{4\},\{5\}\}$. ∎

Príklad 2.2.3 Určme, či relácia $\mathcal{T}$ na množine $\mathbb{Z}$, ktorá je definovaná takto: $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow x+y<1$, je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Riešenie:

Nech $x \in \mathbb{Z}$. Relácia $\mathcal{T}$ nie je reflexívna, lebo napr. pre $x=3$ neplatí, že $3+3<1$, teda $3\overline{\mathcal{T}}3$.

Nech $x, y \in \mathbb{Z}$. Ak $x+y<1$, tak aj $y+x<1$, keďže sčítanie je komutatívne. Relácia $\mathcal{T}$ je symetrická.

Nech $x, y \in \mathbb{Z}$. Ak $x+y<1$ a zároveň $y+x<1$, tak nemusí byť $x=y$. Stačí zobrať $x=-7$ a $y=-9$. Teda relácia $\mathcal{T}$ nie je antisymetrická.

Nech $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Ak $x+y<1$ a zároveň $y+z<1$, tak z toho nemusí vyplývať, že $x+z<1$. Stačí vziať $x=2$, $y=-11$, $z=8$. Teda relácia $\mathcal{T}$ nie je tranzitívna. ∎

Príklad 2.2.4 Relácia $\mathcal{S}$ na množine $\mathbb{R}$ je definovaná takto: $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow y=2x$. Určme, či relácia $\mathcal{S}$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Riešenie: Relácia $\mathcal{S}$ na množine $\mathbb{R}$ je reflexívna práve vtedy, keď

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, x = 2x.$$

Keďže pre všetky $x \neq 0$ nie je pravda, že $x = 2x$, relácia $\mathcal{S}$ nie je reflexívna.

Relácia $\mathcal{S}$ na množine $\mathbb{R}$ je symetrická práve vtedy, keď

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\, [y = 2x \Rightarrow x = 2y].$$

Napríklad pre $x=3$ a $y=6$ je $6 = 2\cdot 3$ a zároveň $3 \neq 2\cdot 6$, relácia $\mathcal{S}$ nie je symetrická.

Relácia $\mathcal{S}$ na množine $\mathbb{R}$ je antisymetrická práve vtedy, keď

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\, [(y = 2x \wedge x = 2y) \Rightarrow x = y].$$

Z rovníc $y = 2x$ a $x = 2y$ vyplýva, že $y = 4y$, čo platí práve vtedy, keď $y = 0$. Ale potom aj $x = 0$, teda $x = y$. Relácia $\mathcal{S}$ je antisymetrická.

Relácia $\mathcal{S}$ na množine $\mathbb{R}$ je tranzitívna práve vtedy, keď

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\,[(y = 2x \wedge z = 2y) \Rightarrow z = 2x].$$

Napríklad ak zvolíme $x = 3$, tak $y = 6$. Potom $z = 2 \cdot 6 = 12$. Ale $12 \neq 2 \cdot 3$. Relácia $\mathcal{S}$ nie je tranzitívna. ∎

Príklad 2.2.5 Zistime, či binárna relácia $\mathcal{R}$ je ekvivalencia na danej množine. Ak áno, určme triedy rozkladu množiny podľa ekvivalencie

a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \equiv y (\mathrm{mod}\ 4)\}$,

b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mid y\}$

Riešenie. Relácia na danej množine je ekvivalencia práve vtedy, keď je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Ak relácia nemá niektorú z týchto vlastností, nie je ekvivalencia.

a) Zápis $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y(\mathrm{mod}\ 4)$ znamená, že dve celé čísla x a y sú v relácii $\mathcal{R}$ práve vtedy, keď x a y majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4.

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, x \equiv x(\mathrm{mod}\ 4).$$

Relácia $\mathcal{R}$ je reflexívna, lebo pre každé celé číslo x platí, že x a x majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4.

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\,[x \equiv y(\mathrm{mod}\ 4) \Rightarrow y \equiv x(\mathrm{mod}\ 4)].$$

Relácia $\mathcal{R}$ je symetrická, lebo pre ľubovoľné dve celé čísla x, y platí, že ak x a y majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4, tak aj y a x majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4.

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\,[(x \equiv y(\mathrm{mod}\ 4) \wedge y \equiv z(\mathrm{mod}\ 4)) \Rightarrow x \equiv z(\mathrm{mod}\ 4)].$$

Relácia $\mathcal{R}$ je tranzitívna, lebo pre všetky celé čísla x, y, z platí, že ak x a y majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4 a zároveň y a z majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4, tak aj x a z majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4.

Keďže daná relácia je ekvivalenciou, tak určíme rozklad množiny $\mathbb{Z}$ určený touto reláciou. Najprv napíšeme triedu ekvivalencie $[k]_{\mathcal{R}}$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$.

$$[k]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{Z};\ x\mathcal{R}k\} = \{x \in \mathbb{Z};\ x \equiv k(\mathrm{mod}\ 4)\}.$$

V tejto množine sú teda všetky celé čísla, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4 ako číslo k. Teda $[k]_{\mathcal{R}} = \{\dots, k - 12,\ k - 8,\ k - 4,\ k,\ k + {}$ $+\, 4,\ k + 8,\ k + 12, \dots\}$. Označme túto množinu $\overline{k}$. Dosaďme za k konkrétne čísla.

$[0]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\} = \{4l;\ l \in \mathbb{Z}\} = \overline{0}.$
$[1]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\} = \{4l+1;\ l \in \mathbb{Z}\} = \overline{1}.$
$[2]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\} = \{4l+2;\ l \in \mathbb{Z}\} = \overline{2}.$
$[3]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\} = \{4l+3;\ l \in \mathbb{Z}\} = \overline{3}.$

Množiny $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ tvoria rozklad množiny $\mathbb{Z}$. Označme množinu tried ekvivalencie $\mathbb{Z}_4 = \{\ \overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3}\}$[2]. Množina $\mathbb{Z}_4$ sa nazýva **množinou zvyškových tried** množiny $\mathbb{Z}$ podľa modulu 4[3].

b) Relácia $\mathcal{R}$ na množine $\mathbb{Z}$ nie je ekvivalencia, lebo nie je symetrická (napr. 1 delí 2, ale 2 nedelí 1). ■

Úlohy

2.1 Nech $A = \{1, 2\}$ a $B = \{-1, 0, 1\}$. Nájdite prvky relácie $\mathcal{R}$ z množiny A do množiny B, ktorá je definovaná takto: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \geqq b + 1$, kde $a \in A$ a $b \in B$.

2.2 Majme reláciu $\mathcal{R}$ na množine $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ definovanú:
a) $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 4 \,|\, (x - y)$, b) $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x + y = 5$.
Vypíšte prvky relácie $\mathcal{R}$.

2.3 Sú relácie $\mathcal{R}$ z predchádzajúcej úlohy reflexívne, symetrické, antisymetrické, tranzitívne?

2.4 Nech $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Zistite, či relácia $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \,|\, y\}$ je reflexívna, symetrická, tranzitívna.

2.5 Na množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$ sú dané relácie $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$. Určte, ktoré z nich sú reflexívne, symetrické, antisymetrické, tranzitívne. Nájdite najmenšiu ekvivalenciu ε_i na množine M, ktorá obsahuje reláciu $\mathcal{T}_i$ pre $i = 1, 2, 3$.

a) $\mathcal{T}_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$,

b) $\mathcal{T}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$,

c) $\mathcal{T}_3 = \{(1, 2), (2, 3)\}$.

2.6 Zistite, či nasledujúce binárne relácie sú na daných množinách reflexívne, symetrické, antisymetrické, tranzitívne.

a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \,|\, y\}$,

b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \,|\, y \text{ a zároveň } y \,|\, x\}$,

---

[2] Pre m_1 a m_2 ($m_1 \neq m_2$) a pre konkrétne k platí, že v množinách $\mathbb{Z}_{m_1}$ a $\mathbb{Z}_{m_1}$ sú množiny $\overline{k}$ rôzne.

[3] Vo všeobecnosti, ak $m \in \mathbb{N}$, tak množina $\mathbb{Z}_m = \{\ \overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \dots,\ \overline{m-1}\}$, kde pre $k \in \{0, 1, 2, \dots m-1\}$ je $\overline{k} = \{\dots, k-3m,\ k-2m,\ k-m,\ k,\ k+m,\ k+2m,\ k+3m, \dots\}$ sa nazýva množina zvyškových tried množiny $\mathbb{Z}$ podľa modulu m.

c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = x + 3\}$,

d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = x^2\}$,

e) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x \equiv y \pmod 4\}$,

f) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \cdot y \equiv 1 \pmod 2\}$,

g) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y \geqq 1000\}$,

h) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + 3y < 10\}$,

i) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y \text{ je párne}\}$,

j) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y \text{ je nepárne}\}$,

k) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 4x \equiv y \pmod 3\}$,

l) $\mathcal{R}$ na $\mathbb{N} : xRy \Leftrightarrow \text{nsd}(x, y) = 1$

m) $\mathcal{R}$ na $\mathbb{Z} : xRy \Leftrightarrow |x - y| \geqq 1$,

n) $\mathcal{R}$ na $\mathbb{R} : xRy \Leftrightarrow |x - y| \leqq 1$.

2.7 Zistite, či relácie $\mathcal{R}$ na množine $\mathbb{Z}$ sú ekvivalencie. Ak áno, nájdite príslušný rozklad množiny $\mathbb{Z}$ určený touto reláciou.

a) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leqq y$, b) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y^2$,

c) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3 \,|\, (x + y)$, d) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{5}$,

e) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ je párne, f) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \,|\, (y + 3)$.

Výsledky

2.1 $\mathcal{R} = \{(1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\}$.

.

2.2 a) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 6), (5, 1), (6, 2), (3, 3), (3, 7), (7, 3)(4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$,

b) $\mathcal{R} = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

2.3 a) Je reflexívna, symetrická aj tranzitívna, nie je antisymetrická.

b) Je symetrická, nie je reflexívna ani antisymetrická ani tranzitívna.

2.4 Je reflexívna aj tranzitívna, nie je symetrická.

2.5 a) je reflexívna, antisymetrická aj tranzitívna, nie je symetrická,

$\varepsilon_1 = \mathcal{T}_1 \cup \{(2, 1)\}$,

b) nie je ani reflexívna ani symetrická ani antisymetrická ani tranzitívna,

$\varepsilon_2 = \mathcal{T}_2 \cup \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3)\}$,

b) nie je ani reflexívna ani symetrická ani tranzitívna, je iba antisymetrická,

$\varepsilon_3 = \mathcal{T}_3 \cup \{(1, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

2.6 a) je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, je tranzitívna,

b) je reflexívna, je symetrická, je antisymetrická, je tranzitívna,

c) nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, nie je tranzitívna,

d) nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, nie je tranzitívna,

e) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,

f) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,

g) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,

h) nie je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,

i) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,

j) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,

k) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,

l) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,

m) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,

n) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna.

2.7 a) nie je ekvivalencia,

b) nie je ekvivalencia,

c) nie je ekvivalencia,

d) je ekvivalencia,

rozklad danej množiny určený ekvivalenciou tvoria prvky množiny $\mathbb{Z}_5$,

e) je ekvivalencia,

rozklad danej množiny určený ekvivalenciou tvoria prvky množiny $\mathbb{Z}_2$,

f) nie je ekvivalencia.

Kapitola 3

Čiastočne usporiadané množiny a zväzy

3.1 Čiastočne usporiadané množinny

Definícia 3.1.1 *Binárna relácia $\mathcal{R}$ na množine A, ktorá je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna, sa nazýva **relácia čiastočného usporiadania** na množine A. Potom usporiadaná dvojica $(A, \mathcal{R})$ sa nazýva **čiastočne usporiadaná množina**.*

Definícia 3.1.2 *Nech $(A, \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina.*

*Prvok $a \in A$ sa nazýva **najmenší** prvok v $(A, \mathcal{R})$ práve vtedy, keď pre ľubovoľný prvok $x \in A$ platí, že $a\mathcal{R}x$.*

*Prvok $b \in A$ sa nazýva **najväčší** prvok v $(A, \mathcal{R})$ práve vtedy, keď pre ľubovoľný prvok $x \in A$ platí, že $x\mathcal{R}b$.*

*Prvok $c \in A$ sa nazýva **minimálny** prvok v $(A, \mathcal{R})$ práve vtedy, keď neexistuje prvok $x \in A$ taký, že $x \neq c$ a $x\mathcal{R}c$.*

*Prvok $d \in A$ sa nazýva **maximálny** prvok v $(A, \mathcal{R})$ práve vtedy, keď neexistuje prvok $x \in A$ taký, že $x \neq d$ a $d\mathcal{R}x$.*

Definícia 3.1.3 *Majme $\emptyset \neq M \subset A$.*

*množinou **horných ohraničení** množiny M sa nazýva množina $h(M) = \{a \in A; (\forall x \in M)\ x\mathcal{R}a\}$.*

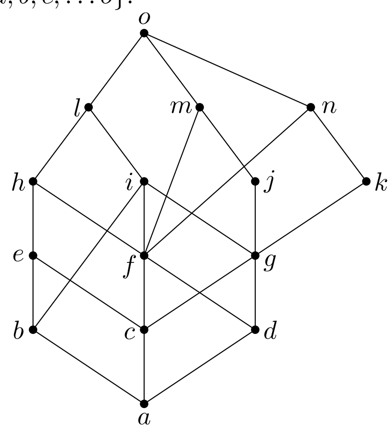
*množinou **dolných ohraničení** množiny M sa nazýva množina $d(M) = \{a \in A; (\forall x \in M)\ a\mathcal{R}x\}$.*

*Najmenší prvok (ak existuje) množiny $h(M)$ sa nazýva **supremum** množiny M. Označujeme to $\sup M$.*

*Najväčší prvok (ak existuje) množiny $d(M)$ sa nazýva **infimum** množiny M. Označujeme to $\inf M$.*

Ak $M = \{x, y\}$, tak v ďalšom budeme označovať $\sup\{x, y\} = x \underset{\cdot}{\vee} y$ a $\inf\{x, y\} = x \dot{\wedge} y$, pričom $x \underset{\cdot}{\vee} y$ čítame **spojenie** prvkov x a y, $\inf\{x, y\} = x \dot{\wedge} y$ čítame **priesek** prvkov x a y.

Príklad 3.1.1 Majme daný Hasseho diagram nejakej čiastočne usporiadanej množiny $(A, \mathcal{R})$, kde $A = \{a, b, c, \dots o\}$.



Určme supremum a infimum nasledujúcich množín: $\{b, g\}$, $\{h, j\}$,$\{m, c\}$, $\{f, g\}$, $\{h, i\}$, $\{l, m, n\}$, $\{e, i, c\}$, $\{b, g, i\}$, $\{n, c\}$.

Riešenie. Riešenie zapíšeme do tabuľky, pričom určíme aj množiny horných a dolných ohraničení pre každú zo zadaných množín.

M	$h(M)$	$\sup M$	$d(M)$	$\inf\ M$
$\{b, g\}$	$\{i, l, o\}$	i	$\{a\}$	a
$\{h, j\}$	$\{o\}$	o	$\{a, c, d\}$	neexistuje
$\{m, c\}$	$\{m, o\}$	m	$\{a, c\}$	c
$\{f, g\}$	$\{i, l, m, n, o\}$	neexistuje	$\{a, c, d\}$	neexistuje
$\{h, i\}$	$\{l, o\}$	l	$\{a, b, c, d, f\}$	neexistuje
$\{l, m, n\}$	$\{o\}$	o	$\{a, c, d, f, g\}$	neexistuje
$\{e, i, c\}$	$\{l, o\}$	l	$\{a, c\}$	c
$\{b, g, i\}$	$\{i, l, o\}$	i	$\{a\}$	a
$\{n, c\}$	$\{n, o\}$	n	$\{a, c\}$	c

■

Príklad 3.1.2 Nech D_n je množina všetkých nezáporných deliteľov prirodzeného čísla $n, n > 1$. Uvažujme binárnu reláciu $\mathcal{R}$ na množine D_n definovaná takto: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \,|\, y$. Určme, či relácia $\mathcal{R}$ je reláciou čiastočného usporiadania na množine D_n. Ak áno, znázornime zodpovedajúci Hasseho diagram pre n=40 a určme maximálny, minimálny, najväčší a najmenší prvok v $(D_{40}, \mathcal{R})$.

Riešenie. Ak máme zistiť, či relácia $\mathcal{R}$ je reláciou čiastočného usporiadania, musíme overiť, či je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

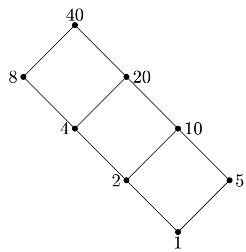
Relácia je reflexívna práve vtedy, keď $(\forall x \in D_n)\, x \,|\, x$.
Keďže $x = 1 \cdot x$, tak $x \,|\, x$, a preto relácia $\,|\,$ na D_n je reflexívna.

Relácia je antisymetrická práve vtedy, keď $(\forall x, y \in D_n)\, [(x \,|\, y \wedge y \,|\, x) \Rightarrow x = y]$.
Z predpokladov $x \,|\, y$ a $y \,|\, x$ vyplýva, že existujú celé čísla k, l také, že $y = k \cdot x$ a

$x = l \cdot y$. Dostávame $y = k \cdot (l \cdot y) = k \cdot l \cdot x$. To platí práve vtedy, keď $k \cdot l = 1$. Z toho vyplýva, že buď $k = l = 1$ alebo $k = l = -1$. Teda buď $x = y$ alebo $x = -y$. Ale prípad $x = -y$ nastať nemôže, nakoľko množina D_n záporné čísla neobsahuje. Relácia $\mid$ na D_n je antisymetrická.

Relácia je tranzitívna práve vtedy, keď $(\forall x, y, z \in D_n)[(x \mid y \wedge y \mid z) \Rightarrow x \mid z]$. Z predpokladov $x \mid y$ a $y \mid z$ vyplýva, že existujú celé čísla k, l také, že $y = k \cdot x$ a $z = l \cdot y$. Dostávame $z = l \cdot (k \cdot x) = l \cdot k \cdot x$, pričom $k \cdot l$ je celé číslo. Teda $x \mid z$. Relácia $\mid$ na D_n je tranzitívna.

Keďže relácia $\mid$ na D_n má všetky požadované vlastnosti, je reláciou čiastočného usporiadania. To znamená, že $(D_n, \mid)$ je čiastočne usporiadaná množina.
Teraz určme nezáporné delitele čísla 40. $D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$. Hľadaný Hasseho diagram je na obrázku.



Z tohto diagramu na základe definície 3.1.2 určíme najväčší, najmenší, maximálny aj minimálny prvok. Najväčší prvok je rovnaký ako maximálny prvok, je to 40, najmenší prvok je ten istý ako minimálny prvok, je ním prvok 1. Vo všeobecnosti, čiastočne usporiadaná množina $(D_n, \mid)$ má vždy jediný maximálny prvok, je to číslo n, ktorý je zároveň najväčším prvkom tejto čiastočne usporiadanej množiny. A tiež, $(D_n, \mid)$ má jediný minimálny prvok, je to číslo 1, ktorý je aj najmenším prvkom $(D_n, \mid)$. ∎

Príklad 3.1.3 Nech $M = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}\}$. Je $(M, \subseteq)$ čiastočne usporiadaná množina? Ak áno, znázornime jej Hasseho diagram a určme maximálny, minimálny, najväčší a najmenší prvok.

Riešenie. Zistime, či relácia $\subseteq$ je reflexívna, antisymetricka a tranzitívna.

Relácia je reflexívna práve vtedy, keď

$$(\forall X \in M) X \subseteq X.$$

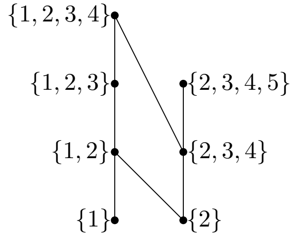
Relácia je antisymetrická práve vtedy, keď

$$(\forall X, Y \in M)[(X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X) \Rightarrow X = Y].$$

Relácia je tranzitívna práve vtedy, keď

$$(\forall X, Y, Z \in M)[(X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z) \Rightarrow X \subseteq Z].$$

Keďže pre známu reláciu „byť podmnožinou“ $\subseteq$ platia všetky tri predchádzajúce vlastnosti, je reláciou čiastočného usporiadania. To znamená, že $(M, \subseteq)$ je čiastočne usporiadaná množina. Jej Hasseho diagram je na obrázku.



V $(M, \subseteq)$ maximálne prvky sú $\{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}$, minimálne prvky sú $\{1\}, \{2\}$. Teda najväčší ani najmenší prvok neexistuje. ■

Úlohy

3.1 Nech $T = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{b,c,d,e\}, \{a,b,c,d,e\}\}$. Znázornite Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny $(T, \subseteq)$ a určte:

a) $\inf\{\{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$,

b) $\inf\{\{b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$,

c) $\inf\{\{a,b,c,d\}, \{b\}\}$,

d) $\inf\{\{a,b,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$,

e) $\sup\{\{b,c\}, \{c,d\}\}$,

f) $\sup\{\{a,b\}, \{b,c\}\}$,

g) $\sup\{\{b\}, \{a,b,c,d\}\}$,

h) $\sup\{\{a\}, \{c,d\}\}$.

3.2 Určte najmenší, najväčší, minimálny a maximálny prvok čiastočne usporiadanej množiny

a) $(\{5, 7, 14, 35, 140\}, |)$.

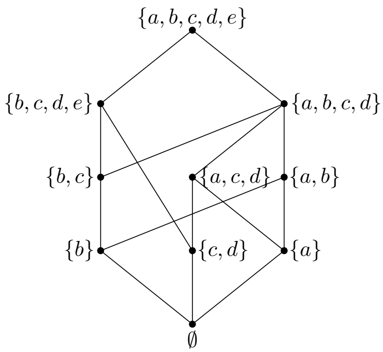
b) $(\{2,3,4,6,8,12,16,18,36,48\}, |)$.

c) $(\{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, \{b,d,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,d,e\}\} \subseteq)$,

d) $(\{\{b\}, \{d\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, \{b,d,e\}, \{a,b,c,d\}\} \subseteq)$,

Výsledky

3.1



a) $\{c,d\}$, b) $\emptyset$, c) $\{b\}$, d) neexistuje,
e) neexistuje, f) $\{a,b,c,d\}$, g) $\{a,b,c,d\}$, h) $\{a,c,d\}$.

3.2 a) najmenší: neexistuje,
najväčší: 140,
minimálny: 5, 7,
maximálny: 140.

b) najmenší: neexistuje,
najväčší: neexistuje,
minimálny: 2, 3,
maximálny: 36, 48.

c) najmenší: $\emptyset$,
najväčší: $\{a,b,c,d,e\}$,
minimálny: $\emptyset$,
maximálny: $\{a,b,c,d,e\}$.

d) najmenší: neexistuje,
najväčší: neexistuje,
minimálny: $\{b\},\{d\}$,
maximálny: $\{b,d,e\},\{a,b,c,d\}$.

3.2 Zväzy

Definícia 3.2.1 *Majme binárnu reláciu $\mathcal{R}$ na množine A. Usporiadaná dvojica $(A,\mathcal{R})$ sa nazýva* **zväz** *práve vtedy, keď sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. *$(A,\mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina,*
2. *Pre každé dva prvky $x,y \in A$ existuje spojenie $x\underset{\cdot}{\vee}y$ a priesek $x\dot{\wedge}y$.*

Veta 3.2.1 *Nech $(A,\mathcal{R})$ je zväz. Potom pre ľubovoľné $x,y,z \in A$ platí:*

idempotentnosť	$x\underset{\cdot}{\vee}x = x$,	$x\dot{\wedge}x = x$,
komutatívnosť	$x\underset{\cdot}{\vee}y = y\underset{\cdot}{\vee}x$,	$x\dot{\wedge}y = y\dot{\wedge}x$,
asociatívnosť	$(x\underset{\cdot}{\vee}y)\underset{\cdot}{\vee}z = x\underset{\cdot}{\vee}(y\underset{\cdot}{\vee}z)$,	$(x\dot{\wedge}y)\dot{\wedge}z = x\dot{\wedge}(y\dot{\wedge}z)$,
absorbcia	$x\underset{\cdot}{\vee}(y\dot{\wedge}x) = x$,	$x\dot{\wedge}(y\underset{\cdot}{\vee}x) = x$

Vo zväze priesek a spojenie sú zobrazenia: $\underset{\cdot}{\vee} : A \times A \to A$ a $\dot{\wedge} : A \times A \to A$. Ide o binárne operácie, keďže dvom prvkom množiny A priradia jeden prvok z tej istej množiny. Preto zväz môžeme definovať ako algebraický systém $(A, \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge})$, kde $A \neq \emptyset$ a pre priesek a spojenie platia vlastnosti idempotentnosti, komutatívnosti, asociatívnosti a absorbcie.

Definícia 3.2.2 *Zväzy $(A_1, \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge})$ a $(A_2, \ovee, \owedge)$ sú izomorfné práve vtedy, keď existuje bijektívne zobrazenie $f : A_1 \to A_2$ také, že pre všetky $x,\ y \in A_1$ platí*

$$f(x \underset{\cdot}{\vee} y) = f(x) \ovee f(y) \tag{3.1}$$

a zároveň

$$f(x \dot{\wedge} y) = f(x) \owedge f(y). \tag{3.2}$$

Príklad 3.2.1 Zistime, či usporiadaná dvojica $(D_n, \mathcal{R})$ (z príkladu 3.1.2) je zväz.

Riešenie. Vieme, že usporiadaná dvojica $(D_n, \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina (pozri príklad 3.1.2). Potrebujeme ešte zistiť, či pre každé dva prvky $x, y \in D_n$ existuje spojenie $x \underset{\cdot}{\vee} y = \sup\{x, y\}$ a zároveň existuje priesek $x \dot{\wedge} y = \inf\{x, y\}$. Keďže množina D_n je množinou všetkých prirodzených deliteľov čísla n, v množine horných ohraničení prvkov x, y sú všetky spoločné násobky čísel x, y. Z nich najmenší prvok je najmenší spoločný násobok čísel x, y, označme $\text{nsn}\{x, y\}$, čo je $\sup\{x, y\}$.

Podobne môžeme definovať $\inf\{x, y\}$ ako $\text{nsd}\{x, y\}$, najväčší spoločný deliteľ čísel x, y, keďže v množine dolných ohraničení sú všetky spoločné delitele čísel x, y a jej najväčší prvok je ich najväčší spoločný deliteľ. Teda $(D_n, \mathcal{R})$ je zväz. ■

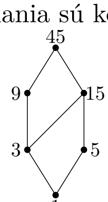
Príklad 3.2.2 Zistime, či čiastočne usporiadaná množina $(M, \subseteq)$ z príkladu 3.1.3 je zväz.

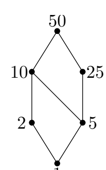
Riešenie. Keďže ide o čiastočne usporiadanú množinu, stačí zistiť, či ľubovoľné dva prvky z množiny M majú spojenie aj priesek. Keďže množina je konečná, overíme to pomocou Hasseho diagramu. Z Hasseho diagramu tejto čiastočne usporiadanej množiny vidíme, že napríklad prvky $\{1, 2\}$ a $\{2, 3, 4, 5\}$ nemajú supremum, t. j. neexistuje ich spojenie. Teda sa nejedná o zväz. ■

Príklad 3.2.3 Zistime, či zväz $(D_{45}, |)$ je izomorfný so zväzom $(D_{50}, |)$.

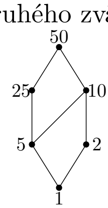
Riešenie. Hasseho diagramy izomorfných zväzov sa dajú prekresliť tak, že budú rovnaké, až na pomenovanie prvkov.

Zväzy zo zadania sú konečné, načrtnime ich Hasseho diagramy.





Prekreslime Hasseho diagram druhého zväzu.



Teraz pomocou týchto diagramov nájdeme bijektívne zobrazenie $f : D_{45} \to D_{50}$, ktoré spĺňa podmienky 3.1 a 3.2: $f(1) = 1$, $f(3) = 5$, $f(5) = 2$, $f(9) = 25$, $f(15) = 10$ a $f(45) = 50$. Dané zväzy sú izomorfné. ∎

Definícia 3.2.3 *Zväz* $(A', \ovee, \owedge)$ *sa nazýva* **podzväzom** *zväzu* $(A, \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge})$ *práve vtedy, keď* $A' \subseteq A$ *a pre ľubovoľné prvky* $x, y \in A'$ *platí*

$$x \ovee y = x \underset{\cdot}{\vee} y \tag{3.3}$$

a zároveň

$$x \owedge y = x \dot{\wedge} y \tag{3.4}$$

Poznámka. Každé dva prvky v podzväze majú rovnaké supremum a tiež rovnaké infimum ako v zväze.

Definícia 3.2.4 *Zväz* $(A, \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge})$ *sa nazýva* **distributívny** *práve vtedy, keď pre ľubovoľné prvky* $x, y, z \in A$ *platí*

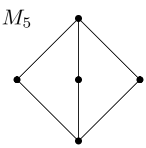
$$(x \underset{\cdot}{\vee} y) \dot{\wedge} z = (x \dot{\wedge} z) \underset{\cdot}{\vee} (y \dot{\wedge} z) \tag{3.5}$$

a zároveň

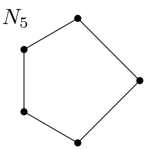
$$(x \dot{\wedge} y) \underset{\cdot}{\vee} z = (x \underset{\cdot}{\vee} z) \dot{\wedge} (y \underset{\cdot}{\vee} z) \tag{3.6}$$

Veta 3.2.2 *Zväz* $(A, \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge})$ *je distributívny práve vtedy, keď neobsahuje podzväz izomorfný s* N_5 *ani s* M_5.

M_5



N_5



Nech I je najväčší prvok a O najmenší prvok vo zväze $(A, \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge})$.

Definícia 3.2.5 *Zväz* $(A, \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge})$ *sa nazýva* **komplementárny** *práve vtedy, keď ku každému prvku* $x \in A$ *existuje prvok* $x' \in A$ *tak, že platí* $x \underset{\cdot}{\vee} x' = I$ *a* $x \dot{\wedge} x' = O$.

Prvok x' *sa nazýva* **komplementom** *k prvku* x.

Definícia 3.2.6 *Zväz* $(A, \mathcal{R})$ *sa nazýva* **boolovský** *práve vtedy, keď je distributívny aj komplementárny.*

V boolovskom zväze komplement je zobrazenie: $' : A \to A$. Je to unárna operácia, lebo prvku množiny A priradí prvok z množiny A. Boolovský zväz môžeme definovať aj ako algebraický systém $(A, \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge}, ', O, I)$, $A \neq \emptyset$, $\underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge}$ sú binárne operácie a $'$ je unárna operácia na A a $O, I \in A$.

Definícia 3.2.7 *Zväz* $(A, \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge}, ', O, I)$, $A \neq \emptyset$ *sa nazýva* **boolovská algebra**.

V boolovskom zväze platia okrem vlastnosti idempotentnosti, komutatívnosti, asociatívnosti, absorbcie, distributívnosti, existencie komplementu ku každému prvku aj ďalšie vlastnosti. Uvedieme tie, ktoré budeme v ďalšom používať.

$$\begin{array}{ll} x\underset{\cdot}{\vee}O = x, & x\dot{\wedge}O = O, \\ x\underset{\cdot}{\vee}I = I, & x\dot{\wedge}I = x, \\ x\underset{\cdot}{\vee}x' = I, & x\dot{\wedge}x' = O, \\ (x\underset{\cdot}{\vee}y)' = x'\dot{\wedge}y', & (x\dot{\wedge}y)' = x'\underset{\cdot}{\vee}y'. \end{array}$$

Veta 3.2.3 *V boolovskom zväze má každý prvok práve jeden komplement.*

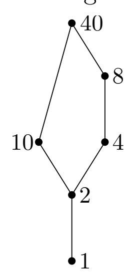
Poznámka: Z predchádzajúcej vety vyplýva, že ak zväz je komplementárny a nejaký prvok má viac komplementov, tak zväz nie je distributívny.

Veta 3.2.4 *Každý konečný boolovský zväz má* 2^n *(*$n \in \mathbb{N}$*) prvkov.*

Príklad 3.2.4 Zistime, či zväz $(\{1, 2, 4, 8, 10, 40\}, |)$ je

- distributívny,
- komplementárny,
- boolovský.

Riešenie. Najprv nakreslíme Hasseho diagram daného zväzu.



Tento zväz nie je distributívny, lebo obsahuje podzväz určený prvkami $\{2, 4, 10, 8, 40\}$, ktorý je izomorfný so zväzom N_5. Tiež vieme nájsť tri prvky pre ktoré neplati distributívny zákon 3.6. Neplatí $(10\dot{\wedge}8)\underset{\cdot}{\vee}4 = (10\underset{\cdot}{\vee}4)\dot{\wedge}(8\underset{\cdot}{\vee}4)$.

Daný zväz nie je ani komplementárny, keďže napríklad k prvku 8 neexistuje komplement. Ak by existoval komplement k prvku 8, nemohol by byť s ním v reťazci. Do úvahy by prichádzal iba prvok 10, ale $\inf\{8, 10\}$ je 2 a nie najmenší prvok 1.

Keďže zväz nie je ani distributívny ani komplementárny, nie je ani boolovský. ∎

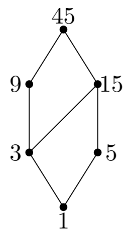
Príklad 3.2.5 Určme všetky päťprvkové podzväzy zväzu:

a) $(D_{45}, |)$,

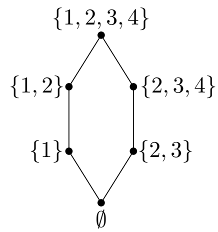
b) $(\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}, \subseteq)$.

Riešenie. Nakreslíme Hasseho diagramy uvedených zväzov.

a)

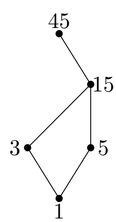


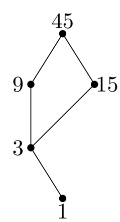
b)



Keďže oba zväzy majú šesť prvkov, zaujíma nás, ktorý prvok môžeme vynechať tak, aby boli splnené rovnosti 3.3 a 3.4. Určite nemôžeme v žiadnom zväze vynechať ani najmenší ani najväčší prvok, keďže niektoré prvky x, y by nemali priesek resp. spojenie, teda by to nebol ani zväz.

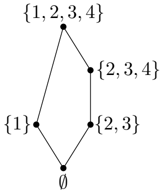
a) Teda v zväze $(D_{45}, |)$ nemôžeme vynechať 1 ani 45. Ak by sme vynechali prvok 3, tak $\inf\{9, 15\}$ v tomto zväze by bolo 1, ale v zväze $(D_{45}, |)$ je to 3. Podobne, nemôžeme vynechať ani 15, lebo $\sup\{3, 5\}$ by bolo rôzne v tomto a v pôvodnom zväze. Ak vynecháme prvky 5 resp. 9, dostaneme zväzy, ktorých Hasseho diagramy sú na obrázku:

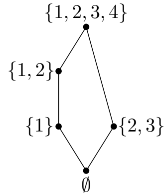


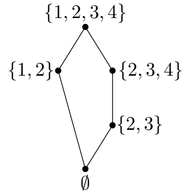


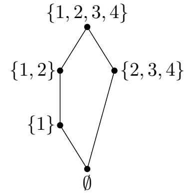
Ľahko vieme preveriť, že priesek aj spojenie akýchkoľvek dvoch prvkov v oboch zväzoch sú rovnaké ako vo zväze $(D_{45}, |)$, teda $(\{1, 3, 5, 15, 45\}, |)$ aj $(\{1, 3, 9, 15, 45\}, |)$ sú podzväzy zväzu $(D_{45}, |)$.

b) V zväze $(\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}, \subseteq)$ nemôžeme vynechať $\emptyset$ ani $\{1, 2, 3, 4\}$. Ak vynecháme iný prvok, dostaneme zväzy, ktorých Hasseho diagramy sú na obrázku:









Opäť veľmi rýchlo vieme overiť, že priesek a spojenie ľubovoľných dvoch prvkov sú rovnaké ako v pôvodnom zväze.

Teda zväz $(\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}, \subseteq)$ má tieto podzväzy:
$(\{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}, \subseteq)$,
$(\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3,4\}\}, \subseteq)$,
$(\{\emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}, \subseteq)$,
$(\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}, \subseteq)$. ∎

Príklad 3.2.6 Určme, či zväzy z predchádzajúcej úlohy sú :

i) distributívne,

ii) komplementárne.

Riešenie.

i) Na základe predchádzajúcej úlohy, v ktorej sme našli všetky päťprvkové podzväzy daných zväzov, vieme, že zväz:

  a) $(D_{45}, |)$ neobsahuje podzväz izomorfný ani s N_5 ani s M_5, teda na základe vety 3.2.2 je distributívny.
  b) $(\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}, \subseteq)$ nie je distributívny, keďže obsahuje podzväz izomorfný s M_5 (všetky jeho 5-prvkové podzväzy sú izomorfné s M_5).
  Ak by sme chceli ukázať, že zväz nie je distributívny na základe definície 3.2.4, museli by sme nájsť tri prvky z množiny $\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$, pre ktoré nie je splnený niektorý z distributívnych zákonov 3.5 alebo 3.6. Neplatí napríklad rovnosť

$$(\{1\} \dot\vee \{2,3\}) \dot\wedge \{1,2\} = (\{1\} \dot\wedge \{1,2\}) \dot\vee (\{2,3\} \dot\wedge \{1,2\}).$$

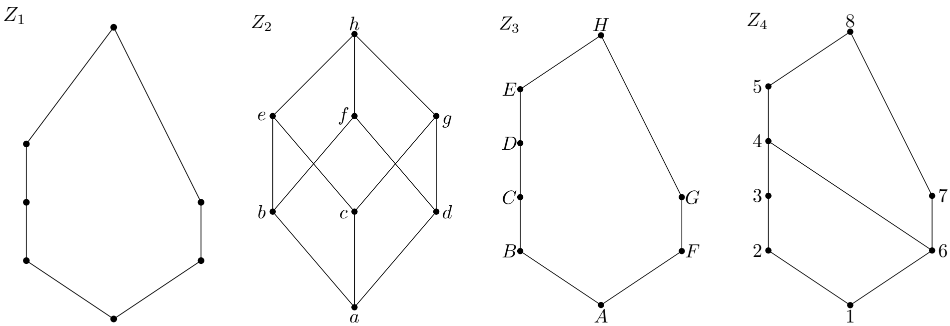
ii) V oboch zväzoch určíme najmenší prvok I a najväčší prvok O. Na základe definície 3.2.5 chceme ku každému prvku x z danej množiny nájsť prvok x' tak, aby $x \dot\vee x' = I$ a $x \dot\wedge x' = O$,

  a) V zväze $(D_{45}, |)$ najväčším prvkom je 45 a najmenším 1. Teda ku každému $x \in D_{45}$ chceme nájsť prvok $x' \in D_{45}$ tak, aby $x \dot\vee x' = 45$ a $x \dot\wedge x' = 1$. Potom $1' = 45$, $5' = 9$, $9' = 5$, $45' = 1$. K prvkom 3 a 15 neexistujú komplementy, lebo neexistuje prvok $u \in D_{45}$ taký, že $3 \dot\vee u = 45$ a $3 \dot\wedge u = 1$ ani prvok $v \in D_{45}$ taký, že $15 \dot\vee v = 45$ a $15 \dot\wedge v = 1$. Teda zväz $(D_{45}, |)$ nie je komplementárny.
  b) Najväčším prvkom v zväze $(\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}, \subseteq)$ je $\{1,2,3,4\}$ a najmenším $\emptyset$. Potom $\emptyset' = \{1,2,3,4\}$, $\{1\}' = \{2,3\}$, $\{1,2\}' = \{2,3\}$, $\{2,3\}' = \{1\}$, $\{2,3,4\}' = \{1\}$, $\{1,2,3,4\}' = \emptyset$. Zväz $(\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}, \subseteq)$ je komplementárny. ∎

Poznámka: V predchádzajúcom príklade, zväz $(\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}, \subseteq)$ nie je boolovský, nakoľko má 6 prvkov. A keďže sme zistili, že daný zväz je komplementárny a prvok $\{2,3\}$ má viac komplementov, na základe viet 3.2.3 a 3.2.4 vieme povedať, že uvedený zväz nie je distributívny.

Príklad 3.2.7 Určme, či zväz daný Hasseho diagramom je boolovský.

a) b) c) d)



Riešenie.

a) Na základe vety 3.2.3 zväz Z_1 nemôže byť boolovský, keďže má sedem prvkov. Ostatné tri zväzy môžu (ale nemusia) byť boolovské, lebo počet ich prvkov je mocninou čísla dva.

b) Určme najprv, či zväz je komplementárny. Vo zväze Z_2 najväčším prvkom je h a najmenším a. Ku každému $x \in Z_2$ chceme nájsť prvok $x' \in Z_2$ tak, aby platilo: $x \underset{\cdot}{\vee} x' = h$ a $x \dot{\wedge} x' = a$.

Postupným overovaním spojenia a prieseku pre konkrétne dva prvky zväzu Z_2 sme zistili, že ku každému prvku existuje práve jeden komplement, a to: $a' = h$, $b' = g$, $c' = f$, $d' = e$, $e' = d$, $f' = c$, $g' = b$, $h' = a$.

c) Vo zväze Z_3 najväčším prvkom je H a najmenším A. Ku každému $x \in Z_3$ chceme nájsť prvok $x' \in Z_3$ tak, aby $x \underset{\cdot}{\vee} x' = H$ a $x \dot{\wedge} x' = A$.

Komplementy k prvkom sú nasledovné: $A' = H$, $B' = F$, $C' = F$, $D' = G$, $E' = F$, $F' = D$, $G' = B$, $H' = A$. Zväz je komplementárny. Ale keďže niektoré prvky majú viac komplementov (napr. B' je tiež G), daný zväz nie je distributívny. Potom nie je ani boolovský.

d) Vo zväze Z_4 najväčším prvkom je 8 a najmenším 1. Ku každému $x \in Z_4$ chceme nájsť prvok $x' \in Z_4$ tak, aby $x \underset{\cdot}{\vee} x' = 8$ a $x \dot{\wedge} x' = 1$. K prvku $x = 6$ ale taký prvok x' neexistuje, zväz Z_4 nie je komplementárny. Teda nie je ani boolovský. ∎

Úlohy

3.1 Zistite, či $(A, |)$ je zväz, pričom:

a) $A = \{1, 2, 3, 12, 30, 60\}$,

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30, 36, 45, 90, 180\}$,

c) $A = \{1, 2, 3, 12, 15, 18, 180\}$.

3.2 Nech $M = \{a, b, c, d\}$ a nech A je množina všetkých podmnožín množiny M, ktoré majú nepárny počet prvkov. Zistite, či $(A, \subseteq)$ tvorí zväz.

3.3 Zistite, či $(T, \subseteq)$ je zväz, ak $T = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$.

3.4 Zistite, či $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ je zväz.

3.5 Zistite, či $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \cup, \cap)$ je zväz. Ak áno, zistite, či je distributívny, komplementárny.

3.6 Zistite, či niektorý zo zväzov $(D_{30}, |), (D_{20}, |), (D_{105}, |), (D_{125}, |)$ je izomorfný so zväzom $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

3.7 Zistite, či zväz $L_1 = (\{0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \leqq)$, kde $(a, b) \leqq (c, d) \Leftrightarrow a \leqq c$ a zároveň $b \leqq d$ je izomorfný so zväzom $L_2 = (D_{96}, |)$.

3.8 Zistite, či zväz $(\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2, 3\}, \leqq)$ je izomorfný so zväzom $(D_{72}, |)$.

3.9 Nech $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. Ktoré zo zväzov $(A, \subseteq), (D_{77}, |), (D_{18}, |), (D_{20}, |), (D_{10}, |)$ sú izomorfné?

3.10 Zistite, či $(A, \subseteq)$ je podzväz zväzu $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, ak $A = \{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$ a $X = \{a, b, c, d, e\}$.

3.11 Zistite, či zväz $(D_{30}, |)$ je distributívny, komplementárny alebo boolovský.

3.12 Zistite, či zväz $(D_{60}, |)$ je komplementárny.

3.13 Zistite, či zväz $(\{1, 2, 3, 5, 6, 15, 30\}, |)$ je komplementárny, distributívny, boolovský.

Výsledky

3.1 a) nie, neexistuje napr. $\inf\{12, 30\}$,

b) nie, neexistuje napr. $\sup\{2, 5\}$,

c) nie, neexistuje napr. $\inf\{12, 18\}$.

3.2 Nie, neexistuje napr. $\inf\{\{a\}, \{b, c, d\}\}$.

3.3 Nie, neexistuje napr. $\sup\{\{b, c\}, \{a, c\}\}$.

3.4 Áno.

3.5 Je to zväz. Je distributívny aj komplementárny.

3.6 Áno, $(D_{30}, |)$ aj $(D_{105}, |)$.

3.7 Áno.

3.8 Áno.

3.9 $(A, \subseteq) \cong (D_{20}, |) \cong (D_{18}, |)$, $(D_{77}, |) \cong (D_{10}, |)$.

3.10 Nie, napr. $\sup\{\{b\}, \{d\}\}$ je iné ako vo zväze.

3.11 Zväz je distributívny, komplementárny aj boolovský.

3.12 Nie, komplement k prvku 30 neexistuje.

3.13 Nie je komplementárny, je distributívny, nie je boolovský.

Kapitola 4

Boolovské funkcie a formuly výrokovej logiky

4.1 Boolovské funkcie

Definícia 4.1.1 *Nech* $(D, \dot{\vee}, \dot{\wedge}, ', 0, 1)$ *je boolovská algebra, kde* $D = \{0, 1\}$. *Zobrazenie* $f : D^n \to D$ *sa nazýva* **boolovská funkcia** n *premenných. Zapisujeme* $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *kde* $y, x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$.

Boolovská funkcia n premenných každej usporiadanej n-tici núl a jednotiek priradí nulu alebo jednotku.

Definícia 4.1.2 *Nech* f *a* g *sú boolovské funkcie. Potom*
Spojenie $f \dot{\vee} g$ *boolovských funkcií* f *a* g *je funkcia*

$$(f \dot{\vee} g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \dot{\vee} g(x_1, \ldots, x_n).$$

Priesek $f \dot{\wedge} g$ *boolovských funkcií* f *a* g *je funkcia*

$$(f \dot{\wedge} g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \dot{\wedge} g(x_1, \ldots, x_n).$$

Komplement f' *boolovskej funkcie* f *je funkcia*

$$f'(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1, \ldots, x_n))'.$$

Zapíšme komplement, priesek a spojenie boolovskej funkcie dvoch premenných do tabuľky.

x_1	x_2	x_1'	$x_1 \dot{\vee} x_2$	$x_1 \dot{\wedge} x_2$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

Definícia 4.1.3 *Boolovské funkcie* f *a* g n *premenných* $x_1, \ldots, x_n$ **sa rovnajú** *práve vtedy, keď* $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ *pre každú* n*-ticu* $(x_1, \ldots, x_n) \in D^n$.

4.2 Výroková logika

Vo výrokovej logike elementárne výroky nahrádzame premennými $x, y, z, \dots$ a pomocou logických operácii (spojok) vytvárame formuly výrokovej logiky.

Základnými logickými operáciami sú:

- **negácia**, získame ju z výroku pomocou slov „nie je pravda, že …“, označujeme ju symbolom $\overline{}$
- **konjunkcia**, získame ju, ak spojíme dva výroky slovom „a“, resp. „a zároveň“, označujeme ju symbolom $\wedge$
- **disjunkcia**, získame ju ak spojíme dva výroky slovom „alebo“, označujeme ju symbolom $\vee$
- **implikácia**, získame ju, ak spojíme dva výroky slovami „ak …, tak …“, označujeme ju symbolom $\Rightarrow$
- **ekvivalencia**, získame ju, ak spojíme dva výroky slovami „práve vtedy, keď“, označujeme ju symbolom $\Leftrightarrow$

Pravdivostné hodnoty formúl zapisujeme pomocou **tabuliek pravdivostných hodnôt**.

x	y	$\overline{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Definícia 4.2.1 *Formula α, ktorá je vždy pravdivá (pre každé ohodnotenie premenných má hodnotu 1), sa nazýva* **tautológia**.

Formula β, ktorá je vždy nepravdivá (pre každé ohodnotenie premenných má hodnotu 0), sa nazýva **kontradikcia**.

Tautológiu označujeme $\mathbf{1}$ *a kontradikciu* $\mathbf{0}$.

Definícia 4.2.2 ***Formula*** *sa nazýva* ***splniteľná*** *práve vtedy, keď existuje ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je formula pravdivá.* ***Systém formúl*** *$\mathcal{S}$ sa nazýva* ***splniteľný*** *práve vtedy, keď existuje také ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula systému $\mathcal{S}$. Ak* ***systém formúl*** *$\mathcal{S}$ nie je splniteľný, nazýva sa* ***nesplniteľný***.

Príklad 4.2.1 Rozhodnime, či formula $(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (y \vee \overline{x})$ je tautológia, kontradikcia alebo splniteľná formula.

Riešenie: Pre danú formulu vytvorme tabuľku pravdivostných hodnôt, v ktorej každý riadok odpovedá jednému ohodnoteniu výrokových premenných x, y. Pre každé ohodnotenie premenných určíme pravdivostnú hodnotu danej formuly. Existujú štyri rôzne ohodnotenia výrokových premenných x, y, teda tabuľka má štyri riadky. Vo všeobecnosti, tabuľka pravdivostných hodnôt formuly, ktorá obsahuje n výrokových premenných, má 2^n riadkov.

x	y	$y \Rightarrow x$	$y \vee \overline{x}$	$(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (y \vee \overline{x})$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Keďže existuje ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je formula $(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (y \vee \overline{x})$ pravdivá, ale tiež existuje ohodnotenie, pri ktorom je nepravdivá, tak daná formula je splniteľná formula, ale nie je tautológia. ■

Príklad 4.2.2 Určme, či systém formúl $\{y \Rightarrow x,\, y \vee \overline{x}\}$ je splniteľný.

Riešenie: Na základe tabuľky pravdivostných hodnôt z predchádzajúceho príkladu vieme, že existuje ohodnotenie premenných x, y ($x = y = 1$, $x = y = 0$), pri ktorom sú obe formuly pravdivé. Teda daný systém formúl je splniteľný. ■

Každej formule výrokovej logiky odpovedá nejaká boolovská funkcia. A tiež platí (neskôr sa k tomu vrátime), že ku každej boolovskej funkcii existuje nejaká formula výrokovej logiky. Teda medzi priesekom $\underset{\cdot}{\vee}$ a disjunkciou $\vee$, medzi spojením $\dot{\wedge}$ a konjunkciou $\wedge$, medzi komplementom $'$ a negáciou $^{-}$ je určená jednoznačná korešpondencia. Obdobne medzi najmenším prvkom O a kontradikciou $\mathbf{0}$, medzi najväčším prvkom I a tautológiou $\mathbf{1}$. V ďalšom preto už nebudeme používať symboly spojenia, prieseku, komplementu, najmenšieho a najväčšieho prvku $\underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge}, ', O, I$, ale symboly disjunkcie, konjunkcie, negácie, kontradikcie a tautológie $\vee, \wedge, ^{-}, \mathbf{0}, \mathbf{1}$.

V zápisoch formúl výrokovej logiky budeme používať aj symboly pre implikáciu a ekvivalenciu, čo je „skrátená“ forma formúl obsahujúcich negáciu, konjunkciu, disjunkciu. Objasníme to v nasledujúcej časti.

4.2.1 Ekvivalentné formuly

Definícia 4.2.3 *Formuly výrokovej logiky α a β sú* **(sémanticky) ekvivalentné** *práve vtedy, keď im odpovedajúce boolovské funkcie sa rovnajú. Zapisujeme $\alpha \models\!\!\!\!\dashv \beta$.*

Keďže platia vzťahy $x \Rightarrow y \models\!\!\!\!\dashv \overline{x} \vee y$, $x \Leftrightarrow y \models\!\!\!\!\dashv (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$, tak formuly obsahujúce logické spoky $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ vieme zapísať pomocou formúl, ktoré sú s nimi ekvivalentné a obsahujú iba logické spojky $\vee, \wedge, ^{-}$.

Príklad 4.2.3 Ukážme, že formuly $x \Leftrightarrow y$ a $\overline{(\overline{x} \wedge y)} \wedge (\overline{x} \vee y)$ sú ekvivalentné.

Riešenie. označme f_1 boolovskú funkciu odpovedajúcu formule $x \Leftrightarrow y$ a f_2 boolovskú funkciu odpovedajúcu formule $\overline{(\overline{x} \wedge y)} \wedge (\overline{x} \vee y)$. Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt určíme hodnoty týchto funkcií pre všetky ohodnotenia premenných x, y.

x	y	f_1	$\overline{x}$	$\overline{x} \wedge y$	$\overline{(\overline{x} \wedge y)}$	$\overline{x} \vee y$	f_2
1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1

Z tabuľky vidíme, že boolovské funkcie f_1 a f_2 sa rovnajú pre všetky $(x, y) \in D^2$, teda dané formuly sú ekvivalentné. Teda $x \Leftrightarrow y \models\!\!\!\dashv \overline{(\overline{x} \wedge y)} \wedge (\overline{x} \vee y)$. ■

Pre konjunkciu a disjunkciu platia obdobné vlastnosti ako pre priesek a spojenie. Uveďme niekoľko ekvivalentných formúl, ktoré budeme v ďalšom používať.

Veta 4.2.1 *Pre ľubovoľné výrokové formuly α, β, γ platí:*

1. *Idempotentnosť*

   $\alpha \wedge \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$, $\qquad$ $\alpha \vee \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$,

2. *Komutatívny zákon*

   $\alpha \wedge \beta \models\!\!\!\dashv \beta \wedge \alpha$, $\qquad$ $\alpha \vee \beta \models\!\!\!\dashv \beta \vee \alpha$,

3. *Asociatívny zákon*

   $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$, $\qquad$ $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$,

4. *Absorpcia*

   $\alpha \wedge (\beta \vee \alpha) \models\!\!\!\dashv \alpha$, $\qquad$ $\alpha \vee (\beta \wedge \alpha) \models\!\!\!\dashv \alpha$,

5. $\overline{(\overline{\alpha})} \models\!\!\!\dashv \alpha$,

6. *De Morganove pravidlá*

   $\overline{(\alpha \wedge \beta)} \models\!\!\!\dashv (\overline{\alpha} \vee \overline{\beta})$, $\qquad$ $\overline{(\alpha \vee \beta)} \models\!\!\!\dashv (\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta})$,

7. *Distributívny zákon*

   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$, $\qquad$ $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$,

8. $\alpha \Rightarrow \beta \models\!\!\!\dashv \overline{\alpha} \vee \beta$,

9. $\alpha \Leftrightarrow \beta \models\!\!\!\dashv (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$.

Ak naviac **1** je ľubovoľná tautológia a **0** je ľubovoľná kontradikcia, tak platí:

10. $\mathbf{1} \wedge \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$, $\quad$ $\mathbf{0} \wedge \alpha \models\!\!\!\dashv \mathbf{0}$,
11. $\mathbf{1} \vee \alpha \models\!\!\!\dashv \mathbf{1}$, $\quad$ $\mathbf{0} \vee \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$,
12. $\alpha \wedge \overline{\alpha} \models\!\!\!\dashv \mathbf{0}$, $\quad$ $\alpha \vee \overline{\alpha} \models\!\!\!\dashv \mathbf{1}$.

Príklad 4.2.4 Riešme príklad 4.2.1 úpravami formúl.

Riešenie. Vieme už, že dané formuly sú ekvivalentné. Upravme druhú formulu tak, aby sme získali prvú. Nad znak $\models\!\!\!\dashv$ budeme písať číslo vzťahu z vety 4.2.1, ktorý sme pri úprave použili.

$(\overline{\overline{x} \wedge y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \overset{6.}{\models\!\!\mid} (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \overset{2.}{\models\!\!\mid} (\overline{y} \vee x) \wedge (\overline{x} \vee y) \overset{8.}{\models\!\!\mid} (y \Rightarrow x) \wedge (x \Rightarrow$ $\Rightarrow y) \overset{9.}{\models\!\!\mid} y \Leftrightarrow x.$ ■

Príklad 4.2.5 Presvedčme sa, že nasledujúce formuly sú tautológie.

a) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$,

b) $(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$.

Riešenie. Pomocou vzťahov uvedených vo vete 4.2.1 upravíme zadané formuly.

a) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x) \overset{8.}{\models\!\!\mid} x \Rightarrow (\overline{y} \vee x) \overset{8.}{\models\!\!\mid} \overline{x} \vee (\overline{y} \vee x) \overset{3.,2.}{\models\!\!\mid} \overline{x} \vee x \vee \overline{y} \overset{12.}{\models\!\!\mid} \mathbf{1} \vee \overline{y} \overset{11.}{\models\!\!\mid} \mathbf{1}$,

b) $(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y) \overset{8.}{\models\!\!\mid} (y \vee \overline{x}) \Rightarrow (\overline{x} \vee y) \overset{8.}{\models\!\!\mid} \overline{(y \vee \overline{x})} \vee (\overline{x} \vee y) \overset{6.,5.}{\models\!\!\mid} (\overline{y} \wedge$ $\wedge x) \vee (\overline{x} \vee y) \overset{7.}{\models\!\!\mid} (\overline{y} \vee (\overline{x} \vee y)) \wedge (x \vee (\overline{x} \vee y)) \overset{2.,3.,12.}{\models\!\!\mid} \mathbf{1} \wedge \mathbf{1} \overset{10.}{\models\!\!\mid} \mathbf{1}.$ ■

Príklad 4.2.6 Zjednodušme formulu $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Riešenie. Opäť použijeme ekvivalentné formuly z vety 4.2.1 a formulu zo zadania pomocou nich upravíme.

$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \overset{8.}{\models\!\!\mid} \overline{((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r))} \vee (\overline{p} \vee r) \overset{6.}{\models\!\!\mid} \overline{(p \Rightarrow q)} \vee$ $\vee \overline{(q \Rightarrow r)} \vee (\overline{p} \vee r) \overset{8.}{\models\!\!\mid} \overline{(\overline{p} \vee q)} \vee \overline{(\overline{q} \vee r)} \vee (\overline{p} \vee r) \overset{6.}{\models\!\!\mid} (p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \vee r) \overset{7.}{\models\!\!\mid} (p \wedge$ $\wedge \overline{q}) \vee ((q \vee \overline{p} \vee r) \wedge (\overline{r} \vee \overline{p} \vee r)) \overset{12.,10.}{\models\!\!\mid} (p \wedge \overline{q}) \vee (q \vee \overline{p} \vee r) \overset{7.}{\models\!\!\mid} (p \vee q \vee \overline{q} \vee r) \wedge$ $\wedge (\overline{q} \vee q \vee \overline{p} \vee r) \overset{12.,10.}{\models\!\!\mid} \mathbf{1}.$ ■

Príklad 4.2.7 Napíšme formuly ekvivalentné s formulou $(x \wedge y) \Rightarrow \overline{z}$ tak, aby obsahovali iba:

a) negáciu a disjunkciu,

b) negáciu a konjunkciu,

c) negáciu a implikáciu.

Riešenie. Využitím ekvivalentných formúl upravíme zadanú formulu na požadovaný tvar.

a) $(x \wedge y) \Rightarrow \overline{z} \overset{8.}{\models\!\!\mid} (\overline{x \wedge y}) \vee \overline{z} \overset{6.}{\models\!\!\mid} \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$,

b) $(x \wedge y) \Rightarrow \overline{z} \overset{a)}{\models\!\!\mid} \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \overset{6.}{\models\!\!\mid} \overline{x \wedge y \wedge z}$,

c) $(x \wedge y) \Rightarrow \overline{z} \overset{6.}{\models\!\!\mid} \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} \Rightarrow \overline{z} \overset{8.}{\models\!\!\mid} (\overline{x \Rightarrow \overline{y}}) \Rightarrow \overline{z}.$ ■

Úlohy

4.1 Určte, či dané formuly sú tautológie, kontradikcie alebo splniteľné formuly.

a) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$,

b) $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$,

c) $(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$,

d) $((x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})) \Leftrightarrow ((\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (x \vee y))$,

e) $((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \wedge y) \Rightarrow z)$,

f) $((x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$,

g) $((x \vee y) \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x \wedge y \wedge \overline{z})$,

h) $(x \Leftrightarrow y) \wedge (x \Leftrightarrow z) \wedge (y \Leftrightarrow z)$.

4.2 Zistite, či nasledujúce dvojice formúl sú ekvivalentné.

a) $x \Rightarrow y,\ z \wedge (\overline{y} \vee (\overline{z} \Rightarrow x))$,

b) $(x \Rightarrow y) \vee (z \Leftrightarrow \overline{x}),\ z \Rightarrow (\overline{x} \vee y)$,

c) $\overline{x} \wedge z,\ \overline{y} \wedge \overline{x}$,

d) $x \Leftrightarrow y,\ (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y)$.

4.3 Napíšte formuly ekvivalentné s formulou $(x \vee y) \Rightarrow (\overline{x} \wedge z)$ tak, aby obsahovali iba:

a) negáciu a disjunkciu,

b) negáciu a konjunkciu,

c) negáciu a implikáciu.

Výsledky

4.1 a) tautológia (teda aj splniteľná),
b) tautológia (teda aj splniteľná),
c) tautológia (teda aj splniteľná),
d) kontradikcia,
e) tautológia,
f) splniteľná, ale nie tautológia,
g) splniteľná, ale nie tautológia,
h) splniteľná, ale nie tautológia.

4.2 a) nie, b) áno, c) nie, d) áno.

4.3 a) $\overline{(x \vee y)} \vee \overline{(x \vee \overline{z})}$,

b) $\overline{\overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})} \wedge \overline{(\overline{x} \wedge z)}}$,

c) $(\overline{x} \Rightarrow y) \Rightarrow \overline{(\overline{x} \Rightarrow \overline{z})}$.

4.3 Relácia vyplývania

Definícia 4.3.1 *Formula φ **vyplýva (je sémantickým dôsledkom)** zo systému formúl $\mathcal{S}$ práve vtedy, keď je pravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula zo systému $\mathcal{S}$. Zapisujeme to $\mathcal{S} \models \varphi$*[1].

Definícia 4.3.2 *Systém formúl $\mathcal{F}$ **vyplýva (je sémantickým dôsledkom)** zo systému formúl $\mathcal{S}$ práve vtedy, keď všetky formuly zo systému $\mathcal{F}$ sú pravdivé pri každom ohodnotení výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula zo systému $\mathcal{S}$. Zapisujeme to $\mathcal{S} \models \mathcal{F}$.*

Príklad 4.3.1 Zistime, či formula $z \Rightarrow y$ vyplýva z formuly $\overline{x \wedge y}$.

Riešenie: Určme hodnoty týchto formúl pre všetky ohodnotenia premenných.

x	y	z	$\overline{x \wedge y}$	$z \Rightarrow y$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Keďže nie pre každé ohodnotenie premenných, pri ktorom je pravdivá formula $\overline{x \wedge y}$ (napr. ohodnotenie $(x, y, z) = (0, 0, 1)$), je pravdivá tiež formula $z \Rightarrow y$, takže neplatí $\overline{x \wedge y} \models z \Rightarrow y$. ■

Príklad 4.3.2 Zistime, či formula $z \Rightarrow \overline{y}$ vyplýva zo systému formúl $\{x \Leftrightarrow y,\ \overline{x}\}$.

Riešenie:

[1] V prípade, ak systému formúl $\mathcal{S}$ je nesplniteľný, tak $\mathcal{S} \models \varphi$ platí pre ľubovoľnú formulu φ.

x	y	z	$x \Leftrightarrow y$	$\overline{x}$	$z \Rightarrow \overline{y}$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

Z tabuľky pravdivostných hodnôt vidíme, že vždy, keď sú pravdivé obe formuly $x \Leftrightarrow y$ aj $\overline{x}$ (pre ohodnotenie (0,0,0) a (0,0,1)), tak je pravdivá aj formula $z \Rightarrow \overline{y}$. Teda platí $\{x \Leftrightarrow y,\ \overline{x}\} \models z \Rightarrow \overline{y}$. ■

Príklad 4.3.3 Zistime, či platí $\{x \vee \overline{y},\ \overline{y} \wedge (z \vee x)\} \models x \Rightarrow y$.

Riešenie: Vytvorme tabuľku pravdivostných formúl.

x	y	z	$x \vee \overline{y}$	$z \vee x$	$\overline{y} \wedge (z \vee x)$	$x \Rightarrow y$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1

Teda nie je pravda, že keď sú pravdivé obe formuly $x \vee \overline{y}$, $\overline{y} \wedge (z \vee x)$ (pre ohodnotenia (0,0,1), (1,0,0) a (1,0,1)), tak je pravdivá aj formula $x \Rightarrow y$. Potom neplatí $\{x \vee \overline{y},\ \overline{y} \wedge (z \vee x)\} \models x \Rightarrow y$. ■

Príklad 4.3.4 Zistime, či platí $\{p \vee q,\ q \Rightarrow (r \wedge \overline{p})\} \models \{p \Rightarrow r,\ q \Leftrightarrow r\}$.

Riešenie:

p	q	r	$p \vee q$	$r \wedge \overline{p}$	$q \Rightarrow (r \wedge \overline{p})$	$p \Rightarrow r$	$q \Leftrightarrow r$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Z tabuľky pravdivostných hodnôt je zrejmé, že nie pre každé ohodnotenie premenných, pri ktorom sú pravdivé obe formuly $p \vee q,\ q \Rightarrow (r \wedge \overline{p})$ (pre ohodnotenie (0,1,1), (1,0,0) a (1,0,1)), sú pravdivé aj obe formuly $p \Rightarrow r,\ q \Leftrightarrow r$. Teda neplatí $\{p \vee q,\ q \Rightarrow (r \wedge \overline{p})\} \models \{p \Rightarrow r,\ q \Leftrightarrow r\}$. ■

Úlohy

4.1 Rozhodnite, či platí $M \models \alpha$:

a) $M = \{p \Rightarrow q,\ p \vee q\}, \quad \alpha:\ p \wedge q,$

b) $M = \{p \vee q,\ p \wedge q\}, \quad \alpha:\ p \Rightarrow q,$

c) $M = \{p \vee \overline{q},\ \overline{q} \Leftrightarrow \overline{r},\ \overline{p} \Rightarrow r\}, \quad \alpha:\ p \Rightarrow (q \wedge r),$

d) $M = \{(p \wedge q) \Rightarrow r,\ \overline{q} \wedge \overline{r},\ r \Rightarrow \overline{p}\}, \quad \alpha:\ q \Rightarrow p,$

e) $M = \{(\overline{x} \vee y) \wedge z,\ (x \vee y) \Rightarrow z,\ x \Leftrightarrow \overline{z}\}, \quad \alpha:\ y \Rightarrow x,$

f) $M = \{z \Rightarrow \overline{x},\ (x \wedge y) \Rightarrow z,\ \overline{y} \wedge \overline{z}\}, \quad \alpha:\ y \Rightarrow x,$

g) $M = \{(x \Rightarrow y) \vee z,\ x \Leftrightarrow \overline{z},\ (x \wedge y) \Rightarrow z,\ \overline{y} \wedge z\}, \quad \alpha:\ (x \vee y) \Rightarrow z,$

h) $M = \{x \Rightarrow (y \wedge z),\ x \Leftrightarrow y,\ \overline{x} \vee (y \Rightarrow z)\}, \quad \alpha:\ \overline{y} \wedge \overline{x},$

i) $M = \{p \vee \overline{q},\ p \Rightarrow q\}, \quad \alpha:\ p \Leftrightarrow q,$

j) $M = \{(x \Rightarrow y) \vee z,\ x \Leftrightarrow \overline{z},\ (x \wedge y) \Rightarrow z,\ \overline{y} \wedge z\}, \quad \alpha:\ (x \vee y) \Rightarrow z,$

k) $M = \{x \Rightarrow y,\ \overline{y} \vee z,\ \overline{x} \wedge \overline{y}\}, \quad \alpha:\ y \Leftrightarrow z,$

l) $M = \{x \wedge y,\ x \Rightarrow z,\ x \Leftrightarrow \overline{y},\ x \vee z\}, \quad \alpha:\ x \Leftrightarrow z,$

m) $M = \{z \Rightarrow \overline{x},\ (x \wedge y) \Rightarrow z,\ \overline{y} \wedge \overline{z}\}, \quad \alpha:\ y \Leftrightarrow x.$

Výsledky

4.1

a) neplatí,	b) platí,	c) neplatí,	d) platí,
e) neplatí,	f) platí,	g) platí,	h) neplatí,
i) platí,	j) platí,	k) neplatí,	l) platí,
m) neplatí.			

4.4 Normálny konjunktívny a normálny disjunktívny tvar

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Uvažujme formulu výrokovej logiky premenných $x_1, \dots, x_m$.

Definícia 4.4.1 ***Elementárnou disjunkciou*** *sa nazýva disjunkcia premenných alebo ich negácii* $x_1^* \vee x_2^* \vee \dots \vee x_n^*$ *(*$n \leqq m$*, kde* x_i^* *je* x_i *alebo* $\overline{x}_i$ *pre ľubovoľné* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$*).* ***Elementárnou konjunkciou*** *sa nazýva konjunkcia premenných alebo ich negácii* $x_1^* \wedge x_2^* \wedge \dots \wedge x_n^*$[2].

Formula je v ***normálnom disjunktívnom tvare*** *(NDT) práve vtedy, keď je disjunkciou elementárnych konjunkcií. Formula je v* ***normálnom konjunktívnom tvare*** *(NKT) práve vtedy, keď je konjunkciou elementárnych disjunkcií.*

Formula α *má* ***úplný normálny disjunktívny tvar*** *a formula* β *má* ***úplný normálny konjunktívny tvar*** *práve vtedy, keď* α *je v normálnom disjunktívnom tvare a* β *je v normálnom konjunktívnom tvare, pričom každá elementárna konjunkcia v* α *a každá elementárna disjunkcia v* β *obsahuje všetky výrokové premenné danej formuly.*

Veta 4.4.1 *Ku každej boolovskej funkcii* f *existuje formula v normálnom disjunktívnom tvare, ktorá jej odpovedá. Ku každej boolovskej funkcii* f *existuje formula v normálnom konjunktívnom tvare, ktorá jej odpovedá.*

Veta 4.4.2 *Ku každej formule* α *existuje formula* β*, ktorá je v normálnom disjunktívnom tvare a platí* $\alpha \models\!\!\!\!\dashv \beta$*. Ku každej formule* α *existuje formula* γ*, ktorá je v normálnom konjunktívnom tvare a platí* $\alpha \models\!\!\!\!\dashv \gamma$*.*

V nasledujúcich dvoch príkladoch budeme k danému normálnemu disjunktívnemu (konjunktívnemu) tvaru formuly hľadať odpovedajúcu boolovskú funkciu.

Príklad 4.4.1 Majme boolovskú funkciu $f(x, y)$ danú pomocou formuly $(x \wedge y) \vee$ $\vee\, (\overline{x} \wedge y)$. Napíšme tabuľku pravdivostných hodnôt pre túto funkciu.

Riešenie: Je zrejmé, že formula $(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge y)$ je v úplnom normálnom disjunktívnom tvare. Disjunkcia je pravdivá práve vtedy, keď aspoň jeden jej člen je pravdivý. Teda v našom prípade, boolovská funkcia $f(x, y)$ má hodnotu 1 pri nejakom ohodnotení premenných iba ak niektorá z konjunkcií $x \wedge y$, $\overline{x} \wedge y$ je pre toto ohodnotenie premenných pravdivá. To znamená, že pri ohodnoteniach $x = 1, y = 1$ a $x = 0, y = 1$ je boolovská funkcia $f(x, y)$ rovná 1. Pri ostatných ohodnoteniach premenných je $f(x, y)$ rovná 0. Zapíšme to do tabuľky pravdivostných hodnôt.

x	y	$f(x,y)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

■

[2] V prípade $n = 1$, elementárna disjunkcia resp. elementárna konjunkcia je premenná alebo negácia premennej.

Príklad 4.4.2 Majme boolovskú funkciu $f(x, y)$ danú pomocou formuly $(\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$. Napíšme tabuľku pravdivostných hodnôt pre túto funkciu.

Riešenie: Je zrejmé, že formula $(\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$ je v úplnom normálnom konjunktívnom tvare. Konjunkcia je nepravdivá práve vtedy, keď aspoň jeden jej člen je nepravdivý. Teda v našom prípade, boolovská funkcia $f(x, y)$ má hodnotu 0 pri nejakom ohodnotení premenných iba ak niektorá z disjunkcií $\overline{x} \vee \overline{y}$, $x \vee y$, $x \vee \overline{y}$ je pre toto ohodnotenie premenných nepravdivá. To znamená, že pri ohodnoteniach $x = 1, y = 1$ a $x = 0, y = 0$ a $x = 0, y = 1$ je boolovská funkcia $f(x, y)$ rovná 0. Pri ostatných ohodnoteniach premenných je $f(x, y)$ rovná 1. Zapíšme to do tabuľky pravdivostných hodnôt.

x	y	$f(x,y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

■

A teraz, v ďalšom príklade chceme k danej boolovskej funkcii nájsť formulu v normálnom disjunktívnom (konjunktívnom) tvare, ktorá jej odpovedá.

Príklad 4.4.3 Majme boolovskú funkciu troch premenných $f(x, y, z)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 iba v bodoch definičného oboru (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,0,0). Napíšme formulu v úplnom normálnom disjunktívnom tvare a formulu v úplnom normálnom konjunktívnom tvare, ktorá jej odpovedá.

Riešenie: K takto danej boolovskej funkcii $f(x, y, z)$ môžeme napísať tabuľku pravdivostných hodnôt. Pre riadky, v ktorých boolovská funkcia $f(x, y, z)$ nadobúda hodnotu 1, napíšeme elementárne konjunkcie $x^* \wedge y^* \wedge z^*$ a to tak, že

$$x^* = \begin{cases} x, & \text{ak } x = 1, \\ \overline{x}, & \text{ak } x = 0. \end{cases}$$

Rovnako postupujeme pre y^* aj z^*. Vychádzame z toho, že konjunkcia $x^* \wedge y^* \wedge z^*$ má hodnotu 1 iba vtedy, keď x^*, y^* aj z^* majú hodnotu 1. Čiže ak nejaká premenná má ohodnotenie 0, tak príslušnú premennú znegujeme.

Z tabuľky uvedenej nižšie napr. pre ohodnotenie premenných (0,1,1), pri ktorom hodnota boolovskej funkcie $f(x, y, z)$ je 1, odpovedajúca elementárna konjunkcia je $\overline{x} \wedge y \wedge z$.

Pre riadky, v ktorých nadobúda boolovská funkcia $f(x, y, z)$ hodnotu 0, napíšeme elementárne disjunkcie $x^* \vee y^* \vee z^*$ a to tak, že

$$x^* = \begin{cases} x, & \text{ak } x = 0, \\ \overline{x}, & \text{ak } x = 1. \end{cases}$$

Obdobne postupujeme pre y^* aj z^*. Keďže disjunkcia $x^* \vee y^* \vee z^*$ má hodnotu 0 iba vtedy, keď x^*, y^* aj z^* majú hodnotu 0. Čiže ak nejaká premenná má ohodnotenie 1, tak príslušnú premennú v elementárnej disjunkcii znegujeme.

Z tabuľky napr. pre ohodnotenie premenných (1,1,0), pri ktorom hodnota boolovskej funkcie je 0, je príslušná elementárna disjunkcia $\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$.

x	y	z	$f(x,y,z)$	elementárna konjunkcia	elementárna disjunkcia
0	0	0	1	$\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$	
0	0	1	0		$x \vee y \vee \overline{z}$
0	1	0	1	$\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}$	
0	1	1	1	$\overline{x} \wedge y \wedge z$	
1	0	0	0		$\overline{x} \vee y \vee z$
1	0	1	0		$\overline{x} \vee y \vee \overline{z}$
1	1	0	0		$\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$	

Disjunkciou elementárnych konjunkcií dostaneme formulu $(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee \vee(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$, ktorá odpovedá boolovskej funkcii $f(x,y,z)$ a je v úplnom normálnom disjunktívnom tvare.

Konjunkciou elementárnych disjunkcií dostaneme formulu $(x \vee y \vee \overline{z}) \wedge \wedge(\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$, ktorá odpovedá boolovskej funkcii $f(x,y,z)$ a zároveň je v úplnom normálnom konjunktívnom tvare. ■

Príklad 4.4.4 Napíšme v normálnom disjunktívnom tvare formulu

$$r \wedge (\overline{p} \Rightarrow (r \vee \overline{q})).$$

Riešenie: Teraz namiesto vytvorenia tabuľky pravdivostných hodnôt, aby sme zistili, pre aké ohodnotenia premenných má daná formula hodnotu 1 a pre aké 0, formulu zo zadania upravíme.

$r \wedge \big(\overline{p} \Rightarrow (r \vee \overline{\overline{q}})\big) \overset{8.}{\models\!\!\!\!\dashv} r \wedge \big(\overline{\overline{p}} \vee (r \vee \overline{q})\big) \overset{5.}{\models\!\!\!\!\dashv} r \wedge \big(p \vee (r \vee \overline{q})\big) \overset{7.}{\models\!\!\!\!\dashv} \big(r \wedge p\big) \vee \big(r \wedge r\big) \vee \vee \big(r \wedge \overline{q}\big) \overset{1.}{\models\!\!\!\!\dashv} \big(r \wedge p\big) \vee r \vee \big(r \wedge \overline{q}\big)$. Posledná formula je v normálnom disjunktívnom tvare, aj keď nie v úplnom. ■

Príklad 4.4.5 Napíšme v normálnom konjunktívnom tvare formulu

$$(p \wedge \overline{q}) \Leftrightarrow r.$$

Riešenie: Opäť riešme úlohu úpravami zadanej formuly.

$\big(p \wedge \overline{q}\big) \Leftrightarrow r \overset{9.}{\models\!\!\!\!\dashv} \big((p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r\big) \wedge \big(r \Rightarrow (p \wedge \overline{q})\big) \overset{8.}{\models\!\!\!\!\dashv} \big(\overline{(p \wedge \overline{q})} \vee r\big) \wedge \big(\overline{r} \vee \vee (p \wedge \overline{q})\big) \overset{6.,5.,7.}{\models\!\!\!\!\dashv} \big(\overline{p} \vee q \vee r\big) \wedge \big(\overline{r} \vee p\big) \wedge \big(\overline{r} \vee \overline{q}\big)$, čo už je formula v normálnom konjunktívnom tvare. ■

V ďalšom sa budeme zaoberať určením čo najjednoduchšieho normálneho tvaru formuly výrokovej logiky. K tomu budeme používať **Karnaughove mapy**. Ide o iný spôsob zápisu hodnôt boolovskej funkcie namiesto do tabuľky pravdivostných hodnôt. Uvažujme boolovskú funkciu troch $f(p, q, r)$ resp. štyroch premenných $f(p, q, r, s)$. Karnaughovu mapu si môžeme predstaviť v priestore ako pneumatiku, my ju zakresľujeme v rovine ako obdĺžnik. Karnaughova mapa pre boolovskú funkciu 3 premenných je obdĺžnik s 2 riadkami a 4 stĺpcami a Karnaughova mapa pre boolovskú funkciu 4 premenných je obdĺžnik so 4 riadkami a 4 stĺpcami[3](pozri obrázok nižšie). Každému riadku a stĺpcu bude odpovedať 0 alebo 1 resp. usporiadaná dvojica z núl alebo jednotiek, čo budú ohodnotenia príslušných premenných. Susedné riadky aj susedné stĺpce sa líšia v práve jednej zložke. Za susedné považujeme aj oba krajné riadky aj oba krajné stĺpce. Každé políčko (štvorček) Karnaughovej mapy teda prislúcha jednému bodu definičného oboru funkcie, teda jednej trojici resp. štvorici vytvorenej z núl a jednotiek. A každej trojici resp. štvorici núl a jednotiek odpovedá hodnota 0 alebo 1 príslušnej boolovskej funkcie.

p \ qr	**00**	10	11	**01**
0	(0,0,0)	(0,1,0)	(0,1,1)	(0,0,1)
1	(1,0,0)	(1,1,0)	(1,1,1)	(1,0,1)

pq \ rs	**00**	10	11	**01**
00	(0,0,0,0)	(0,0,1,0)	(0,0,1,1)	(0,0,0,1)
10	(1,0,0,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,0,0,1)
11	(1,1,0,0)	(1,1,1,0)	(1,1,1,1)	(1,1,0,1)
01	(0,1,0,0)	(0,1,1,0)	(0,1,1,1)	(0,1,0,1)

Do Karnaughovej mapy zapíšeme hodnoty boolovskej funkcie. Z takto zapísanej boolovskej funkcie vieme pomerne jednoducho vyjadriť **minimálny disjunktívny tvar** (MDT) a **minimálny konjunktívny tvar** (MKT) formuly, ktorá odpovedá tejto boolovskej funkcii. Sú to normálne disjunktívne resp. normálne konjunktívne tvary formuly používajúce najmenší možný počet binárnych logických spojok. Skôr ako napíšeme postup ako získame tieto tvary formúl, definujme bázickú maticu.

Definícia 4.4.2 Bázická matica *jednotiek (núl) je časť Karnaughovej mapy obsahujúcich iba jednotky (nuly), ktorá vytvára obdĺžnik, rozmery ktorého sú mocniny čísla dva.*

Každá bázická matica jednotiek (núl) odpovedá nejakej konjunkcii (disjunkcii). Čím viac jednotiek (núl) obsahuje bázická matica, tým menej binárnych spojok bude v zodpovedajúcej konjunkcii (disjunkcii).

Hľadajme minimálny disjunktívny tvar formuly, ktorá odpovedá danej boolovskej funkcii. Vytvárame bázické matice jednotiek a to tak, aby boli splnené nasledujúce podmienky:

- počet jednotiek v každej bázickej matici je maximálny,

[3]Karnaughova mapa pre boolovskú funkciu 2 premenných je obdĺžnik s 2 riadkami a 2 stĺpcami a Karnaughova mapa pre boolovskú funkciu 5 premenných je obdĺžnik so 4 riadkami a 8 stĺpcami.

- počet bázických matíc je minimálny,
- každá jednotka z Karnaughovej mapy je v aspoň jednej bázickej matici.

Ku každej bázickej matici napíšeme konjunkciu, ktorú vytvoríme tak ako sme to uviedli v príklade 4.4.3. Rozdiel je iba v tom, že tieto konjunkcie nemusia obsahovať všetky premenné. Sú tam len tie premenné, ktoré majú rovnaké ohodnotenie vo všetkých políčkach obsiahnutých v príslušnej bázickej matici. V tomto spájaní jednotiek do bázickej matice je skrytý distributívny zákon a niektoré ďalšie vzťahy uvedené vo vete 4.2.1. Napríklad disjunkcia $(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$ je ekvivalentná s formulou x. V Karnaughovej mape pre boolovskú funkciu dvoch premenných by sme vytvorili bázickú maticu obsahujúcu dve jednotky vedľa seba v políčkach odpovedajúcich ohodnoteniam premenných (1,1) a (1,0) a napísali by sme namiesto $(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$ formulu x, lebo tieto dve ohodnotenia premenných majú spoločné ohodnotenie premennej $x = 1$. Nakoniec z takto získaných konjunkcií napíšeme minimálny disjunktívny tvar ako disjunkciu získaných konjunkcii. Poznamenajme, že minimálne tvary nie sú vo všeobecnosti jednoznačné.

Pre nájdenie minimálneho konjunktívneho tvaru platia obdobné pravidlá, ibaže vytvárame bázické matice núl.

Príklad 4.4.6 Bez použitia Karnaughovej mapy určme minimálny disjunktívny tvar formuly, ktorej úplný normálny disjunktívny tvar je:

a) $(x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z)$,

b) $(x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$,

c) $(x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$.

Riešenie. Chceme použiť distributívny zákon, teda hľadáme vždy dve elementárne konjunkcie, ktoré majú rovnaké literály (t. j. premenná alebo negácia premennej). V prípade, že niektorú konjunkciu potrebujeme použiť viackrát, stačí ju do daného disjunktívneho tvaru napísať ešte raz.

a) Združíme elementárne konjunkcie v 1. a 3. zátvorke a v 2. a v 4. zátvorke.
$(x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \models\!\!\!\!\dashv ((x \wedge \overline{z}) \wedge (y \vee \overline{y})) \vee ((\overline{x} \wedge$
$\wedge z) \wedge (\overline{y} \vee y)) \models\!\!\!\!\dashv (x \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge z)$

b) Združíme elementárne konjunkcie v 1. a 4. zátvorke, v 2. a v 4. zátvorke a v 3. a v 5. zátvorke. Teda elemenárnu konjunkciu v 4. zátvorke uvažujememe v tomto normálnom disjunktívnom tvare dvakrát.
$(x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \models\!\!\!\!\dashv ((\overline{y} \wedge z) \wedge$
$\wedge (x \vee \overline{x})) \vee ((\overline{x} \wedge z) \wedge (y \vee \overline{y})) \vee ((\overline{y} \wedge \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{x})) \models\!\!\!\!\dashv (\overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge z) \vee (\overline{y} \wedge \overline{z})$
Teraz združíme konjunkcie v 1. a 3. zátvorke.
$(\overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge z) \vee (\overline{y} \wedge \overline{z}) \models\!\!\!\!\dashv (\overline{y} \wedge (z \vee \overline{z})) \vee (\overline{x} \wedge z) \models\!\!\!\!\dashv \overline{y} \vee (\overline{x} \wedge z)$

c) Združíme elementárne konjunkcie v 1. a 3. zátvorke.
$(x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \models\!\!\!\!\dashv ((x \wedge \overline{y}) \wedge (z \vee \overline{z})) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \models\!\!\!\!\dashv$
$\models\!\!\!\!\dashv (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z)$. ∎

Príklad 4.4.7 Určme úplný normálny disjunktívny tvar a úplný normálny konjunktívny tvar formuly $(x \vee y) \Rightarrow \overline{z}$. Minimalizujme ich.

Riešenie. Normálne tvary určíme pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt danej formuly.

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y) \Rightarrow \overline{z}$
1	1	1	1	0
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

Označme $f(x, y, z)$ boolovskú funkciu, ktorá odpovedá zadanej formule. Využitím riadkov, kde $f(x, y, z) = 1$, určíme úplný normálny disjunktívny tvar formuly. Pre každý taký riadok napíšeme elementárnu konjunkciu. Hľadaný úplný normálny disjunktívny tvar je $(x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$.

Teraz určíme úplný normálny konjunktívny tvar danej formuly. Pre každé ohodnotenie premenných, v ktorom je $f(x, y, z) = 0$, napíšeme elementárnu disjunkciu. Úplný normálny konjunktívny tvar je $(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$.

Minimalizáciu urobíme najprv pomocou úprav a potom pomocou Karnaughovej mapy.

$(x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \;\models\!\!\!\dashv\; (x \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z)$ $\models\!\!\!\dashv\; \overline{z} \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \;\models\!\!\!\dashv\; \overline{z} \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$, čo je minimálny disjunktívny tvar.

$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \;\models\!\!\!\dashv\; \overline{z} \vee (\overline{x} \wedge (x \vee \overline{y})) \;\models\!\!\!\dashv\; \overline{z} \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) \;\models\!\!\!\dashv\; (\overline{x} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z})$, to je minimálny konjunktívny tvar.

Z Karnaughovej mapy ihneď získame minimálne tvary. Hodnoty boolovskej funkcie f zapíšeme z tabuľky do Karnaughovej mapy.

$x \backslash yz$	00	10	11	01
0	1	1	0	1
1	1	1	0	0

Najprv vytvoríme bázickú maticu obsahujúcu štyri jednotky, ktoré sú v prvom a druhom stĺpci. Im odpovedajúce ohodnotenia premenných majú spoločné ohodnotenie premennej $z = 0$, čomu odpovedá $\overline{z}$. Ďalej vytvoríme bázickú maticu, ktorá obsahuje jednotku v prvom riadku a poslednom stĺpci a jednotku v prvom stĺpci a prvom riadku. Im odpovedajúce ohodnotenia premenných majú spoločné ohodnotenia premenných $x = y = 0$, čomu odpovedá $\overline{x} \wedge \overline{y}$. Teda hľadaný minimálny disjunktívny tvar je $\overline{z} \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$.

Teraz určíme minimálny konjunktívny tvar. Vytvoríme bázickú maticu dvoch núl, ktoré sú v druhom riadku. Im odpovedajúce ohodnotenia premenných majú spoločné ohodnotenia premenných $x = z = 1$, čomu odpovedá $\overline{z} \vee \overline{x}$. Potom vytvoríme bázickú maticu dvoch núl v treťom stĺpci. Ich rovnako ohodnotenými premennými sú $y = z = 1$, čomu odpovedá $\overline{z} \vee \overline{y}$. Teda hľadaný minimálny konjunktívny tvar je $(\overline{x} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z})$. ∎

Príklad 4.4.8 Určme minimálny disjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar formuly, ktorá odpovedá boolovskej funkcii:

a) $f(x, y, z)$ z príkladu 4.4.3,

b) $f(p, q, r)$, ktorá nadobúda hodnotu jedna iba v bodoch definičného oboru (1,1,1) a (0,0,1),

c) $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu nula iba v bodoch definičného oboru (0,0,1,0), (1,0,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (1,1,0,0), (1,1,0,1) a (1,0,1,1).

Riešenie:

a) Najprv vyriešime túto úlohu tak, že pomocou ekvivalentných formúl zjednodušíme najprv normálny konjunktívny tvar a potom normálny disjunktívny tvar odpovedajúcej formuly.

$\big(x \vee y \vee \overline{z}\big) \wedge \big(\overline{x} \vee y \vee z\big) \wedge \big(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\big) \wedge \big(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z\big) \overset{4.}{\models\!\!\!\dashv} \overset{4.}{\models\!\!\!\dashv} \big((y \vee \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{x})\big) \wedge \big((\overline{x} \vee z) \vee (y \wedge \overline{y})\big) \overset{12.}{\models\!\!\!\dashv} \big((y \vee \overline{z}) \vee \mathbf{0}\big) \wedge \big((\overline{x} \vee z) \vee \vee \mathbf{0}\big) \overset{11.}{\models\!\!\!\dashv} \big(y \vee \overline{z}\big) \wedge \big(\overline{x} \vee z\big)$. Nakoľko disjunkcie $y \vee \overline{z}$, $\overline{x} \vee z$ nemajú spoločný literál, formulu $\big(y \vee \overline{z}\big) \wedge \big(\overline{x} \vee z\big)$ už nevieme zjednodušiť. Teda sa jedná o minimálny konjunktívny tvar formuly, ktorá odpovedá danej boolovskej funkcii.

$\big(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}\big) \vee \big(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}\big) \vee \big(\overline{x} \wedge y \wedge z\big) \vee \big(x \wedge y \wedge z\big) \overset{4.}{\models\!\!\!\dashv} \overset{4.}{\models\!\!\!\dashv} \big((\overline{x} \wedge \overline{z}) \wedge (\overline{y} \vee y)\big) \vee \big((y \wedge z) \wedge (\overline{x} \vee x)\big) \overset{12.}{\models\!\!\!\dashv} \big((\overline{x} \wedge \overline{z}) \wedge \mathbf{1}\big) \vee \big((y \wedge z) \wedge \wedge \mathbf{1}\big) \overset{10.}{\models\!\!\!\dashv} \big(\overline{x} \wedge \overline{z}\big) \vee \big(y \wedge z\big)$. Konjunkcie $\overline{x} \wedge \overline{z}$, $y \wedge z$ nemajú spoločný literál, formula $\big(\overline{x} \wedge \overline{z}\big) \vee \big(y \wedge z\big)$ sa nedá zjednodušiť. Ide o minimálny disjunktívny tvar odpovedajúcej formuly k zadanej funkcii.

Teraz riešme úlohu pomocou Karnaughovej mapy. Hodnoty boolovskej funkcie, ktoré sme v príklade 4.4.3 zapísali do tabuľky pravdivostných hodnôt, teraz zapíšeme do Karnaughovej mapy. Bázické matice v Karnaughovej mape budeme označovať pomocou farebných obdĺžnikov. Im odpovedajúce disjunkcie resp. konjunkcie budeme písať rovnakou farbou.

Najprv pomocou bázických matíc núl nájdeme minimálny konjunktívny tvar formuly, ktorá odpovedá tejto boolovskej funkcii. Vytvoríme dve bázické matice rozmerov 1×2, ktorým odpovedajú disjunkcie $y \vee \overline{z}$ (ohodnotenia premenných v políčkach jednej bázickej matice majú spoločné ohodnotenia premenných $y = 0$, $z = 1$) a $\overline{x} \vee z$ (ohodnotenia premenných v políčkach druhej bázickej matice majú spoločné ohodnotenia premenných $x = 1$, $z = 0$).

x \ zy	00	10	11	01
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0

Minimálny konjunktívny tvar je $(\overline{x} \vee z) \wedge (y \vee \overline{z})$.

Teraz pomocou bázických matíc jednotiek určíme minimálny disjunktívny tvar. Vytvoríme dve bázické matice. Označíme ich pomocou dvoch obdĺžníkov rozmerov 1×2. Im odpovedajúce konjunkcie sú $\overline{x} \wedge \overline{z}$ (rovnako ohodnotené premenné sú $x = z = 0$) a $y \wedge z$ (rovnako ohodnotené premenné sú $y = z = 1$).

x \ yz	00	10	11	01
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0

Minimálny disjunktívny tvar je $(\overline{x} \wedge \overline{z}) \vee (y \wedge z)$.

V úlohach b) a c) zapíšeme hodnoty boolovských funkcií do príslušných Karnaughových máp a určíme minimálne disjunktívne a minimálne konjunktívne tvary formúl, ktoré odpovedajú daným boolovským funkciám.

b) Funkcia $f(p, q, r)$ nadobúda hodnotu jedna v bodoch definičného oboru (1,1,1) a (0,0,1), teda hodnotu nula nadobúda v bodoch (0,1,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,0,0), (0,0,0), (1,1,0). Napíšeme oba normálne tvary formuly, ktorá odpovedá tejto boolovskej funkcii. Najprv ich zjednodušíme úpravami.

Normálny konjunktívny tvar je $(p \vee \overline{q} \vee r) \wedge (p \vee \overline{q} \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \vee q \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q} \vee r)$.

Najprv chceme použiť distributívny zákon, teda hľadáme vždy dve elementárne disjunkcie, ktoré majú rovnaké literály (t. j. premenná alebo negácia premennej). V prípade, že niektorú disjunkciu potrebujeme použiť viackrát, stačí ju do daného konjunktívneho tvaru toľkokrát pridať. Použijeme dvakrát distributívny zákon pre prvé dve a ďalšie dve elementárne disjunkcie, ostatné opíšeme a prvú a štvrtú elementárnu disjunkciu napíšeme ešte raz. Potom formulu znovu zjednodušíme.

$\big((p\vee\overline{q})\vee(r\wedge\overline{r})\big)\wedge\big((\overline{p}\vee q)\vee(\overline{r}\wedge r)\big)\wedge(p\vee q\vee r)\wedge(\overline{p}\vee\overline{q}\vee r)\wedge(p\vee\overline{q}\vee r)\wedge(\overline{p}\vee q\vee r) \mathrel{\dashv\vDash} (p\vee\overline{q})\wedge(\overline{p}\vee q)\wedge\big((p\vee r)\vee(\overline{q}\wedge q)\big)\wedge\big((\overline{p}\vee r)\vee(\overline{q}\wedge q)\big) \mathrel{\dashv\vDash} (p\vee\overline{q})\wedge(\overline{p}\vee q)\wedge(p\vee r)\wedge(\overline{p}\vee r) \mathrel{\dashv\vDash} (p\vee\overline{q})\wedge(\overline{p}\vee q)\wedge\big(r\vee(\overline{p}\wedge p)\big) \mathrel{\dashv\vDash} (p\vee\overline{q})\wedge(\overline{p}\vee q)\wedge r$.

Teda $(p \vee \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge r$ je minimálny konjunktívny tvar.

Normálny disjunktívny tvar je $(p \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r})$. Keďže sa nedá zjednodušiť (elementárne konjunkcie neobsahujú dve rovnaké premenné resp. negácie premenných), je to aj minimálny disjunktívny tvar danej funkcie.

Teraz určíme minimálne tvary pomocou Kargnaughovej mapy. Zapíšeme hodnoty danej boolovskej funkcie $f(p,q,r)$ do Karnaughovej mapy.

p \ qr	00	10	11	01
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0

p \ qr	00	10	11	01
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0

Minimálny konjunktívny tvar je $(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) \wedge r$.
Minimálny disjunktívny tvar je $(p \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r)$.

Pri hľadaní minimálneho konjunktívneho tvaru pomocou Karnaughovej mapy sú dve nuly (v políčkach pre ohodnotenia premenných (1,0,0) a (0,1,0)) zahrnuté v dvoch bázických maticiach. Tomu odpovedá, že pri úprave normálneho konjunktívneho tvaru sme elementárne disjunkcie $(\overline{p} \vee q \vee r)$, $(p \vee \overline{q} \vee r)$ použili dvakrát.

c) Teraz použijeme iba Karnaughove mapy. Zjednodušenie normálnych tvarov formuly úpravami ponechávame na čitateľa.

pq \ rs	00	10	11	01
00	1	0	1	1
10	0	0	0	0
11	0	1	1	0
01	1	1	1	1

pq \ rs	00	10	11	01
00	1	0	1	1
10	0	0	0	0
11	0	1	1	0
01	1	1	1	1

Minimálny konjunktívny tvar je $(\overline{p} \vee q) \wedge (q \vee \overline{r} \vee s) \wedge (\overline{p} \vee r)$.
Minimálny disjunktívny tvar je $(\overline{p} \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge s)$. ■

Príklad 4.4.9 Určme minimálny disjunktívny tvar boolovskej funkcie $f(p,q,r,s)$, ktorá nadobúda hodnotu 1 iba v týchto bodoch definičného oboru:

a) (0,0,0,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1), (1,1,0,1),

b) (0,0,0,0), (0,0,1,0), (0,0,1,1), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (1,0,1,0), (1,0,1,1), (1,0,0,1), (1,1,0,0), (1,1,0,1),

c) (0,0,0,0), (0,0,1,1), (0,0,0,1), (1,0,1,1), (1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,1,0,1),

d) (0,0,0,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (0,1,1,0).

Riešenie: Zapíšeme hodnoty týchto boolovských funkcií do Karnaughových máp. Potom postupne v každej mape vyznačíme tučným písmom tie hodnoty 1 boolovskej funkcie, ktoré vytvárajú bázickú maticu. Pod mapu napíšeme konjunkciu, ktorá odpovedá vyznačenej bázickej matici aj s vysvetlením.

a)

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	0	0	1
10	0	0	0	0
11	1	1	1	1
01	0	0	0	0

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	**1**	0	0	**1**
10	0	0	0	0
11	1	1	1	1
01	0	0	0	0

$\boldsymbol{\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}}$

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	0	0	1
10	0	0	0	0
11	**1**	**1**	**1**	**1**
01	0	0	0	0

$\boldsymbol{p \wedge q}$.

Ohodnotenia premenných v políčkach vyznačenej bázickej matice (vľavo) majú rovnako ohodnotené tieto premenné: $p = 0$, $q = 0$ a $r = 0$. Preto píšeme konjunkciu $\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}$.

Ohodnotenia premenných v políčkach vyznačenej bázickej matice (vpravo) majú rovnako ohodnotené premenné $p = 1$ a $q = 1$. Píšeme konjunkciu $p \wedge q$.

Minimálny disjunktívny tvar je $(\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge q)$.

b)

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	1	0	0	1
01	0	0	0	0

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	1	1	1
10	**1**	1	1	**1**
11	**1**	0	0	**1**
01	0	0	0	0

$\boldsymbol{p \wedge \overline{r}}$

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	**1**	**1**	**1**	**1**
10	**1**	**1**	**1**	**1**
11	1	0	0	1
01	0	0	0	0

$\boldsymbol{\overline{q}}.$

Ohodnotenia premenných v políčkach vyznačenej bázickej matice vľavo majú rovnako ohodnotené premenné: $p = 1$ a $r = 0$. Preto píšeme konjunkciu $p \wedge \overline{r}$.

Ohodnotenia premenných v políčkach vyznačenej bázickej matice vpravo majú rovnako ohodnotenú iba premennú $q = 0$, čomu odpovedá konjunkcia $\overline{q}$.

Minimálny disjunktívny tvar je $(p \wedge \overline{r}) \vee \overline{q}$.

c)

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	0	1	1
10	0	0	1	1
11	0	0	0	0
01	1	0	0	1

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	**1**	0	1	**1**
10	0	0	1	1
11	0	0	0	0
01	**1**	0	0	**1**

$\boldsymbol{\overline{p} \wedge \overline{r}}$

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	0	**1**	**1**
10	0	0	**1**	**1**
11	0	0	0	0
01	1	0	0	1

$\boldsymbol{\overline{q} \wedge s}.$

Ohodnotenia premenných v políčkach vyznačenej bázickej matice (vľavo) majú rovnako ohodnotené premenné: $p = r = 0$. Tomu zodpovedá konjunkcia $\overline{p} \wedge \overline{r}$.

Ohodnotenia premenných v políčkach vyznačenej bázickej matice (vpravo) majú rovnako ohodnotené premenné $q = 0$ a $s = 1$. Preto píšeme konjunkciu $\overline{q} \wedge s$.

Minimálny disjunktívny tvar je $(\overline{p} \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge s)$.

d)

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	0	0	1
10	1	1	0	1
11	1	1	0	0
01	0	1	0	0

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	0	0	1
10	1	1	0	1
11	1	**1**	0	0
01	0	**1**	0	0

$\boldsymbol{q \wedge r \wedge \overline{s}}$

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	0	0	1
10	**1**	**1**	0	1
11	**1**	**1**	0	0
01	0	1	0	0

$\boldsymbol{p \wedge \overline{s}}$

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	**1**	0	0	**1**
10	**1**	1	0	**1**
11	1	1	0	0
01	0	1	0	0

$\boldsymbol{\overline{q} \wedge \overline{r}}$.

Ohodnotenia premenných v políčkach vyznačenej bázickej matice (vľavo) majú rovnako ohodnotené premenné $q = r = 1$ a $s = 0$. Odpovedajúca konjunkcia je $q \wedge r \wedge \overline{s}$.

Ohodnotenia premenných v políčkach vyznačenej bázickej matice (v strede) majú rovnako ohodnotené premenné $p = 1$ a $s = 0$, čomu zodpovedá konjunkcia $p \wedge \overline{s}$.

Ohodnotenia premenných v políčkach vyznačenej bázickej matice (vpravo) majú rovnako ohodnotené tieto premenné: $q = r = 0$. Teda píšeme konjunkciu $\overline{q} \wedge \overline{r}$.

Minimálny disjunktívny tvar je $(q \wedge r \wedge \overline{s}) \vee (p \wedge \overline{s}) \vee (\overline{q} \wedge \overline{r})$. ∎

Príklad 4.4.10 Linka pozostáva z 3 strojov. Zostrojme kontaktnú sieť s minimálnym počtom vypínačov tak, aby signalizovala, že nastal prípad, keď prvý stroj nepracuje a z ostatných pracuje aspoň jeden.

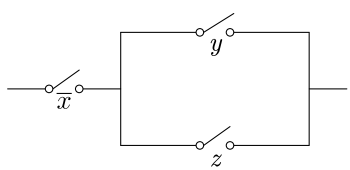
Riešenie. Premennými x, y, z označme výroky: x – prvý stroj pracuje, y – druhý stroj pracuje, z – tretí stroj pracuje. Kontaktná sieť má signalizovať, že nastal niektorý z nasledujúcich prípadov:

- druhý stroj pracuje, prvý a tretí nepracujú,
- prvý a druhý stroj nepracujú, tretí pracuje,
- prvý stroj nepracuje, druhý a tretí pracujú.

Tieto prípady môžeme charakterizovať boolovskou funkciou $f(x, y, z)$, ktorá bude mať hodnotu 1 iba v argumentoch (0,1,0), (0,0,1), (0,1.1). Inak má hodnotu 0. Zapíšme to do Karnaughovej mapy.

x \ yz	00	10	11	01
0	0	1	1	1
1	0	0	0	0

Môžeme vytvoriť dve bázické matice s dvoma jednotkami v prvom riadku, raz jednotky v druhom a treťom stĺpci a raz jednotky v treťom a v štvrtom stĺpci. Im odpovedajúce ohodnotenia premenných majú spoločné ohodnotenia premenných $x = 0$ a $y = 1$ (v prípade prvej bázickej matice), čomu odpovedá $\overline{x} \wedge y$ a $x = 0$, $z = 1$ (v prípade druhej bázickej matice), čomu odpovedá $\overline{x} \wedge z$. Minimálny disjunktívny tvar je $(\overline{x} \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge z)$. Tomu zodpovedá kontaktná sieť so štyrmi vypínačmi. Ak použijeme ešte distributívny zákon, našu formulu môžeme upraviť na jednoduchší tvar $\overline{x} \wedge (y \vee z)$, ktorý sa už nedá ďalej zjednodušiť. Počet kontaktov pre takto zapísanú funkciu sú tri. Kontaktná sieť prislúchajúca tejto formule je načrtnutá na obrázku, pričom konjunkcii odpovedá sériové zapojenie a disjunkcii paralelné zapojenie.



■

Úlohy

4.1 Napíšte úplný normálny disjunktívny tvar danej formuly a minimalizujte ho.

a) $((x \vee \overline{z}) \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\overline{y} \wedge z)$,

b) $(x \Leftrightarrow \overline{y}) \Rightarrow (z \wedge \overline{x})$,

c) $\big(\big((\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge z\big) \Leftrightarrow u\big) \Rightarrow (\overline{x} \wedge \overline{u})$.

4.2 Napíšte úplný normálny konjunktívny tvar danej formuly a minimalizujte ho.

a) $x \Leftrightarrow (y \Rightarrow (\overline{x} \vee z))$,

b) $(\overline{x} \Rightarrow y) \wedge \overline{z}$,

c) $(\overline{x} \wedge \overline{(z \wedge \overline{y})}) \vee u$.

4.3 Nech boolovská funkcia $F(x, y, z)$ je daná tabuľkou. Určte úplný normálny konjunktívny tvar jej odpovedajúcej formuly. Mimalizujte ho.

x	y	z	$F(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

4.4 Nech boolovská funkcia $F(x, y, z)$ je daná tabuľkou. Určte úplný normálny disjunktívny tvar formuly, ktorá jej odpovedá. Minimalizujte ho.

x	y	z	$F(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

4.5 Napíšte minimálny disjunktívny tvar a normálny konjunktívny tvar formuly, ktorej úplný normálny disjunktívny tvar je:

a) $(x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z)$,

b) $(x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$,

c) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$,

d) $(x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$.

4.6 Danú formulu napíšte v úplnom normálnom disjunktívnom tvare a v úplnom normálnom konjunktívnom tvare:

a) $(\overline{x} \Rightarrow y) \wedge x \wedge y \wedge (x \vee \overline{y})$,

b) $z \wedge \big(\overline{y} \vee (\overline{z} \Rightarrow x)\big)$,

c) $(p \Rightarrow q) \wedge \big((\overline{q} \Rightarrow r) \vee \overline{(p \wedge \overline{r})}\big)$,

d) $(x \Rightarrow y) \wedge z$,

e) $(\overline{x} \Rightarrow y) \vee \overline{z}$,

f) $(x \Leftrightarrow \overline{y}) \Rightarrow (z \wedge \overline{x})$,

g) $(\overline{x} \Rightarrow y) \Rightarrow \overline{z}$,

h) $(p \vee q \vee \overline{r}) \Leftrightarrow \overline{s}$.

4.7 Napíšte minimálny disjunktívny tvar formuly, ktorá odpovedá boolovskej funkcii $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 iba v bodoch definičného oboru (1,0,1,0), (0,0,0,1), (0,0,1,1), (1,1,0,0), (1,0,1,1), (0,0,0,0) a (1,1,1,0).

4.8 Nech boolovská funkcia $f(p, q, r, s)$ nadobúda hodnotu 1 iba v bodoch definičného oboru (0,1,0,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,1,1,1) a (1,1,1,1). Napíšte minimálny konjunktívny tvar formuly, ktorá odpovedajá tejto funkcii.

4.9 Napíšte minimálny disjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar formuly:

a) $(x \Leftrightarrow (y \vee \overline{z})) \Rightarrow ((\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge \overline{z})$,

b) $((x \Rightarrow \overline{z}) \wedge y) \Leftrightarrow (\overline{x} \vee \overline{y})$,

c) $[((\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge z)] \Rightarrow \overline{x}$.

4.10 Linka pozostáva z 3 strojov. Zostrojte kontaktnú sieť a pomocou boolovskej algebry ju maximálne zjednodušte tak, aby signalizovala, že nastal niektorý z nasledujúcich prípadov:

a) prvý stroj nepracuje, ostatné stroje pracujú,

b) prvý stroj pracuje a z ostatných dvoch iba jeden pracuje.

4.11 Linka pozostáva z 3 strojov. Zostrojte kontaktnú sieť s minimálnym počtom vypínačov tak, aby signalizovala, že nastal niektorý z nasledujúcich prípadov:

a) len prvý stroj pracuje,

b) len tretí stroj nepracuje,

c) len tretí stroj pracuje,

d) len prvý stroj nepracuje.

4.12 Linka pozostáva zo 4 strojov. Zostrojte kontaktnú sieť s minimálnym počtom vypínačov tak, aby signalizovala, že nastal niektorý z nasledujúcich prípadov:

a) len tretí stroj nepracuje,

b) len prvý a štvrtý stroj pracuje,

c) len prvý pracuje,

d) len prvý a druhý stroj pracuje,

e) len druhý nepracuje.

Výsledky

4.1 a) $\big(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}\big) \vee \big(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z\big) \vee \big(x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}\big)$,

$\big(\overline{y} \wedge \overline{z}\big) \vee \big(\overline{x} \wedge \overline{y}\big)$,

b) $\big(x \wedge y \wedge \overline{z}\big) \vee \big(\overline{x} \wedge y \wedge z\big) \vee \big(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}\big) \vee \big(x \wedge y \wedge z\big) \vee \big(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z\big)$,

$\big(x \wedge y\big) \vee \big(\overline{x} \wedge z\big) \vee \big(\overline{x} \wedge \overline{y}\big)$ alebo $\big(x \wedge y\big) \vee \big(y \wedge z\big) \vee \big(\overline{x} \wedge \overline{y}\big)$,

c) $\big(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z}\wedge\overline{u}\big)\vee\big(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z}\wedge u\big)\vee\big(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z\wedge\overline{u}\big)\vee\big(\overline{x}\wedge y\wedge\overline{z}\wedge\overline{u}\big)\vee\big(\overline{x}\wedge y\wedge\overline{z}\wedge u\big)\vee$
$\vee\big(\overline{x}\wedge y\wedge z\wedge\overline{u}\big)\vee\big(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z}\wedge u\big)\vee\big(x\wedge\overline{y}\wedge z\wedge\overline{u}\big)\vee\big(x\wedge y\wedge\overline{z}\wedge u\big)\vee\big(x\wedge y\wedge z\wedge u\big)$,

$\big(\overline{x} \wedge \overline{z}\big) \vee \big(\overline{z} \wedge u\big) \vee \big(\overline{x} \wedge \overline{u}\big) \vee \big(x \wedge y \wedge u\big) \vee \big(\overline{y} \wedge z \wedge \overline{u}\big)$.

4.2 a) $\big(x \vee y \vee z\big) \wedge \big(x \vee y \vee \overline{z}\big) \wedge \big(x \vee \overline{y} \vee z\big) \wedge \big(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\big) \wedge \big(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z\big)$,

$x \wedge \big(\overline{y} \vee z\big)$,

b) $\big(x \vee y \vee z\big) \wedge \big(x \vee y \vee \overline{z}\big) \wedge \big(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\big) \;\wedge\; \big(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\big) \wedge \big(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}\big)$,

$\big(x \vee y\big) \wedge \overline{z}$,

c) $\big(\overline{x}\vee y\vee z\vee u\big)\wedge\big(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z\vee u\big)\wedge\big(\overline{x}\vee y\vee\overline{z}\vee u\big)\wedge\big(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee u\big)\wedge\big(x\vee y\vee\overline{z}\vee u\big)$,

$\big(\overline{x} \vee u\big) \wedge \big(y \vee \overline{z} \vee u\big)$.

4.3 $(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (x \vee y \vee \overline{z})$,

$(x \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$.

4.4 $(x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$,

$\overline{x} \vee \overline{z}$.

4.5 a) $(x \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge z)$,

$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$,

b) $\overline{y} \vee (\overline{x} \wedge z)$,

$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$,

c) $x \vee \overline{y} \vee z$,

$x \vee \overline{y} \vee z$,

d) $(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z)$,

$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$.

4.6 a) $(x \wedge y)$,

$(\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \wedge (x \vee y)$,

b) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z)$,

$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$,

c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r})$,

$(\overline{p} \vee q \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \vee q \vee r)$,

d) $(x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z)$,

$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$,

e) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee$

$\vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$,

$x \vee y \vee \overline{z}$,

f) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$,

$(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$,

g) $(x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$,

$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$,

h) $\big(\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}\big) \vee \big(p \wedge q \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}\big) \vee \big(p \wedge \overline{q} \wedge r \wedge \overline{s}\big) \vee \big(p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}\big) \vee$

$\vee \big(\overline{p} \wedge q \wedge r \wedge \overline{s}\big) \vee \big(\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r \wedge s\big) \vee \big(\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}\big) \vee \big(p \wedge q \wedge r \wedge \overline{s}\big)$,

$\big(p \vee q \vee r \vee \overline{s}\big) \wedge \big(\overline{p} \vee \overline{q} \vee r \vee \overline{s}\big) \wedge \big(\overline{p} \vee q \vee \overline{r} \vee \overline{s}\big) \wedge \big(\overline{p} \vee q \vee r \vee \overline{s}\big) \wedge$

$\wedge \big(p \vee \overline{q} \vee \overline{r} \vee \overline{s}\big) \wedge \big(p \vee q \vee \overline{r} \vee s\big) \wedge \big(p \vee \overline{q} \vee r \vee \overline{s}\big) \wedge \big(\overline{p} \vee \overline{q} \vee \overline{r} \vee \overline{s}\big)$.

4.7 $\big(\overline{p} \wedge r \wedge \overline{s}\big) \vee \big(p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}\big) \vee \big(\overline{p} \wedge q\big) \vee \big(q \wedge s\big)$.

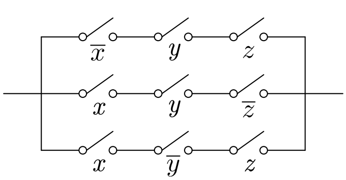
4.8 $\big(\overline{p} \vee r \vee \overline{s}\big) \wedge \big(\overline{p} \vee q\big) \wedge \big(p \vee s\big) \wedge \big(q \vee r\big)$.

4.9 a) $(x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \vee (\overline{y} \wedge \overline{z})$, $(\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (x \vee y \vee \overline{z})$,

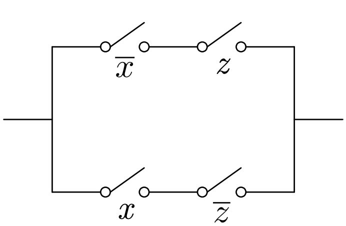
b) $(\overline{x} \wedge y) \vee (y \wedge z)$, $y \wedge (\overline{x} \vee z)$,

c) $(x \wedge y) \vee \overline{z} \vee \overline{u}$, $(x \vee \overline{z} \vee \overline{u}) \wedge (y \vee \overline{z} \vee \overline{u})$.

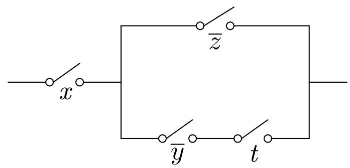
4.10



4.11



4.12



Kapitola 5

Algebraické štruktúry

5.1 Grupy, cyklické grupy

Príklad 5.1.1 Zistime, či množina $\mathbb{Z}$ spolu s danou binárnou operáciou $\square$ tvorí grupu, ak:

a) $a\square b = a + b + 1$,

b) $a\square b = a - b + 1$.

Riešenie. Chceme ukázať, že $(\mathbb{Z}, \square)$ je grupa. Podľa definície musíme ukázať, že

1. množina $\mathbb{Z}$ je **uzavretá** vzhľadom na binárnu operáciu $\square$, t. j.
   $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a\square b \in \mathbb{Z}$,

2. platí **asociatívny zákon** vzhľadom na binárnu operáciu $\square$, t. j.
   $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a\square b)\square c = a\square(b\square c)$,

3. množina $\mathbb{Z}$ obsahuje **neutrálny prvok** vzhľadom na operáciu $\square$, t. j.
   $\exists e \in \mathbb{Z}\ \forall a \in \mathbb{Z} : a\square e = a = e\square a$,

4. ku každému prvku z množiny $\mathbb{Z}$ existuje **inverzný prvok** vzhľadom na operáciu $\square$, t. j.
   $\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists a' \in \mathbb{Z} : a\square a' = e = a'\square a$.

a) Nech $a\square b = a + b + 1$.

   1. $a\square b = a + b + 1 \in \mathbb{Z}$ pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{Z}$
      množina $\mathbb{Z}$ je uzavretá vzhľadom na binárnu operáciu $\square$.
   2. $(a\square b)\square c = (a + b + 1)\square c = (a + b + 1) + c + 1 = a + b + c + 2$
      $a\square(b\square c) = a\square(b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = a + b + c + 2$
      Platí asociatívny zákon vzhľadom na binárnu operáciu $\square$.
   3. $a + e + 1 = a = e + a + 1$, teda $e = -1$ a $-1 \in \mathbb{Z}$
      množina $\mathbb{Z}$ obsahuje neutrálny prvok vzhľadom na operáciu $\square$.

4. $a + a' + 1 = -1 = a' + a + 1$, teda $a' = -2 - a, -2 - a \in \mathbb{Z}$
Ku každému prvku z množiny $\mathbb{Z}$ existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $\Box$.

Teda $(\mathbb{Z}, \Box)$ je grupa.

b) Nech $a \Box b = a - b + 1$.

1. $a \Box b = a - b + 1 \in \mathbb{Z}$ množina $\mathbb{Z}$ je uzavretá vzhľadom na binárnu operáciu $\Box$.
2. $(a \Box b) \Box c = (a - b + 1) \Box c = (a - b + 1) - c + 1 = a - b - c + 2$
$a \Box (b \Box c) = a \Box (b - c + 1) = a - (b - c + 1) + 1 = a - b + c$

Keďže $(a \Box b) \Box c \neq a \Box (b \Box c)$, neplatí asociatívny zákon vzhľadom na binárnu operáciu $\Box$, teda $(\mathbb{Z}, \Box)$ nie je grupa. ∎

Definícia 5.1.1 *Nech $(G, *)$ je grupa a nech $n \in \mathbb{Z}$. Pre ľubovoľný prvok $x \in G$ definujeme* **mocninu** x^n *nasledovne:*

$$x^n = \begin{cases} \overbrace{x * x * x * \cdots * \ x}^{n-kr\acute{a}t}, & ak\ n > 0, \\ e, & ak\ n = 0, \\ \underbrace{x' * x' * x' * \cdots * \ x'}_{(-n)-kr\acute{a}t}, & ak\ n < 0. \end{cases}$$

Príklad 5.1.2 Nájdime mocniny 2^0, 2^5 a 2^{-5} v grupe

a) $(\mathbb{Z}, +)$,

b) $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$.

.

Riešenie. Najprv potrebujeme zistiť neutrálne prvky a inverzný prvok k prvku 2 v oboch grupách zo zadania.

a) V grupe $(\mathbb{Z}, +)$ je neutrálny prvok 0. Inverzným prvkom k 2 je -2. Potom $2^0 = 0$, $2^5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ a $2^{-5} = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + + (-2) = -10$.

b) V grupe $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ je neutrálny prvok 1. Inverzným prvkom k 2 je $\frac{1}{2}$. Potom $2^0 = 1$, $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ a $2^{-5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$.

. ∎

Definícia 5.1.2 *Ak v grupe $(G, *)$ existuje taký prvok $x \in G$, že každý prvok množiny G je jeho mocninou,tak grupa sa nazýva* **cyklická** *a prvok x je* **generátorom** *grupy.*

Poznámka: Na množine $\mathbb{Z}_n$ operácia $\oplus$ znamená sčítanie modulo n a operácia $\otimes$ násobenie modulo n.

Príklad 5.1.3 Je grupa $(\mathbb{Z}_6, \oplus\ )$ cyklická? Ak áno, nájdime všetky jej generátory.

Riešenie. Zistime,či niektorý prvok množiny $\mathbb{Z}_6$ je generátorom danej grupy. Prvok $\overline{0}$ nie je generátor, pretože $\overline{0}^n = \overline{0}$ pre ľubovoľné $n \in \mathbb{Z}$. Prvok $\overline{1}$ je generátorom, pretože $\overline{1}^0 = \overline{0},\ \overline{1}^1 = \overline{1},\ \overline{1}^2 = \overline{2},\ \overline{1}^3 = \overline{3},\ \overline{1}^4 = \overline{4},\ \overline{1}^5 = \overline{5}$, teda umocňovaním prvku $\overline{1}$ postupne získame všetky prvky množiny $\mathbb{Z}_6$. Teda, daná grupa je cyklická.

Nájdime ostatné generátory grupy. Keďže $\overline{2}^0 = \overline{0},\ \overline{2}^1 = \overline{2},\ \overline{2}^2 = \overline{4},\ \overline{2}^5 = \overline{0}$, prvok $\overline{2}$ nie je generátorom. Keďže $\overline{3}^0 = \overline{0},\ \overline{3}^1 = \overline{3},\ \overline{3}^2 = \overline{0}$, ani prvok $\overline{3}$ nie je generátorom. Keďže $\overline{4}^0 = \overline{0},\ \overline{4}^1 = \overline{4},\ \overline{4}^2 = \overline{2},\ \overline{4}^3 = \overline{0}$, ani prvok $\overline{4}$ nie je generátorom. Teraz nájdime mocniny prvku $\overline{5}$. Dostaneme $\overline{5}^0 = \overline{0},\ \overline{5}^1 = \overline{5},\ \overline{5}^2 = = \overline{4},\ \overline{5}^3 = \overline{3},\ \overline{5}^4 = \overline{4},\ \overline{5}^5 = \overline{1}$, teda každý prvok množiny $\mathbb{Z}_6$ sa dá napísať ako mocnina prvku $\overline{5}$, a $\overline{5}$ je generátor. Uvedomme si, že keď umocňujeme, mocnina môže byť aj záporná. Ale v tejto grupe, záporné mocniny jej prvkov vygenerujú rovnaké prvky ako kladné mocniny. ∎

Definícia 5.1.3 **Rádom prvku** *x v grupe $(G, *)$ je najmenšie prirodzené číslo n také, že $x^n = e$. Zapisujeme rád $x = n$.*

Definícia 5.1.4 **Podgrupou** *grupy $(G, *)$ budeme nazývať dvojicu $(H, *)$, pričom $H \subset G$ a H je uzavretá vzhľadom na operáciu $*$.*

Príklad 5.1.4 Určme rády všetkých prvkov v grupe $(\mathbb{Z}_6,\ \oplus)$ a nájdime všetky podgrupy tejto grupy. Následne urobte rozklad grupy podľa jej dvojprvkovej podgrupy.

Riešenie. V grupe $(\mathbb{Z}_6,\ \oplus)$, kde $\mathbb{Z}_6 = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\right\}$ je neutránym prvkom prvok $\overline{0}$. Rádom nejakého prvku x danej grupy je najmenšie prirodzené číslo n také, že $x^n = e = \overline{0}$. Na základe riešenia predchádzajúceho príkladu vieme, že
rád $\overline{0} = 1$;
rád $\overline{1} =$ rád $\overline{5} = 6$;
rád $\overline{3} = 2$;
rád $\overline{2} =$ rád $\overline{4} = 3$.

Platí, že všetky podgrupy cyklickej grupy sú tiež cyklické a podľa Lagrangeovej vety **rád grupy** (čo je počet prvkov grupy) je násobkom rádu podgrupy. Teda podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_6,\ \oplus)$ možu mať jeden, dva tri alebo šesť prvkov. Využitím predchádzajúceho príkladu, dostávame tieto podgrupy $\left\{\overline{0}\right\}$, $\left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}$, $\left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\}$, $\left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\right\}$.

Teraz nájdime rozklad grupy $(\mathbb{Z}_6,\ \oplus)$ podľa podgrupy $H = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}$.

Trieda pravého rozkladu prislúchajúca prvku $x \in \mathbb{Z}_{\not 4}$ je $xH = \{x \oplus h, h \in H\}$.

Trieda ľavého rozkladu prislúchajúca prvku $x \in \mathbb{Z}_{\not 4}$ je $Hx = \{h \oplus x, h \in H\}$.

Dostávame nasledujúce pravé triedy rozkladu

$\overline{0}H = \{\overline{0} \oplus \overline{0}, \overline{0} \oplus \overline{3}\} = \{\overline{0}, \overline{3}\}$

$\overline{1}H = \{\overline{1} \oplus \overline{0}, \overline{1} \oplus \overline{3}\} = \{\overline{1}, \overline{4}\}$
$\overline{2}H = \{\overline{2} \oplus \overline{0}, \overline{2} \oplus \overline{3}\} = \{\overline{2}, \overline{5}\}$
$\overline{3}H = \{\overline{3} \oplus \overline{0}, \overline{3} \oplus \overline{3}\} = \{\overline{3}, \overline{0}\}$
$\overline{4}H = \{\overline{4} \oplus \overline{0}, \overline{4} \oplus \overline{3}\} = \{\overline{4}, \overline{1}\}$
$\overline{5}H = \{\overline{5} \oplus \overline{0}, \overline{5} \oplus \overline{3}\} = \{\overline{5}, \overline{2}\}$
Nakoľko operácia $\oplus$ je komutatívna, ľavý rozklad bude rovnaký ako pravý. ■

Príklad 5.1.5 Zistime, či zobrazenie $f : (\mathbb{R}^+, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +), \quad f(x) = \ln x$ je homomorfizmom resp. izomorfizmom uvedených grúp.

Riešenie. Najprv zistime, či sa jedná o homomorfizmus. Overíme, či platí:
$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) : f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$
Upravme ľavú stranu.
$f(x \cdot y) = \ln (x \cdot y) = \ln x + \ln y = f(x) + f(y)$,
teda dané zobrazenie je homomorfizmus grúp. Aby dané zobrazenie bolo izomorfizmom grúp, musí byť bijektívne, t.j. injektívne aj surjektívne. Teda, má platiť: $(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ a zároveň $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}^+) : y = f(x)$.

Zobrazenie f je injektívne, lebo $(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) : x \neq y \Rightarrow \ln x \neq \ln y \Rightarrow f(x) \neq$ $\neq f(y)$.

Zobrazenie f je surjektívne, lebo $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}^+) : y = \ln x$. Stačí pre ľubovoľné $y \in \mathbb{R}$ zvoliť $x = \mathrm{e}^{-y}$, pričom vieme, že $\mathrm{e}^{-y} \in \mathbb{R}^+$.

Teda zobrazenie f je izomorfizmom daných grúp. ■

Úlohy

5.1 Zistite, či množina $\mathbb{Z}$, spolu s binárnou operáciou $\square$ tvorí grupu, ak:

a) $x \square y = x - y$,

b) $a \square b = a + b$,

c) $a \square b = ab$,

d) $a \triangle b = a + b + ab$,

e) $x \triangle y = x + y + 5$,

f) $a \triangle b = a + (-1)^a b$,

g) $x * y = x^2 y^2$,

h) $a * b = ab + 1$.

5.2 Zistite, či daná množina spolu s binárnou operáciou tvorí grupu, ak:

a) $(\mathbb{Z}_8, \oplus)$,

b $(\mathbb{Z}_{11}-\{\overline{0}\},\otimes)$,

c) $(\mathbb{Z}_n,\oplus)$,

d) $(\mathbb{Z}_n-\{\overline{0}\},\otimes)$,

e) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3,\oplus)$,

f) $(\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\},+)$,

g) $(\mathsf{S}_3,\circ)$, S_3 je množina všetkých permutácii množiny $\{1,2,3\}$ a $\circ$ je operácia skladania zobrazení.

5.3 Zistite, či množina $A=\{x\in\mathbb{R} : x=7^k, k\in\mathbb{Z}\}$ spolu s operáciou:

a) sčítania,

b) násobenia

tvorí grupu.

5.4 Zistite, či množina $A=\{2^n : n\in\mathbb{Z}\}$ spolu s operáciou:

a) sčítania,

b) násobenia

tvorí grupu.

5.5 Zistite, či množina $A\subseteq\mathbb{Z}_{11}$ spolu s binárnou operáciou $\otimes$ tvorí grupu.

a) $A=\{\overline{1},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{9}\}$,

b) $A=\{\overline{8},\overline{7},\overline{5},\overline{3},\overline{1}\}$,

c) $A=\{\overline{1},\overline{8}\}$,

d) $A=\{\overline{1},\overline{10}\}$.

5.6 Nech $K_n=\{x\in\mathbb{C}, x^n=1\}$, $n\in\mathbb{N}$. Zistite, či množina K_n tvorí grupu vzhľadom na operáciu:

a) sčítania,

b) násobenia.

5.7 Nájdite rády prvkov:

a) $\overline{2}$, $\overline{3}$ v grupe $(\mathbb{Z}_8,\oplus)$,

b) $\overline{2}$, $\overline{3}$ v grupe $(\mathbb{Z}_5-\{\overline{0}\},\otimes)$.

5.8 Zistite, ktoré z nasledujúcich grúp sú cyklické:

$(\mathbb{R}, +)$,	$(\mathbb{Q}, +)$,	$(K_8, \cdot)$,	$(\{x \in \mathbb{R} : x = 7^k, k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$,
$(\mathsf{S}_3, \circ)$,	$(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$,	$(\mathbb{Z}_8, \oplus)$,	$(\mathbb{Z}_7 - \{\overline{0}\}, \otimes)$,
$(\{2^n, n \in \mathbb{N}\}, \cdot)$,	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \oplus)$,	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$,	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \oplus)$.

5.9 Nájdite grupu, v ktorej každý prvok okrem neutrálneho je jej generátorom.

5.10 Zistite, či dané zobrazenie je homomorfizmom resp. izomorfizmom grúp.

a) $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +), \quad f(x) = 4x,$

b) $f : (\mathbb{R}^+, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$

c) $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +), \quad f(x, y) = x + y - 2.$

5.11 Zistite, ktoré z nasledujúcich grúp sú izomorfné.

$(\mathbb{R}, +)$,	$(K_6, \cdot)$,	$(K_8, \cdot)$,	$(\mathbb{Z}_8, \oplus)$,
$(\mathsf{S}_3, ^\circ)$,	$(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$,	$(\mathbb{Z}_7, \oplus)$,	$(\mathbb{Z}_7 - \{\overline{0}\}, \otimes)$,
$(\mathbb{Z}, +)$,	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$.		

5.12 Nájdite všetky podgrupy daných grúp a nájdite ich rozklady podľa ich štvorprvkových podgrúp.

a) $(K_4, \cdot)$,

b) $(\mathbb{Z}_8, \oplus)$.

Výsledky

5.1 a) nie, b) áno, c) nie, d) nie, e) áno, f) áno, g) nie, h) nie.

5.2 a) áno, b) áno, c) áno, d) áno, e) áno, f) nie, g) áno.

5.3 a) nie,

b) áno.

5.4 a) nie,

b) áno.

5.5 a) áno,

b) nie,

c) nie

d) áno.

5.6 a) nie,

b) áno.

5.7 a) rád $\overline{2} = 4$, rád $\overline{3} = 8$,

b) rád $\overline{2} = 4$, rád $\overline{3} = 4$.

5.8 Nasledujúce grupy sú cyklické:

$(\{2^n, n \in \mathbb{N}\}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \oplus)$, $(K_8, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_8, \oplus)$,
$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$, $(\mathbb{Z}_7 - \{\overline{0}\}, \otimes)$, $(\{x \in \mathbb{R} : x = 7^k, k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$.

5.9 $(\mathbb{Z}_7 - \{\overline{0}\}, \otimes)$

5.10 a) homorfizmus,

b) izomorfizmus,

c) nie je ani homorfizmus.

5.11 $(K_8, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_8, \oplus)$
$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus) \cong (K_6, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_7 - \{\overline{0}\}, \otimes)$

5.12 a) $\{1\}$, $\{1, -1\}$, $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$,

b) $\{\overline{0}\}$, $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$, $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$.

5.2 Okruhy, obory integrity, telesá a polia

Definícia 5.2.1 *Nech A je množina a nech $\square$, $\triangle$ sú binárne operácie. Potom $(A, \square, \triangle)$ sa nazýva* **okruh** *práve vtedy, keď*

1. *$(A, \square)$ je komutatívna grupa,*
2. *$(A, \triangle)$ je pologrupa,*
3. *Operácia $\triangle$ je distributívna vzhľadom na operáciu $\square$, t. j.*
$\forall x, y, z \in A : x\triangle(y\square z) = (x\triangle y)\square(x\triangle z),$
$(x\square y)\triangle z = (x\triangle z)\square(y\triangle z).$

Označme $e(\square)$ - neutrálny prvok vzhľadom na operáciu $\square$ a $e(\triangle)$ - neutrálny prvok vzhľadom na operáciu $\triangle$.

Definícia 5.2.2 *Okruh $(A, \square, \triangle)$ sa nazýva* **obor integrity** *práve vtedy, keď neexistujú netriviálne delitele nuly, t. j. $\forall x, y \in A : ((x \neq e(\square) \wedge y \neq e(\square)) \Rightarrow x\triangle y \neq$ $\neq e(\square))$.*

Definícia 5.2.3 *Okruh $(A, \square, \triangle)$ sa nazýva* **teleso** *práve vtedy, keď $(A - \{e(\square)\}, \triangle)$ je grupa.*

Definícia 5.2.4 *Teleso $(A, \square, \triangle)$ sa nazýva* **pole** *práve vtedy, keď $(A - \{e(\square)\}, \triangle)$ je komutatívna grupa.*

Príklad 5.2.1 Zistime, či $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ tvorí okruh alebo obor integrity.

Riešenie. $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ tvorí **okruh** práve vtedy, keď

1. $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ je komutatívna grupa,
2. $(\mathbb{Z}_6, \otimes)$ je pologrupa,
3. Operácia $\otimes$ je distributívna vzhľadom na operáciu $\oplus$, t. j.
   $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_6 : \overline{x} \otimes (\overline{y} \oplus \overline{z}) = (\overline{x} \otimes \overline{y}) \oplus (\overline{x} \otimes \overline{z}),$
   $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \otimes \overline{z} = (\overline{x} \otimes \overline{z}) \oplus (\overline{y} \otimes \overline{z}).$

Overme jednotlivé podmienky.

1. Vyučijeme nasledujúcu Cayleyho tabuľku na overenie toho, že $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ je komutatívna grupa.

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

   Z Cayleyho tabuľky vidíme, že:

   - množina $\mathbb{Z}_6$ je uzavretá vzhľadom na binárnu operáciu $\oplus$,
   - množina $\mathbb{Z}_6$ obsahuje neutrálny prvok $\overline{0}$ vzhľadom na operáciu $\oplus$,
   - ku každému prvku $\overline{x}$ z množiny $\mathbb{Z}_6$ existuje inverzný prvok $\overline{x}'$ z množiny $\mathbb{Z}_6$ vzhľadom na operáciu $\oplus$, a to $\overline{0}' = \overline{0}$, $\overline{1}' = \overline{5}$, $\overline{2}' = \overline{4}$, $\overline{3}' = \overline{3}$, $\overline{4}' = \overline{4}$, $\overline{5}' = \overline{1}$.
   - binárna operácia $\oplus$ je komutatívna (pretože tabuľka je symetrická podľa hlavnej diagonály).

   Ešte ukážeme, že binárna operácia $\oplus$ je asociatívna, t. j. $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_6 : (\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z} = \overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z})$. Najprv upravme ľavú a potom pravú stranu.
   $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z} = \overline{x + y} \oplus \overline{z} = \overline{x + y + z}.$
   $\overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z}) = \overline{x} \oplus \overline{y + z} = \overline{x + y + z}.$
   Teda operácia $\oplus$ je asociatívna.

2. Použijeme Cayleyho tabuľku.

$\otimes$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Z Cayleyho tabuľky vidíme, že množina $\mathbb{Z}_6$ je uzavretá vzhľadom na binárnu operáciu $\otimes$.

Teraz ukážeme, že binárna operácia $\times$ je asociatívna, t. j. $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_6$: $(\overline{x} \otimes \overline{y}) \otimes \overline{z} = \overline{x} \otimes (\overline{y} \otimes \overline{z})$. Najprv upravme ľavú a potom pravú stranu.
$(\overline{x} \otimes \overline{y}) \otimes \overline{z} = \overline{x \cdot y} \otimes \overline{z} = \overline{x \cdot y \cdot z}$.
$\overline{x} \otimes (\overline{y} \otimes \overline{z}) = \overline{x} \otimes \overline{y \cdot z} = \overline{x \cdot y \cdot z}$.
Teda operácia $\otimes$ je asociatívna.

3. $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_6 : \overline{x} \otimes (\overline{y} \oplus \overline{z}) = (\overline{x} \otimes \overline{y}) \oplus (\overline{x} \otimes \overline{z})$
   $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \otimes \overline{z} = (\overline{x} \otimes \overline{z}) \oplus (\overline{y} \otimes \overline{z})$.

V obidvoch rovniciach upravíme ľavú a pravú stranu a porovnáme ich.
$\overline{x} \otimes (\overline{y} \oplus \overline{z}) = \overline{x} \otimes \overline{y+z} = \overline{x.(y+z)} = \overline{x.y + x.z}$
$(\overline{x} \otimes \overline{y}) \oplus (\overline{x} \otimes \overline{z}) = \overline{x.y} \oplus \overline{x.z} = \overline{x.y + x.z}$
$(\overline{x} \oplus \overline{y}) \otimes \overline{z} = \overline{x+y} \otimes \overline{z} = \overline{(x+y).z} = \overline{x.z + y.z}$.
$(\overline{x} \otimes \overline{z}) \oplus (\overline{y} \otimes \overline{z}) = \overline{x.z} \oplus \overline{y.z} = \overline{x.z + y.z}$.
Keďže platia aj distributívne zákony, $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ je okruh.

Okruh $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ tvorí **obor integrity** práve vtedy, keď neexistujú netriviálne delitele nuly, t. j. $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_6 : ((\overline{x} \neq \overline{0} \wedge \overline{y} \neq \overline{0}) \Rightarrow \overline{x} \otimes \overline{y} \neq \overline{0})$. Zvoľme $\overline{x} = \overline{2} \wedge \overline{y} = \overline{3}$. Potom $\overline{2} \otimes \overline{3} = \overline{0}$. Teda okruh $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ nie je oborom integrity. A teda $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ nie je ani teleso ani pole. ∎

Úlohy

5.1 Zistite, či množina spolu s dvomi binárnymi operáciami $(\mathsf{A}, +, \cdot)$ tvorí okruh, obor integrity, teleso alebo pole, ak:

a) $\mathsf{A} = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt[3]{2},\ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$,

b) $\mathsf{A} = \{a + b\mathrm{i},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$,

c) $\mathsf{A} = \{a + b\mathrm{i},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$,

d) $\mathsf{A} = \{a + b\sqrt[3]{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$,

e) $\mathsf{A} = \{x \in \mathbb{R}, x = 7^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

f) A je množina nepárnych celých čísel,

g) A je množina párnych celých čísel.

5.2 Zistite, či $(\mathcal{P}(A), \div, \cap)$, $A \neq \emptyset$ je okruh resp. pole, ak $X \div Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

5.3 Zistite, či $(M, +, \cdot)$ je pole, ak:

a) $M = M_n(\mathbb{R})$[1],

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$.

5.4 Rozhodnite, či zobrazenie $\varphi(a, b) = (b, 0, a)$ je homomorfizmus resp. izomorfizmus okruhov $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ a $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, ak $+$ a $\cdot$ sú sčítanie a násobenie n – tíc po jednotlivých zložkách.

5.5 Rozhodnite, či zobrazenie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je homomorfizmom resp. izomorfizmom okruhov $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ a $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, ak:

a) $f(x, y, z) = (x, y)$,

b) $f(x, y, z) = (y, y)$.

Výsledky

5.1 a) nie je ani okruh,
b) obor integrity,
c) pole,
d) nie je ani okruh,
e) pole,
f) nie je ani okruh,
g) obor integrity.

5.2 Je to pole.

5.3 a) nie je,
b) je.

5.4 Je homomorfizmus.

5.5 a) homomorfizmus,
b) homomorfizmus.

[1] $M_n(\mathbb{R})$ je množina štvorcových matíc rádu n, ktorých prvky sú reálne čísla.

Kapitola 6

Grafy

6.1 Základné pojmy

Definícia 6.1.1 *Nech V, H sú disjunktné množiny a nech $H \subseteq \binom{V}{2}$. Usporiadaná dvojica (V, H) sa nazýva* **graf**. *Zapisujeme to $G = (V, H)$.*

Definícia 6.1.2 **Podgrafom** *grafu $G = (V, H)$ je graf $G_1 = (V_1, H_1)$, kde $V_1 \subseteq V$ a $H_1 \subseteq H$.* **Faktorom** *grafu $G = (V, H)$ je podgraf $G_1 = (V, H_1)$.*

Definícia 6.1.3 *Nech $|V| = n$. Graf $K_n = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ sa nazýva* **kompletný graf** *(teda medzi každými dvoma vrcholmi je hrana). Graf $D_n = (V, \emptyset)$ sa nazýva* **diskrétny graf**.

Definícia 6.1.4 *Graf $G = (V, H)$ sa nazýva* **bipartitný graf** *práve vtedy, keď $V = V_1 \cup V_2$ a $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, pričom pre každú hranu $e = \{u, v\}$ platí, že $u \in V_1$, $v \in V_2$.* **Kompletný bipartitný graf** *$K_{m,n} = (V, H)$ je bipartitný graf, v ktorom $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ a počet hrán je $m \cdot n$.*

Definícia 6.1.5 *Nech $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Graf $G = (V, H)$ sa nazýva* **pravidelný** *(***regulárny***) graf stupňa k práve vtedy, keď všetky vrcholy majú stupeň k.*

Definícia 6.1.6 **Komponent** *grafu je každý jeho maximálne súvislý podgraf.*

Definícia 6.1.7 *Graf $\overline{G} = \left(V, \binom{V}{2} - H\right)$ sa nazýva* **komplement** *grafu $G = (V, H)$.*

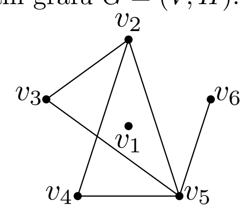
Definícia 6.1.8 *Postupnosť nezáporných celých čísel $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ sa nazýva* **grafová** *práve vtedy, keď existuje graf s n vrcholmi, ktorého stupne sú rovné všetkým číslam tejto postupnosti.*

Veta 6.1.1 (Havlova veta) *Nech s_1, s_2, s_3, $\ldots$, s_n je postupnosť nezáporných celých čísel taká, že $n \geqq 2$, $1 \leqq s_1 \leqq n-1$ pre ktorú platí $s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \cdots \geqq s_n$. Potom táto postupnosť je grafová práve vtedy, keď je grafová postupnosť $s_2 - 1$, $s_3 - 1$, $\ldots$, $s_{s_1+1} - 1$, s_{s_1+2}, $\ldots$, s_n.*

Poznámka k Havlovej vete: Všimnime si, že v nerastúcej postupnosti $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ odstránime prvý člen s_1 a ďalších s_1 členov znížime o jedna.

Definícia 6.1.9 *Grafy* $G_1 = (V_1, H_1)$ *a* $G_2 = (V_2, H_2)$ *sú* **izomorfné** *práve vtedy, keď existuje bijektívne zobrazenie* $f : V_1 \to V_2$ *také, že* $\{v_i, v_j\} \in H_1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \{f(v_i), f(v_j)\} \in H_2$.

Príklad 6.1.1 Majme diagram grafu $G = (V, H)$.



Vypíšme prvky množiny vrcholov V, množiny hrán H a napíšme stupne všetkých vrcholov.

Riešenie. Vrcholy sú označené, množina vrcholov je $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Každú hranu zapíšeme pomocou dvoch vrcholov, s ktorými inciduje, množina hrán daného grafu je $H = \{\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$. Stupeň vrchola v, označujeme to $\delta(v)$, je počet hrán, s ktorými vrchol v inciduje. Teda $\delta(v_1) = 0, \delta(v_2) = 3, \delta(v_3) = 2, \delta(v_4) = 2$, $\delta(v_5) = 4$, $\delta(v_6) = 1$. ∎

Príklad 6.1.2 Nech graf $G = (V, H)$ má aspoň dva vrcholy a nech počet hrán je menší než počet vrcholov. Ukážme, že graf G má aspoň jeden vrchol stupňa 1 alebo 0.

Riešenie. Dokážme toto tvrdenie sporom. Predpokladajme, že vrchol stupňa 1 ani vrchol stupňa 0 v grafe G neexistuje. Teda každý vrchol v_i má stupeň aspoň 2, $\delta(v_i) \geqq 2$.

Pre ľubovoľný graf $G = (V, H)$ platí:

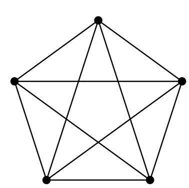
$$2\,|H| = \sum_{i=1}^{|V|} \delta(v_i)$$

Z tohto vzťahu dostávame $2\,|H| \geqq 2\,|V|$, čo je v spore s predpokladom, že graf má menej hrán než vrcholov. ∎

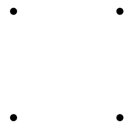
Príklad 6.1.3 Načrtnime diagramy grafov a) K_5, b) D_4, c) $K_{3,4}$, d) $\overline{K}_{3,4}$.

Riešenie.

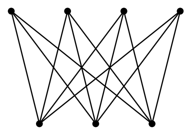
a) Diagram grafu K_5:



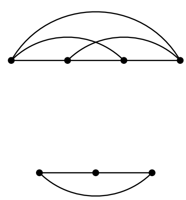
b) Diagram grafu D_4:



c) Diagram grafu $K_{3,4}$:



d) Diagram grafu $\overline{K}_{3,4}$:



∎

Príklad 6.1.4 Načrtnime diagramy

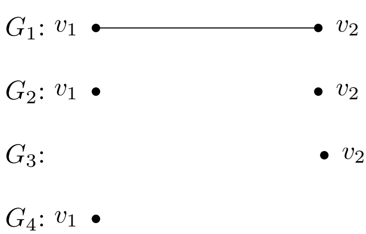
a) všetkých podgrafov grafu K_2,

b) všetkých faktorov grafu K_3,

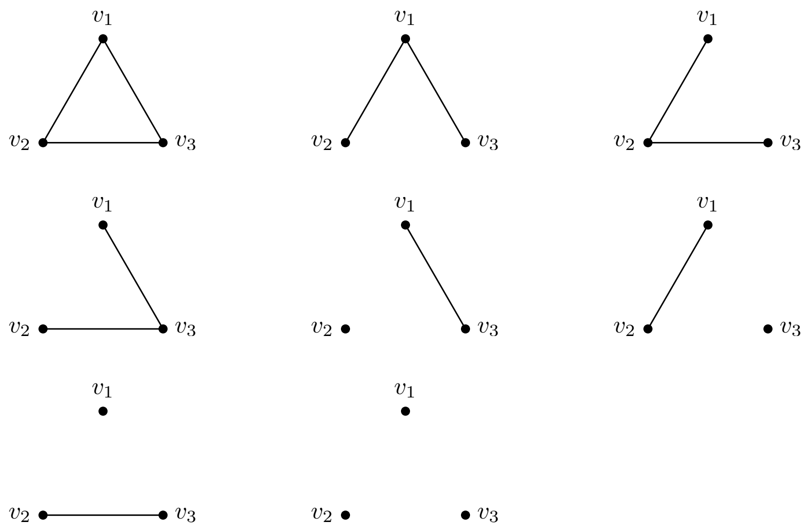
c) všetkých neizomorfných faktorov grafu K_3.

Riešenie.

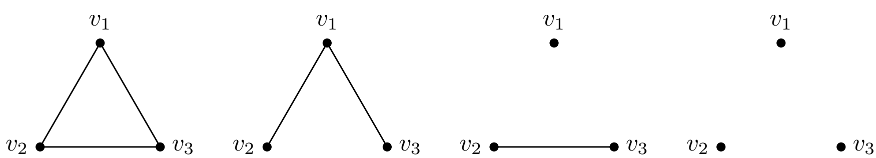
a) Sú štyri podgrafy grafu K_2:



b) Graf K_3 má osem faktorov:



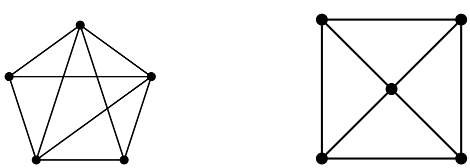
c) Na základe riešenia v časti b), graf K_3 má iba štyri navzájom neizomorfné faktory:



■

Príklad 6.1.5 Určme, či dané dvojice grafov sú izomorfné. Svoj záver zdôvodnime.

a)



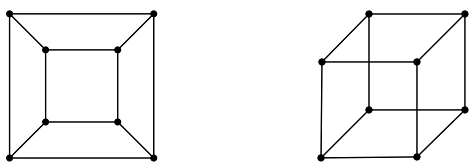
b)

c)

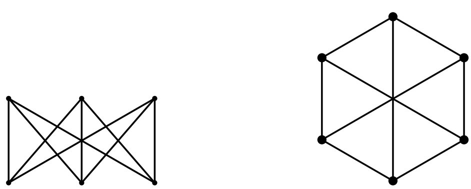
d)

e)

f)



g)



Riešenie. Graf vľavo označme G_1 a graf vpravo G_2. Ak dva grafy G_1 a G_2 sú izomorfné, tak

- majú rovnaký počet vrcholov,
- majú rovnaký počet hrán,
- majú rovnaké stupne vrcholov,
- buď sú oba súvislé alebo oba nie sú súvislé,
- susednosť vrcholov sa zachováva,
- incidencia vrcholov a hrán sa zachováva.

Avšak ani splnenie uvedených podmienok nezaručuje, že grafy sú izomorfné.

Ak chceme ukázať, že grafy sú izomorfné, snažíme sa prekresliť ich diagramy tak, aby boli rovnaké (až na pomenovanie vrcholov a hrán). Inak, ak chceme ukázať, že nie sú izomorfné, hľadáme dôvod, v čom sa líšia.

a) Grafy majú rovnaký počet vrcholov, ale počet hrán je rôzny. Teda grafy G_1 a G_2 nie sú izomorfné.

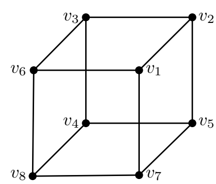
b) Grafy majú rovnaký počet vrcholov, rovnaký počet hrán, príslušné grafové postupnosti sú tiež rovnaké. Ale keďže graf G_1 je súvislý a graf G_2 je nesúvislý, grafy G_1 a G_2 nemôžu byť izomorfné.

c) Ani v tomto prípade grafy G_1 a G_2 nie sú izomorfné, pretože obidva grafy majú práve jeden vrchol stupňa tri, ktorý v grafe G_1 susedí s vrcholmi stupňov 1, 1 a 2 a v grafe G_2 s vrcholmi stupňov 1, 2 a 2.

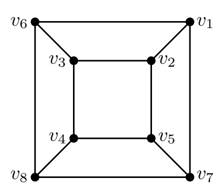
d) Tieto grafy nie sú izomorfné, keďže v grafe G_1 neexistuje kružnica nepárnej dĺžky a v grafe G_2 je kružnica dĺžky tri.

e) Opäť, ani tieto grafy nie sú izomorfné, nakoľko oba grafy majú práve dva vrcholy stupňa tri, ktoré v grafe G_1 nie sú susedné ale v grafe G_2 sú susedné.

f) Grafy spĺňajú všetky vyššie uvedené nutné podmieky, tak sa pokúsime prekresliť diagram grafu G_2. Najprv označme jeho vrcholy

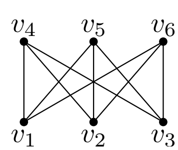


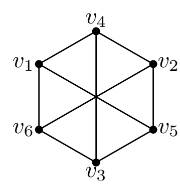
a potom nakreslíme jeho diagram nasledovne:



Teda grafy G_1 a G_2 sú izomorfné.

g) Stačí označiť vrcholy grafu G_1 a následne prekresliť jeho diagram tak, aby sme získali diagram grafu G_2, grafy sú G_1 a G_2 izomorfné.





■

Príklad 6.1.6 Určme, či daná postupnosť je grafová:

a) 5, 8, 4, 0, 4, 3, 1, 2, 15, 2, 4, 3, 5, 2, 2,

b) 4, 1, 2, 5, 4, 4, 2, 3,

c) 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

Ak áno, načrtnime príslušný diagram grafu.

Riešenie.

a) Počet vrcholov nenulového stupňa je 14, teda najväčší stupeň vrchola v takomto grafe môže byť 13. Keďže vrchol stupňa 15 nemôže existovať, daná postupnosť nie je grafová.

b) Počet vrcholov nepárneho stupňa je v každom grafe párny. Nakoľko uvedená postupnosť obsahuje tri nepárne čísla, nemôže ísť o grafovú postupnosť (súčet stupňov všetkých vrcholov je párne číslo).

c) Pre túto postupnosť použijeme viacnásobne Havlovu vetu, aby sme zistili, či sa jedná o grafovú postupnosť. Pred každým použitím uvedenej vety skontrolujeme, či postupnosť je neklesajúca. Ak nie, preusporiadame jej členy. Pokračujeme až dovtedy, kým nevieme o niektorej postupnosti s určitosťou povedať, či je alebo nie je grafová.

$\boxed{4}, \underline{4, 4, 4, 3}, 3, 3, 2, 1, 1, 1$ $\quad$ $n = 11$, $s_1 = 4$, použijeme Havlovu vetu

(odstránime konštantu v rámčeku a podčiarknuté čísla znížime o jedna)

$3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 1$ $\quad$ usporiadame do nerastúcej postupnosti

$\boxed{3}, \underline{3, 3, 3}, 3, 2, 2, 1, 1, 1$ $\quad$ $n = 10$, $s_1 = 3$, použijeme Havlovu vetu

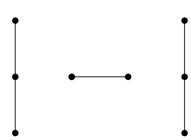
$2, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 1$ $\quad$ usporiadame do nerastúcej postupnosti

$\boxed{3}, \underline{2, 2, 2}, 2, 2, 1, 1, 1$ $\quad$ $n = 9$, $s_1 = 3$, použijeme Havlovu vetu

$1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1$ $\quad$ $n = 8$

O poslednej postupnosti vieme, že je grafová, keďže vieme nakresliť diagram 8-vrcholového grafu, G_1, ktorého stupne vrcholov sú 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1.

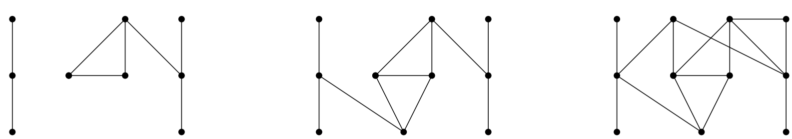
G_1



Potom, na základe Havlovej vety, aj postupnosť zo zadania je grafová.

Teraz načrtnime diagram grafu, ktorý má 11 vrcholov a ich stupne sú 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Budeme postupovať systematicky, využijeme postupnosti získané použitím Havlovej vety. Začneme poslednou postupnosťou, ktorej odpovedajúci graf G_1 má diagram na obrázku vyššie. V ďalšom kroku chceme načrtnúť diagram grafu, ktorý odpovedá postupnosti $\boxed{3}$, $\underline{2,\ 2,\ 2}$, 2, 2, 1, 1, 1. V grafe G_1 teda pridáme nový vrchol (jeho stupeň je konštanta v rámčeku) a tri hrany, ktoré s ním budú incidovať, pričom z troch vrcholov stupňa 1 v grafe G_1 sa stanú vrcholy stupňa 2 (sú to podčiarknué čísla). Tento graf označme G_2. Teraz v grafe G_2 pridáme vrchol a tri hrany s ním incidentné, pričom z troch vrcholov stupňa 2 v grafe G_2 budú vrcholy stupňa 3. Graf, ozn. G_3, odpovedá postupnosti $\boxed{3}$, $\underline{3,\ 3,\ 3}$, 3, 2, 2, 1, 1, 1. A nakoniec pridáme vrchol a štyri hrany tak, že tento nový vrchol bude mať stupeň 4 a štyri vrcholy, ktoré mali v grafe G_3 stupne 3, 3, 3, 2 budú mať stupne 4, 4, 4, 3. Graf G_4 odpovedá grafovej postupnosti $\boxed{4}$, $\underline{4,\ 4,\ 4,\ 3}$, 3, 3, 2, 1, 1, 1.

G_2 $\qquad\qquad$ G_3 $\qquad\qquad$ G_4



■

Príklad 6.1.7 Pre aké x je postupnosť 4, 3, x, 2, 1 grafová?

Riešenie. Hľadaný graf má mať 5 vrcholov, pričom jeden z nich má stupeň 4. To znamená, že tento vrchol susedí so všetkými vrcholmi grafu. Teda x musí byť nenulové. Súčet stupňov vrcholov v grafe je párne číslo, teda x môže byť iba 2 alebo 4. Postupne nahradíme x týmito číslami a pomocou Havlovej vety zistíme, či postupnosť je grafová.

$x = 2:$ 4, 3, 2, 2, 1
2, 1, 1, 0
0, 0, 0

Keďže existuje graf s troma izolovanými vrcholmi, táto postupnosť je grafová.

$x = 4:$ 4, 4, 3, 2, 1
3, 2, 1, 0

Táto postupnosť nie je grafová, pretože graf so štyrmi vrcholmi, v ktorom jeden z nich má stupeň 3 a iný stupeň 0, neexistuje.

Teda iba pre $x = 2$ je postupnosť 4, 3, x, 2, 1 grafová. ■

Príklad 6.1.8 Určme počet komponentov grafu
a) K_5, b) D_4, c) $\overline{K}_{3,4}$.

Riešenie. Využijeme diagramy týchto grafov z príkladu 6.1.3.

a) Keďže graf K_5 je súvislý, tak má jediný maximálne súvislý podgraf, a je ním on sám.

b) Graf D_4 nie je súvislý, má štyri maximálne súvislé podgrafy, a sú nimi jednotlivé vrcholy.

c) Ani graf $\overline{K}_{3,4}$ nie je súvislý, má dva maximálne súvislé podgrafy, jeden je izomorfný s K_3 a druhý s K_4. ■

Úlohy

6.1 Nech graf $G = (V, H)$ má 5 vrcholov.

a) Môže graf G obsahovať súčasne vrcholy stupňa 0 a 4?

b) Ak má graf G práve dva vrcholy rovnakého stupňa, môžu to byť práve 0 alebo práve 4?

c) Je možné, aby v grafe G mal každý vrchol iný stupeň?

6.2 Ukážte, že platí:

$$m \leqq \frac{2\,|H|}{|V|} \leqq M,$$

kde m je nejmenší stupeň a M je najväčší stupeň vrchola v grafe $G = (V, H)$.

6.3 Nech graf $G = (V, H)$ má 15 hrán. Určte počet vrcholov, ak jeho komplement má 13 hrán.

6.4 Zistite, či existuje faktor grafu K_7 taký, ktorý je izomorfný so svojim komplementom.

6.5 Rozhodnite, či daná postupnosť je grafová:

a) 2, 4, 2, 1, 2, 8, 7, 2, 4, 5, 3, 3 ,0, 4,

b) 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 1,

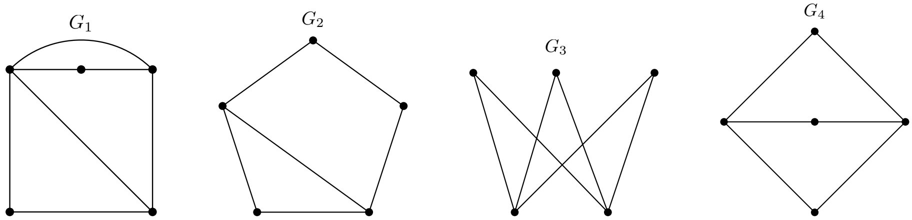
c) 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1,

d) 1, 2, 2, 3, 5, 5, 5, 3,

e) 8, 8, 7, 6, 6, 6, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1.

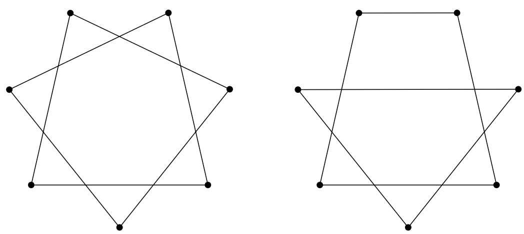
6.6 Sedem priateľov si sľúbilo, že každý pošle z dovolenky pohľanicu trom z ostatných šiestich. Je možné takto zariadiť korešpondenciu s tým, že každý napíše len tým, od ktorých dostane pohľadnicu?

6.7 Ktoré z uvedených grafov sú izomorfné?

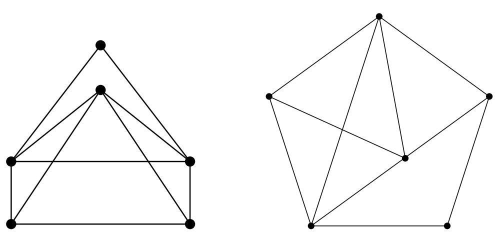


6.8 Sú dané grafy izomorfné? Ak áno, nájdite nejaký izomorfizmus.

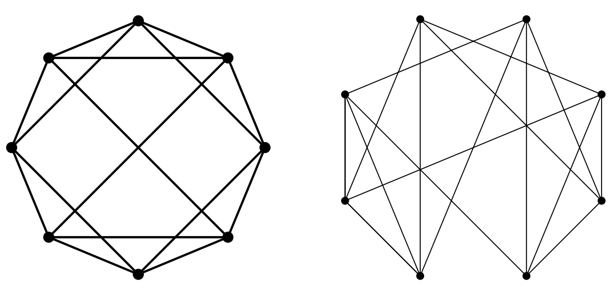
a)



b)



c)



6.9 Na futbalovom turnaji hrá 11 mužstiev. Je možné, aby 6 mužstiev odohralo 4 zápasy, 3 mužstvá 3 zápasy a 2 mužstvá 2 zápasy?

6.10 Načrtnite diagramy všetkých neizomorfných faktorov grafu K_4.

Výsledky

6.1 a) Nie. b) Nie. c) Nie.

6.2 Pre ľubovoľný vrchol v_i platí $m \leqq \delta(v_i) \leqq M$. Potom

$$m \cdot |V| \leqq \sum_{i=1}^{|V|} \delta(v_i) \leqq M \cdot |V|$$
$$m \cdot |V| \leqq 2 \cdot |H| \leqq M \cdot |V|$$
$$m \leqq \tfrac{2|H|}{|V|} \leqq M$$

6.3 Nech $|V| = n$. Potom rovnica $\binom{n}{2} = 28$ má jediné riešenie $n = 8$.

6.4 K_7 má 21 hrán, čo je nepárne číslo a teda neexistuje rozklad grafu na dva izomorfné faktory (museli by mať rovnaký počet hrán).

6.5 a) Nie. b) Áno. c) Áno. d) Áno. e) Áno.

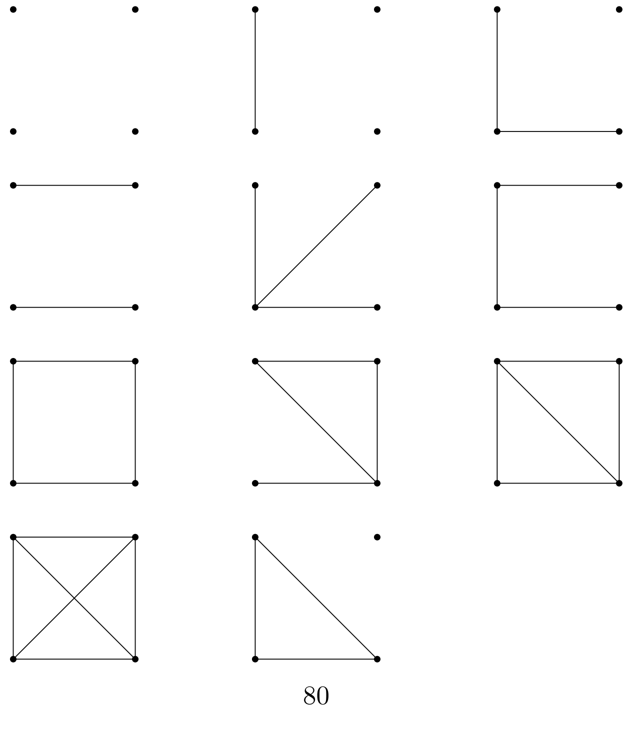
6.6 Nie, lebo neexistuje pravidelný graf stupňa 3 so siedmimi vrcholmi (súčet stupňov nemôže byť nepárne číslo).

6.7 Iba G_3 a G_4 sú izomorfné.

6.8 a) Nie. b) Nie. b) Nie.

6.9 Nie, lebo neexistuje graf s 11 vrcholmi, ktorého stupne vrcholov sú 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2.

6.10



6.2 Vzdialenosť v grafe

Definícia 6.2.1 *Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf.* **Dĺžka cesty** *v grafe je počet hrán tejto cesty.* **Vzdialenosť** *vrcholov u, v, označujeme $d(u, v)$, v grafe G je dĺžka najkratšej cesty spájajúcej vrcholy u, v.*

Definícia 6.2.2 *Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf.*

Číslo $e(u, G) = \max_{v \in V} d(u, v)$ sa nazýva **excentricita** *vrchola u.*

Číslo $P(G) = \max_{u \in V} e(u, G)$ sa nazýva **priemer** *grafu G.*

Číslo $r(G) = \min_{u \in V} e(u, G)$ sa nazýva **polomer** *grafu G.*

Každý vrchol, ktorého excentricita je rovná polomeru grafu G sa nazýva **stred** *grafu G.*

Definícia 6.2.3 *Nech $G = (V, H)$ je graf, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$.* **Matica incidencie** *grafu G je matica $A = (a_{ij})$ typu (n, m), pričom*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ak\ h_j = \{v_i, v_k\}\ pre\,nejak\acute{e}\ v_k \in V, \\ 0 & inak. \end{cases}$$

Definícia 6.2.4 *Nech $G = (V, H)$ je graf, kde $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.* **Matica susednosti** *grafu G je štvorcová matica $B = (b_{ij})$ rádu n, pričom*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & ak\ \{v_i, v_j\} \in H, \\ 0 & inak. \end{cases}$$

Poznámka: V matici incidencii A sa v každom stĺpci nachádza číslo 1 práve dvakrát, ostatné prvky sú nuly. V matici susednosti B, počet jednotiek v riadku (stĺpci) je rovný stupňu vrchola, ktorému príslušný riadok odpovedá. Matica B musí byť symetrická podľa hlavnej diagonály.

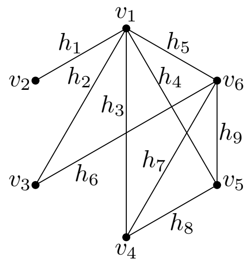
Veta 6.2.1 *Nech B je matica susednosti súvislého grafu $G = (V, H)$, $|V| = n$. Nech $B^{(1)} = B + E$, kde E je jednotková matica. Nech $B^{(k)} = B^{(k-1)} \cdot B^{(1)}$, pričom v súčine matíc budeme používať boolovské sčítanie a násobenie prvkov[1]. Potom pre ľubovoľné $k = 1, 2, \ldots, n$ platí: prvok $b_{ij}^{(k)}$ matice $B^{(k)}$ je rovný jednej práve vtedy, keď $d(v_i, v_j) \leqq k$.*

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že prvok $b_{ij}^{(k)}$ matice $B^{(k)}$ je rovný nule práve vtedy, keď $d(v_i, v_j) > k$.

Veta 6.2.2 *Graf $G = (V, H)$, $|V| = n$ je súvislý práve vtedy, keď prvkami matice $B^{(n-1)}$ sú iba jednotky.*

Príklad 6.2.1 Pre daný graf G

[1] Jediná zmena oproti klasickému sčítaniu a násobeniu je, že 1+1=1.



napíšme maticu susednosti B a maticu incidencie A.

Riešenie. Vrcholy aj hrany sú na obrázku očíslované, môžeme napísať obe matice.

Matica incidencie grafu G:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & h_8 & h_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Matica susednosti daného grafu G:

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

■

Príklad 6.2.2 Určme (bez kreslenia diagramu) pomocou danej matice susednosti grafu

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

vzdialenosť ktorých vrcholov je

a) väčšia ako 2,

b) menšia alebo rovná ako 3,

c) menšia ako 2,

d) rovná 3.

Je daný graf súvislý?

Riešenie. Pripočítaním jednotkovej matice E k matici B vytvorme maticu $B^{(1)}$.

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Postupne budeme vytvárať ďalšie „mocniny“ $B^{(k)}$ matice B podľa vzťahu $B^{(k)} = B^{(k-1)} \cdot B^{(1)}$, pričom násobenie a sčítanie je boolovské.

Platí, že prvok $b_{ij}^{(k)}$ v matici $B^{(k)}$ je 1 práve vtedy, keď vzdialenosť $d(v_i, v_j) \leqq k$, resp. $b_{ij}^{(k)} = 0$ práve vtedy, keď vzdialenosť $d(v_i, v_j) > k$.

Z toho vyplýva, že graf je súvislý práve vtedy, keď v matici $B^{(|V|-1)}$ sú iba jednotky.

Postupne dostávame nasledujúce matice.

$$B^{(2)} = B^{(1)} \cdot B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{(3)} = B^{(2)} \cdot B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{(4)} = B^{(3)} \cdot B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teraz sa môžeme vrátiť k odpovediam na otázky nášho zadania.

a) Vzdialenosť $d(v_i, v_j)$ je väčšia ako 2 práve vtedy, keď v matici $B^{(2)}$ je $b_{ij}^{(2)} = 0$.

   Ide o nasledujúce vzdialenosti vrcholov: $d(v_1, v_4)$, $d(v_2, v_4)$, $d(v_2, v_6)$, $d(v_4, v_5)$, $d(v_5, v_6)$.

b) Vzdialenosť $d(v_i, v_j)$ je menšia alebo rovná ako 3 práve vtedy, keď v matici $B^{(3)}$ je $b_{ij}^{(3)} = 1$.

To platí pre všetky vzdialenosti vrcholov okrem $d(v_2, v_4)$ a $d(v_4, v_5)$.

c) Vzdialenosť $d(v_i, v_j)$ je menšia ako 2 (t. j. menšia alebo rovná ako 1) práve vtedy, keď v matici $B^{(1)}$ je $b_{ij}^{(1)} = 1$.

Sú to nasledujúce vzdialenosti vrcholov: $d(v_1, v_1)$, $d(v_1, v_2)$, $d(v_1, v_3)$, $d(v_1, v_5)$, $d(v_2, v_2)$, $d(v_3, v_3)$, $d(v_3, v_6)$, $d(v_4, v_4)$, $d(v_4, v_6)$, $d(v_5, v_5)$, $d(v_6, v_6)$.

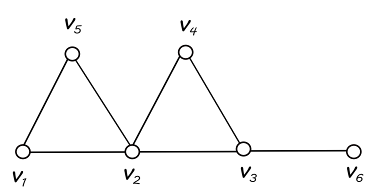
d) Vzdialenosť $d(v_i, v_j)$ je rovná 3 (t. j. menšia alebo rovná ako 3 a zároveň väčšia ako 2) práve vtedy, keď v matici $B^{(2)}$ je $b_{ij}^{(2)} = 0$ a zároveň prvok v matici $B^{(3)}$ je $b_{ij}^{(3)} = 1$.

Túto podmienku spĺňajú vzdialenosti vrcholov: $d(v_1, v_4)$, $d(v_2, v_6)$, $d(v_5, v_6)$.

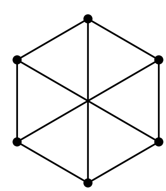
Keďže matica $B^{(4)}$ obsahuje iba jednotky, potom aj matica $B^{(5)}$ bude obsahovať iba jednotky. A teda graf je súvislý. ∎

Príklad 6.2.3 Určme priemer, polomer a stred grafu zadaného pomocou diagramu:

a)



b)



Riešenie.

a) Na základe definície 6.2.2 určíme excentricity všetkých vrcholov.
$e(v_1, G) = \max\limits_{v_i \in V} d(v_1, v_i) = \max\{d(v_1, v_1), d(v_1, v_2), d(v_1, v_3), d(v_1, v_4),$
$d(v_1, v_5), d(v_1, v_6)\} = \max\{0, 1, 2, 2, 1, 3\} = 3,$
$e(v_2, G) = \max\limits_{v_i \in V} d(v_2, v_i) = \max\{d(v_2, v_1), d(v_2, v_2), d(v_2, v_3), d(v_2, v_4),$
$d(v_2, v_5), d(v_2, v_6)\} = \max\{1, 0, 1, 1, 1, 2\} = 2,$
$e(v_3, G) = \max\limits_{v_i \in V} d(v_3, v_i) = \max\{d(v_3, v_1), d(v_3, v_2), d(v_3, v_3), d(v_3, v_4),$
$d(v_3, v_5), d(v_3, v_6)\} = \max\{2, 1, 0, 1, 2, 1\} = 2,$

$e(v_4, G) = \max\limits_{v_i \in V} d(v_4, v_i) = \max\{d(v_4, v_1), d(v_4, v_2), d(v_4, v_3), d(v_4, v_4),$
$d(v_4, v_5), d(v_4, v_6)\} = \max\{2, 1, 1, 0, 2, 2\} = 2,$
$e(v_5, G) = \max\limits_{v_i \in V} d(v_5, v_i) = \max\{d(v_5, v_1), d(v_5, v_2), d(v_5, v_3), d(v_5, v_4),$
$d(v_5, v_5), d(v_5, v_6)\} = \max\{1, 1, 2, 2, 0, 3\} = 3,$
$e(v_6, G) = \max\limits_{v_i \in V} d(v_6, v_i) = \max\{d(v_6, v_1), d(v_6, v_2), d(v_6, v_3), d(v_6, v_4),$
$d(v_6, v_5), d(v_6, v_6)\} = \max\{3, 2, 1, 2, 3, 0\} = 3.$

Polomer grafu G je $r(G) = \min\limits_{v_i \in V} e(v_i, G) = 2$, priemer grafu G je $P(G) = = \max\limits_{v_i \in V} e(v_i, G) = 3$ a stredom grafu G je každý vrchol v_i, pre ktorý $e(v_i, G) = = r(G) = 2$. Čiže stredmi grafu sú vrcholy v_2, v_3, v_4.

b) Vypočítame excentricitu $e(v, G)$ pre každý vrchol v daného grafu G podľa vzťahu $e(v, G) = \max\limits_{u \in V} d(v, u)$. Určíme priemer grafu $P(G) = \max\limits_{v \in V} e(v, G)$, polomer grafu $r(G) = \min\limits_{v \in V} e(v, G)$ a stredom je každý vrchol v, pre ktorý platí $e(v, G) = r(G)$.

V našom grafe pre každý vrchol v je $e(v, G) = 2$. Teda $P(G) = r(G) = 2$ a každý vrchol je aj stredom daného grafu. ■

Príklad 6.2.4 Určme priemer, polomer a stred grafu zadaného pomocou matice susednosti z príkladu 6.2.2.

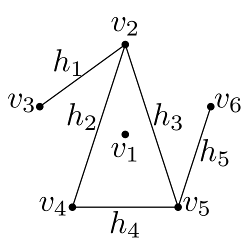
Riešenie. Na základe definície 6.2.2 a s využitím vety 6.2.1 môžeme z riešenia predchádzajúceho príkladu získať riešenie tejto úlohy. Excentricitu nejakého vrchola v_i totiž môžeme nájsť z „mocnín" $B^{(k)}$ matice susednosti B a to tak, že je to najmenšia „mocnina" k matice B, v ktorej i-tý riadok obsahuje samé jednotky.

Potom polomer grafu G je najmenšia „mocnina" k matice B, v ktorej sa nachádza riadok obsahujúci samé jednotky a ak i-tý riadok v tejto matici obsahuje iba jednotky, tak vrchol v_i je stredom grafu G. Priemerom grafu G je najmenšia „mocnina" k matice B, ktorej všetky prvky sú jednotky.

Teda pre náš graf, $r(G) = 2$ a $P(G) = 4$. Stredmi sú vrcholy v_3 a v_6. ■

Úlohy

6.1 Pre daný graf G



napíšte maticu susednosti B a maticu incidencie A.

6.2 Zistite pomocou matice susednosti grafu (bez kreslenia diagramu)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

všetky dvojice vrcholov, ktorých vzdialenosť je

a) väčšia ako 3,

b) najviac 4,

c) rovná 3.

6.3 Graf je daný pomocou matice susednosti

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

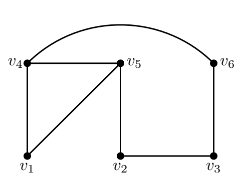
Bez kreslenia diagranu zistite, či daný graf je súvislý.

6.4 Určte všetky dvojice vrcholov, ktorých vzdialenosť je väčšia ako 2 v grafe, ktorého matica susednosti je

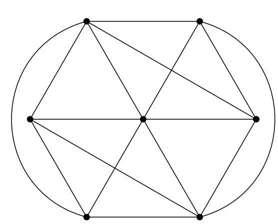
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.5 Určte priemer, polomer a stred grafu G, ktorého diagram je

a)



b)



Výsledky

6.1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

6.2

a) Žiadne dvojice vrcholov,

b) všetky dvojice vrcholov,

c) (v_1, v_5), (v_1, v_6).

6.3 Graf nie je súvislý.

6.4 (v_3, v_5).

6.5 a) $P(G) = 3$, $r(G) = 2$, stredy: v_2, v_4, v_5, v_6,
b) $P(G) = 2$, $r(G) = 1$, stred: vrchol stupňa 6.

6.3 Stromy a kostry

Definícia 6.3.1 Strom *je súvislý graf, ktorý neobsahuje kružnicu.*

Definícia 6.3.2 Kostra *grafu $G = (V, H)$ je faktor, ktorý je stromom.*

Veta 6.3.1 *Nech B je matica susednosti grafu $G = (V, H)$, $|V| = n$ a D je štvorcová matica $D = (d_{ij})$ rádu n, pričom*

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & ak\ i \neq j, \\ \delta(v_i) & ak\ i = j, \end{cases}$$

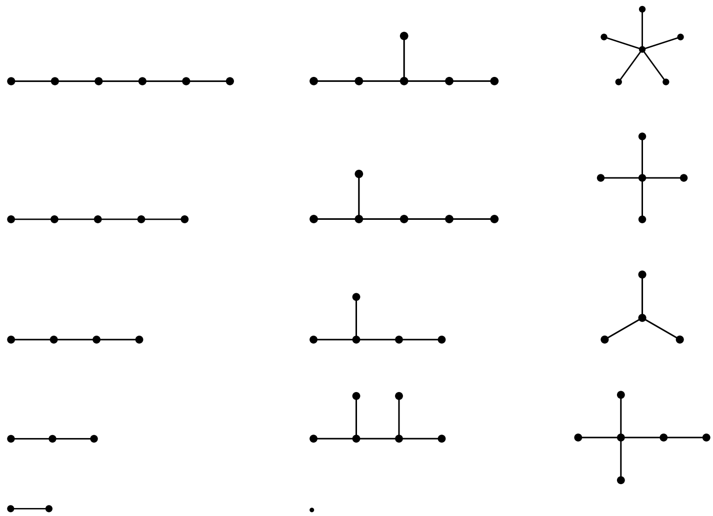
kde $\delta(v_i)$ je stupeň vrchola v_i. Počet kostier grafu, ozn. $p(T)$, vypočítame podľa vzťahu

$$p(T) = \det(D - B)_i,$$

pričom $(D - B)_i$ označuje maticu, ktorú získame z matice $D - B$ odstránením i-tého riadku a i-tého stĺpca.

Príklad 6.3.1 Načrtnime všetky navzájom neizomorfné stromy s najviac 5 hranami.

Riešenie. Keďže sa má jednať o stromy, načrtneme diagramy súvislých grafov bez kružníc, v ktorých počet hrán je o jednu menej ako počet vrcholov. Najprv uvažujme stromy, ktoré obsahujú iba vrcholy stupňov 2,1 a 0. Potom také, ktoré obsahujú aspoň jeden vrchol stupňa 3. A nakoniec také stromy, ktoré obsahujú vrchol stupňa 4 alebo 5. Teda existuje štrnásť neizomorfných súvislých grafov bez kružníc s $0, 1, \ldots, 5$ hranami.

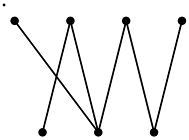


∎

Príklad 6.3.2 Načrtnime diagram ľubovoľnej kostry grafu a) $K_{3,4}$, b) $\overline{K}_{3,4}$.

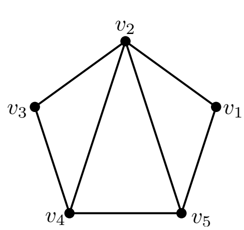
Riešenie. Kostra grafu je súvislý podgraf bez kružníc obsahujúci všetky vrcholy. Využijeme diagramy uvedených grafov načrtnuté v príklade 6.1.3

a) Jedna z kostier grafu $K_{3,4}$:



b) Graf $\overline{K}_{3,4}$ nemá kostru, nakoľko to nie je súvislý graf. ∎

Príklad 6.3.3 Vypočítajme počet rôznych kostier grafu, ktorého diagram je na obrázku.



Riešenie. Najprv napíšeme maticu susednosti B daného grafu a diagonálnu maticu D, ktorá má na hlavnej diagonále stupne vrcholov:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

počet kostier grafu je

$$p(T) = \det(D - B)_i.$$

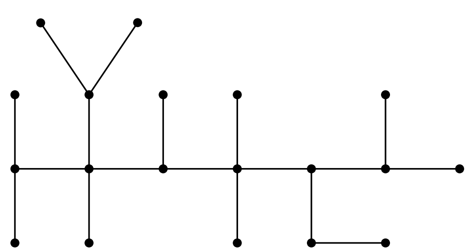
Zvoľme $i = 2$ (druhý riadok obsahuje najviac nenulových prvkov).

$$p(T) = \det(D - B)_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

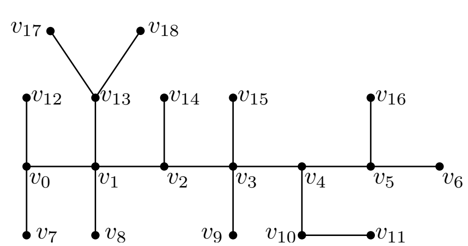
$$= 2 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(18 - 2 - 3) + (-6 + 1) = 21.$$

Daný graf má 21 rôznych (vrátane izomorfných) kostier. ■

Príklad 6.3.4 Vypočítajme priemer, polomer a stred grafu G, ktorého diagram je

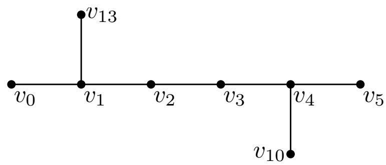


Riešenie. Najprv označíme vrcholy grafu.

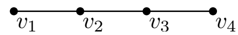


Daný graf je strom. Môžeme postupovať tak, že vytvoríme grafy $G_1, G_2, \ldots, G_k$ a to tak, že graf G_{i+1} vznikne z grafu G_i vynechaním vrcholov stupňa 1 (a teda aj hrán, ktoré s nimi incidujú). Vynechané vrcholy patrili k „najvzdialenejším“. Každým takým vynechaním sa excentricita každého vrchola v tomto novom grafe zníži o 1. Potom priemer nového grafu sa zníži o 2 a polomer o 1. Postupujeme dovtedy, kým nezískame jednovrcholový resp. dvojvrcholový strom. Pre náš graf dostávame týmto postupom nasledujúce grafy:

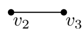
G_1



G_2



G_3



Pre posledný graf G_3 určíme priemer, polomer a stred. $P(G_3) = r(G_3) = 1$, stredy sú vrcholy v_2, v_3. Teraz určíme priemer a polomer predchádzajúcich grafov. Teda $P(G_2) = 3$, $r(G_2) = 2$, $P(G_1) = 5$, $r(G_1) = 3$ a $P(G) = 7$ a $r(G) = 4$. Stredy grafu G sú rovnaké ako stredy grafu G_3. ∎

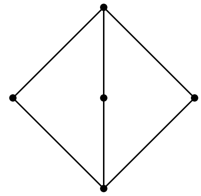
Úlohy

6.1 Aký je počet kostier grafu K_5?

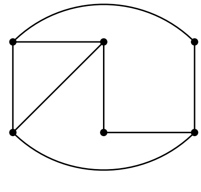
6.2 Načrtnite diagramy všetkých neizomorfných kostier grafu K_4.

6.3 Načrtnite diagramy všetkých kostier grafu K_4.

6.4 Určte (bez kreslenia diagramu) počet kostier grafu, ktorého diagram je



6.5 Určte (bez kreslenia diagramu) počet kostier grafu, ktorého diagram je



Načrtnite jednu z nich.

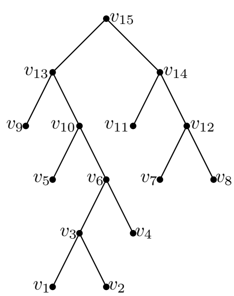
6.6 Určte (bez kreslenia diagramu) počet kostier grafu, ktorého matica susednosti je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

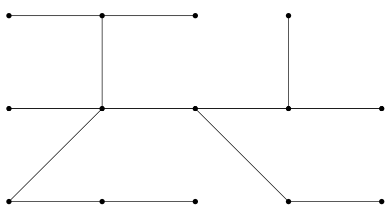
6.7 Koľko neizomorfných kostier obsahuje kružnica C_n, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 3$?

6.8 Určte priemer, polomer a stred grafu G, ktorého diagram je

a)



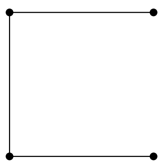
b)

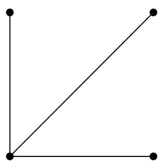


Výsledky

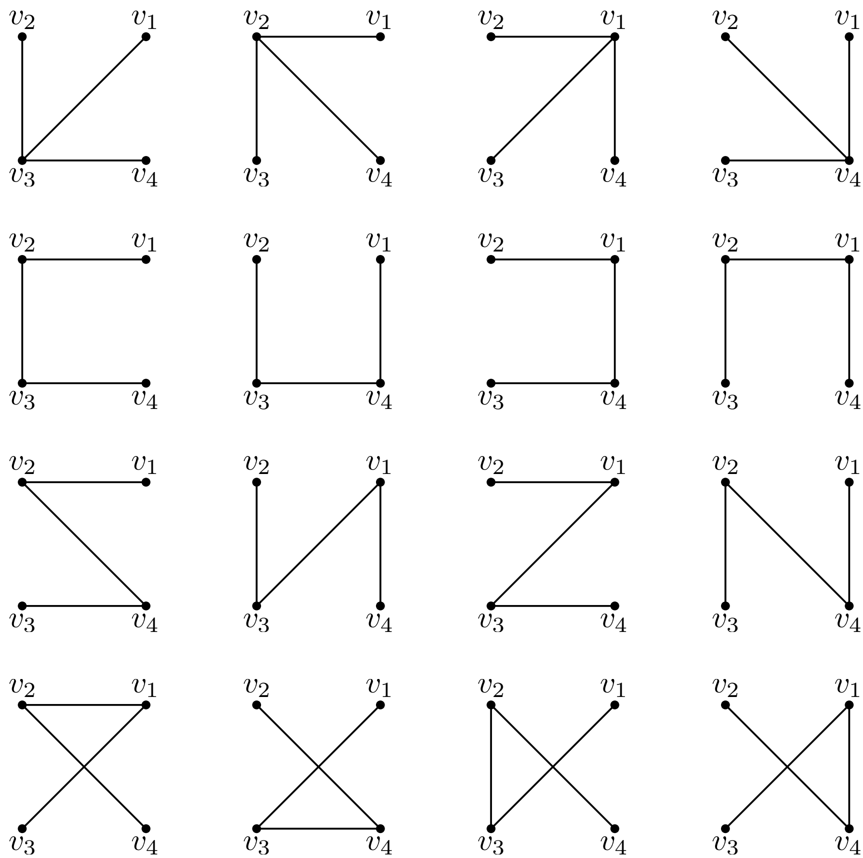
6.1 $5^3 = 125$

6.2 Neizomorfné kostry grafu K_4:





6.3 Kostry grafu K_4:



6.4 12

6.5 35

6.6 1

6.7 1

6.8 a) $P(G) = 8$, $r(G) = 4$, stredy: v_{13},
b) $P(G) = 6$, $r(G) = 3$, stred: vrchol stupňa 4.

6.4 Farbenie grafov

6.4.1 Farbenie vrcholov grafov

Chceme nájsť minimálny počet farieb, pomocou ktorých vieme zafarbiť vrcholy grafu $G = (V, H)$ tak, aby každá hrana incidovala s vrcholmi zafarbenými rôznymi farbami. Toto číslo nazývame **chromatické číslo** grafu G. Označujeme $\chi(G)$.

Veta 6.4.1 *Nech m je maximum zo všetkých stupňov vrcholov grafu $G = (V, H)$. Potom*

$$\chi(G) \leqq m + 1.$$

Veta 6.4.2 *Každý strom s aspoň jednou hranou má chromatické číslo 2.*

Veta 6.4.3 *Graf $G = (V, H)$ ($V \neq \emptyset$) má chromatické číslo 2 práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

Bipartitný graf je graf, ktorého chromatické číslo je 2.

6.4.2 Farbenie hrán grafov

Chceme nájsť minimálny počet farieb, pomocou ktorých vieme zafarbiť hrany grafu $G = (V, H)$ tak, aby každý vrchol incidoval s hranami zafarbenými rôznymi farbami. Toto číslo nazývame **chromatický index** grafu G. Označujeme $\overline{\chi}(G)$.

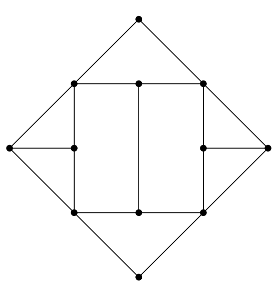
Veta 6.4.4 *Nech m je maximum zo všetkých stupňov vrcholov grafu $G = (V, H)$. Potom*

$$m \leqq \overline{\chi}(G) \leqq m + 1.$$

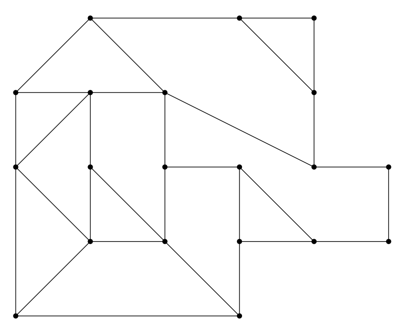
Úlohy

6.1 Určte chromatické číslo a chromatický index nasledujúcich grafov:

a)

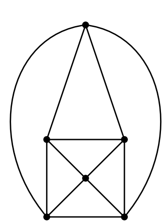


b)

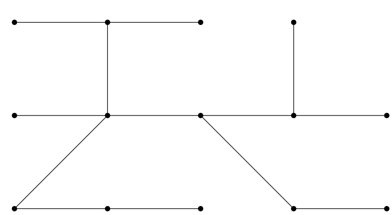


c) K_5 d) K_4 e) C_7 f) C_6 g) Petersenov graf (priklad 6.5.4 h))

h)



i)



Výsledky

6.1 a) $\chi(G) = 3,\ \overline{\chi}(G) = 4$
b) $\chi(G) = 3,\ \overline{\chi}(G) = 4$
c) $\chi(K_5) = 5,\ \overline{\chi}(K_5) = 5$
d) $\chi(K_4) = 4,\ \overline{\chi}(K_4) = 3$
e) $\chi(C_7) = 3,\ \overline{\chi}(C_7) = 3$
f) $\chi(C_6) = 2,\ \overline{\chi}(C_6) = 2$
g) $\chi(G) = 3,\ \overline{\chi}(G) = 4$
h) $\chi(G) = 5,\ \overline{\chi}(G) = 4$
i) $\chi(G) = 2,\ \overline{\chi}(G) = 4.$

6.5 Hamiltonovské, eulerovské, planárne grafy

Definícia 6.5.1 *Graf $G = (V, H)$ sa nazýva* **eulerovský** *práve vtedy, keď existuje uzavretý ťah, ktorý obsahuje všetky hrany grafu. Tento ťah sa nazýva* **eulerovský**.

Veta 6.5.1 *Graf $G = (V, H)$ je eulerovský práve vtedy, keď je súvislý a každý jeho vrchol má párny stupeň.*

Definícia 6.5.2 *Graf $G = (V, H)$ sa nazýva* **hamiltonovský** *práve vtedy, keď má kružnicu, ktorá obsahuje všetky vrcholy (***hamiltonovská kružnica***).*

Ak graf je bipartitný a jeho partície vrcholov majú rôzny počet prvkov, tak tento graf nie je hamiltonovský.

Veta 6.5.2 *Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$, $n \geqq 3$ je graf. Ak stupeň každého vrchola je aspoň $\frac{n}{2}$, tak graf G je hamiltonovský.*

Veta 6.5.3 *Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$, $n \geqq 3$ je graf. Ak pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy u, v platí $\delta(u) + \delta(v) \geqq n$, tak graf G je hamiltonovský.*

Definícia 6.5.3 *Graf $G = (V, H)$ sa nazýva* **planárny** *práve vtedy, keď existuje jeho diagram v rovine, že každé dve hrany majú spoločné nanajvýš krajné vrcholy.*

Diagram planárneho grafu, v ktorom sa nepretínajú hrany, rozdeľuje rovinu na disjunktné oblasti, ktoré nazývame **oblasti planárneho grafu**.

Veta 6.5.4 *(***Eulerova veta***) Nech $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf. Nech r je počet oblastí grafu G. Potom platí*

$$|H| - |V| + 2 = r.$$

Dôsledok 6.5.1 *Ak $G = (V, H)$ je súvislý a planárny graf, tak $|H| \leqq 3\,|V| - 6$.*

Dôsledok 6.5.2 *Ak $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf bez trojuholníkov, tak $|H| \leqq 2\,|V| - 4$.*

Dôsledok 6.5.3 *Každý planárny graf obsahuje aspoň jeden vrchol stupňa najviac 5.*

Dôsledok 6.5.4 *Grafy K_5 aj $K_{3,3}$ nie sú planárne.*

Príklad 6.5.1 Dokážme dôsledok 6.5.1.

Riešenie. Označme r počet oblastí planárneho grafu. Každá oblasť planárneho grafu má na obvode aspoň 3 hrany, pričom každú hranu započítavame do dvoch priľahlých oblastí. Teda platí $2\,|H| \geqq 3r$, z čoho dostávame $\frac{2}{3}\,|H| \geqq r$. Dosaďme do Eulerovho vzťahu $|H| - |V| + 2 = r$. Dostaneme $\frac{2}{3}\,|H| \geqq r = |H| - |V| + 2$. Teda $-\frac{1}{3}\,|H| \geqq -\,|V| + 2$, odtiaľ $|H| \leqq 3\,|V| - 6$. ■

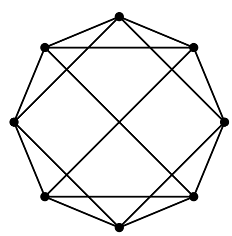
Majme graf G s aspoň jednou hranou. Ak z neho vynecháme hranu $\{u, v\}$ a nahradíme ju dvoma novými hranami $\{u, z\}$ a $\{z, v\}$, hovoríme, že nový graf vznikol z grafu G **rozpolením** hrany $\{u, v\}$.

Definícia 6.5.4 *Dva grafy sa nazývajú* **homeomorfné** *práve vtedy, keď sú izomorfné alebo dostaneme izomorfné grafy konečným počtom rozpoľovaní hrán v týchto grafoch.*

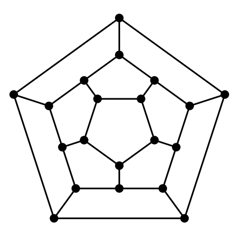
Veta 6.5.5 *(***Kuratowského veta***) Graf G je planárny práve vtedy, keď neobsahuje podgraf homeomorfný s grafom K_5 ani s grafom $K_{3,3}$.*

Príklad 6.5.2 Určme, či sa daný graf je eulerovský resp. hamiltonovský.

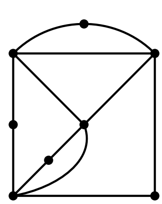
a)



b)



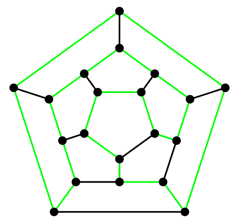
c)



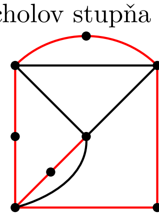
Riešenie.

a) Každý vrchol má párny stupeň a je súvislý, teda graf je eulerovský. Teda v grafe existuje eulerovský ťah, jeho nájdenie ponechávame na čitateľa. A tento graf je aj hamiltonovský, nakoľko každý vrchol má stupeň aspoň $\frac{|V|}{2}$. Teda existuje hamiltonovská kružnica, ktorú čitateľ nájde veľmi ľahko.

b) Graf nie je eulerovský, lebo nemá všetky vrcholy párneho stupňa. Tento graf je hamiltonovský, keďže existuje hamiltonovská kružnica (je vyznačená zelenou farbou).

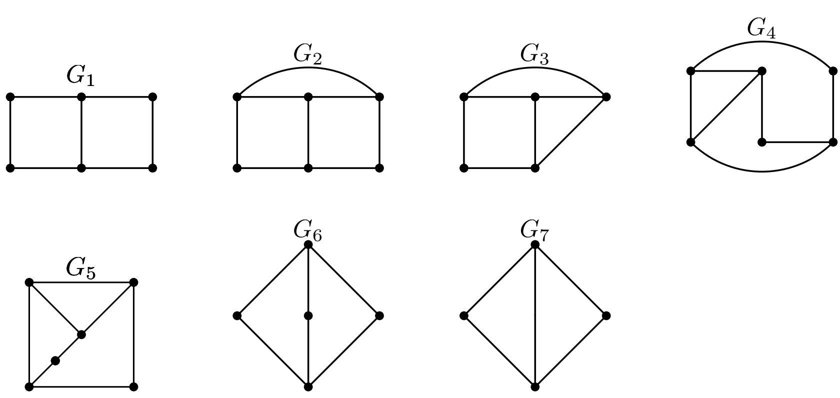


c) Každý vrchol má párny stupeň a je súvislý, graf je eulerovský. Graf nie je hamiltonovský, nakoľko neexistuje hamiltonovská kružnica. Ak by existovala, musela by obsahovať všetky hrany vyznačené červenou farbou (vďaka tomu, že graf obsahuje viacero vrcholov stupňa dva), čo nie je možné.



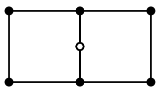
■

Príklad 6.5.3 Ktoré z nasledujúcich grafov sú homeomorfné?

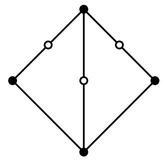


Riešenie. Grafy G_1, G_6 a G_7 sú homeomorfné, keďže v G_6 stačí pridať dva vrcholy stupňa dva, ktoré vzniknú rozpolením dvoch hrán (sú vyznačené prázdným krúžkom), v G_7 stačí pridať tri vrcholy stupňa dva, ktoré vzniknú rozpolením troch hrán a v G_1 stačí pridať jeden vrchol stupňa dva, ktorý vznikne rozpolením jednej hrany. Takto získané grafy budú izomorfné.

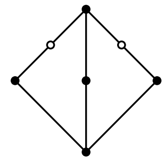
$\widetilde{G}_1$



$\widetilde{G}_6$

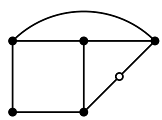


$\widetilde{G}_7$



Grafy G_2, G_3, G_4 a G_5 sú homeomorfné, keďže G_2, G_4 a G_5 sú izomorfné, všetky tri vznikli z K_4 rozpolením dvoch susedných hrán a v G_3 stačí pridať jeden vrchol stupňa dva, ktorý vznikne rozpolením jednej hrany a tým bude izomorfný s ostatnými.

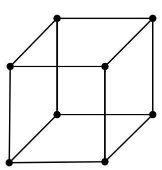
$\widetilde{G}_3$



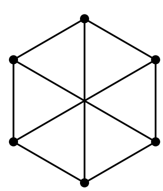
■

Príklad 6.5.4 Určme, či daný graf je planárny. Ak je planárny, prekreslíme jeho diagram bez pretínania hrán, v opačnom prípade ukážeme, že obsahuje podgraf, ktorý je homeomorfný s grafom $K_{3,3}$ alebo s grafom K_5.

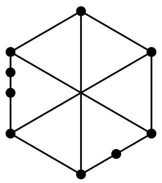
a)



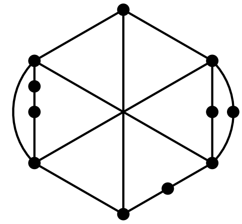
b)



c)

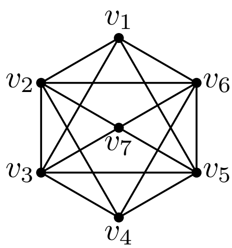


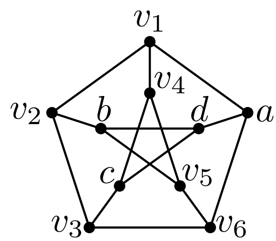
d)



e)

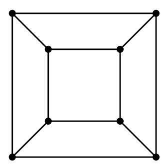
f)





Riešenie. Podľa Kuratowského vety platí, že graf je planárny práve vtedy, keď neobsahuje podgraf homeomorfný ani s $K_{3,3}$ ani s K_5.

a) Diagram tohto grafu vieme prekresliť bez pretínania sa hrán, teda daný graf je planárny.



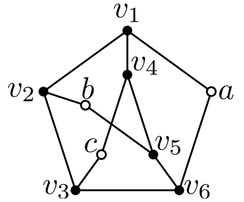
b) Graf je izomorfný s grafom $K_{3,3}$, teda nie je planárny.

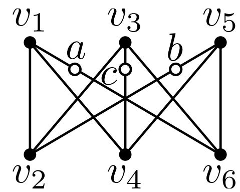
c) Tento graf je homeomorfný s grafom $K_{3,3}$, teda tiež nie je planárny.

d) Ani tento graf nie je planárny, keďže obsahuje podgraf (vznikne odobratím jednej hrany a jedného vrchola) homeomorfný s $K_{3,3}$.

e) Označme daný graf G. Najprv skúšame prekresliť diagram grafu bez pretínania hrán. Keďže sa nám to nedarí, skúsme nájsť podgraf H tohto grafu, ktorý bude izomorfný napr. s grafom K_5 (nakoľko každý vrchol v G má stupeň aspoň 4). Nech v hľadanom podgrafe H je vrchol v_7 a všetky hrany s ním incidentné. Teda potom aj vrcholy v_2, v_3, v_5, v_6. Pridajme k H všetky hrany pôvodného grafu G, ktoré incidujú s ľubovoľnými dvoma z týchto vrcholov. Sú to hrany $\{v_2, v_3\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_2, v_6\}$. Dvojice vrcholov v_2, v_5 a v_3, v_6 nie sú susedné v H. Ale keď pridáme do H hrany $\{v_2, v_1\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_3, v_4\}$ a $\{v_4, v_6\}$, získame síce ďalšie dva vrcholy v_1 a v_4, ale tie budú mať v podgrafe H stupeň dva, čo znamená, že vznikli rozpolením hrán $\{v_2, v_5\}$ a $\{v_3, v_6\}$. Takto vytvorený graf H je podgrafom grafu G (H vznikol z G vynechaním hrán $\{v_2, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_3, v_1\}$ a $\{v_1, v_6\}$ z G) a je homeomorfný s grafom K_5. Teda graf G nie je planány. Je možné, že graf G obsahuje tiež podgraf homeomorfný s grafom $K_{3,3}$. čitateľovi odporúčame overiť si to.

f) Graf, ktorého diagram je na obrázku, sa nazýva Petersenov graf. Ukážeme, že to nie je planárny graf. Nájdeme jeho podgraf homeomorfný s grafom $K_{3,3}$ (daný graf neobsahuje podgraf homeomorfný s K_5, keďže vrcholy sú stupňa iba 3). Vynechajme z Petersenovho grafu ľubovoľný vrchol, napr. d. Získame graf s deviatimi vrcholmi, pričom šesť vrcholov bude mať stupeň 3 a tri vrcholy budú mať stupeň dva. Diagram získaného grafu prekreslíme. Teraz je zrejmé, že graf je homeomorfný s grafom $K_{3,3}$. Teda Petersenov graf nie je planárny.





■

Príklad 6.5.5 Dokážme, že graf K_5 nie je planárny.

Riešenie. Graf K_5 má 5 vrcholov a 10 hrán. Využijeme tvrdenie dôsledku 6.5.1. Keďže neplatí $10 \leqq 3 \cdot 5 - 6$, tak graf K_5 nie je planárny. ■

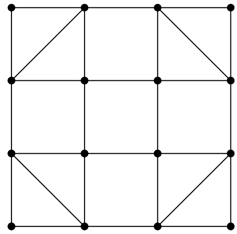
Príklad 6.5.6 Diagram 4-pravidelného, súvislého, planárneho grafu rozdeľuje rovinu na 20 oblastí. Aký je počet vrcholov, počet hrán a aké sú stupne vrcholov tohto grafu?

Riešenie. Máme dané $r = 20$. Keďže graf je 4-pravidelný, pre ľubovoľný vrchol v_i je $\delta(v_i) = 4$. Dosadíme do vzorca $2 \cdot |H| = \sum_{i=1}^{|V|} \delta(v_i)$ a dostávame $2 \cdot |H| = 4 \cdot |V|$. Pretože sa jedná o súvislý, planárny graf, môžeme použiť Eulerov vzorec $r = |H| - |V| + 2$. Potom $20 = |H| - |V| + 2$, odtiaľ $|H| = |V| + 18$. Z týchto dvoch rovníc, dostávame $|V| = 18$ a $|H| = 36$. ■

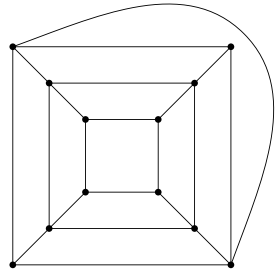
Úlohy

6.1 Určte, či daný graf je eulerovský. V prípade, že nie je, nájdite pokrytie grafu minimálnym počtom otvorených ťahov.

a)

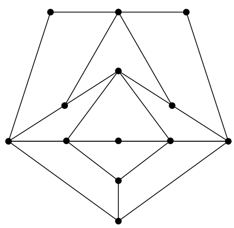


b)

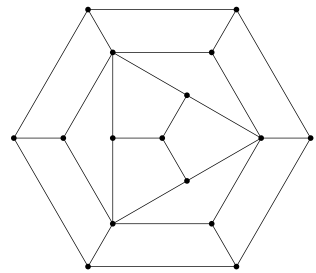


6.2 Určte, či daný graf je hamiltonovský. Ak je hamiltonovský, nájdite hamiltonovskú kružnicu a ak nie je, tak zdôvodnite prečo.

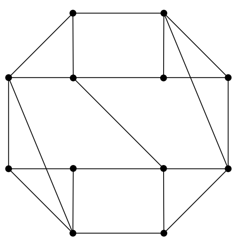
a)



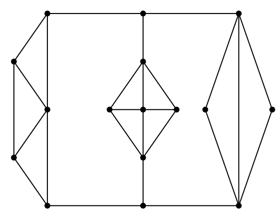
b)



c)



d)



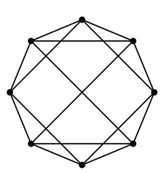
6.3 Dokážte, že pre ľubovoľný, súvislý, planárny graf $G = (V, H)$ bez trojuholníkov platí $|H| \leqq 2\,|V| - 4$.

6.4 Dokážte, že graf $K_{3,3}$ nie je planárny.

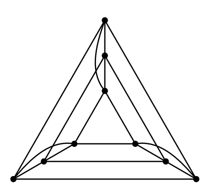
6.5 Aká je nutná a postačujúca podmienka, aby kompletný bipartitný graf $K_{m,n}$ bol planárny?

6.6 Určte, či daný graf je planárny. Ak je planárny, prekreslite jeho diagram bez pretínania hrán, inak ukážte, že obsahuje podgraf, ktorý je homeomorfný s $K_{3,3}$ alebo s K_5.

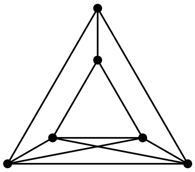
a)



b)

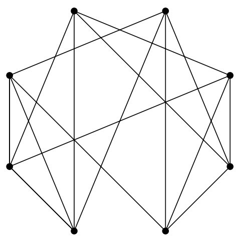


c)

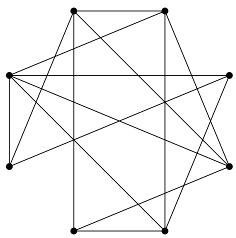


d) K_7

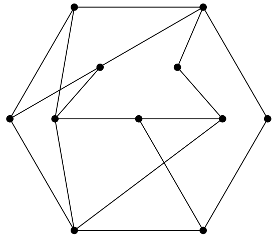
e)



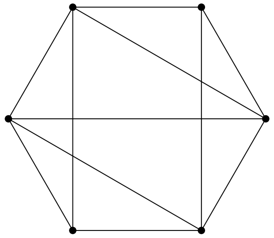
f)



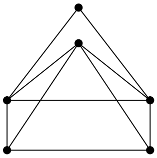
g)



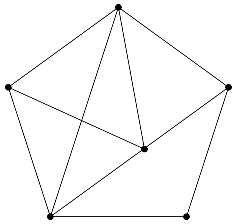
h)



i)



j)



6.7 Načrtnite diagram pravidelného grafu, ktorého každý vrchol má stupeň 4, je planárny a má najmenší možný počet vrcholov.

6.8 Vynechajte z grafu $K_{3,3}$ resp. K_5 ľubovoľnú hranu a ukážte, že je planárny.

Výsledky

6.1 a) Áno.
b) Nie. Keďže v grafe je šesť vrcholov nepárneho stupňa, pokrytie 3 otvorenými ťahmi, pričom každý ťah začína a konči vo vrchole nepárneho stupňa, je minimálne.

6.2 a) Nie. Daný graf má chromatické číslo dva, teda je bipartitný, ale jednotlivé partície vrcholov majú 6 a 7 prvkov, teda graf nie je hamiltonovský.
b) Nie. Graf je bipartitný s rôznym počtom vrcholov v jednotlivých partíciach, teda nie je hamiltonovský.
c) Áno.
d) Nie. Lebo v grafe existujú dva vrcholy, odobratím ktorých vzniknú tri komponenty.

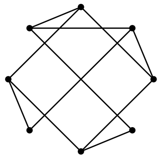
6.3 Keďže graf neobsahuje trojuholníky, každá stena planárneho grafu má na obvode aspoň 4 hrany, pričom každú hranu započítavame do dvoch priľahlých stien. Teda platí : $2\,|H| \geqq 4r$, z čoho $\frac{1}{2}\,|H| \geqq r$. Dosadením do Eulerovho vzťahu dostaneme $\frac{1}{2}\,|H| \geqq |H| - |V| + 2$. Teda $-\frac{1}{2}\,|H| \geqq -|V| + 2$, odtiaľ $|H| \leqq 2\,|V| - 4$.

6.4 Graf $K_{3,3}$ má 6 vrcholov a 9 hrán. Na základe predchádzajúcej úlohy graf $K_{3,3}$ nemôže byť planárny, lebo neplatí $9 \leqq 2 \cdot 6 - 4$.

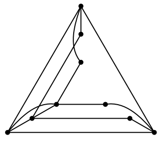
6.5 $\min\{m, n\} \leqq 2$.

6.6

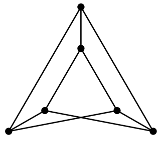
a) Nie. Obsahuje podgraf homeomorfný s $K_{3,3}$.



b) Nie. Obsahuje podgraf homeomorfný s K_5 (aj s $K_{3,3}$).



c) Nie. Obsahuje podgraf homeomorfný s $K_{3,3}$.



d) Nie. Obsahuje podgraf K_5.

e) Áno.

f) Nie. Obsahuje podgraf homeomorfný s $K_{3,3}$.

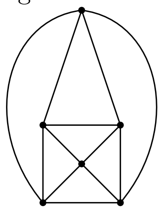
g) Nie.

h) Nie. Obsahuje podgraf homeomorfný s $K_{3,3}$.

i) Áno.

j) Áno.

6.7 Keďže graf K_5 nie je planárny, počet vrcholov 4-pravidelného planárneho grafu musí byť aspoň šesť. Diagram jedného z takýchto grafov je na obrázku.



6.8 Ponechávame na čitateľa.

Kapitola 7

Digrafy

7.1 Základné pojmy

Definícia 7.1.1 *Nech* $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$*. Nech* H *je podmnožina množiny* $V \times \times V - \{(v_1, v_1), \dots, (v_n, v_n)\}$*.* **Digraf** $\overrightarrow{G}$ *je usporiadaná dvojica* $\overrightarrow{G} = (V, H)$*. Ak* (v_i, v_j) *je hrana digrafu, tak vrchol* v_i *sa nazýva* **začiatočný** *a vrchol* v_j **koncový vrchol** *tejto hrany.*

Definícia 7.1.2 *Majme digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H)$*. Nech* $v \in V$*.*

Vonkajším stupňom *vrchola* v*,* $\delta^+(v)$*, sa nazýva počet hrán, pre ktoré vrchol* v *je začiatočným vrcholom.* **Vnútorným stupňom** *vrchola* v*,* $\delta^-(v)$*, sa nazýva počet hrán, pre ktoré vrchol* v *je koncovým vrcholom.*

Vrchol v *sa nazýva* **rovnovážny** *práve vtedy, keď* $\delta^+(v) = \delta^-(v)$*.*

Vrchol v *sa nazýva* **prameň** *práve vtedy, keď* $\delta^+(v) > 0$ *a* $\delta^-(v) = 0$*.*

Vrchol v *sa nazýva* **ústie** *práve vtedy, keď* $\delta^+(v) = 0$ *a* $\delta^-(v) > 0$*.*

Definícia 7.1.3 **Sled** *v digrafe je taká postupnosť vrcholov a hrán, ktorej odpovedajúca postupnosť po zrušení orientácie hrán je sledom v grafe.* **Spojenie** *v digrafe je sled, v ktorom sa zachováva orientácia hrán.* **Orientovaný ťah** *v digrafe je spojenie, ktorému po zrušení orientácie hrán odpovedá ťah v grafe.* **Dráha** *v digrafe je spojenie, ktorému po zrušení orientácie hrán odpovedá cesta v grafe.* **Cyklus** *v digrafe je uzavretá dráha.*

Definícia 7.1.4 *Digraf je* **súvislý***, ak graf, ktorý vznikne zrušením orientácie hrán, je súvislý.*

Definícia 7.1.5 *Nech* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je súvislý digraf. Vzdialenosť v digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *z vrcholu* u *do vrcholu* v*,* $\overrightarrow{d}(u, v)$*, je dĺžka najkratšej dráhy z vrcholu* u *do vrcholu* v*.*

Definícia 7.1.6 *Digraf sa nazýva* **acyklický** *práve vtedy, keď neobsahuje cyklus.*

Veta 7.1.1 *Ak digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je acyklický, tak obsahuje vrchol, ktorý je prameňom.*

Veta 7.1.2 *Digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je acyklický práve vtedy, keď vrcholy digrafu vieme označiť číslami* $1, 2, \ldots, |V|$ *tak, že každá hrana* (i, j) *spĺňa podmienku* $i < j$.

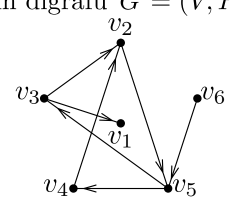
Definícia 7.1.7 *Nech* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je digraf, kde* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$. **Matica incidencie** *digrafu* $\overrightarrow{G}$ *je matica* $A = (a_{ij})$ *typu* (n, m), *pričom*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } h_j = (v_i, v_k) \text{ pre nejaké } v_k \in V, \\ -1 & \text{ak } h_j = (v_k, v_i) \text{ pre nejaké } v_k \in V, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Definícia 7.1.8 *Nech* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je digraf, kde* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. **Matica susednosti** *digrafu* $\overrightarrow{G}$ *je štvorcová matica* $B = (b_{ij})$ *rádu* n, *pričom*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } (v_i, v_j) \in H, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Príklad 7.1.1 Majme diagram digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$.



Napíšme vonkajšie a vnútorné stupne všetkých vrcholov. Je niektorý vrchol rovnovážny, prameň, ústie? Napíšme ľubovoľný sled, spojenie, orientovaný ťah, dráhu a cyklus.

Riešenie. Množina vrcholov je $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Každú (orientovanú) hranu zapíšeme pomocou dvoch vrcholov, pričom prvý vrchol je začiatočný vrchol hrany a druhý vrchol je koncový vrchol hrany. Množina hrán daného grafu je $H = \{(v_3, v_2), (v_4, v_2), (v_2, v_5), (v_5, v_3), (v_5, v_4), (v_6, v_5), (v_3, v_1)\}$. Stupne vrcholov sú $\delta^+(v_1) = 0$, $\delta^+(v_2) = 1$, $\delta^+(v_3) = 2$, $\delta^+(v_4) = 1$, $\delta^+(v_5) = 2$, $\delta^+(v_6) = 1$ a $\delta^-(v_1) = 1$, $\delta^-(v_2) = 2$, $\delta^-(v_3) = 1$, $\delta^-(v_4) = 1$, $\delta^-(v_5) = 2$, $\delta^-(v_6) = 0$.

Vrcholy v_4, v_5 sú rovnovážne, nakoľko ich vonkajšie a vnútorné stupne sú rovnaké. Vrchol v_1 je ústím, keďže má kladný iba vnútorný stupeň. Vrchol v_6 je prameňom, lebo má kladný iba vonkajší stupeň.

Sledom je napríklad postupnosť vrcholov a hrán (medzi dvoma za sebou idúcimi vrcholmi) v_4, v_5, v_3, v_1, v_3.

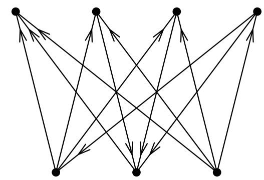
Spojením je napríklad postupnosť v_5, v_4, v_2, v_5, v_4.

Orientovaným ťahom je postupnosť v_5, v_4, v_2, v_5, v_3, v_2.

Dráhou je postupnosť v_5, v_4, v_2.

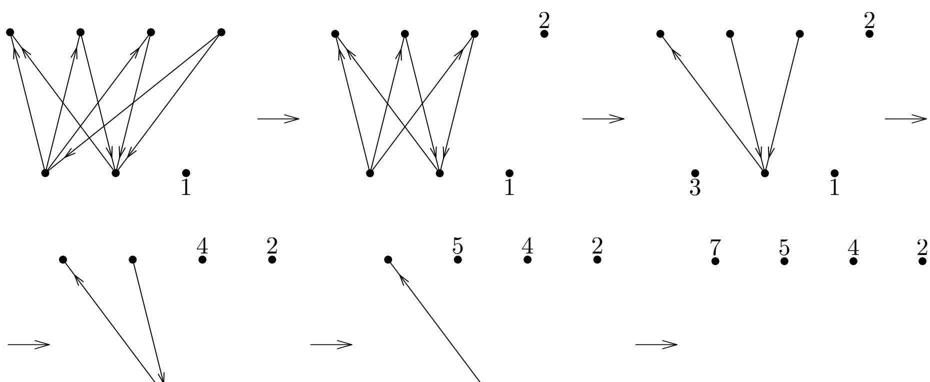
Cyklom je postupnosť v_4, v_2, v_5, v_4. ∎

Príklad 7.1.2 Určme, či daný digraf je acyklický.

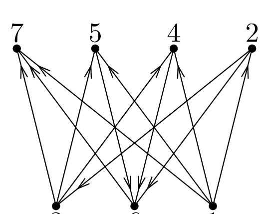


Riešenie. Pokúsme sa očíslovať vrcholy daného digrafu tak, aby bola splnená podmienka uvedená vo vete 7.1.2. Teda, aby začiatočný vrchol každej hrany mal menšie číslo ako jej koncový vrchol. Ak vrcholy takto očíslujeme, daný digraf je acyklický. Ak také očíslovanie neexistuje, znamená to, že digraf nie je acyklický, a teda obsahuje cyklus. Keďže vieme, že v acyklickom digrafe existuje prameň (veta 7.1.1), budeme postupovať tak, že nájdeme v zadanom digrafe prameň a označíme ho číslom 1. Vynecháme všetky hrany, ktoré z neho vychádzajú. V takto získanom digrafe opäť nájdeme prameň, dáme mu číslo 2 a znovu vynecháme všetky hrany, ktoré z neho vychádzajú. Postup opakujeme, až kým nie sú očíslované všetky vrcholy (získali sme diskrétny digraf), resp. v niektorom ďalšom digrafe už nevieme nájsť prameň, čo znamená, že tento digraf nie je acyklický. Teda tam existuje cyklus, a teda ani pôvodný digraf nie je acyklický. Ak v niektorom kroku máme na výber z viacerých prameňov, vyberieme ľubovoľný z nich.

Predchádzajúcim postupom dostávame nasledujúce digrafy:

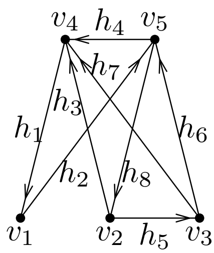


Posledný digraf neobsahuje žiadnu hranu a má všetky vrcholy očíslované, teda pôvodný digraf je acyklický. Diagram digrafu zo zadania s označenými vrcholmi číslami $1, 2, \ldots, 7$ tak, že každá hrana (i, j) spĺňa podmienku $i < j$, je na obrázku:



$\blacksquare$

Príklad 7.1.3 Napíšme maticu susednosti B a maticu incidencie A digrafu $\overrightarrow{G}$, ktorého diagram je na obrázku.



Riešenie. Vrcholy aj hrany sú označené, môžeme napísať obe matice. Matica incidencie je

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matica susednosti je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

Poznámka: V matici incidencii A sa v každom stĺpci nachádzajú čísla 1 a -1 práve raz, ostatné prvky sú nuly. V matici susednosti B, počet jednotiek je rovný počtu hrán v digrafe. Matica B nemusí byť symetrická podľa hlavnej diagonály.

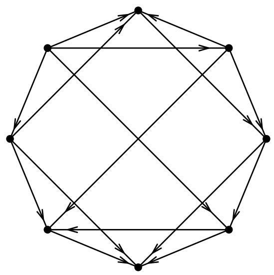
Úlohy

7.1 Načrtnite diagram digrafu, ktorého matica susednosti je $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

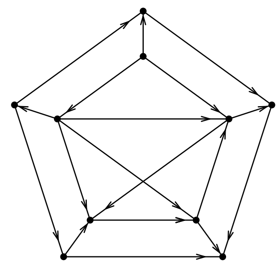
7.2 Načrtnite diagramy všetkých navzájom neizomorfných súvislých digrafov na troch vrcholoch.

7.3 Zistite, či daný digraf je acyklický. Ak áno, tak očíslujte vrcholy podľa vety 7.1.2, a ak nie, tak nájdite cyklus.

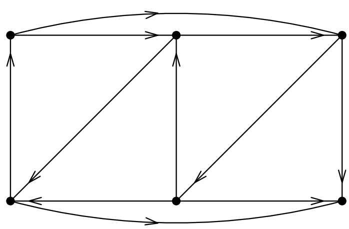
a)



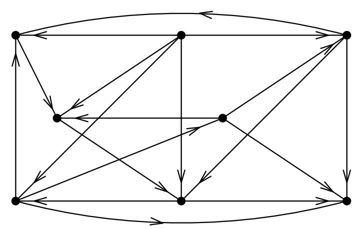
b)



c)



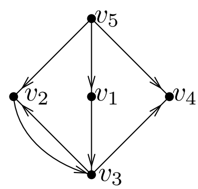
d)



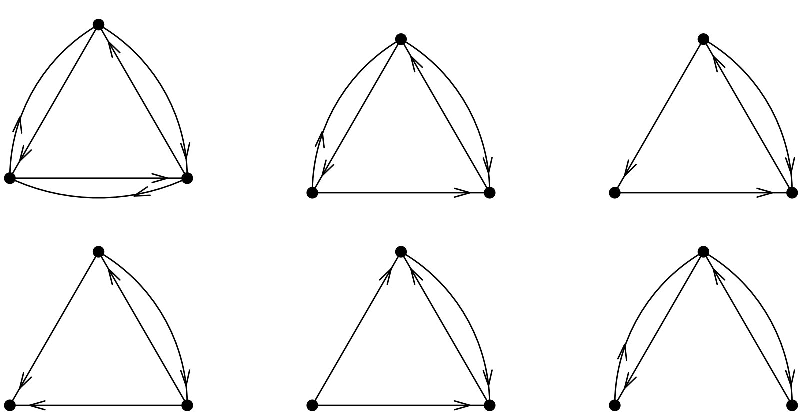
7.4 Majme kružnicu C_n. Koľkými spôsobmi vieme priradiť jej hranám orientáciu tak, aby získaný digraf bol acyklický?

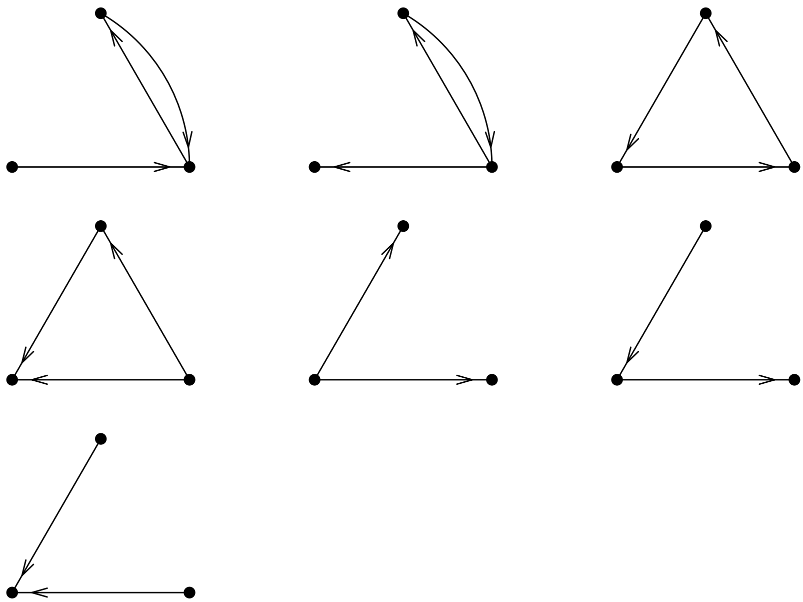
Výsledky

7.1



7.2





7.3 a) Áno. b) Nie. b) Nie. b) Áno.

7.4 $2^n - 2$.

7.2 Orientované stromy a kostry

Definícia 7.2.1 **Orientovaný strom** $\overrightarrow{T}$ *je digraf, ktorý po zrušení orientácie je stromom.*

Definícia 7.2.2 *Nech* $\overrightarrow{T}$ *je orientovaný strom s aspoň dvoma vrcholmi, v ktorom existuje dráha z vrcholu* v *do každého z ostatných vrcholov. Potom* $\overrightarrow{T}_v$ *sa nazýva* **koreňový strom** *a vrchol* v **koreň stromu**.

Definícia 7.2.3 *Koreňový strom* $\overrightarrow{T}_v$*, v ktorom každý vrchol má vonkajší stupeň* 0 *alebo* 2*, sa nazýva* **binárny strom**.

Definícia 7.2.4 *V binárnom strome vrchol, ktorý je ústím, sa nazýva* **list** *(***vonkajší vrchol***). Vrchol, ktorý nie je list, sa nazýva* **vnútorný vrchol**.

Definícia 7.2.5 *Nech* $\overrightarrow{T}_v = (V, H)$ *je binárny strom,* V_e *je množina listov a* V_i *je množina vnútorných vrcholov.*

Hĺbkou hl$(\overrightarrow{T}_v)$ *binárneho stromu* $\overrightarrow{T}_v$ *sa nazýva číslo*

$$hl(\overrightarrow{T}_v) = \max_{u \in V} \overrightarrow{d}(v, u).$$

Vonkajšou dĺžkou $E(\overrightarrow{T}_v)$ *binárneho stromu* $\overrightarrow{T}_v$ *sa nazýva číslo*

$$E(\overrightarrow{T}_v) = \sum_{u \in V_e} \overrightarrow{d}(v,u).$$

Vnútornou dĺžkou $I(\overrightarrow{T}_v)$ *binárneho stromu* $\overrightarrow{T}_v$ *sa nazýva číslo*

$$I(\overrightarrow{T}_v) = \sum_{u \in V_i} \overrightarrow{d}(v,u).$$

Definícia 7.2.6 *Nech* $\overrightarrow{T}_v = (V,H)$ *je binárny strom,* V_e *je množina listov. Nech každému vrcholu* $v_i \in V_e$ *je priradené nezáporné číslo* w_i. **Vonkajšou** w**-dĺžkou** $E_w(\overrightarrow{T}_v)$ *binárneho stromu* $\overrightarrow{T}_v$ *sa nazýva číslo*

$$E_w(\overrightarrow{T}_v) = \sum_{v_i \in V_e} w_i \cdot \overrightarrow{d}(v,v_i).$$

Definícia 7.2.7 *Nech* $\overrightarrow{G}$ *je digraf, ktorý vznikol orientáciou grafu* G. *Nech* K *je kostra grafu* G. *Potom digraf* $\overrightarrow{K}$, *ktorý vznikol orientáciou hrán (rovnakou ako v* $\overrightarrow{G}$*) grafu* K, *sa nazýva* **orientovaná kostra** *digrafu* $\overrightarrow{G}$.

Definícia 7.2.8 *Kostra súvislého digrafu* $\overrightarrow{G}$, *ktorá je koreňový strom, sa nazýva* **koreňová kostra** *digrafu* $\overrightarrow{G}$.

Veta 7.2.1 *Nech* A *je matica incidencie digrafu* $\overrightarrow{G} = (V,H)$, $|V| = n$. *Potom počet všetkých rôznych kostier digrafu* $\overrightarrow{G}$, *ozn.* $p(\overrightarrow{T})$, *vypočítame podľa vzťahu*

$$p(\overrightarrow{T}) = \det(A \cdot A^T)_i,$$

pričom $(A \cdot A^T)_i$ *označuje maticu, ktorú získame z matice* $A \cdot A^T$ *odstránením i-tého riadku a i-tého stĺpca,* $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Poznámka: V predchádzajúcej vete namiesto matice $A \cdot A^T$ môžeme zobrať maticu $D - B - B^T$, pričom B je matica susednosti digrafu $\overrightarrow{G}$ a $D = (d_{ij})$ je štvorcová matica rádu n, kde

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ak } i \neq j, \\ \delta^+(v_i) + \delta^-(v_i) & \text{ak } i = j. \end{cases}$$

Veta 7.2.2 *Počet všetkých rôznych koreňových kostier digrafu* $\overrightarrow{G} = (V,H)$ *s koreňom* $v_s \in V$, *ozn.* $p(\overrightarrow{T}_{v_s})$, *je*

$$p(\overrightarrow{T}_{v_s}) = \det(K_s),$$

kde $K = (k_{ij})$ *je štvorcová matica rádu* n, *pričom*

$$k_{ij} = \begin{cases} \delta^-(v_i), & i = j, \\ -b_{ij}, & i \neq j. \end{cases}$$

Matica K_s *je vytvorená z matice* K *vynechaním s-tého riadku a s-tého stĺpca.*

Príklad 7.2.1 Určme počet všetkých rôznych kostier digrafu $\overrightarrow{G}$ z príkladu 7.1.3. Načrtnime diagram jednej z nich.

Riešenie. Počet všetkých rôznych kostier digrafu $\overrightarrow{G}$ je $p(\overrightarrow{T}) = \det(A{\cdot}A^T)_i$. Ľahko sa presvedčíme (pozri poznámku vyššie), že

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = D - B - B^T.$$

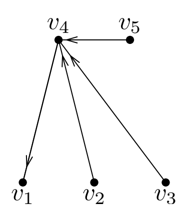
Keďže chceme z poslednej matice vynechať i-ty riadkok a i-ty stĺpec, zvolíme i tak, aby získaná matica mala čo najviac nulových prvkov. Zvoľme $i = 5$ a získaný determinant vypočítajme rozvojom podľa prvého riadku.

$$p(\overrightarrow{T}) = \det(A{\cdot}A^T)_5 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2{\cdot}(-1)^{1+1}{\cdot} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (36 - 1 - 1 - 3 - 3 - 4) + (-9 + 1) = 40.$$

Daný digraf má 40 rôznych kostier.

Diagram jednej z nich:



■

Príklad 7.2.2 Vypočítajme počet všetkých rôznych koreňových kostier digrafu $\overrightarrow{G}$ z príkladu 7.1.3 s koreňom a) v_2, b) v_4.

Načrtnime všetky koreňové kostry s koreňom v_4.

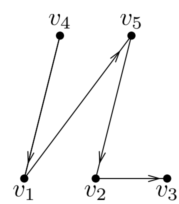
Riešenie. Počet všetkých rôznych koreňových kostier digrafu $\overrightarrow{G}$ s koreňom v_s je $p(\overrightarrow{T}_{v_s}) = \det(K_s)$. Najprv napíšme maticu K (pozri vetu 7.2.2).

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{a)}\ p(\overrightarrow{T}_{v_2}) = \det(K_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5,$$

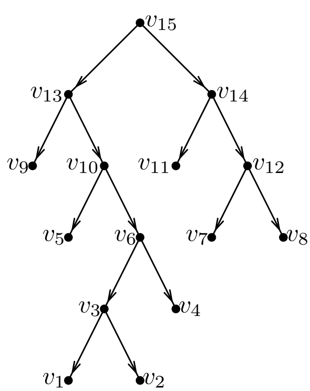
$$\text{b)}\ p(\overrightarrow{T}_{v_4}) = \det(K_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Daný digraf má päť rôznych koreňových kostier s koreňom v_2 a jednu s koreňom v_4. Načrtnime koreňovú kostru s koreňom v_4.



■

Príklad 7.2.3 Majme binárny strom daný diagramom:



Určme, ktoré vrcholy sú listy. Vypočítajme hĺbku, vonkajšiu dĺžku a vnútornú dĺžku stromu.

Riešenie.

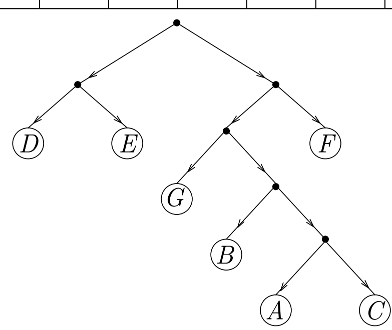
Koreňom tohto stromu je vrchol v_{15}.
Množina listov (vonkajších vrcholov) je $V_e = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9, v_{11}\}$.
Množina vnútorných vrcholov je $V_i = \{v_3, v_6, v_{10}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$.
Hĺbka binárneho stromu $hl(\overrightarrow{T}_{v_{15}}) = \max\limits_{u \in V} \overrightarrow{d}(v_{15}, u) = 5$.
Vonkajšia dĺžka $E(\overrightarrow{T}_{v_{15}}) = \sum\limits_{u \in V_e} \overrightarrow{d}(v_{15}, u) = 2+3+5+5+4+2+3+3 = 27$.
Vnútorná dĺžka $I(\overrightarrow{T}_{v_{15}}) = \sum\limits_{u \in V_i} \overrightarrow{d}(v_{15}, u) = 1+2+3+4+1+2 = 13$. ■

Príklad 7.2.4 Navrhnime optimálne kódovanie znakov pomocou binárnej postupnosti premennej dĺžky, ak pravdepodobnosť výskytu jednotlivých znakov je daná tabuľkou.

znak	A	B	C	D	E	F	G
pravdepodobnosť	$0,02$	$0,1$	$0,02$	$0,23$	$0,15$	$0,35$	$0,13$

Riešenie. Chceme načrtnúť binárny strom s minimálnou vonkajšou w-dĺžkou, ktorého listami budú vrcholy označené ako znaky dané v zadaní. Vrcholy rôzne od týchto znakov budú vnútornými vrcholmi binárneho stromu. To znamená, že listy, ktorých pravdepodobnosť je najmenšia, majú byť od koreňa binárneho stromu najvzdialenejšie. Postupujeme tak, že vyberieme dva znaky s najmenšími pravdepodobnosťami, odstránime ich zo zadanej tabuľky a vytvoríme nový vrchol (bez označenia), ktorý bude v binárnom strome vnútorným vrcholom a spojíme ho s oboma vybranými listami. Pravdepodobnosť tohto vnútorného vrchola (čo je súčet pravdepodobností listov) pridáme do tabuľky. V každom ďalšom kroku vyberieme dve najmenšie pravdepodobnosti (prislúchajúce znaku alebo vnútornému vrcholu), odstránime ich z tabuľky a pridáme do nej nový vrchol, ktorého pravdepodobnosť bude súčet pravdepodobností týchto vybraných vrcholov. Týmto spôsobom pokračujeme až dovtedy, kým nie sú všetky vrcholy použité (a z tabuľky odstránené). Súčasne so zapisovaním do tabuľky, načrtávame aj binárny strom.

A	B	C	D	E	F	G						
$0,02$	$0,1$	$0,02$	$0,23$	$0,15$	$0,35$	$0,13$						
$\times$	$0,1$	$\times$	$0,23$	$0,15$	$0,35$	$0,13$	$0,04$					
	$\times$		$0,23$	$0,15$	$0,35$	$0,13$	$\times$	$0,14$				
			$0,23$	$0,15$	$0,35$	$\times$		$\times$	$0,27$			
			$\times$	$\times$	$0,35$				$0,27$	$0,38$		
					$\times$				$\times$	$0,38$	$0,62$	
										$\times$	$\times$	1



Jeho vonkajšia w-dĺžka je

$E_w(\overrightarrow{T}_v) = \sum\limits_{v_i \in V_e} w_i \cdot \overrightarrow{d}(v, v_i) = 2 \cdot 0,23 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,13 + 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,02 +$
$+ 5 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,35 = 2,45.$

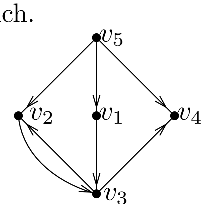
Zakódovanie znakov urobíme tak, že každej hrane v binárnom strome, ktorá smeruje vľavo, priradíme číslo 1, a každej hrane smerujúcej vpravo priradíme číslo 0. Pre každý list, dráhu z koreňa k listu vyjadríme ako postupnosť čísel 0 a 1. Získame nasledujúce kódy znakov.

znak	A	B	C	D	E	F	G
kód	01001	0101	01000	11	10	00	011

■

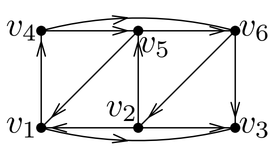
Úlohy

7.5 Určte počet všetkých rôznych kostier digrafu $\overrightarrow{G}$, ktorého diagram je na obrázku. Načrtnite jednu z nich.

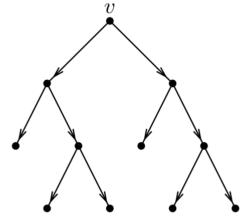


7.6 Vypočítajte počet všetkých rôznych koreňových kostier digrafu $\overrightarrow{G}$ z predchádzajúcej úlohy s koreňom a) v_5, b) v_4.

7.7 Určte počet všetkých rôznych kostier digrafu $\overrightarrow{G}$, ktorého diagram je na obrázku. Načrtnite dve navzájom neizomorfné kostry.



7.8 Vypočítajte vonkajšiu a vnútornú dĺžku binárneho stromu, ktorého diagram je na obrázku:



7.9 Navrhnite optimálne kódovanie znakov pomocou binárnej postupnosti premennej dĺžky, ak pravdepodobnosť výskytu jednotlivých znakov je daná tabuľkou.

a)

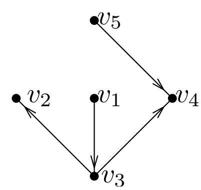
znak	A	B	C	D	E	F
pravdepodobnosť	$0,2$	$0,15$	$0,2$	$0,1$	$0,2$	$0,15$

b)

znak	A	B	C	D	E	F	G	H
pravdepodobnosť	$0,03$	$0,07$	$0,12$	$0,18$	$0,1$	$0,22$	$0,18$	$0,1$

Výsledky

7.5 20.



7.6 a) 6, b) 0.

7.7 224.

7.8 $E(\overrightarrow{T}_v) = 16$, $I(\overrightarrow{T}_v) = 6$.

7.9 Príslušné binárne stromy majú vonkajšiu w-dĺžku: a) 2,60 b) 2,88.

Kapitola 8

Grafové algoritmy

Majme graf $G = (V, H)$ (resp. digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$). Nech $\mathbb{R}^+$ je množina kladných reálnych čísel. Zobrazenie $w : H \to \mathbb{R}^+$ nazývame **hranovým ohodnotením grafu** G (**digrafu** $\overrightarrow{G}$). Pre hranu h_i číslo $w(h_i)$ nazývame **ohodnotenie (váha) hrany** h_i.

V ďalšom budeme hovoriť namiesto hranovo ohodnotený graf (digraf) iba ohodnotený graf (digraf).

8.1 Minimálna kostra grafu

Definícia 8.1.1 *Nech $G = (V, H)$ je súvislý, ohodnotený graf.* **Minimálna kostra grafu** $G = (V, H)$ *je kostra grafu $G = (V, H)$, ktorá má zo všetkých kostier grafu minimálny súčet ohodnotení všetkých jej hrán.*

Súčet ohodnotení hrán kostry budeme tiež nazývať **váha kostry**.

Kruskalov algoritmus
Vstup: Súvislý, ohodnotený graf $G = (V, H)$.
Výstup: Minimálna kostra T.

Nech graf má n vrcholov. Váhy hrán zoradíme do neklesajúcej postupnosti. Začneme s diskrétnym faktorom T daného grafu. Postupne v každej iterácii pridávame do T hranu s najmenším ohodnotením tak, aby nevznikla kružnica. Ak T má $n - 1$ hrán, tak končíme a T je minimálna kostra grafu G.

Ak graf má m hrán, zložitosť Kruskalovho algoritmu je $O(m \cdot \log n)$.

Primov algoritmus
Vstup: Súvislý, ohodnotený graf $G = (V, H)$ s vrcholmi $v_1, v_2, \dots v_n$.
Výstup: Minimálna kostra T.

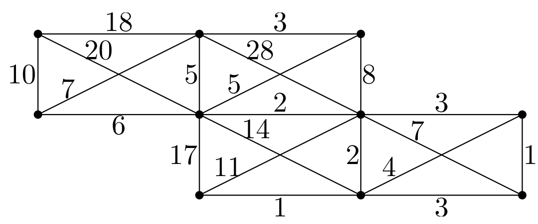
1. Nech T je graf, ktorý obsahuje vrchol v_1 a žiadnu hranu.

2. Ak T má $n - 1$ hrán, tak končíme a T je minimálna kostra grafu G.

3. Zo všetkých hrán grafu G, ktoré nie sú v T a sú incidentné s niektorým vrcholom v T, vyberieme hranu s najnižším ohodnotením, ktorej pridaním do T nevznikne kružnica. Pridáme ju (a aj vrchol, s ktorým inciduje) do T. Ak je viac takých hrán, vyberieme hranu, ktorá inciduje s takým vrcholom v T, ktorý má najmenší index. Ak existuje viac takých hrán, vyberieme tú, ktorá inciduje s vrcholom s najmenším indexom, ktorý nie je v T. Skok na krok 2.

Zložitosť Primovho algoritmu je $O(n^3)$.

Príklad 8.1.1 Určme minimálnu kostru grafu, ktorého diagram je na obrázku



a) Kruskalovým algoritmom,

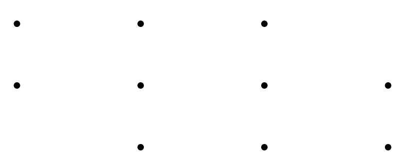
b) Primovým algoritmom.

Riešenie.

a) Ohodnotenia hrán zoradíme do neklesajúcej postupnosti.

$1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 10, 11, 14, 17, 18, 20, 28$

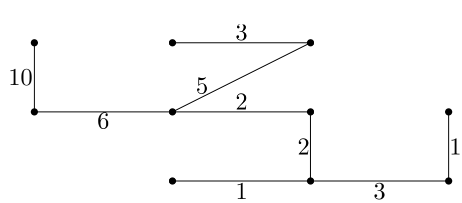
Začneme s diskrétnym grafom.



Postupne do tohto diskrétneho grafu pridávame hrany s najnižším ohodnotením tak, aby nevznikla kružnica. Ak pridáme hranu, jej váhu podčiarkneme, inak jej váhu preskočíme.

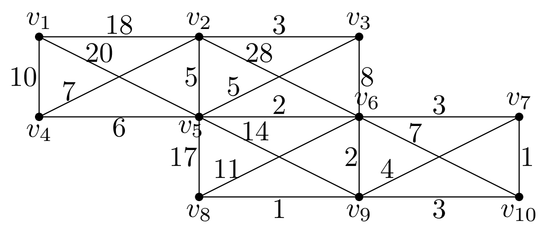
$\underline{1}, \underline{1}, \underline{2}, 2, \underline{3}, 3, \underline{3}, 4, \underline{5}, 5, \underline{6}, 7, 7, 7, 8, \underline{1}0, 11, 14, 18, 20, 28$

Získame minimálnu kostru:

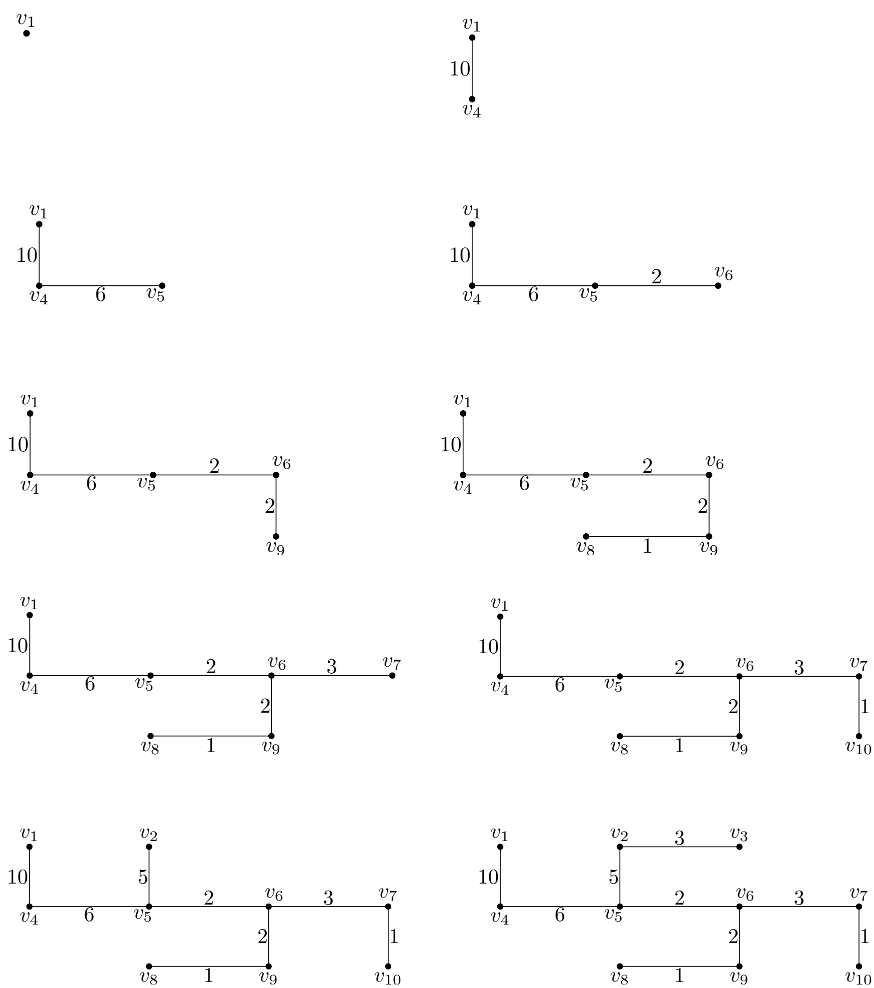


Jej váha je 33. Poznamenajme, že to nie je jediná minimálna kostra, ktorú môžeme týmto algoritmom získať.

b) Najprv musíme označiť vrcholy daného grafu.



Začneme s grafom, ktorý obsahuje iba vrchol v_1. Postupujeme podľa algoritmu. V každom kroku pridávame vrchol a hranu. Po jednotlivých krokoch sa nasledovne rozširuje počiatočný jednovrcholový graf:

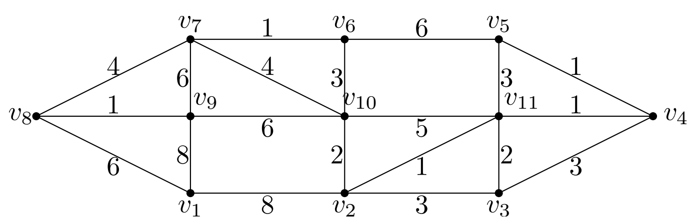


Posledný graf je minimálnou kostrou grafu zo zadania. Jej váha je 33. Pri danom označení vrcholov grafu, Primovým algoritmom získame jedinú kostru.■

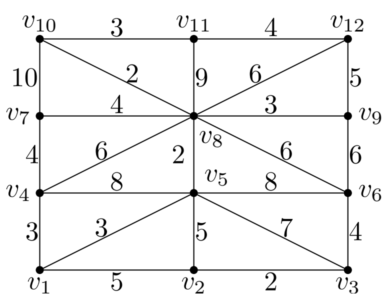
Úlohy

8.1 Určte minimálnu kostru daného grafu Kruskalovým algoritmom

a)

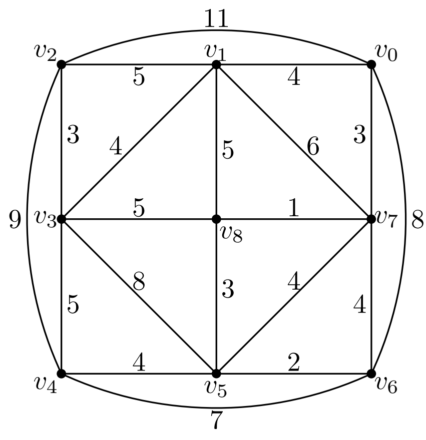


b)

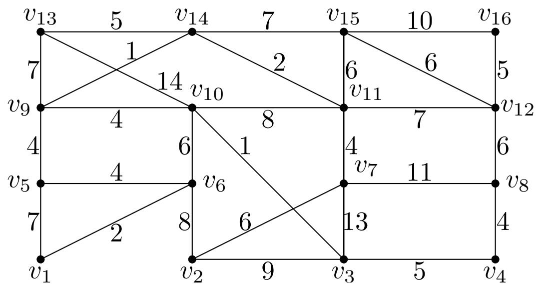


8.2 Určte minimálnu kostru daného grafu Primovým algoritmom

a)



b)



8.3 Existuje ohodnotený graf, ktorého všetky minimálne kostry získané Primovým algoritmom (pri ľubovoľnom označení vrcholov) sú izomorfné?

Výsledky

8.1 a) Váha min. kostry je 22. b) Váha min. kostry je 35.

8.2 a) Váha min. kostry je 24. b) Váha min. kostry je 59.

8.3 Áno. Napr. K_4 s rovnakým ohodnotením všetkých hrán.

8.2 Vzdialenosť dvoch vrcholov

8.2.1 Najkratšia cesta v ohodnotenom grafe

Nech kladné číslo $w(\{i,j\})$ označuje váhu hrany $\{i,j\}$. Dĺžka cesty v ohodnotenom grafe je súčet ohodnotení hrán tejto cesty. Najkratšia cesta medzi dvoma vrcholmi je cesta s najmenšou dĺžkou medzi týmito vrcholmi. **Vzdialenosť dvoch vrcholov v_i a v_j v ohodnotenom grafe**, označujeme $d_w(v_i,v_j)$, je dĺžka najkratšej cesty z v_i do v_j. V nasledujúcom Dijkstrovom algoritme máme na začiatku dané dva vrcholy, označme ich a,z, ktorých vzdialenosť chceme vypočítať. Vrcholom v_i priraďujeme značky $L(v_i)$, ktoré sú najprv dočasné, ktoré sa môžu zmeniť, a neskôr sa stávajú trvalými. Ak pre vrchol v_i je značka $L(v_i)$ trvalá, tak hodnota $L(v_i)$ je dĺžka najkratšej cesty z vrchola a do vrchola v_i.

Dijkstrov algoritmus

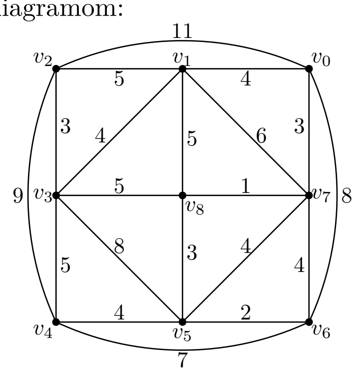
Vstup: Súvislý, ohodnotený graf $G=(V,H)$, vrcholy a,z.

Výstup: $L(z)$ je dĺžka najkratšej cesty z a do z.

1. Nech $L(a)=0$. Pre všetky vrcholy $x\neq a$ nech $L(x)=\infty$.
2. Ak $z\notin V$, tak končíme a $L(z)$ je dĺžka minimálnej cesty z a do z.
3. Vyberme vrchol $v\in V$ s najmenšou hodnotou $L(v)$. Množina $V=V-\{v\}$.
4. Každému vrcholu $x\in V$, ktorý je susedný s vrcholom v, priradíme značku $L(x)=\min\{L(x),L(v)+w(\{v,x\})\}$. Skok na krok 2.

Zložitosť Dijkstrovho algoritmu je $O(n^2)$.

Príklad 8.2.1 Nájdime dĺžky minimálnych ciest z vrchola v_4 do všetkých ostatných vrcholov v grafe s diagramom:



Riešenie. Postup uvedený v Dijkstrovom algoritme budeme zapisovať, kvôli prehľadnosti, do tabuľky tak, že pod vrcholom v_i budeme písať jeho značku $L(v_i)$. Každému riadku zodpovedá jedno prejdenie algoritmu. Po vybratí najmenšej hodnoty, v ďalších krokoch do príslušného stĺpca už nič nepíšeme. Nakoľko hľadáme dĺžky minimálnych ciest z vrchola v_4 do všetkých ostatných vrcholov, tak postup ukončíme, keď množina V bude prázdna.

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	V
∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}$
∞	∞	9	5		4	7	∞	∞	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, v_8\}$
∞	∞	9	5			6	8	7	$\{v_0, v_1, v_2, v_6, v_7, v_8\}$
∞	9	8				6	8	7	$\{v_0, v_1, v_2, v_7, v_8\}$
14	9	8					8	7	$\{v_0, v_1, v_2, v_7\}$
14	9	8					8		$\{v_0, v_1, v_7\}$
14	9						8		$\{v_0, v_1\}$
11	9								$\{v_0\}$
11									$\emptyset$

Zo získaných hodnôt vieme, že $d_w(v_4, v_0) = 11$, $d_w(v_4, v_1) = 9$, $d_w(v_4, v_2) = 8$, $d_w(v_4, v_3) = 5$, $d_w(v_4, v_5) = 4$, $d_w(v_4, v_6) = 6$, $d_w(v_4, v_7) = 8$ a $d_w(v_4, v_8) = 7$. ■

8.2.2 Najkratšia dráha v ohodnotenom digrafe

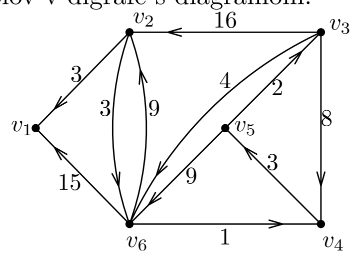
Obdobne ako v ohodnotených grafoch, aj v ohodnotených digrafoch definujeme vzdialenosť dvoch vrcholov. Len musíme uvažovať danú orientáciu hrán. Nech kladné číslo $w((i,j))$ je váha (ohodnotenie) hrany (i,j). Ohodnotený digraf môžeme popísať cenovou maticou.

Definícia 8.2.1 *Nech* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je digraf, kde* $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. **Cenová matica** *digrafu* $\overrightarrow{G}$ *je štvorcová matica* $W = (w_{ij})$ *rádu* n*, pričom*

$$w_{ij} = \begin{cases} w((v_i, v_j)) & ak\ (v_i, v_j) \in H, \\ \infty & ak\ (v_i, v_j) \notin H, \\ 0 & ak\ i = j. \end{cases}$$

Dĺžka dráhy v ohodnotenom digrafe je súčet ohodnotení hrán tejto dráhy. Najkratšia dráha z vrchola v_i do vrchola v_j je dráha s najmenšou dĺžkou spomedzi všetkých dráh z v_i do v_j. **Vzdialenosť dvoch vrcholov v_i a v_j v ohodnotenom digrafe**, označujeme $\overrightarrow{d}_w(v_i, v_j)$, je dĺžka najkratšej dráhy z v_i do v_j. Ak žiadna taká dráha neexistuje, tak $\overrightarrow{d}_w(v_i, v_j) = \infty$. Je zrejmé, že $\overrightarrow{d}_w(v_i, v_i) = 0$. Na zistenie vzdialeností dvoch vrcholov v ohodnotenom digrafe môžeme použiť predchádzajúci Dijkstrov algoritmus, ak v ňom budeme uvažovať orientáciu hrán.

Príklad 8.2.2 Dijkstrovým algoritmom vypočítajme vzdialenosť z vrchola v_6 do všetkých ostatných vrcholov v digrafe s diagramom:



Riešenie. Jednotlivé kroky opäť zapíšeme do prehľadnej tabuľky.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	V
∞	∞	∞	∞	∞	0	$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
15	9	∞	1	∞		$\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$
15	9	9		4		$\{v_1, v_2, v_3\}$
15	9	6				$\{v_1, v_2\}$
15	9					$\{v_1\}$
12						$\emptyset$

Dostávame $\overrightarrow{d}_w(v_6, v_1) = 12$, $\overrightarrow{d}_w(v_6, v_2) = 9$, $\overrightarrow{d}_w(v_6, v_3) = 6$, $\overrightarrow{d}_w(v_6, v_4) = 1$ a $\overrightarrow{d}_w(v_6, v_5) = 4$. ■

Ak chceme zistiť vzdialenosť medzi všetkými dvojicami vrcholov, tak vypočítame maticu vzdialeností.

Definícia 8.2.2 *Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf s n vrcholmi.* **Matica vzdialeností (dištančná matica)** *digrafu $\overrightarrow{G}$ je štvorcová matica $D = (d_{ij})$ rádu n, pričom $d_{ij} = \overrightarrow{d}_w(v_i, v_j)$.*

Na vypočet matice vzdialeností v ohodnotenom digrafe, použijeme Floydov algoritmus.

Floydov algoritmus

Vstup: Ohodnotený digraf s vrcholmi $v_1, v_2, \ldots v_n$.

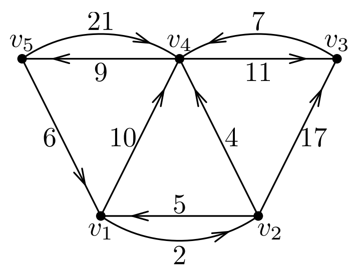
Výstup: Matica vzdialeností $D = (d_{ij})$.

1. Položme $D^{(0)} = W$
2. Vytvoríme maticu $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$ tak, že $d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$

3. Ak $k = n$, končíme a matica $D^{(k)} = D$. Ak $k < n$, položíme $k = k+1$ a skok na krok 2.

Zložitosť Floydovho algoritmu je $O(n^3)$.

Príklad 8.2.3 Floydovým algoritmom určme dištančnú maticu digrafu



Riešenie.

Nakoľko digraf má 5 vrcholov, vypočítame matice $D^{(k)}$ pre $k = 0, \ldots, 5$.

Cenová matica je

$$D^{(0)} = W = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \infty & \mathbf{10} & \infty \\ \mathbf{5} & 0 & 17 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 0 & 9 \\ \mathbf{6} & \infty & \infty & 21 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ako určíme prvky matice $D^{(1)}$? Podrobne napíšeme ako získame prvky $d_{ij}^{(1)}$ na základe vzťahu $d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$, pre $k = 1$. Keďže $k = 1$, zvýraznime si všetky prvky v prvom riadku a prvom stĺpci v matici $D^{(0)}$.

$$\begin{aligned}
d_{11}^{(1)} &= \min\{d_{11}^{(0)}, d_{11}^{(0)} + d_{11}^{(0)}\} = \min\{0, 0+0\} = 0 \\
d_{12}^{(1)} &= \min\{d_{12}^{(0)}, d_{11}^{(0)} + d_{12}^{(0)}\} = \min\{2, 0+2\} = 2 \\
d_{13}^{(1)} &= \min\{d_{13}^{(0)}, d_{11}^{(0)} + d_{13}^{(0)}\} = \min\{\infty, 0+\infty\} = \infty \\
d_{14}^{(1)} &= \min\{d_{14}^{(0)}, d_{11}^{(0)} + d_{14}^{(0)}\} = \min\{10, 0+10\} = 10 \\
d_{15}^{(1)} &= \min\{d_{15}^{(0)}, d_{11}^{(0)} + d_{15}^{(0)}\} = \min\{\infty, 0+\infty\} = \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{21}^{(1)} &= \min\{d_{21}^{(0)}, d_{21}^{(0)} + d_{11}^{(0)}\} == \min\{5, 5+0\} = 5 \\
d_{22}^{(1)} &= \min\{d_{22}^{(0)}, d_{21}^{(0)} + d_{12}^{(0)}\} = \min\{0, 5+2\} = 0 \\
d_{23}^{(1)} &= \min\{d_{231}^{(0)}, d_{21}^{(0)} + d_{13}^{(0)}\} = \min\{17, 5+\infty\} = 17 \\
d_{24}^{(1)} &= \min\{d_{24}^{(0)}, d_{21}^{(0)} + d_{14}^{(0)}\} = \min\{4, 5+10\} = 4 \\
d_{25}^{(1)} &= \min\{d_{25}^{(0)}, d_{21}^{(0)} + d_{15}^{(0)}\} = \min\{\infty, 5+\infty\} = \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{31}^{(1)} &= \min\{d_{31}^{(0)}, d_{31}^{(0)} + d_{11}^{(0)}\} == \min\{\infty, \infty+0\} = \infty \\
d_{32}^{(1)} &= \min\{d_{32}^{(0)}, d_{31}^{(0)} + d_{12}^{(0)}\} = \min\{\infty, \infty+2\} = \infty \\
d_{33}^{(1)} &= \min\{d_{33}^{(0)}, d_{31}^{(0)} + d_{13}^{(0)}\} = \min\{0, \infty+\infty\} = 0 \\
d_{34}^{(1)} &= \min\{d_{34}^{(0)}, d_{31}^{(0)} + d_{14}^{(0)}\} = \min\{7, \infty+10\} = 7 \\
d_{35}^{(1)} &= \min\{d_{35}^{(0)}, d_{31}^{(0)} + d_{15}^{(0)}\} = \min\{\infty, \infty+\infty\} = \infty
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_{41}^{(1)} &= \min\{d_{41}^{(0)}, d_{41}^{(0)} + d_{11}^{(0)}\} = \min\{\infty, \infty + 0\} = \infty \\
d_{42}^{(1)} &= \min\{d_{42}^{(0)}, d_{41}^{(0)} + d_{12}^{(0)}\} = \min\{\infty, \infty + 2\} = \infty \\
d_{43}^{(1)} &= \min\{d_{43}^{(0)}, d_{41}^{(0)} + d_{13}^{(0)}\} = \min\{11, \infty + \infty\} = 11 \\
d_{44}^{(1)} &= \min\{d_{44}^{(0)}, d_{41}^{(0)} + d_{14}^{(0)}\} = \min\{0, \infty + 10\} = 0 \\
d_{45}^{(1)} &= \min\{d_{45}^{(0)}, d_{41}^{(0)} + d_{15}^{(0)}\} = \min\{9, \infty + \infty\} = 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{51}^{(1)} &= \min\{d_{51}^{(0)}, d_{51}^{(0)} + d_{11}^{(0)}\} = \min\{6, 6 + 0\} = 6 \\
d_{52}^{(1)} &= \min\{d_{52}^{(0)}, d_{51}^{(0)} + d_{12}^{(0)}\} = \min\{\infty, 6 + 2\} = 8 \\
d_{53}^{(1)} &= \min\{d_{53}^{(0)}, d_{51}^{(0)} + d_{13}^{(0)}\} = \min\{\infty, 6 + \infty\} = \infty \\
d_{54}^{(1)} &= \min\{d_{54}^{(0)}, d_{51}^{(0)} + d_{14}^{(0)}\} = \min\{21, 6 + 10\} = 16 \\
d_{55}^{(1)} &= \min\{d_{55}^{(0)}, d_{51}^{(0)} + d_{15}^{(0)}\} = \min\{0, 6 + \infty\} = 0
\end{aligned}
$$

Prvky zapíšeme do matice.

$$
D^{(1)} = \begin{pmatrix}
0 & \mathbf{2} & \infty & 10 & \infty \\
\mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{17} & \mathbf{4} & \infty \\
\infty & \infty & 0 & 7 & \infty \\
\infty & \infty & 11 & 0 & 9 \\
6 & \mathbf{8} & \infty & 16 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Pri výpočte matice $D^{(2)}$ použijeme maticu $D^{(1)}$, v ktorej vyznačíme prvky v druhom riadku a v druhom stĺpci. Dostávame maticu:

$$
D^{(2)} = \begin{pmatrix}
0 & 2 & 19 & 6 & \infty \\
5 & 0 & 17 & 4 & \infty \\
\infty & \infty & 0 & 7 & \infty \\
\infty & \infty & 11 & 0 & 9 \\
6 & 8 & 25 & 12 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Postupne určíme ostatné matice.

$$D^{(3)} = D^{(2)}.$$

$$
D^{(4)} = \begin{pmatrix}
0 & 2 & 17 & 6 & 15 \\
5 & 0 & 15 & 4 & 13 \\
\infty & \infty & 0 & 7 & 16 \\
\infty & \infty & 11 & 0 & 9 \\
6 & 8 & 23 & 12 & 0
\end{pmatrix}.
$$

$$
D^{(5)} = \begin{pmatrix}
0 & 2 & 17 & 6 & 15 \\
5 & 0 & 15 & 4 & 13 \\
22 & 24 & 0 & 7 & 16 \\
15 & 17 & 11 & 0 & 9 \\
6 & 8 & 23 & 12 & 0
\end{pmatrix} = D.
$$

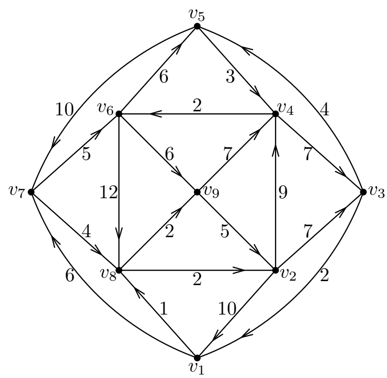
V matici D sú dĺžky najkratších dráh medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi grafu. Hodnota $d_{ij}^{(5)}$ vyjadruje vzdialenosť z vrchola v_i do vrchola v_j. ∎

Úlohy

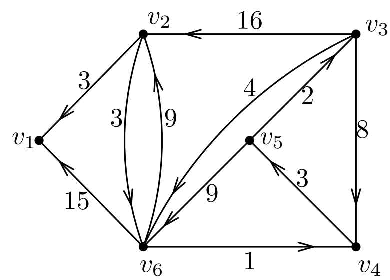
8.4 Dijkstrovým algoritmom určte dĺžky minimálnych ciest z vrchola v_4 do ostatných vrcholov v grafoch z úlohy 8.1

8.5 Dijkstrovým algoritmom určte dĺžky minimálnych dráh z vrchola v_5 do ostatných vrcholov v digrafe

a)

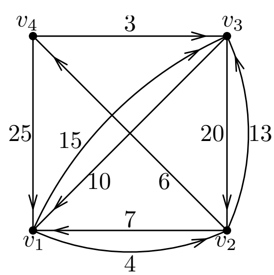


b)

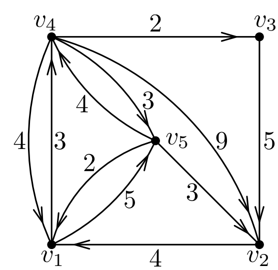


8.6 Floydovým algoritmom určte maticu vzdialeností digrafu

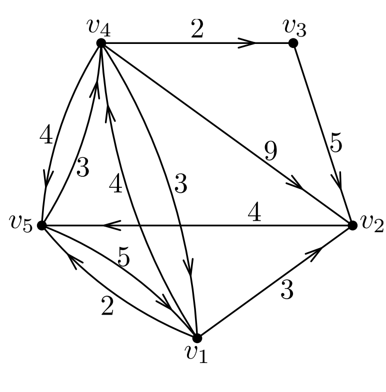
a)



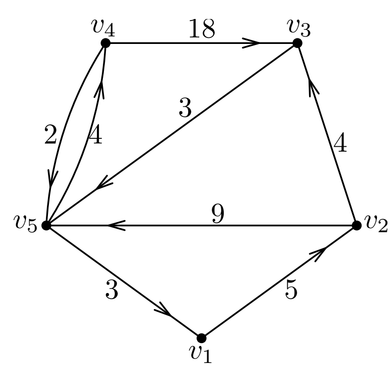
b)



c)



d)



Výsledky

8.4 a) $d_w(v_4, v_1) = 10, d_w(v_4, v_2) = 2$, $d_w(v_4, v_3) = 3$, $d_w(v_4, v_5) = 1$, $d_w(v_4, v_6) = 7$, $d_w(v_4, v_7) = 8$, $d_w(v_4, v_8) = 11$, $d_w(v_4, v_9) = 10$, $d_w(v_4, v_{10}) = 4$, $d_w(v_4, v_{11}) = 1$.
b) $d_w(v_4, v_1) = 3$, $d_w(v_4, v_2) = 8$, $d_w(v_4, v_3) = 10$, $d_w(v_4, v_5) = 6$, $d_w(v_4, v_6) = 12$, $d_w(v_4, v_7) = 4$, $d_w(v_4, v_8) = 6$, $d_w(v_4, v_9) = 9$, $d_w(v_4, v_{10}) = 8$, $d_w(v_4, v_{11}) = 11$, $d_w(v_4, v_{12}) = 12$.

8.5 a) $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_1) = 12$, $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_2) = 15$, $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_3) = 10$, $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_4) = 3$, $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_6) = 5$, $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_7) = 10$, $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_8) = 13$, $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_9) = 11$.
b) $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_1) = 18$, $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_2) = 15$, $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_3) = 2$, $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_4) = 7$, $\overrightarrow{d}_w(v_5, v_6) = 6$.

8.6 a)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 13 & 10 \\ 7 & 0 & 9 & 6 \\ 10 & 14 & 0 & 20 \\ 13 & 17 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 9 & 7 & 9 \\ 9 & 5 & 0 & 12 & 14 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

c)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 9 & 7 & 4 \\ 14 & 5 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 8 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

d)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 & 16 & 12 \\ 10 & 0 & 4 & 11 & 7 \\ 6 & 11 & 0 & 7 & 3 \\ 5 & 10 & 14 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

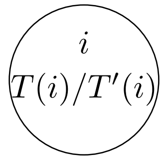
8.3 Metóda kritickej cesty

Uvažujme acyklický, ohodnotený digraf, ktorý ma jeden prameň a jedno ústie. Takýto graf nazveme sieťový graf a znázorňuje sieť nejakého projektu. Orientovaná hrana znázorňuje nejakú činnosť, jej ohodnotenie vyjadruje dĺžku trvania tejto činnosti. Vrchol grafu vyjadruje stav, v ktorom sú ukončené všetky činnosti, ktorým zodpovedajú hrany vchádzajúce do tohto vrchola a môžu byť začaté činnosti odpovedajúce hranám vychádzajúcim z vrchola. Našim cieľom je určiť optimálne časové trvanie celého projektu. Činnosť, ktorej predĺženie spôsobí predĺženie celého projektu, nazývame **kritická činnosť**. Dráhu z prameňa do ústia, ktorá obsahuje kritické činnosti, nazývame **kritická cesta**.

Pri hľadaní kritickej cesty postupujeme nasledovne. Každému vrcholu daného digrafu priradíme tri hodnoty:

- i - očíslovanie vrchola v zmysle vety 7.1.2,
- $T(i)$ - minimálne časové ohodnotenie,
- $T'(i)$ - maximálne časové ohodnotenie.

V digrafe každý vrchol znázornime takto:



Každý vrchol, ktorého minimálne aj maximálne ohodnotenia sú rovnaké, ležia na nejakej kritickej ceste. Hrana (u, v) leží na nejakej kritickej ceste práve vtedy, keď vrcholy u aj v ležia na kritickej ceste a zároveň platí, že $w((u, v)) = T(v) - T(u)$, $w((u, v)) = T'(v) - T'(u)$.

Algoritmus pre minimálne časové ohodnotenie:

Vstup: acyklický, ohodnotený digraf s jedným prameňom a jedným ústím.

Výstup: $T(i)$ pre všetky vrcholy i.

1. $T(1) = 0$
2. Polož $i = 2$.
3. Polož $T(i) = \max\{T(j) + w((j, i))\}$ pre všetky $j < i$, pre ktoré existuje hrana (j, i).
4. Ak $i = n$, tak končíme.
5. Polož $i = i + 1$, skok na krok 3.

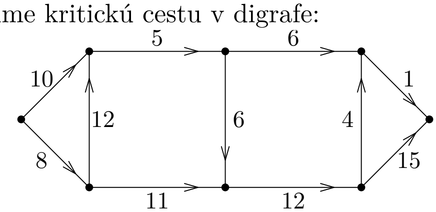
Algoritmus pre maximálne časové ohodnotenie:

Vstup: acyklický, ohodnotený digraf s jedným prameňom a jedným ústím.

Výstup: $T'(i)$ pre všetky vrcholy i.

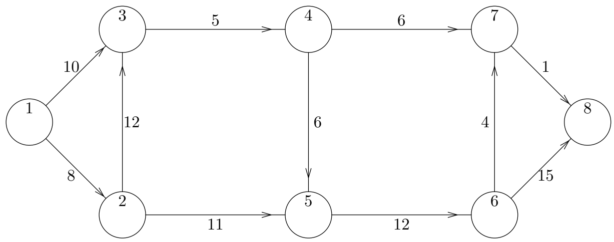
1. $T'(n) = T(n)$
2. Polož $i = n - 1$
3. Polož $T'(i) = \min\{T'(j) - w((i, j))\}$ pre všetky $j > i$, pre ktoré existuje hrana (i, j).
4. Ak $i = 1$, tak končíme.
5. Polož $i = i - 1$, skok na krok 3.

Príklad 8.3.1 Nájdime kritickú cestu v digrafe:

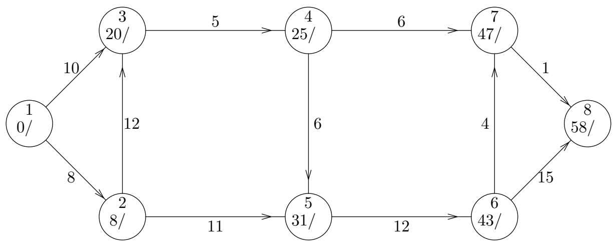


Riešenie.

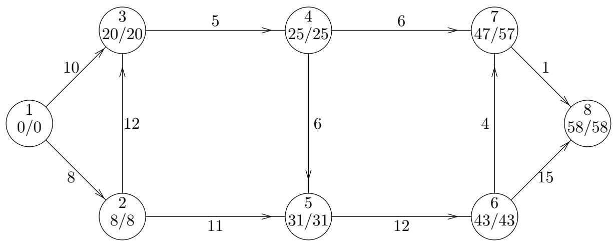
Najprv vrcholy očíslujeme podľa vety 7.1.2.



Pre každý vrchol určíme minimálne časové ohodnotenie.



A v ďalšom kroku napíšeme maximálne časové ohodnotenie pre každý vrchol.

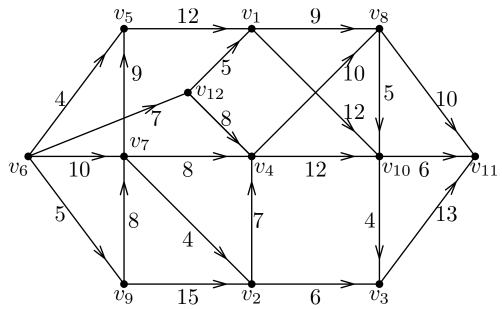


Z tohto posledného digrafu vidíme, že každý vrchol, okrem vrchola s číslom 7, leží na nejakej kritickej ceste. Teraz chceme určiť hrany ležiace na kritickej ceste. Hľadáme hrany (i,j), pre ktoré platí, že $w((i,j)) = T(j) - T(i)$, $w((i,j)) = T'(j) - T'(i)$, pričom vrcholy i, j musia ležať na kritickej ceste. Kritickou cestou v digrafe je dráha medzi týmito vrcholmi: 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 8. ∎

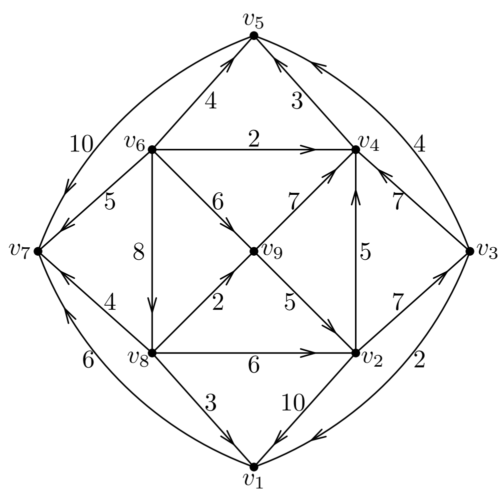
Úlohy

8.7 Určte kritickú cestu v digrafe

a)



b)



Výsledky

8.7 a) Kritickou cestou je dráha $v_6 - v_9 - v_7 - v_5 - v_1 - v_8 - v_{10} - v_3 - v_{11}$.
b) Kritickou cestou je dráha $v_6 - v_8 - v_9 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_7$.

8.4 Toky v sieťach

Definícia 8.4.1 *Súvislý digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *nazývame* **sieť** *práve vtedy, keď*

- *má práve jeden prameň,*
- *má práve jedno ústie,*
- *každá hrana* (i, j) *je ohodnotená kladným číslom* c_{ij}.

Hodnotu c_{ij} nazývame **kapacita (priepustnosť)** hrany (i, j).

Definícia 8.4.2 *Majme sieť $\overrightarrow{G}$.* **Tok** *v sieti je funkcia T, ktorá každej hrane (i, j) priradí nezáporné číslo T_{ij} tak, že platí*

- *pre každú hranu (i, j) je $T_{ij} \leqq c_{ij}$,*
- *pre každý vrchol j rôzny od prameňa aj ústia, platí $\sum_i T_{ij} = \sum_i T_{ji}$ (ak $(i, j) \notin H$, tak $T_{ij} = 0$).*

Číslo T_{ij} nazývame **tok** na hrane (i, j).

Druhá podmienka definície 8.4.2, $\sum_i T_{ij} = \sum_i T_{ji}$, znamená, že tok prichádzajúci do vrchola j je rovný toku vychádzajúcemu z vrchola j. Teda tok vo vrchole j sa zachováva.

Prameň označme a, ústie z.

Veta 8.4.1 *Ak T je tok v sieti, tak tok, ktorý vychádza z prameňa je rovný toku, ktorý prichádza do ústia, t. j. $\sum_i T_{ai} = \sum_i T_{iz}$.*

Definícia 8.4.3 *Nech T je tok v sieti. Číslo $\sum_i T_{ai} = \sum_i T_{iz}$ nazývame* **veľkosť toku** *T.*

Chceme nájsť **maximálny tok**, t. j. tok s maximálnou veľkosťou.

Základnou myšlienkou nasledujúceho algoritmu určenia maximálneho toku je, že začneme nejakým tokom, ktorý, pokiaľ je to možné, postupne zväčšujeme.

Algoritmus Ford–Fulkersona:

Vstup: Sieť $\overrightarrow{G}$, prameň a, ústie z, kapacita c, vrcholy $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$.

Výstup: Maximálny tok T.

1. Polož $T_{ij} = 0$ pre každú hranu (i, j).
2. Označ vrchol a značkou $(\ , \infty)$
3. Ak ústie z je označené, skok na krok 6.
4. Zvoľ neprejdený, ale označený vrchol v_i s najmenším indexom i. Ak taký vrchol neexistuje, tak končíme a tok je už maximálny. Inak dosaď $v = v_i$.
5. Nech (α, Δ) je označenie vrchola v. Prezrieme každú hranu (v, x), (x, v), pričom x je neoznačený vrchol.

   Pre hranu (v, x) vykonáme:

   - ak $T_{vx} < c_{vx}$, tak vrchol x označíme $(v, \min\{\Delta, c_{vx} - T_{vx}\})$,
   - ak $T_{vx} = c_{vx}$, tak vrchol x neoznačíme.

   Pre hranu (x, v) vykonáme:

   - ak $T_{xv} > 0$, tak vrchol x označíme $(v, \min\{\Delta, T_{xv}\})$,
   - ak $T_{xv} = 0$, tak vrchol x neoznačíme.

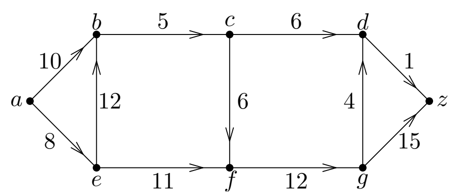
Vrchol v sa týmto stal prejdený. Skok na krok 3.

6. Nech (γ, Δ) je označenie vrchola z. Nech $x_0 = z$, $x_1 = \gamma$. Ak (γ, δ) je označenie vrchola x_i, dosaď $x_{i+1} = \gamma$ Pokračuj až do $x_k = a$. Máme cestu $P : a = x_k, x_{i+1}, \dots x_1, x_0 = z$ z vrcholu a do vrcholu z, na ktorej zmeníme tok nasledovne:

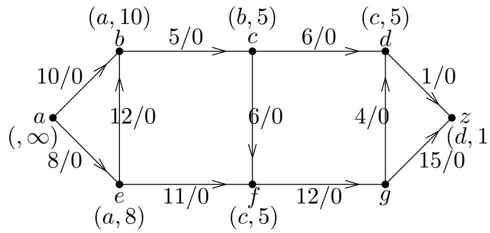
   ak hrana h je zhodne orientovaná v ceste P, zväčšíme na nej tok o hodnotu Δ, inak na nej tok zmenšime o hodnotu Δ. Všetky označenia vrcholov odstránime a skočíme na krok 2.

Zložitosť Ford a Fulkersonovho algoritmu je $O(m \cdot n)$.

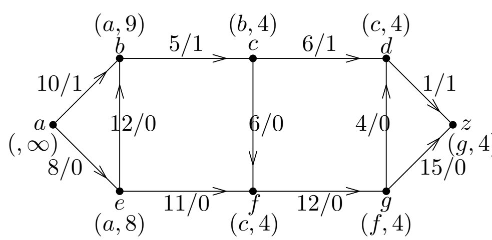
Príklad 8.4.1 Určme maximálny tok v digrafe



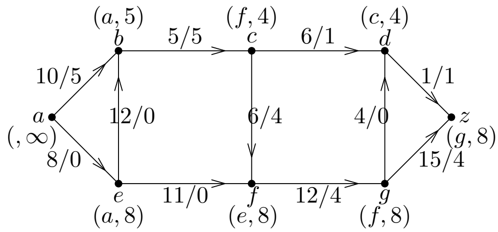
Riešenie. Najprv každej hrane priradíme nulový tok a označíme prameň a každý ďalší vrchol podľa Ford-Fulkersonovho algoritmu.



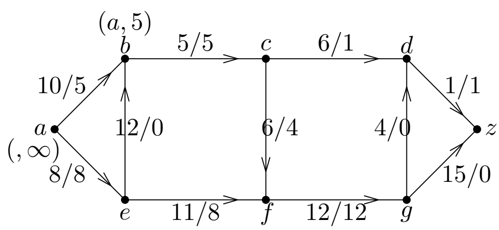
Ústie z má značku $(d, 1)$. Teda $\Delta = 1$. Na ceste $P : a, b, c, d, z$ zmeníme tok o hodnotu 1. A opäť značíme vrcholy.



Dostávame $\Delta = 4$ a cestu $P : a, b, c, f, g, z$. Opäť na tejto ceste zmeníme tok o hodnotu Δ a znovu značíme vrcholy.



Máme $\Delta = 8$ a cestu $P : a, e, f, g, z$. Zmeníme tok na tejto ceste. Vrcholy znovu chceme označiť.

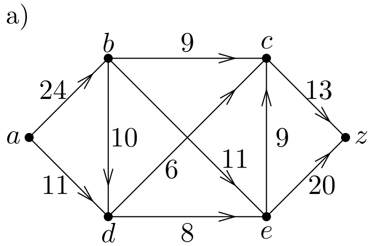


Ale tentoraz ústie sa nedá označiť, teda máme maximálny tok. Jeho hodnota je 13. ■

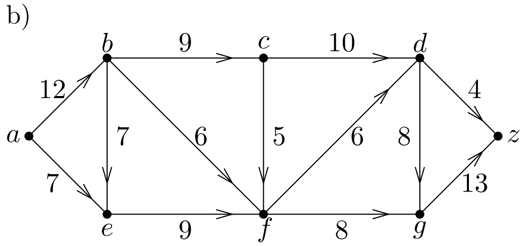
Úlohy

8.8 Ford-Fulkersenovým algoritmom určte maximálny tok v digrafe

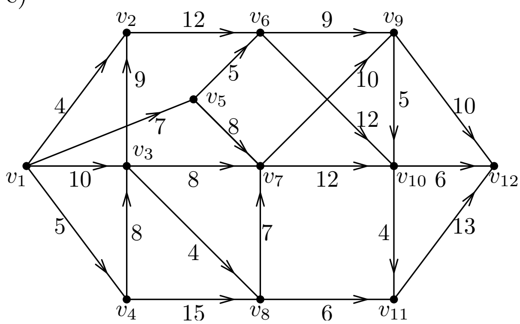
a)



b)



c)



Výsledky

8.8 a) 31 b) 7 c) 26

Literatúra

[1] Berežný Š., Draženská E., Kravecová D.: *Zbierka úloh z diskrétnej matematiky*, Technická univerzita, Košice 2005.

[2] Bučko M., Klešč M.: *Diskrétna matematika*, Edičné stredisko TU, Košice 1991.

[3] Kvasnička V., Pospíchal J.: *Matematická logika*, STU, Bratislava 2006.

[4] Gavalec M., Gedeonová E., Katriňák T., Smítal L.: *Algebra a teoretická aritmetika*, Univerzita Komenského, Bratislava 1995.

[5] Knor M.: *Matematická logika a diskrétne štruktúry*, STU, Bratislava 2008.

NÁZOV: Diskrétna matematika
PODNÁZOV: Zbierka riešených a neriešených príkladov
AUTOR: Draženská Emília
VYDAVATEĽ: Technická univerzita v Košiciach
ROK: 2022
VYDANIE: prvé
ROZSAH: 135 strán

ISBN