Aplikácie diferenčných rovníc

Vysokoškolská učebnica
z projektu KEGA 037–TUKE–4/2020.

Blanka Baculíková
Jozef Džurina

Equilibria, s.r.o.

Recenzovali: doc. Mgr. Gabriela Ižaríková, PhD.
RNDr. Anna Grinčová, PhD.

Vydanie: prvé
Vydavateľ: Equilibria, s.r.o. 2022

ISBN:

Za odbornú a jazykovú stránku tejto vysokoškolskej učebnice zodpovedajú autori. Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

Obsah

1 DIFERENČNÉ ROVNICE

1.1 Úvod

V mnohých aplikačných úlohách sú známe hodnoty skúmanej funkcie iba v istých diskrétnych bodoch (na množine prirodzených čísel). V týchto prípadoch nie je možné uskutočniť limitné prechody, ktoré vedú k deriváciám a integrálom a použiť diferenciálny a integrálny počet k formulácii fyzikálnych zákonov. Pre takéto funkcie, ktorých definičný obor sú diskrétne množiny, používame tzv. diferenčný počet.

História diferenčných rovníc siaha k začiatkom matematiky do Mezopotámie (2. tisícročie p.n.l.), kedy už vedeli, síce veľmi nepresne, odhadnúť pomocou rekurzívnych vzťahov druhú odmocninu. Práve rekurzívne vzťahy možno považovať za predchodcu diferenčných rovníc. Rekurzívne vzťahy používal aj matematik Heron z Alexandrie (10-90 n.l.) na výpočet povrchov a objemov rôznych telies. Začiatkom 13. storočia taliansky matematik Fibonacci pomocou rekurzívnych vzťahov popísal rast idealizovanej populácie králikov.

Od tých čias diferenčným rovniciam bola venovaná veľká pozornosť, lebo prostredníctvom nich bolo možné vytvárať a analyzovať matematické modely reálneho sveta.

1.2 Základné pojmy

V tejto kapitole sa oboznámime so základnými pojmami z teórie lineárnych diferenčných rovníc. Nech $x(n)$ je funkcia premennej $n \in N$. Výraz

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

nazývame diferenciou prvého rádu funkcie $x(n)$ v bode n. Diferenciou druhého rádu funkcie $x(n)$ v bode n nazývame výraz

$$\Delta^2 x(n) = \Delta(\Delta x(n)) = \Delta x(n+1) - \Delta x(n) = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n).$$

Diferenciu m-tého rádu, $m \in N$ v bode n definujeme nasledovne:

$$\Delta^m x(n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{2m-k} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} x(n+k)$$

Rovnicu v tvare

$$F(n, x(n), \Delta x(n), \dots, \Delta^m x(n)) = 0, \text{ resp.}$$

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+m)) = 0,$$

kde x je neznáma funkcia premennej n a F je daná funkcia $m{+}2$ premenných nazývame DIFERENČNOU ROVNICOU m -tého rádu.

1.3 Lineárna diferenčná rovnica prvého rádu

Diferenčnú rovnicu

$$x(n+1) - a(n)x(n) = f(n), \tag{1.1}$$

kde $a(n)$ a $f(n)$ sú dané diskrétne funkcie premennej $n \in N$ nazývame lineárnou diferenčnou rovnicou prvého rádu. Ak $f(n) = 0$, potom rovnicu (1.1) nazývame homogénnou diferenčnou rovnicou, v opačnom prípade hovoríme o nehomogénnej rovnici. Každá lineárna diferenčná rovnica má riešenie. Pre zvolenú začiatočnú hodnotu $x(1)$ vieme vypočítať všetky ďalšie hodnoty:

$$x(2) = a(1)x(1) + f(1),$$

$$x(3) = a(2)x(2) + f(2),$$

$$\dots$$

$$x(n+2) = a(n+1)x(n+1) + f(n+1)$$

$$\dots.$$

Teda všeobecné riešenie závisí na jednom parametri $x(1)$. Všeobecné riešenie homogénnej diferenčnej rovnice

$$x(n+1) - a(n)x(n) = 0$$

je možné teda vyjadriť vzťahom

$$x(n) = cy(n),$$

kde $c \in R$ a $y(n)$ je nenulové riešenie homogénnej rovnice. Riešením $y(n)$ môže byť napríklad funkcia

$$y(n) = a(n-1)a(n-2)...a(1). \tag{1.2}$$

Ako u každej lineárnej rovnice, všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice (1.1) je možné vyjadriť ako súčet všeobecného riešenia príslušnej homogénnej diferenčnej rovnice a jedného partikulárneho riešenia nehomogénnej diferenčnej rovnice (označme ho $v(n)$). Teda všeobecné riešenie rovnice (1.1) je

$$x(n) = c.y(n) + v(n).$$

Príklad 1 *Riešme homogénnu diferenčnú rovnicu*

$$x(n+1) - \frac{n}{n+1}x(n) = 0.$$

Riešenie Zo vzťahu (1.2) vyplýva, že jedno riešenie danej homogénnej diferenčnej rovnice je

$$y(n) = a(n-1)a(n-2)...a(1) = \frac{n-1}{n}.\frac{n-2}{n-1}.\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{n}.$$

A všeobecním riešením danej rovnice je

$$x(n) = c.\frac{1}{n}, \;\; c \in R.$$

Nájsť predpis riešenia lineárnej diferenčnej rovnice 1. rádu využitím vzťahu (1.2) vieme len pre určité typy funkcií $a(n)$, nie vo všeobecnosti, preto sa ďalej budeme venovať len lineárnym diferenčným rovniciam s konštantnými koeficientami.

1.4 Lineárna diferenčná rovnica s konštatnými koeficientami

Lineárnou diferenčnou rovnicou m -tého rádu s konštantými koeficientami rozumieme rovnicu v tvare

$$a_0x(n+m) + a_1x(n+m-1) + \cdots + a_{m-1}x(n+1) + a_mx(n) = f(n) \quad (E)$$

kde $a_i \in R$, $a_0, a_m \neq 0$, $x(n)$ je neznáma funkcia premennej n, $f(n)$ je daná diskrétna funkcia premennej n.
Riešením diferenčnej rovnice (E) nazývame každú funkciu $x(n)$, ktorá spĺňa (E). Množinu všetkých riešení diferenčnej rovnice nazývame všeobecné riešenie (v prípade rovnice m-tého rádu všeobecné riešenie závisí od m parametrov). Partikulárnym riešením rovnice (E) nazývame riešenie, ktoré spĺňa m začiatočných podmienok:

$$\begin{aligned} x(1) &= x_1, \\ x(2) &= x_2, \\ &\vdots \\ x(m) &= x_m. \end{aligned}$$

V prípade, ak $f(n) = 0$, rovnicu (E) nazývame homogénna diferenčná rovnica:

$$a_0 x(n+m) + a_1 x(n+m-1) + \cdots + a_{m-1} x(n+1) + a_m x(n) = 0. \quad (1.3)$$

Vlastnosti riešení lineárnej diferenčnej rovnice

Lineárne diferenčné rovnice majú podobné vlastnosti ako lineárne diferenciálne rovnice.

- Disktrétne funkcie $x_1(n), \dots x_m(n)$ sú lineárne závislé, ak existujú reálne konštanty $c_1, \dots c_m$ (aspoň jedna nenulová), že pre $\forall n \in N$

  $$c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + \cdots + c_m x_m(n) = 0.$$

  Funkcie $x_1(n), \dots x_m(n)$ nazývame lineárne nezávislé, ak nie sú lineárne závislé na N.

- Ak sú funkcie $x_1(n), \dots x_m(n)$ lineárne nezávislé, tak pre $\forall n \in N$

  $$\begin{vmatrix} x_1(n) & \dots & x_m(n) \\ \vdots & & \\ x_1(n+m) & \dots & x_m(n+m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

- Nech $x_1(n), x_2(n), \dots x_m(n)$ sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (1.3), potom každé riešenie homogénnej lineárnej diferenčnej rovnice (1.3) môžeme vyjadriť v tvare

  $$x(n) = c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + \cdots + c_m x_m(n),$$

  kde $c_1, \dots c_m$ sú reálne konštanty.

- Nech $x_1(n), x_2(n), \dots x_m(n)$ sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (1.3) a $x^*(n)$ je partikulárne riešenie nehomogénnej diferenčnej rovnice (E), potom všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice (E) má tvar

  $$x(n) = c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + \cdots + c_m x_m(n) + x^*(n),$$

  kde $c_1, \dots c_m$ sú reálne konštanty.

Všeobecné riešenie lineárnej homogénnej diferenčnej rovnice s konštatnými koeficientami

Uvažujeme homogénnu diferenčnú rovnicu s konštantnými koeficientami

$$a_0 x(n+m) + a_1 x(n+m-1) + \cdots + a_{m-1} x(n+1) + a_m x(n) = 0 \quad (1.3)$$

Hľadajme riešenie rovnice (1.3) v tvare $x(n) = \lambda^n$ kde $\lambda \neq 0$ je konštanta. Po dosadení $x(n) = \lambda^n$ do rovnice (1.3) dostávame

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0. \quad (1.4)$$

Zostavená rovnica sa nazýva charakteristická rovnica odpovedajúca diferenčnej rovnici (1.3). Charakteristická rovnica je algebraická rovnica (pre $m = 2$ kvadratická, $m = 3$ kubická, atď). Riešenia rovnice (1.4) môžu byť vo všeobecnosti reálne rôzne, reálne násobné a komplexné. Uvedieme konštrukciu m lineárne nezávislých riešení vo všetkých prípadoch.

Reálne rôzne korene

Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sú reálne rôzne korene charakteristickej rovnice (1.4). Potom funkcie

$$x_1(n) = \lambda_1^n, x_2(n) = \lambda_2^n, \dots, x_m(n) = \lambda_m^n$$

tvoria m lineárne nezávislých riešení homogénnej diferenčnej rovnice (1.3). Všeobecné riešenie rovnice (1.3) vyjadríme v tvare lineárnej kombinácie týchto funkcií

$$x(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_m\lambda_m^n,$$

kde $c_1, \dots c_m$ sú reálne konštanty.

Príklad 2 *Riešme homogénnu diferenčnú rovnicu*

$$x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0.$$

Riešenie Charakteristická rovnica odpovedajúca danej diferenčnej rovnici má tvar

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Riešeniami tejto kvadratickej rovnice sú $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 3$ a dve lineárne nezávislé riešenia danej rovnice sú $x_1(n) = 2^n$ a $x_2(n) = 3^n$. Testom cez determinant

$$\begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} \end{vmatrix} = 6^n \neq 0.$$

overíme, že $x_1(n)$ a $x_2(n)$ sú lineárne nezávislé. Všeobecné riešenie danej rovnice je

$$x(n) = c_1 2^n + c_2 3^n, \quad c_1, c_2 \in R.$$

Reálne násobné korene

Nech charakteristická rovnica (1.4) má reálny koreň λ násobnosti r. Potom funkcie

$$\lambda^n, \ n\lambda^n, \dots, n^{r-1}\lambda^n$$

tvoria systém r lineárne nezávislých riešení rovnice (1.3).

Príklad 3 *Riešme homogénnu diferenčnú rovnicu*

$$x(n+2) - 6x(n+1) + 9x(n) = 0.$$

Riešenie Charakteristická rovnica odpovedajúca danej diferenčnej rovnici má tvar

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Kvadratická rovnica má dvojnásobný koreň $\lambda_{1,2} = 3$ a dve riešenia danej rovnice majú tvar $x_1(n) = 3^n$ a $x_2(n) = n3^n$. Overíme lineárnu nezávislosť riešení $x_1(n)$ a $x_2(n)$ testom cez determinat

$$\begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3^n & n3^n \\ 3^{n+1} & (n+1)3^{n+1} \end{vmatrix} = 3^{2n+1} \neq 0.$$

Všeobecné riešenie danej rovnice je

$$x(n) = c_1 3^n + c_2 n 3^n, \ \ c_1, c_2 \in R.$$

Komplexné korene

Nech komplexná funkcia $u(n)+iv(n)$ je riešením rovnice (1.3). Potom reálne funkcie $u(n)$ a $v(n)$ sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (1.3).
Nech charakteristická rovnica (1.4) má komplexný koreň $\lambda = \alpha + \beta i$ (samozrejme aj komplexne združené číslo $\lambda = \alpha - \beta i$ je koreňom charakteristickej rovnice). Rovnica (1.3) má riešenie v tvare λ^n, teda

$$\lambda^n = (\alpha + \beta i)^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

kde ρ je modul, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ a φ je argument komplexného čísla $\alpha + \beta i$. Reálna aj imaginárna zložka komplexnej funkcie λ^n sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (1.3). Teda

$$u(n) = \rho^n \cos n\varphi,$$
$$v(n) = \rho^n \sin n\varphi.$$

Príklad 4 *Riešme homogénnu diferenčnú rovnicu*

$$x(n+2) + 2x(n+1) + 4x(n) = 0.$$

Riešenie Charakteristická rovnica odpovedajúca danej diferenčnej rovnici má tvar

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0.$$

Kvadratická rovnica má komplexné korene $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}i$. Prepíšeme komplexné číslo do goniometrického tvaru

$$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Po umocnení dostávame

$$(-1 + \sqrt{3}i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n2\pi}{3} + i \sin\frac{n2\pi}{3}\right).$$

Reálna aj imaginárna zložka tejto komplexnej funkcie sú riešenia danej rovnice

$$x_1(n) = 2^n \cos\frac{n2\pi}{3},$$
$$x_2(n) = 2^n \sin\frac{n2\pi}{3}.$$

Overíme lineárnu nezávislosť riešení $x_1(n)$ a $x_2(n)$ pomocou determinantu

$$\begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^n \cos\frac{n2\pi}{3} & 2^n \sin\frac{n2\pi}{3} \\ 2^{n+1} \cos\frac{(n+1)2\pi}{3} & 2^{n+1} \sin\frac{(n+1)2\pi}{3} \end{vmatrix} = 2^{2n}\sqrt{3} \neq 0.$$

Všeobecné riešenie vyjadríme v tvare ich lineárnej kombinácie

$$x(n) = c_1 2^n \cos\frac{n2\pi}{3} + c_2 2^n \sin\frac{n2\pi}{3}, \ \ c_1, c_2 \in R.$$

Všeobecné riešenie lineárnej nehomogénnej diferenčnej rovnice s konštatnými koeficientami

Uvažujeme nehomogénnu diferenčnú rovnicu s konštantnými koeficientami

$$a_0x(n+m) + a_1x(n+m-1) + \cdots + a_{m-1}x(n+1) + a_mx(n) = f(n). \quad (E)$$

Vieme, že všeobecné riešenie rovnice (E) je súčet všeobecného riešenia homogénnej rovnice (1.3) a partikulárneho riešenia nehomogénnej diferenčnej rovnice (E) $x^*(n)$. Ako nájsť $x^*(n)$? Vo všeobecnosti môžeme použiť metódu variácie konštánt, ale v prípade, ak funkcia $f(n)$ má "špeciálny tvar", vieme určiť partikulárne riešenie tzv. metódou neurčitých koeficientov (odhadneme tvar riešenia).

Metóda neurčitých koeficientov

Túto metódu používame pri týchto pravých stranách:

1. $f(n) = P_m(n)q^n, \quad (1.5)$

kde $P_m(n)$ je diskrétny polynóm m-tého stupňa, $q \in R$. Potom partikulárne riešenie $x^*(n)$ nehomogénnej diferečnej rovnice (E) hľadáme v tvare

$$x^*(n) = Q_m(n)q^n n^s,$$

kde $Q_m(n)$ je diskrétny polynóm m-tého stupňa s neurčitými koeficientami a q je s násobný koreň odpovedajúcej charakteristickej rovnice.

Príklad 5 *Riešme nehomogénnu diferenčnú rovnicu*

$$x(n+2) - 13x(n+1) + 30x(n) = (5n+6)2^n.$$

Riešenie Charakteristická rovnica odpovedajúca homogénnej diferenčnej rovnici má tvar

$$\lambda^2 - 13\lambda + 30 = 0$$

Kvadratická rovnica má reálne korene $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 10$. Všeobecné riešenie homogénnej rovnice vyjadríme ako lineárnu kombináciu dvoch nezávislých riešení $x_1(n) = 3^n$ a $x_2(n) = 10^n$, teda

$$x(n) = c_1 3^n + c_2 10^n, \ \ c_1, c_2 \in R.$$

Partikulárne riešenie $x^*(n)$ nehomogénnej rovnice hľadáme v tvare

$$x^*(n) = (An+B)2^n,$$

pričom si uvedomíme, že 2 nie je koreň charakteristickej rovnice. Dosadením $x^*(n)$ do danej nehomogénnej diferenčnej rovnice vypočítame neznáme koeficienty A a B.

$$(A(n+2)+B)2^{(n+2)} - 13(A(n+1)+B))2^{(n+1)} + 30(An+B)2^n = (5n+6)2^n.$$

Po vykrátení dostávame

$$(An+2A+B)4-26(An+A+B)+30(An+B)=(5n+6).$$

Porovnaním koeficientov polynómov vypočítame konštanty A a B.

$$A=\frac{5}{8}$$

$$B=\frac{69}{32}.$$

Našli sme partikulárne riešenie v tvare

$$x^*(n)=\left(\frac{5}{8}n+\frac{69}{32}\right)2^n$$

a všeobecné riešenie nehomogénnej diferenčnej rovnice je

$$x(n)=c_1 3^n+c_2 10^n+\left(\frac{5}{8}n+\frac{69}{32}\right)2^n,\quad c_1,c_2\in R.$$

$$2.\ f(n)=\rho^n\left(P^{(1)}_{m1}(n)\cos(n\varphi)+P^{(2)}_{m2}(n)\sin(n\varphi)\right),\tag{1.6}$$

kde $P^{(1)}_{m1}(n)$ a $P^{(2)}_{m2}(n)$ sú diskrétne polynómy stupňa m_1 a m_2, $\rho\in R$. Potom partikulárne riešenie $x^*(n)$ nehomogénnej diferečnej rovnice (E) hľadáme v tvare

$$x^*(n)=\rho^n\left(Q^{(1)}_m(n)\cos(n\varphi)+Q^{(2)}_m(n)\sin(n\varphi)\right)n^s,$$

kde $Q^{(1)}_m(n)$ a $Q^{(2)}_m(n)$ sú diskrétne polynómy stupňa $m=\max\{m_1,m_2\}$. V prípade, že $\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ je koreň odpovedajúcej charakteristickej rovnice, je s jeho násobnosť.

Príklad 6 *Riešme nehomogénnu diferenčnú rovnicu*

$$x(n+2)-3x(n+1)+2x(n)=\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right).$$

Riešenie Charakteristická rovnica odpovedajúca homogénnej diferenčnej rovnici je

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

Kvadratická rovnica má reálne korene $\lambda_1=1,\lambda_2=2$. Všeobecné riešenie homogénnej rovnice vyjadríme ako lineárnu kombináciu dvoch nezávislých riešení $x_1(n)=1^n=1$ a $x_2(n)=2^n$, teda

$$x(n)=c_1+c_2 2^n,\quad c_1,c_2\in R.$$

Pravú stranu rovnice môžeme zapísať ako $1^n(\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)+0\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right))$ a preto partikulárne riešenie $x^*(n)$ nehomogénnej rovnice hľadáme v tvare

$$x^*(n)=1^n\left(A\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)+B\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)=A\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)+B\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right),$$

pričom si uvedomíme, že $\cos\left(\frac{\pi}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ nie je koreň charakteristickej rovnice. Vyjadríme $x^*(n+1)$ a $x^*(n+2)$.

$$\begin{aligned} x^*(n+1) &= A\cos\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right) \\ &= \left(\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \left(\frac{B}{2} - \frac{\sqrt{3}A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^*(n+2) &= A\cos\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right) \\ &= \left(-\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \left(-\frac{B}{2} - \frac{\sqrt{3}A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \end{aligned}$$

Dosadením $x^*(n)$ do riešenej diferenčnej rovnice dostávame

$$-\sqrt{3}B\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \sqrt{3}A\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

Porovnaním koeficientov pred funkciami sínus a kosínus máme $A = 0, B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Partikulárne riešenie je

$$x^*(n) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

a všeobecné riešenie nehomogénnej diferenčnej rovnice je

$$x(n) = c_1 + c_2 2^n - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right), \quad c_1, c_2 \in R.$$

---

3. Princíp superpozície

V prípade ak je pravá strana v tvare súčtu dvoch alebo viacerých funkcií

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) + \ldots f_k(n), \ k \in N,$$

pričom tieto funkcie sú v tvare (1.5) resp. (1.6), partikulárne riešenie hľadáme ako súčet dvoch alebo viacerých funkcií $x_1^*(n)$, $x_2^*(n)$, $\ldots$ $x_k^*(n)$, kde $x_1^*(n)$ je riešením nehomogénnej diferenčnej rovnice s pravou stranou $f_1(n)$, $x_2^*(n)$ je riešením nehomogénnej diferenčnej rovnice s pravou stranou $f_2, (n)$ $\ldots$ $x_k^*(n)$ je riešením nehomogénnej diferenčnej rovnice s pravou stranou $f_k, (n)$. Teda

$$x^*(n) = x_1^*(n) + x_2^*(n) \cdots + x_k^*(n).$$

Príklad 7 *Riešme nehomogénnu diferenčnú rovnicu*

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 3.5^n + 7.(-1)^n.$$

Riešenie Ako prvé nájdeme všeobecné riešenie homogénnej diferenčnej rovnice pomocou charakteristickej rovnice, ktorá má pre danú rovnicu tvar

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň $\lambda_{1,2} = 2$, preto všeobecné riešenie homogénnej rovnice je

$$x(n) = c_1 2^n + +c_2 n 2^n,\ c_1, c_2 \in R.$$

Pravá strana nehomogénnej rovnice je v tvare súčtu dvoch funkcií

$$f_1(n) = 3.5^n$$

a

$$f_2(n) = 7.(-1)^n.$$

Partikulárne riešenie nehomogénnej diferenčnej rovnice budeme preto hľadať v tvare súčtu dvoch funkcií

$$x^*(n) = x_1^*(n) + x_2^*(n),$$

kde $x_1^*(n)$ je partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice s pravou stranou $f_1(n)$ a $x_2^*(n)$ je partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice s pravou stranou $f_2(n)$. Kedže $f_1(n)$ a $f_2(n)$ sú v "špeciálnom tvare"

$$x_1^*(n) = A.5^n$$

a

$$x_2^*(n) = B.(-1)^n.$$

$x_1^*(n)$ dosadíme do rovnice

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 3.5^n$$

a vyjadríme koeficient $A = \frac{1}{3}$. Podobne $x_2^*(n)$ dosadíme do rovnice

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 7.(-1)^n$$

a vyjadríme koefincient $B = \frac{7}{9}$. Partikulárne riešenie má teda tvar

$$x^*(n) = x_1^*(n) + x_2^*(n) = \frac{1}{3}.5^n + \frac{7}{9}.(-1)^n$$

a všeobecné riešenie danej diferenčnej rovnice je

$$x(n) = c_1 2^n + +c_2 n 2^n + \frac{1}{3}.5^n + \frac{7}{9}.(-1)^n,\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda variácie konštánt

V prípade, ak funkcia $f(n)$ ako pravá strana rovnice (E) nie je v "špeciálnom tvare,"resp. v ich súčte, môžeme na hľadanie partikulárneho riešenia nehomogénnej rovnice použiť metódu variácie konštánt. Táto metóda platí aj pre lineárne diferenčné rovnice s nie konštantnými koeficientami, ale uvedieme jej odvodenie iba pre lineárnu diferenčnú rovnicu s konštantnými koeficientami 2. rádu. Uvažujme nehomogénnu lineárnu diferenčnú rovnicu 2. rádu v tvare

$$x(n+2)+ax(n+1)+bx(n)=f(n). \tag{1.7}$$

Nech $y(n)$ a $z(n)$ sú riešenia príslušnej homogénnej diferenčnej rovnice. Všeobecné riešenie príslušnej homogénnej diferenčnej rovnice vieme teda vyjadriť v tvare

$$x(n)=c_1y(n)+c_2z(n),\ \ c_1,c_2\in R.$$

Partikulárne riešenie $x^*(n)$ nehomogénnej diferenčnej rovnice (1.7) hľadajme v tvare

$$x^*(n)=c_1(n)y(n)+c_2(n)z(n),$$

kde $c_1(n)$ a $c_2(n)$ sú neznáme funkcie premenej n.

$$x^*(n+1)=c_1(n+1)y(n+1)+c_2(n+1)z(n+1)=$$

$$=c_1(n)y(n+1)+c_2(n)z(n+1)+\Delta c_1(n)y(n+1)+\Delta c_2(n)z(n+1).$$

Nech pre hľadané funkcie $c_1(n)$ a $c_2(n)$ platí

$$\Delta c_1(n)y(n+1)+\Delta c_2(n)z(n+1)=0. \tag{1.8}$$

Využitím tohto predpokladu vyjadríme $x^*(n+2)$ a dostávame

$$x^*(n+2)=c_1(n+1)y(n+2)+c_2(n+1)z(n+2)=$$

$$=c_1(n)y(n+2)+c_2(n)z(n+2)+\Delta c_1(n)y(n+2)+\Delta c_2(n)z(n+2).$$

Keďže chceme, aby funkcia $x^*(n)$ bola riešením nehomogénnej diferečnej rovnice (1.7), po dosadení do (1.7) máme

$$c_1(n)y(n+2)+c_2(n)z(n+2)+\Delta c_1(n)y(n+2)+\Delta c_2(n)z(n+2)+$$

$$+ac_1(n)y(n+1)+ac_2(n)z(n+1)+bc_1(n)y(n)+bc_2(n)z(n)=f(n).$$

Využitím, že $y(n)$ a $z(n)$ sú riešeniami príslušnej homogénnej diferenčnej rovnice, platí

$$c_1(n)y(n+2)+ac_1(n)y(n+1)+bc_1(n)y(n)=0$$

a

$$c_2(n)z(n+2)+ac_2(n)z(n+1)+bc_2(n)z(n)=0$$

dostávame rovnicu

$$\Delta c_1(n)y(n+2)+\Delta c_2(n)z(n+2)=f(n). \tag{1.9}$$

Rovnice (1.8), (1.9) tvoria systém lineárnych rovníc s neznámymi diferenciami $\Delta c_1(n)$ a $\Delta c_2(n)$, ktorý ďalej riešime Cramerovým pravidlom.

Označme determinant

$$\begin{vmatrix} y(n+1) & z(n+1) \\ y(n+2) & z(n+2) \end{vmatrix}.$$

ako $C(n)$. Tento determinant sa nazýva Carosatian (obdoba Wronskiánu, ktorý sa používa pri diferenciálnych rovnicach). Na základe Cramerovho pravidla dostávame

$$\Delta c_1(n)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & z(n+1) \\ f(n) & z(n+2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y(n+1) & z(n+1) \\ y(n+2) & z(n+2) \end{vmatrix}}=\frac{-f(n)z(n+1)}{C(n)}$$

a

$$\Delta c_2(n) = \frac{\begin{vmatrix} y(n+1) & 0 \\ y(n+2) & f(n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y(n+1) & z(n+1) \\ y(n+2) & z(n+2) \end{vmatrix}} = \frac{f(n)y(n+1)}{C(n)}.$$

Ak si označíme diferencie $\Delta c_1(n)$ a $\Delta c_2(n)$ ako $\Delta c_1(n) = u(n)$ a $\Delta c_2(n) = v(n)$, potom môžeme funkcie $c_1(n)$ a $c_2(n)$ vyjadriť nasledovne

$$c_1(n) = \sum_{r=0}^{n-1} u(n) + c_1(0). \tag{1.10}$$

a

$$c_2(n) = \sum_{r=0}^{n-1} v(n) + c_2(0). \tag{1.11}$$

Dosadením vyjadrených funkcií $c_1(n)$ a $c_2(n)$ (1.10),(1.11) do hľadaného tvaru partikulárneho riešenia dostávame

$$x^*(n) = c_1(n)y(n) + c_2(n)z(n) =$$

$$= \left[\sum_{r=0}^{n-1} u(n) + c_1(0)\right] y(n) + \left[\sum_{r=0}^{n-1} v(n) + c_2(0)\right] z(n).$$

Príklad 8 *Riešme nehomogénnu diferenčnú rovnicu metódou variácie konštánt.*

$$x(n+2) - 7x(n+1) + 6x(n) = n.$$

Riešenie Najprv nájdeme všeobecné riešenie príslušnej homogénnej rovnice. Charakteristická rovnica

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

má riešenia $\lambda_1 = 6$ a $\lambda_2 = 1$. Všeobecné riešenie homogénnej diferenčnej rovnice je

$$x(n) = c_1 6^n + c_2.$$

Partikulárne riešenie danej nehomogénnej rovnice hľadáme metódou variácie konštánt, teda v tvare

$$x^*(n) = c_1(n)6^n + c_2(n),$$

pričom pre funkcie $c_1(n)$ a $c_2(n)$ platí

$$\Delta c_1(n) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & z(n+1) \\ f(n) & z(n+2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y(n+1) & z(n+1) \\ y(n+2) & z(n+2) \end{vmatrix}} = \frac{-f(n)z(n+1)}{C(n)}$$

a

$$\Delta c_2(n) = \frac{\begin{vmatrix} y(n+1) & 0 \\ y(n+2) & f(n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y(n+1) & z(n+1) \\ y(n+2) & z(n+2) \end{vmatrix}} = \frac{f(n)y(n+1)}{C(n)}.$$

Pre danú diferenčnú rovnicu máme

$$f(n) = n,$$

$$y(n) = 6^n,$$

$$z(n) = 1$$

a

$$C(n) = \begin{vmatrix} y(n+1) & z(n+1) \\ y(n+2) & z(n+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6^{n+1} & 1 \\ 6^{n+2} & 1 \end{vmatrix} = -5.6^{n+1}.$$

Po dosadení týchto funkcií pre vyjadrenie diferencií dostávame

$$\Delta c_1(n) = \frac{n}{5.6^{n+1}} = u(n)$$

a

$$\Delta c_2(n) = -\frac{n}{5} = v(n).$$

Využitím vzťahu (1.10) vyjadríme neznámu funkciu $c_1(n)$.

$$c_1(n) = \sum_{r=0}^{n-1} u(n) + c_1(0) = 0 + \frac{1}{5.6^2} + \frac{2}{5.6^3} + \cdots + \frac{n-1}{5.6^n} + c_1(0) =$$

$$= \frac{1}{5.6}\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \ldots \frac{n-1}{6^{n-1}}\right) + c_1(0).$$

Aby sme vyjadrili predpis funkcie $c_1(n)$, potrebujeme nájsť súčet n členov v zátvorke vyššie. Pomôžme si nasledujúcim súčtom

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Derivovaním uvedenej rovnice dostávame

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} = \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)' = \frac{-nx^{n-1}(1-x) + (1-x^n)}{(1-x)^2}.$$

Po vynásobení oboch strán rovnice $x \neq 0$ máme

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^{n-1} = \frac{-nx^n + x^{n+1}(n-1) + x}{(1-x)^2}$$

Pre $x = \frac{1}{6}$ dostávame vyjadrenie hľadaného súčtu:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \ldots \frac{n-1}{6^{n-1}} = \frac{-n\frac{1}{6^n} + \frac{1}{6^{n+1}}(n-1) + \frac{1}{6}}{(\frac{5}{6})^2} = \frac{-5n-1+6^n}{25.6^{n-1}}.$$

Po dosadení do vyjadrenia pre funkciu $c_1(n)$ dostávame

$$c_1(n) = \frac{1}{5.6}\left(\frac{-5n-1+6^n}{25.6^{n-1}}\right) + c_1(0) = \frac{-5n-1+6^n}{125.6^n} + c_1(0).$$

Potrebujeme ešte nájsť predpis pre funkciu $c_2(n)$, pričom využijeme vťah (1.11)

$$c_2(n) = \sum_{r=0}^{n-1} v(n) + c_2(0) = 0 - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} - \frac{3}{5} - \dots \frac{n-1}{5} + c_2(0).$$

Po úprave máme

$$c_2(n) = -\frac{1}{5}(1+2+3+\cdots+n-1)+c_2(0) = -\frac{1}{5}\frac{n(n-1)}{2}+c_2(0) = -\frac{n(n-1)}{10}+c_2(0).$$

Môžeme predpokladať, že $c_1(0) = 0$ a $c_2(0) = 0$, potom partikulárne riešenie danej nehomogénnej diferenčnej rovnice, na určenie ktorého sme použili metódu variácie konštánt je

$$x^*(n) = c_1(n)6^n + c_2(n) = \frac{-5n-1+6^n}{125.6^n}6^n + -\frac{n(n-1)}{10}$$

a všeobecné riešenie je

$$x(n) = c_1 6^n + c_2 + x^*(n) = c_1 6^n + c_2 + \frac{-5n-1+6^n}{125.6^n}6^n + -\frac{n(n-1)}{10},$$

resp. po úprave

$$x(n) = \left(c_1 + \frac{1}{125}\right)6^n + (c_2 - 1) - \frac{1}{10}n^2 + \frac{3}{50}n.$$

Úlohy

Nájdite všeobecné riešenie danej diferenčnej rovnice.

P1. $x(n+1) + 2x(n) = 3n + 4$

$[x(n) = (-2)^n + n + 1]$

P2. $x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 5 - 3n$

$\left[x(n) = c_1 + c_2 n + 4n^2 - \frac{1}{2}n^3\right]$

P3. $x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 3^n$

$\left[x(n) = c_1 + c_2 2^n + \frac{1}{2}3^n\right]$

P4. $x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = n2^n$

$\left[x(n) = c_1 2^n + c_2 n 2^n + n^2\left(\frac{1}{24}n - \frac{1}{8}\right)2^n\right]$

P5. $x(n+2) + 6x(n+1) + 9x(n) = 2^n(25n + 70)$

$[x(n) = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n + (n+2)2^n]$

P6. $x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 4$

$[x(n) = c_1 + c_2 2^n - 4n]$

P7. $x(n+2) - 2x(n+1) + 2x(n) = 4n + 5$

$$\left[x(n) = c_1(\sqrt{2})^n \cos(n\frac{\pi}{4}) + c_2(\sqrt{2})^n \sin(n\frac{\pi}{4}) + 4n + 5\right]$$

P8. $x(n+2) - 2x(n+1) + 2x(n) = 3^n(5n + 32)$

$$\left[x(n) = c_1(\sqrt{2})^n \cos(n\frac{\pi}{4}) + c_2(\sqrt{2})^n \sin(n\frac{\pi}{4}) + 3^n(n + 4)\right]$$

P9. $x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = \cos(n\frac{\pi}{3})$

$$\left[x(n) = c_1 + c_2 2^n - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(n\frac{\pi}{3})\right]$$

P10. $x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 2\cos(n\frac{\pi}{2})$

$$\left[x(n) = c_1 6^n + c_2(-2)^n + \frac{8}{185}\sin(n\frac{\pi}{2}) + \frac{26}{185}\cos(n\frac{\pi}{2})\right]$$

P11. $x(n+2) - 11x(n+1) + 28x(n) = 27\sin(n\frac{\pi}{2}) - 11\cos(n\frac{\pi}{2})$

$$\left[x(n) = c_1 4^n + c_2 7^n + \sin(n\frac{\pi}{2})\right]$$

P12.

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = (2\sqrt{2} - 2)\sin(n\tfrac{\pi}{4}) + (-2\sqrt{2} - 16)\cos(n\tfrac{\pi}{4})$$

$$\left[x(n) = c_1 4^n + c_2(-2)^n + 2\cos(n\frac{\pi}{4})\right]$$

P13. $x(n+2) + x(n) = 4\cos(n\frac{\pi}{2})$

$$\left[x(n) = c_1\cos(n\frac{\pi}{2}) + c_2\sin(n\frac{\pi}{2}) - 2n\cos(n\frac{\pi}{2})\right]$$

P14. $x(n+2) + x(n) = 2^{n+2}\cos(n\frac{\pi}{4})$

$$\left[x(n) = c_1\cos(n\frac{\pi}{2}) + c_2\sin(n\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{17}2^{n+2}\left(\cos(n\frac{\pi}{4}) + 4\sin(n\frac{\pi}{4})\right)\right]$$

P15. $x(n+2) + 6x(n+1) + 9x(n) = (-3)^n(162n + 216)$

$$\left[x(n) = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n + (-3)^n(3n^3 + 3n^2)\right]$$

2 Z-TRANSFORMÁCIA

V tejto kapitole uvedieme definíciu a základné vlastnosti Z-transformácie. Z-transformácia prevádza, samozrejme podľa istých pravidiel, diskrétnu funkciu (postupnosť) na komplexnú funkciu. Ďalej uvedieme využitie Z-transformácie pri riešení diferenčných rovníc.

Definícia 1 *Z-transformáciou postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = f(n)$, $a_n \in C$, ktorá spĺňa podmienku $|a_n| \leq Me^{\alpha n}$ $(M > 0, \alpha \in R)$, nazývame komplexnú funkciu $F(z)$, kde*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} pre\ |z| > e^{\alpha}.$$

Funkciu $F(z)$ nazývame obrazom predmetu $f(n)$ pri Z-transformácii. Vzťah, korešpondenciu medzi predmetom a obrazom zapisujeme

$$f(n) \div F(z).$$

Príklad 9 *Nájdime obraz danej postupnosti pri Z-transformácii.*

$$f(n) = b^n, b \neq 0.$$

Riešenie

Pre danú postupnosť platí $|f(n)| = |b^n| = |b|^n = 1.e^{n \ln |b|}$. Teda $|f(n)| \leq Me^{\alpha n}$, kde $M = 1, \alpha = \ln |b|$. Preto existuje obraz danej postupnosti pri Z-transformácii pre $|z| > e^{\alpha} = |b|$, ktorý vyjadríme na základe definície

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} = 1 + \frac{b}{z} + \frac{b^2}{z^2} + \cdots + \frac{b^n}{z^n} + \cdots =$$

$$\frac{1}{1 - \frac{b}{z}} = \frac{z}{z - b}.$$

Využili sme súčet geometrického radu, ktorý konverguje pre $|q| < 1$, čo v našom príklade bolo $q = \frac{b}{z}$.

Príklad 10 *Nájdime obraz daných postupností pri Z-transformácii.*

a) $f(n) = e^{an}, a \in C,$

b) $f(n) = 1,$

c) $f(n) = 0,$

Riešenie a) $f(n) = e^{an} = (e^a)^n$. Použijeme obraz funkcie $f(n) = b^n$ z Príkladu ,9 pre $b = e^a$ a dostávame

$$f(n) = e^{an} = (e^a)^n \div \frac{z}{z - e^a}.$$

b) $f(n) = 1 = 1^n$. Opäť využitím obrazu funkcie $f(n) = b^n$ z Príkladu 9, pre $b = 1$ dostávame obraz

$$1 \div \frac{z}{z-1}.$$

c) Obraz postupnosti $f(n) = 0$ nájdme na základe definície Z-transformácie. Teda

$$f(n) = 0 \div \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Vlastnosti Z-transformácie

1. **Lineárnosť**
   Ak $f_k(n) \div F_k(z)$, $k = 1, \dots, m, m \in N$ a $c_k \in C$, tak

$$\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(n) \div \sum_{k=1}^{m} c_k F_k(z).$$

2. **Tlmenie alebo veta o substitúcii nezávislej premennej v obraze**
   Ak $f(n) \div F(z)$, $a \in C$, $a \neq 0$, tak

$$a^n f(n) \div F\left(\frac{z}{a}\right).$$

3. **Veta o predstihu**
   Ak $f(n) \div F(z)$, $k \in N$, tak

$$f(n+k) \div z^k \left[f(z) - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{f(r)}{z^r} \right].$$

4. **Veta o oneskorení**
   Ak $f(n) \div F(z)$, $k \in N$, tak

$$f(n-k) \div z^{-k} F(z).$$

5. **Veta o derivovaní obrazu**
   Ak $f(n) \div F(z)$, $k \in N$, tak

$$nf(n) \div zF'(z),$$

$$n(n+1)f(n) \div z^2 F''(z),$$

$$n(n+1)\dots(n+k-1)f(n) \div (-1)^k z^k F^{(k)}(z).$$

6. **Veta o obraze diferencie**
   Ak $f(n) \div F(z)$, $k \in N$, tak

$$\Delta f(n) \div (z-1)F(z) - zf(0),$$

$$\Delta^k f(n) \div (z-1)^k F(z) - z\sum_{r=0}^{k-1} (z-1)^{k-r-1} \Delta^r f(0), k > 1.$$

Príklad 11 *Nájdime obrazy daných postupností pri Z-transformácii.*

a) $f(n) = \sin \omega n$,

b) $f(n) = \cos \omega n$, $\omega \in R$

Riešenie Najprv si prepíšeme predpis postupností $f(n) = \sin \omega n$ a $f(n) = \cos \omega n$ pomocou exponenciálnej funkcie. Využijeme známy Eulerov vzťah

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi,$$

ktorý pre $\phi = n\omega$, resp. $\phi = -n\omega$ je

$$e^{in\omega} = \cos n\omega + i \sin n\omega,$$

$$e^{-in\omega} = \cos n\omega - i \sin n\omega.$$

Z uvedených dvoch rovníc dostávame nasledujúce vyjadrenie daných postupností

$$\sin n\omega = \frac{e^{in\omega} - e^{-in\omega}}{2i},$$
$$\cos n\omega = \frac{e^{in\omega} + e^{-in\omega}}{2}.$$

Využitím lineárnosti Z-transformácie a obrazu postupnosti $e^{an} \div \frac{z}{z-e^a}$ pre $a = i\omega$ resp. $a = -i\omega$ máme

$$\sin n\omega = \frac{1}{2i}\left(e^{in\omega} - e^{-in\omega}\right) \div \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega}} - \frac{z}{z-e^{-i\omega}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{z(e^{i\omega} - e^{-i\omega})}{z^2 - z(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + 1}\right) = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}.$$

$$\cos n\omega = \frac{1}{2}\left(e^{in\omega} + e^{-in\omega}\right) \div \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega}} + \frac{z}{z-e^{-i\omega}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z + cos\omega + 1}\right) = \frac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}.$$

Poznámka: Uvedené transformačné vzťahy platia pre $|z| > 1$, pre ktoré je splnená podmienka $|a_n| \geq Me^{\alpha n}$ z definície Z-transformácie.

Príklad 12 *Nájdime obraz danej postupnosti pri Z- transformácii.*

$$f(n) = e^{\alpha n} \cos \beta n, \ \ \alpha, \beta \in R.$$

Riešenie Využijeme vetu o tlmení $a^n f(n) \div F\left(\frac{z}{a}\right)$, pričom v našom príklade $a^n = e^{\alpha n} = (e^\alpha)^n$, teda $a = e^\alpha$.

Ak si označíme obraz postupnosti $\cos n\beta$ ako $F(z)$, z predchádzajúceho príkladu vieme $F(z) = \frac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$, potom podľa vety o tlmení, obrazom postupnosti

$$f(n) = e^{\alpha n} \cos \beta n$$

je funkcia

$$F\left(\frac{z}{e^\alpha}\right).$$

Preto

$$e^{\alpha n}\cos\beta n \div F\left(\frac{z}{e^\alpha}\right) = \frac{\frac{z}{e^\alpha}(\frac{z}{e^\alpha} - \cos\beta)}{(\frac{z}{e^\alpha})^2 - 2\frac{z}{e^\alpha}\cos\beta + 1}.$$

Po úprave dostávame hľadaný obraz

$$e^{\alpha n}\cos\beta n \div \frac{z(z - e^\alpha\cos\beta)}{z^2 - 2ze^\alpha\cos\beta + e^{2\alpha}}, |z| > 1.$$

Príklad 13 *Nájdime obraz danej postupnosti pri Z- transformácii.*

$$f(n) = n^2.$$

Riešenie Ako prvé nájdeme obraz postupnosti $f(n) = n$ pomocou vety o derivovaní obrazu $nf(n) \div zF'(z)$. Keďže

$$n = n.1 \div zF'(z),$$

kde $F(z)$ je obraz postupnosti 1, ktorý poznáme z Príkladu 10: $1 \div \frac{1}{z-1}$. Preto

$$n = n.1 \div z\left(\frac{1}{z-1}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Obraz postupnosti $f(n) = n^2$. nájdeme opätovným použitím vety o derivovaní obrazu, pretože

$$n^2 = n.n \div zF'(z),$$

kde $F(z)$ je teraz obraz postupnosti n, ktorý už poznáme $n \div \frac{z}{(z-1)^2}$. Dostávame

$$n^2 = n.n \div zF'(z) = z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, |z| > 1.$$

Tabuľka niektorých vzorov a ich obrazov pri Z-transformácii.

predmet (vzor) $f(n)$	obraz $F(z)$
1	$\frac{z}{z-1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{an}	$\frac{z}{z-e^a}$
$\sin\omega n$	$\frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$
$\cos\omega n$	$\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$

Definícia 2 *Inverzná Z-transformácia Z^{-1}je definovaná pre všetky $n \in N$ vzťahom*

$$f(n) = a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K F(z) z^{n-1}\, dz,$$

kde krivka K je kladne orientovaná kružnica taká, že vo svojom vnútri obsahuje všetky singulárne body funkcie $F(z)$ a leží v prstencovom okolí bodu ∞.

Ak funkcia $F(z)$ má práve k-izolovaných singulárych bodov $z_1, z_2, \ldots, z_k$ vo vnútri krivky K, potom môžeme na výpočet integrálu použiť Cauchyho integrálnu vetu

$$f(n) = \sum_{j=1}^{k} res[F(z)z^{n-1}]_{z_j}.$$

Ak $z_1, z_2, \ldots, z_k$ sú póly funkcie $F(z)$ násobnosti $m_1, m_2, \ldots, m_k$, potom rezíduá v týchto bodoch počítame podľa nasledujúceho vzťahu

$$res[F(z)z^{n-1}]_{z_j} = \frac{1}{(m_j-1)!} \lim_{z \to z_j} \frac{d^{m_j-1}}{dz^{m_j-1}} \left[(z-z_j)^{m_j} F(z) z^{n-1} \right].$$

Príklad 14 *Nájdime postupnosť, pre ktorú obraz pri Z-transformácii je*

$$F(z) = \frac{z^2+1}{z^2-4}.$$

Riešenie Daná funkcia má dva jednoduché póly: $-2, 2$. Preto jej vzor pri Z-transformácii vypočítame ako

$$f(n) = res[F(z)z^{n-1}]_{-2} + res[F(z)z^{n-1}]_{2}.$$

$$res[F(z)z^{n-1}]_{-2} = \lim_{z \to -2} \left[(z+2) \frac{z^2+1}{(z+2)(z-2)} z^{n-1} \right] = \frac{5}{8}(-2)^n.$$

$$res[F(z)z^{n-1}]_{2} = \lim_{z \to 2} \left[(z-2) \frac{z^2+1}{(z+2)(z-2)} z^{n-1} \right] = \frac{5}{8}(2)^n.$$

Hľadaná postupnosť má tvar

$$f(n) = \frac{5}{8}(2^n + (-2)^n).$$

Príklad 15 *Nájdime postupnosť, pre ktorú obraz pri Z-transformácii je*

$$F(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

Riešenie Daná funkcia má dva jednoduché póly: $-i, i$. Preto jej vzor pri Z-transformácii vypočítame ako súčet rezíduí

$$f(n) = res[F(z)z^{n-1}]_{-i} + res[F(z)z^{n-1}]_i.$$

$$res[F(z)z^{n-1}]_{-i} = \lim_{z\to -i}\left[(z+i)\frac{z}{(z+i)(z-i)}z^{n-1}\right] = -\frac{1}{2i}(-i)^n.$$

$$res[F(z)z^{n-1}]_{i} = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{z}{(z+i)(z-i)}z^{n-1}\right] = \frac{1}{2i}(i)^n.$$

$$f(n) = -\frac{1}{2i}(-i)^n + \frac{1}{2i}(i)^n = \frac{1}{2i}(i^n - (-i)^n) = \frac{i^{n+1}}{2}(-1+(-1)^n).$$

Použitie Z-transformácie pri riešení diferenčných rovníc

Uvažujme lineárnu nehomogénnu diferenčnú rovnicu m- tého rádu s konštantými koeficientami definovanú v kapitole 1.4

$$a_0x(n+m) + a_1x(n+m-1) + \cdots + a_{m-1}x(n+1) + a_mx(n) = f(n). \quad (E)$$

Nech je daných m začiatočných podmienok:

$$x(0) = x_0,\ x(1) = x_1,\ \ldots, x(m-1) = x_{m-1},\ x_0, \ldots, x_{m-1} \in R \qquad (2.12)$$

Rovnica (E) a podmienky (2.12) nám formulujú začiatočnú úlohu pre lineárnu diferenčnú rovnicu a to nájsť partikulárne riešenie rovnice (E), ktoré spĺňa podmienky (2.12). Definovanú začiatočnú úlohu vieme riešiť pomocou Z-transformácie nasledujúcim spôsobom:

Nech funkcia $x(n)$ má pri Z-transformácii obraz funkciu $X(z)$. Podľa vety o predstihu určíme obrazy všetkých funkcií $x(n+m), x(n+m-1), \ldots x(n+1)$, ktoré sa v predpise danej rovnice nachádzajú. Ďalej nájdeme aj obraz funkcie $f(n)$. Po dosadení všetkých obrazov do danej diferenčnej rovnice dostávame ALGEBRAICKÚ rovnicu, z ktorej vyjadríme funkciu $X(z)$. No a hľadaná funkcia $x(n)$ (riešenie diferenčnej rovnice) je predmetom k získanej funkcii $X(z)$, preto jej predpis vypočítame použitím spätnej Z-transformácie. Uvedený postup si názorne ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 16 *Riešme danú diferenčnú rovnicu pomocou Z-transformácie.*

$$x(n+2) + 7x(n+1) + 6x(n) = n,\ \ x(0) = 0, x(1) = 1.$$

Riešenie Nech riešenie diferenčnej rovnice $x(n)$ má obraz pri Z-transformácii funkciu $X(z)$. Potom podľa vety o predstihu platí

$$x(n+1) \div z\left(X(z) - \frac{x(0)}{z^0}\right) = zX(z),$$

$$x(n+2) \div z^2\left(x(z) - \frac{x(0)}{z^0} - \frac{x(1)}{z}\right) = z^2X(z) - z.$$

Obraz pravej strany, teda funkcie $f(n) = n$ je

$$n \div \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Po dosadení obrazov všetkých funkcií do danej diferenčnej rovnice dostávame transformovanú rovnicu, ktorá je už algebraickou rovnicou

$$z^2X(z) - z + 7zX(z) + 6X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Vyjadríme funkciu $X(z)$:

$$X(z) = \frac{z(z^2-2z+2)}{(z-1)^2(z+6)(z+1)}.$$

Našli sme predpis funkcie $X(z)$, ktorá je obrazom hľadaného riešenia $x(n)$. Pomocou inverznej Z-transformácie nájdeme predmet k funkcii $X(z)$. Keďže $X(z)$ má 3 póly: -1,-6 jednoduché póly a 1 dvojnásobný pól, platí

$$x(n) = res[X(z)z^{n-1}]_{-1} + res[X(z)z^{n-1}]_{-6} + res[X(z)z^{n-1}]_{1}.$$

Vypočítame rezíduá v jednotlivých póloch.

$$res[X(z)z^{n-1}]_{-1} = \lim_{z\to-1}(z+1)\frac{z(z^2-2z+2)}{(z-1)^2(z+6)(z+1)}z^{n-1} =$$

$$= \lim_{z\to-1}\frac{z^n(z^2-2z+2)}{(z-1)^2(z+6)} = \frac{1}{4}(-1)^n.$$

$$res[X(z)z^{n-1}]_{-6} = \lim_{z\to-6}(z+6)\frac{z(z^2-2z+2)}{(z-1)^2(z+6)(z+1)}z^{n-1} =$$

$$= \lim_{z\to-6}\frac{z^n(z^2-2z+2)}{(z-1)^2(z+1)} = -\frac{10}{49}(-6)^n.$$

$$res[X(z)z^{n-1}]_{1} = \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z(z^2-2z+2)}{(z-1)^2(z+6)(z+1)}z^{n-1}\right] =$$

$$= \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^n(z^2-2z+2)}{(z+1)(z+6)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to1}\frac{((n+2)z^{n+1}-2(n+1)z^n+2nz^{n-1})(z^2+7z+6)-(z^n(z^2-2z+2)(2z+7))}{(z^2+7z+6)^2} =$$

$$= \frac{14n-9}{(14)^2}.$$

Partikulárne riešenie danej diferenčnej rovnice je

$$x(n) = \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{10}{49}(-6)^n + \frac{14n-9}{(14)^2}.$$

Úlohy

Nájdite obrazy daných postupností pri Z-transformácii.

P1. $f(n) = e^n - 2e^{n/2}$

$$\left[F(z) = \frac{z}{z-e} - 2\frac{z}{z-\sqrt{e}}\right]$$

P2. $f(n) = 2^n + 6e^{2n}$

$$\left[F(z) = \frac{z}{z-2} + 6\frac{z}{z-e^2}\right]$$

P3. $f(n) = \cos^2 n$

$$\left[F(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z(z-\cos 2)}{z^2 - 2z\cos 2 + 1}\right]$$

P4. $f(n) = \sin^2 n$

$$\left[F(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{z(z-\cos 2)}{z^2 - 2z\cos 2 + 1}\right]$$

P5. $f(n) = 3^n \sin n$

$$\left[F(z) = \frac{3z\sin 1}{z^2 - 6z\cos 1 + 9}\right]$$

P6. $f(n) = 5^n \cos n$

$$\left[F(z) = \frac{z^2 - 5z\cos 5}{z^2 - 10z\cos 5 + 1}\right]$$

P7. $f(n) = 2^n.n$

$$\left[F(z) = \frac{2z}{(z-2)^2}\right]$$

P8. $f(n) = n^3$

$$\left[F(z) = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^2}\right]$$

P9. $f(n) = a^{n+2}$, $a \neq 0$

$$\left[F(z) = \frac{a^2 z}{z-a}\right]$$

P10. $f(n) = \cos\omega(n+1)$

$$\left[F(z) = \frac{z^2(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} - z\right]$$

P11. $f(n) = n\sin\omega n$

$$\left[F(z) = \frac{(z^3 - z)\sin\omega}{(z^2 - 2z\cos\omega + 1)^2}\right]$$

P12. $f(n) = (n-1)\sin\omega n$

$$\left[F(z) = \frac{-2z\sin\omega + 2z^2\sin\omega\cos\omega}{(z^2 - 2z\cos\omega + 1)^2}\right]$$

Riešte danú diferenčnú rovnicu pomocou Z-transformácie.

P1. $x(n+3) + 3x(n+2) + 3x(n+1) + x(n) = 0,$
$x(0) = 0, x(1) = 0, x(2) = 1$

$$\left[x(n) = \frac{1}{2}n(n-1)(-1)^{n-2}\right]$$

P2. $x(n+2) + 4x(n+1) + x(n) = 3.2^n,\ x(0) = 0, x(1) = 1$

$$\left[x(n) = \frac{3}{13}2^n + \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(-4+\sqrt{3})}(-2+\sqrt{3})^n + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(-4-\sqrt{3})}(-2-\sqrt{3})^n\right]$$

P3. $x(n+2) - 4x(n) = 4^n,\ x(0) = 1, x(1) = 1$

$$\left[x(n) = \frac{1}{12}4^n + \frac{5}{8}2^n + \frac{7}{24}(-2)^n\right]$$

P4. $x(n+2) + 4x(n+1) + 3x(n) = 4^n,\ x(0) = 1, x(1) = -1$

$$\left[x(n) = \frac{9}{10}(-1)^n + \frac{1}{14}(-3)^n + \frac{1}{35}4^n\right]$$

P5. $x(n+2) - 4x(n) = 1 - (-1)^n,\ x(0) = 0, x(1) = 1$

$$\left[x(n) = \frac{5}{12}(2)^n - \frac{5}{12}(-2)^n - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-1)^n\right]$$

P6. $\Delta^2(n) = 16,\ x(0) = 2, x(1) = 3$

$$\left[x(n) = 8n^2 - 7n + 2\right]$$

P7. $x(n+2) - 4x(n) = 2 + 2^n,\ x(0) = 2, x(1) = 0$

$$\left[x(n) = \frac{59}{48}(-2)^n + \frac{2n+23}{16}2^n - \frac{2}{3}\right]$$

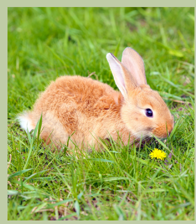
P8. $x(n+2) + 3x(n+1) - 4x(n) = e^n,\ x(0) = 0, x(1) = 1$

$$\left[x(n) = \frac{e^n}{(e+4)(e-1)} - (-4)^n\frac{3+e}{5(4+e)} + \frac{2-e}{5(1-e)}\right]$$

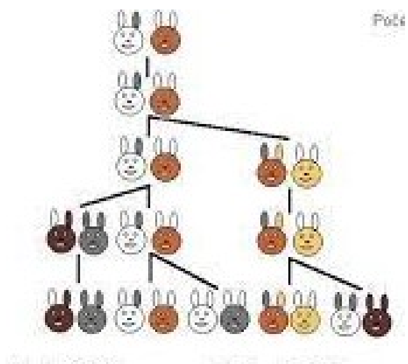
3 APLIKÁCIE DIFERENČNÝCH ROVNÍC

Na úvod uvedieme jednu známu úlohu, ktorá sa uvádza pod názvom FIBONACCIHO KRÁLIKY. Touto úlohou sa v r. 1202 zaoberal taliansky matematik Fibonacci (vlastným menom Leonardo Pisano). Skúmal akou rýchlosťou sa môžu králiky rozmnožovať za ideálnych podmienok.

Príklad 1 *Predpokladajme, že novonarodený pár králikov, jeden samec, jedna samička, je vypustený na pole. Králiky sú schopné sa páriť vo veku jedného mesiaca tak, že na konci druhého mesiaca samička privedie na svet ďalší pár králikov. Predpokladajme, že žiadne králiky nikdy nezomrú, a že samička vždy porodí jeden nový pár (jedného samčeka a jednu samičku) každý mesiac od druhého mesiaca. Koľko párov králikov bude na poli po n mesiacoch?*



Riešenie Označme funkciou $x(n)$ počet párov králikov po n mesiacoch.



Nech funkcia $a(n)$ vyjadruje počet párov dospelých králikov a $b(n)$ počet novonarodených párov po n mesiacoch, ktoré dosiahnu dospelosť po 1 mesiaci. Zo zadania úlohy vyplýva, že :

$$a(n) = a(n-1) + b(n-1)$$

$$b(n) = a(n-1),$$

teda mladé páry $b(n)$ sa narodia iba jedincom, ktoré už boli pred mesiacom dospelé (ich počet je $a(n-1)$) a dospelé páry $a(n)$ budú pozostávať z dospelých párov z predchádzajúceho mesiaca $a(n-1)$ a párov, ktoré sa pred mesiacom narodili $b(n-1)$ a stali sa dospelými. Počet párov všetkých králikov po n mesiacoch je súčet mladých aj dospelých párov, čo môžeme vyjadriť:

$$x(n) = a(n) + b(n) = a(n-1) + b(n-1) + a(n-1) =$$

$$= a(n-1) + b(n-1) + a(n-2) + b(n-2) = x(n-1) + x(n-2)$$

Dostali sme lineárnu diferenčnú rovnicu 2. rádu s konštantnými koeficientami.

$$x(n) = x(n-1) + x(n-2), \text{resp.}$$

$$x(n+2) = x(n+1) + x(n),$$

pričom poznáme nasledovné začiatočné údaje:
$x(1) = 1$ ...po mesiaci máme stále 1 párik králikov (prvý párik dospeje),
$x(1) = 2$ ...po dvoch mesiacoch pribudne 1 nový párik králikov.

Charakteristická rovnica odpovedajúca zostavenej diferenčnej rovnici má tvar

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

ktorej korene sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Všeobecné riešenie diferenčnej rovnice je

$$x(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, c_1, c_2 \in R.$$

Dosadením začiatočných podmienok $x(1) = 1$ a $x(1) = 2$ dostávame partikulárne riešenie

$$x(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Vypočítajme niekoľko ďalších hodnôt funkcie (resp. členov postupnosti) $x(n)$ pre $n = 3, 4, ..$ pomocou získaného predpisu. Dostávame nasledujúce hodnoty pre počet párov králikov po 3, 4,... mesiacoch

$$x(3) = 3$$

$$x(4) = 5$$

$$x(5) = 8$$

$$\vdots$$

$$x(n) = x(n-1) + x(n-2).$$

Poznámka:

Z tejto úlohy, rozmnožovania králikov, odvodil Leonardo Pisano postupnosť dnes známu ako Fibonacciho číselná postupnosť. Je to vlastne postupnosť čísel, kde nasledujúce číslo je súčtom dvoch predchádzajúcich a vyzerá takto: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597....

Pozrime sa na jednu veľmi zaujímavú vlastnosť tejto postupnosti. Pomer dvoch po sebe idúcich členov Fibonacciho postupnosti, presnejšie nasledujúceho k predchádzajúcemu, konverguje k číslu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\ldots.$$

Číslo, ktoré sme dostali, je v matematike známe ako číslo φ , zlatý rez alebo božský rez. V matematickom prostredí sa prvýkrát stretávame so zlatým rezom u Pytagora. Za svoj znak si vybrali pentagram – päťcípu hviezdu, ktorú vlastne tvoria uhlopriečky pravidelného päťuholníka. Ukazuje sa, že uhlopriečky v pravidelnom päťuholníku sa rozdeľujú práve v pomere zlatého rezu. Zlatý rez je najestetickejšie delenie celku na väčšiu a menšiu časť:

$$\frac{\text{celok}}{\text{väčšia časť}} = \frac{\text{väčšia časť}}{\text{menšia časť}} = \varphi.$$

Ak označíme a ako väčšiu časť, b menšiu časť, potom

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b},$$

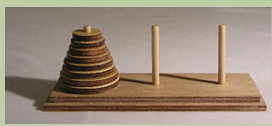
čo vedie na kvadratickú rovnicu

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

ktorej kladné riešenie je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\ldots$.

Nasledujúcu úlohu, matematický hlavolam HANOJSKÉ VEŽE, vymyslel francúzsky matematik Édouard Lucas v roku 1883.

Príklad 2 *Majme 3 veže. Na jednej sú na začiatku umiestnené kotúče rôznych priemerov. Zoradené sú od najväčšieho po najmenší. Vypočítajme koľko ťahov je potrebných na premiestnenie celej veže (aby kotúče zostali usporiadané od najväčšieho po najmenší) na druhú vežu. V jednom ťahu môžeme preložiť z veže na vežu len jeden kotúč a nesmieme položiť väčší kotúč na menší.*



Riešenie Nech funkcia $x(n)$ označuje počet ťahov na premiestnenie veže pozostávajúcej z n kotúčov. Premiestnime najprv vežu pozostávajúcu z $n-1$ kotúčov, k tomu potrebujeme $x(n-1)$ ťahov a na pôvodnej tyči nám zostane najväčší kotúč, ktorý premiestnime na voľnú tyč (to je jeden ťah). Následne vežu veľkosti $n-1$ poskladáme na najväčší kotúč, k čomu potrebujeme opäť $x(n-1)$ ťahov. Preto všetkých ťahov na premiestnenie veže pozostávajúcej z n kotúčov je

$$x(n) = 1 + 2x(n-1).$$

Všeobecné riešenie tejto lineárnej diferenčnej rovnice 1. rádu je

$$x(n) = c_1 2^n - 1.$$

Keďže na premiestnenie 2 kotúčov potrebujeme 3 ťahy ($x(2) = 3$), dostávame partikulárne riešenie

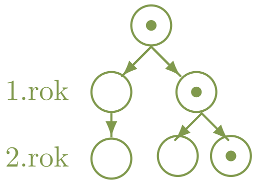
$$x(n) = 2^n - 1,$$

čo vyjadruje počet ťahov na premiestnenie veže pozostávajúcej z n kotúčov.

Poznámka: Legenda hovorí , že niekde vo Vietname stojí kláštor, v ktorom sú hanojské veže so 64 zlatými kotúčmi. Mnísi každý deň na poludnie za zvuku zvonov premiestnia 1 kotúč. V okamihu, keď bude premiestnený posledný kotúč, nastane koniec sveta. Podľa riešenia našej úlohy na premiestnenie veže so 64 kotúčmi potrebujú $2^{64}-1$ ťahov, čo je 19-násť miestne číslo. Aj keď by ťah robili každú sekundu, trvalo by to mníchom 600 miliard rokov. Vesmír má približne 14 miliárd rokov.

"VEČNÁ"RASTLINA

Príklad 3 *Predpokladajme, že istá rastlina rastie stále a reprodukuje sa len v 1. roku svojho života. Určme počet rastlín po n rokoch, ak začíname s jednou rastlinou.*



jednoročná rastlina, ktorá sa reprodukuje

viacročná rastlina, ktorá sa už nereprodukuje

Riešenie Nech funkcia $x(n)$ vyjadruje počet všetkých rastlín po n rokoch, $a(n)$ počet rastlín, ktoré majú viac ako jeden rok (teda sa už nereprodukujú) a $b(n)$ je počet nových, jednoročných rastlín (ktoré sa reprodukujú). Pre $a(n)$ a $b(n)$ platí

$$a(n) = a(n-1) + b(n-1),$$

$$b(n) = b(n-1).$$

Rastliny sú večné, teda $a(n)$ sú rastliny, ktoré boli nové aj staršie v predchádzajúcom roku a nová rastlina vznikne len z jednoročnej rastliny. Počet rastlín po n rokoch je

$$x(n) = a(n) + b(n) = a(n-1) + b(n-1) + b(n-1) =$$

$$= x(n-1)+b(n-1) = x(n-1)+a(n)-a(n-1) = x(n-1)+x(n-1)-x(n-2).$$

Dostávame lineárnu diferenčnú rovnicu

$$x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) = 0,$$

resp.

$$x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 0,$$

pričom $x(0) = 1$ a $x(1) = 2$. Charakteristická rovnica odpovedajúca diferenčnej rovnici má tvar $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, kde $\lambda_{1,2} = 1$. Všeobecné riešenie je

$$x(n) = c_1 + c_2 n$$

a dosadením začiatočných podmienok $x(0) = 1$ a $x(1) = 2$ dostávame partikulárne riešenie

$$x(n) = 1 + n,$$

čo je počet rastlín po n rokoch.

"DVOJROČNÉ"KVETY

Príklad 4 *Predpokladajme, že zo zasadeného semienka za rok vyrastie kvietok s dvoma semienkami, nasledujúci rok má kvietok len jedno semienko a ďalší rok zahynie. Každé semienko sa hneď vysádza a vyrastie z neho dvojsemienkový kvietok. Zo semienka jednosemienkovej rastliny nevyrastie ďalší kvet, lebo rastlina zahynie. Zostavme a vyriešme diferenčnú rovnicu popisujúcu počet kvetov po n rokoch.*

Riešenie Nech funkcia $x(n)$ vyjadruje počet všetkých kvetov po n rokoch, $a(n)$ počet kvetov, ktoré majú 2 semienka a $b(n)$ je počet kvetov, ktoré majú jedno semienko po n rokoch. Počet dvojsemienkových kvetov v roku n môžeme vyjadriť ako dvojnásobok počtu dvojsemienkových kvetov v predchádzajúcom roku:

$$a(n) = 2a(n-1)$$

Počet jednosemienkových rastlín v roku n je rovný počtu dvojsemienkových v predchádzajúcom roku, teda

$$b(n) = a(n-1).$$

Počet všetkých kvetov v roku n je

$$x(n) = a(n) + b(n) = 3a(n-1),$$

pričom $x(1) = 1$, $x(2) = 3$. Z diferenčnej rovnice $a(n) = 2a(n-1)$ vyjadríme funkciu $a(n)$.

$$a(n) = c2^n.$$

Využijúc predpis pre funkciu $b(n)$ dostávame

$$b(n) = c2^{n-1}$$

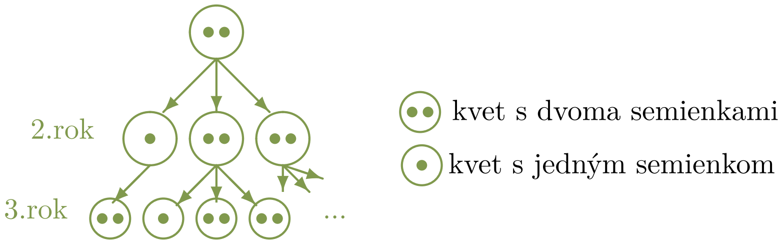
a

$$x(n) = c2^n + c2^{n-1} = \frac{3}{2}c2^n.$$

Dosadením začiatočnej podmienky $x(2) = 3$ dostaneme požadovaný počet kvetov po n rokoch

$$x(n) = 3.2^{n-2}.$$

Príklad 5 *Predpokladajme, že zo zasadeného semienka za rok vyrastie kvietok s dvoma semienkami, nasledujúci rok má kvietok len jedno semienko a ďalší rok zahynie. Každé semienko sa hneď vysádza a vyrastie z neho dvojsemienkový kvietok. Zo semienka jednosemienkovej rastliny vyrastie tiež kvietok s dvoma semienkami. Zostavme a vyriešme diferenčnú rovnicu popisujúcu počet kvetov po n rokoch.*



Riešenie Nech funkcia $x(n)$ vyjadruje počet všetkých kvetov po n rokoch, $a(n)$ počet kvetov, ktoré majú 2 semienka a $b(n)$ je počet kvetov, ktoré majú jedno semienko po n rokoch. Počet dvojsemienkových kvetov v roku n môžeme vyjadriť ako súčet dvojnásobného počtu dvojsemienkových kvetov v predchádzajúcom roku a jednosemienkových kvetov v predchádzajúcom roku (vychádzame z predpokladu, že z každého semienka vyrastie dvojsemienková rastlina):

$$a(n) = 2a(n-1) + b(n-1).$$

Dvojsemienková rastlina sa v nasledujúcom roku stáva jednosemienkovou, preto

$$b(n) = a(n-1).$$

Všetkých rastlín po n rokoch bude

$$x(n) = a(n) + b(n) = 3a(n-1) + b(n-1).$$

Dosadením $b(n)$ do vyjadrenia $a(n)$ dostávame diferenčnú rovnicu s jednou neznámou funkciou $a(n)$, preto najprv vypočítame počet dvojsemienkových kvetov.

$$a(n) = 2a(n-1) + b(n-1) = 2a(n-1) + a(n-2),$$

resp.

$$a(n+2) - 2a(n+1) - a(n) = 0.$$

Charakteristická rovnica odpovedajúca zostavenej homogénnej lineárnej diferenčnej rovnici je

$$\lambda^2 - 2\lambda - \lambda = 0,$$

ktorej korene sú $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ a všeobecné riešenie má tvar

$$a(n) = c_1 \left(1 + \sqrt{2}\right)^n + c_2 \left(1 - \sqrt{2}\right)^n, c_1, c_2 \in R.$$

Keďže $b(n) = a(n-1)$, pre funkciu $b(n)$ dostávame

$$b(n) = c_1 \left(1 + \sqrt{2}\right)^{n-1} + c_2 \left(1 - \sqrt{2}\right)^{n-1}.$$

Nakoniec môžeme zapísať funkciu vyjadrujúcu počet všetkých kvetov po n rokoch

$$x(n) = a(n) + b(n) = c_1 \left(1 + \sqrt{2}\right)^{n-1} (2 + \sqrt{2}) + c_2 \left(1 - \sqrt{2}\right)^{n-1} (2 - \sqrt{2}).$$

Využijúc, že po dvoch rokoch máme 3 kvety a po troch sedem kvetov, t.j. $x(2) = 3$, $x(3) = 7$ vypočítame konštanty c_1 a c_2

$$c_1 = \frac{1}{2(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$c_2 = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Po dosadení vypočítaných konštánt do všeobecného riešenia $x(n)$, dostávame predpis funkcie, ktorá vyjadruje počet kvetov po n rokoch

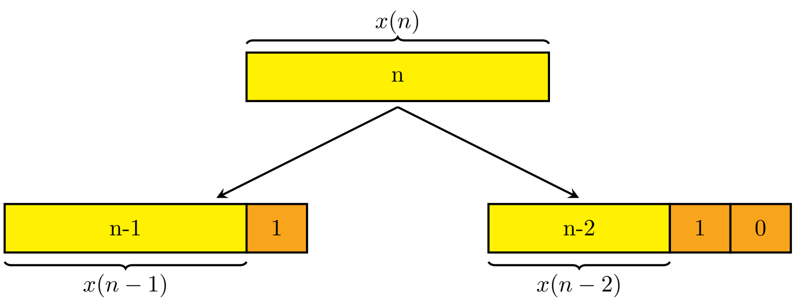
$$x(n) = \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \left[\left(1 + \sqrt{2}\right)^{n-2} (2 + \sqrt{2}) + \left(1 - \sqrt{2}\right)^{n-1} (4 - 3\sqrt{2})\right].$$

BINÁRNE REŤAZCE 1

Príklad 6 *Koľko je rôznych binárnych reťazcov (pozostávajúcich z* 0 *a* 1*) dĺžky n, ktoré neobsahujú postupnosť* 00 *(každé dve nuly musia byť oddelené aspoň jednou jednotkou).*

Riešenie

Označme funkciou $x(n)$ počet všetkých binárnych reťazcov, ktoré neobsahujú dve nuly po sebe. Rozdeľme všetky tieto reťazce na 2 skupiny, podľa toho, či končia 1 alebo 0.



- Počet všetkých reťazcov, ktoré končia jednotkou, je $x(n-1)$, lebo posledné miesto máme obsadené a počet všekých reťazcov dĺžky $n-1$, ktoré neobsahujú 2 nuly za sebou, je $x(n-1)$.

- Počet všetkých reľazcov, ktoré končia číslom 0, je $x(n-2)$, lebo posledné miesto je obsadené, predposledné tiež (musí tam byť 1) a teda zostáva nám $n-2$ miest, pričom počet reťazcov dĺžky $n-2$ je $x(n-2)$.

Sumarizáciou vyššie uvedených úvah dostávame vyjadrenie pre počet všetkých reťazcov

$$x(n) = x(n-1) + x(n-2).$$

Zostavená diferenčná rovnica je rovnaká ako v Príklade 1 a jej všeobecné riešenie má tvar

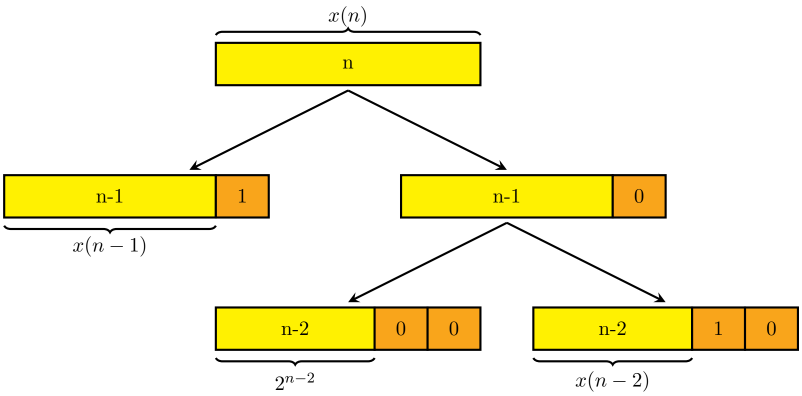
$$x(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, c_1, c_2 \in R.$$

Dosadením začiatočných podmienok, ktoré pre našu úlohu sú $x(1) = 2$, $x(2) = 3$, dostávame Fibonacciho postupnosť.

BINÁRNE REŤAZCE 2

Príklad 7 *Koľko je rôznych binárnych reťazcov (pozostávajúcich z* 0 *a* 1*) dĺžky n, ktoré obsahujú postupnosť* 00.

Riešenie Označme podobne ako v predchádzajúcom príklade funkciou $x(n)$ počet všetkých binárnych reťazcov, ktoré teraz obsahujú dve nuly po sebe. Rozdeľme všetky tieto reťazce na 2 skupiny, podľa toho, či končia 1 alebo 0.



- Počet všetkých požadovaných reťazcov, ktoré končia jednotkou, je $x(n-1)$, lebo na poslednom mieste je 1 a potom máme $n-1$ miest, pričom počet reťazcov dĺžky $n-1$ obsahujúcich 00, je presne $x(n-1)$.

- Počet všetkých požadovaných reťazcov, ktoré končia nulou opäť rozdelíme na dve skupiny. Buď reťazec má na predposlednom mieste 1 alebo nulu.

1. Ak má reťazec na posledných dvoch miestach 10, potom nám ostáva $n-2$ miest, pričom počet reťazcov dĺžky $n-2$ je $x(n-2)$.
2. V prípade, ak reťazec končí číslami 00, potom naša podmienka, aby boli dve nuly za sebou už je splnená a na zostávajúcich $n-2$ miestach už môže byť "hocičo", teda nula alebo jednotka, máme 2^{n-2} možností pre obsasadenie voľných $n-2$ miest.

Sčítaním všetkých možností dostávame diferenčnú rovnicu popisujúcu počet požadovaných reťazcov

$$x(n) = x(n-1) + x(n-2) + 2^{n-2},$$

resp.

$$x(n+2) - x(n-1) - x(n) = 2^n.$$

Odpovedajúca homogénna rovnica vedie na Fibonacciho postupnoť, jej všeobecné riešenie je

$$x(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, c_1, c_2 \in R.$$

Partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice hľadáme v tvare

$$x^*(n) = A.2^n.$$

Po dosadení do diferenčnej rovnice $x^*(n) = 2^n$. Všeobecné riešenie nehomogénnej diferenčnej rovnice vyjadríme ako súčet všeobecného riešenia homogénnej a partikulárneho riešenia

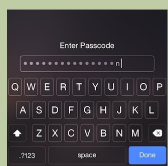
$$x(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^n, c_1, c_2 \in R.$$

Začiatočné podmienky pre našu úlohu sú $x(2) = 1$, $x(3) = 3$, pomocou ktorých nájdeme partikulárne riešenie. Počet binárnych reťazcov dĺžky n, ktoré obsahujú postupnosť 00 je

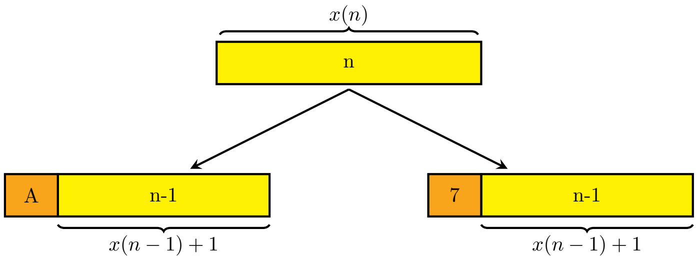
$$x(n) = \frac{-6\sqrt{5}-7}{6\sqrt{5}+10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{7-6\sqrt{5}}{6\sqrt{5}-10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^n.$$

HESLO 1

Príklad 8 *Máme k dispozícii jedno číslo (napr. 7) a jedno písmeno (napr. A). Koľko rôznych hesiel dĺžky n vieme vytvoriť z týchto dvoch znakov, ak v každom hesle musí byť aj číslo aj písmeno.*



Riešenie Označme funkciou $x(n)$ počet hesiel dĺžky n, ktoré obsahujú aspoň jedno číslo 7 a aspoň jedno písmeno A. Všetky tieto heslá môžeme rozdeliť na 2 skupiny:



1. Heslo začína písmenom A a zostáva nám $n-1$ miest na umiestnenie ďalších znakov 7 alebo A, to je $x(n-1)$ možností. Tieto heslá určite obsahujú aj písmeno aj číslo. Potom, druhá možnosť je, že na ostatných $n-1$ miest môžeme umiestniť už len číslo 7, vznikne heslo A777..., ktoré taktiež spĺňa našu podmienku. Teda dostávame $x(n-1)+1$ možností hesiel.

2. Heslo začína číslom 7, pričom nám zostáva $n-1$ miest na umiestnenie ďalších znakov 7 alebo A. Buď na ďalšie miesta umiestnime už len samé písmená A (to je jedno heslo $7AAA$...), alebo znaky umiestnime ľubovoľne, pri zachovaní našej požiadavky, aby v hesle bolo aj číslo aj písmeno, čo je $x(n-1)$ možností. Aj teraz dostávame $x(n-1)+1$ možností hesiel.

Počet požadovaných hesiel dĺžky n vyjadruje teda nasledovná diferenčná rovnica

$$x(n) = 2x(n-1) + 2$$

so začiatočnými podmienkami $x(1) = 0$, $x(2) = 2$. Všeobecné riešenie tejto diferenčnej rovnice je

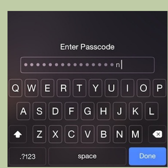
$$x(n) = c2^n - 2,\ c \in R$$

a partikulárne riešenie, ktoré vyjadruje počet požadovaných hesiel dĺžky n má tvar

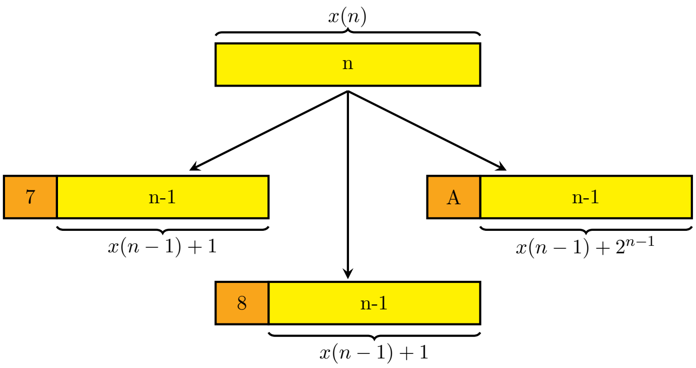
$$x(n) = 2^n - 2.$$

HESLO 2

Príklad 9 *Máme k dispozícii dve čísla (napr. 7 a 8) a jedno písmeno (napr. A). Koľko rôznych hesiel dĺžky n vieme vytvoriť z týchto troch znakov, ak v každom hesle musí byť aj číslo aj písmeno.*



Riešenie Označme funkciou $x(n)$ počet hesiel dĺžky n, ktoré obsahujú aspoň jedno číslo 7 alebo 8 a aspoň jedno písmeno A. Všetky tieto heslá môžeme teraz rozdeliť na 3 skupiny:



1. Heslo začína číslom 7, zostáva $n-1$ miest, kde môže byť buď len písmeno A (vznikne heslo $7AAA$...), alebo $x(n-1)$ možností hesiel, ktoré obsahujú aj číslo aj písmeno. Teda spolu $x(n-1)+1$ možností.
2. Heslo začína číslom 8, rovnakými úvahami ako v 1. prípade, dostávame $x(n-1)+1$ možností.
3. Heslo začína písmenom A, zostáva nám $n-1$ miest, ktoré môžu byť obsadené iba číslami 7 a 8 (na každej pozícii), čo nám dáva 2^{n-1} možností hesiel alebo $x(n-1)$ možností hesiel, ktoré obsahujú aj číslo aj písmeno.

Počet všetkých hesiel dĺžky n vyjadruje nasledovná diferenčná rovnica

$$x(n) = 3x(n-1) + 2 + 2^{n-1},$$

resp.

$$x(n+1) - 3x(n) = 2 + 2^n$$

so začiatočnými podmienkami $x(1) = 0$, $x(2) = 4$. Všeobecné riešenie homogénnej diferenčnej rovnice je

$$x(n) = c3^n,\ c \in R.$$

partikulárne riešenie pre pravú stranu 2 je

$$x_1^* = -1$$

a partikulárne riešenie pre pravú stranu 2^n je

$$x_2^* = -2^n.$$

Využitím princípu superpozície partikulárne riešenie zostavenej diferenčnej rovnice je

$$x^* = x_1^* + x_2^* = -1 - 2^n$$

a jej všeobecné riešenie má tvar

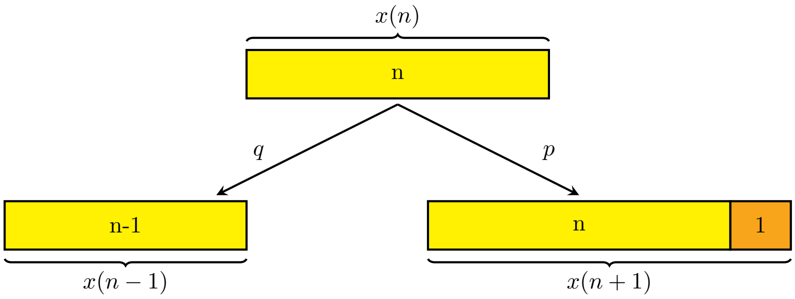
$$x(n) = c3^n - 1 - 2^n.$$

Dosadením jednej zo začiatočných podmienok dostávame počet požadovaných hesiel dĺžky n

$$x(n) = 3^n - 1 - 2^n.$$

Príklad 10 *Predpokladajme, že hráč má začiatočný kapitál n dolárov. Hrá proti druhému hráčovi, ktorý má $N - n$ dolárov. V každej hre sa hrá o dolár. Dolár vyhrá prvý hráč s pravdepodobnosťou p a prehrá (teda vyhrá druhý hráč) s pravdepodobnosťou $q = 1-p$. Hráč má za cieľ vyhrať N dolárov. Vypočítajme pravdepodobnosť tejto výhry.*

Riešenie Označme funkciou $x(n)$ pravdepodobnosť, že prvý hráč vyhrá N dolárov za predpokladu, že má k dispozícii n dolárov. Nech prebehne jedna hra, potom s pravdepodobnosťou p má prvý hráč $n + 1$ dolárov a s pravdepodobnosťou q má $n - 1$ dolárov.



$x(n+1)$ vyjadruje pravdepodobnosť, že vyhrá prvý hráč (získa N dolárov), ak má kapitál $n + 1$ a $x(n - 1)$ vyjadruje pravdepodobnosť, že vyhrá prvý hráč, ak má kapitál $n - 1$. V každej ďalšej hre s pravdepodobnosťou p vyhrá prvý hráč a prehrá s pravdpodobnosťou q. Preto podľa vety o úplnej pravdepodobnosti platí:

$$x(n) = px(n+1) + qx(n-1). \tag{3.13}$$

Zostavili sme diferenčnú rovnicu 2. rádu, pričom platia začiatočné podmienky:

$$x(0) = 0.$$

Pravdepodobnosť, že vyhraje prvý hráč, ak nemá žiaden vklad je nulová.

$$x(N) = 1.$$

Pravdepodobnosť, že vyhraje 1. hráč, ak druhý hráč nemá žiaden vklad je rovný 1.

1. MOŽNOSŤ - spravodlivá hra

Uvažujeme prípad spravodlivej hry (napr. hod mincou), kde $p = q = 0,5$. Dosadíme hodnoty do zostavenej diferenčnej rovnice a dostávame

$$x(n+1) - 2x(n) + x(n-1) = 0, \text{ resp.}$$

$$x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 0.$$

Všeobecným riešením je

$$x(n) = c_1 + c_2.n.$$

Dosadením začiatočných podmienok vypočítame konštanty $c_1 = 0$ a $c_2 = 1/N$. Pravdepodobnosť, že vyhrá 1. hráč (pri jeho začiatočnom vklade n), je teda

$$x(n) = n/N.$$

Prehrá s pravdepodobnosťou $1 - n/N$, čo je vlastne pravdepodobnosť výhry druhého hráča ($x(N-n) = \frac{N-n}{N} = 1 - n/N$.)

Poznámka: Z výsledku uvedeného príkladu je jasné, že pri takejto hre má väčšiu šancu na výhru hráč, ktorý prinesie viac peňazí. Napr. ak prvý hráč má 80 dolárov a druhý 20, potom pravdepodobnosť, že prvý hráč vyhrá 100 dolárov je $0,8$. Ak by sme takúto hru hrali napr. proti kasínu, ktoré má vklad ∞, potom pravdepodobnoať našej výhry je nulová.

2. MOŽNOSŤ - nespravodlivá hra

Uvažujme prípad hry, kde pravdepodobnosť výhry jedného a druhého hráča nebude rovnaká. Napr. ruleta (pravdepodobnosť výhry zákazníka je 18/37 a pravdepodobnosť výhry kasína je 19/37.) Teda $p \neq q$, pričom ale platí $p + q = 1$, resp. $1 + q/p = 1/p$.

Použijeme zostavenú diferenčnú rovnicu (3.13)

$$x(n) = px(n+1) + qx(n-1), \quad \text{resp.}$$

$$x(n+1) - \frac{1}{p}x(n) + \frac{q}{p}x(n-1) = 0.$$

Kvôli jednoduchšiemu zápisu použijeme označenie $\frac{q}{p} = \alpha$ a $\frac{1}{p} = 1+\alpha$, potom diferenčná rovnica má tvar

$$x(n+1) - (1+\alpha)x(n) + \alpha x(n-1) = 0,$$

resp.

$$x(n+2) - (1+\alpha)x(n+1) + \alpha x(n) = 0, \text{ kde } x(0) = 0, \ x(N) = 1.$$

Všeobecné riešenie je

$$x(n) = c_1 + c_2\alpha^n.$$

Dosadením začiatočných podmienok dostávame sústavu rovníc

$$0 = c_1 + c_2$$

$$1 = c_1 + c_2\alpha^N,$$

ktorej riešením je

$$c_1 = -\frac{1}{\alpha^N - 1}, \quad c_2 = \frac{1}{\alpha^N - 1}$$

a riešenie, teda pravdepodobnosť výhry prvého hráča je

$$x(n) = -\frac{1}{\alpha^N - 1} + \frac{1}{\alpha^N - 1}\alpha^n = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^N - 1}.$$

Vezmime si príklad - hod kockou. Nech prvý hráč vyhráva, ak padne číslo 5 alebo 6 a druhý hráč, ak padne jedno z čísel $1, 2, 3, 4$. V tomto prípade je $p = 1/3$ a $q = 2/3$. Nech prvý hráč príde s vkladom $n = 80$, konečná výhra je $N = 100$ (koniec hry), teda druhý hráč má vklad 20.

Po dosadení týchto hodnôt do vyjadreného vzťahu pre hodnotu pravdepodobnosti dostávame (pre $\alpha = \frac{q}{p} = 2$)

$$x(80) = \frac{2^{80} - 1}{2^{100} - 1} = 9.10^{-7}.$$

Pravdepodobnosť výhry druhého hráča je v tomto príklade

$$1 - x(80) = 1 - 9.10^{-7}.$$

Vo všeobecnosti pre pravdepodobnosť výhry druhého hráča platí

$$x_{\text{druhý hráč}} = 1 - x(n) = 1 - \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^N - 1} = \frac{\alpha^N - \alpha^n}{\alpha^N - 1}.$$

Použijeme označenie $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Ak $\alpha = \frac{q}{p}$, potom $\beta = \frac{p}{q}$.

$$x_{\text{druhý hráč}} = \frac{\frac{1}{\beta^N} - \frac{1}{\beta^n}}{\frac{1}{\beta^N} - 1} = \frac{\beta^n - \beta^N}{\beta^n(1 - \beta^N)} = \frac{\beta^n(1 - \beta^{N-n})}{-\beta^n(\beta^N - 1)} = \frac{\beta^{N-n} - 1}{\beta^N - 1}.$$

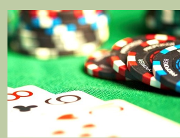
Dostali sme vyjadrenie pravdepodobnosti výhry druhého hráča pri vklade $N - n$

$$x_{\text{druhý hráč}}(N - n) = \frac{\beta^{N-n} - 1}{\beta^N - 1},$$

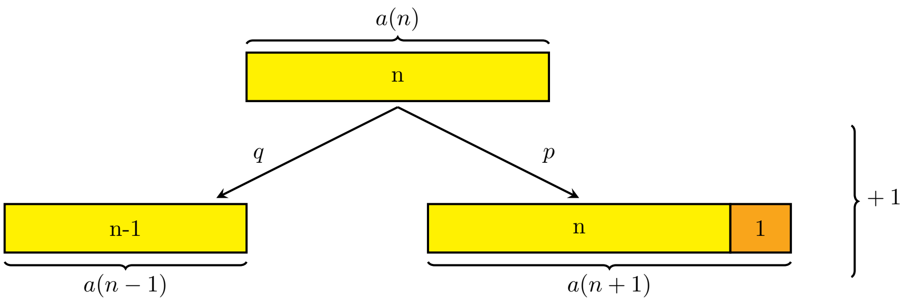
pričom je to rovnaký predpis, ako pravdepodobnosť výhrý prvého hráča s vkladom n, $x(n) = \dfrac{\alpha^n - 1}{\alpha^N - 1}$, len s koeficientom $\beta = \frac{1}{\alpha}$.

HRÁČ - počet hier

Príklad 11 *Predpokladajme, že hráč má začiatočný kapitál n dolárov. Hrá proti druhému hráčovi (resp. kasínu), ktorý má $N - n$ dolárov. V každej hre sa hrá o dolár. Dolár vyhrá prvý hráč s pravdepodobnosťou p a prehrá (teda vyhrá druhý hráč) s pravdepodobnosťou $q = 1 - p$. Hráč má za cieľ vyhrať N dolárov. Aký je očakávaný počet hier?*



Riešenie Nech $a(n)$ vyjadruje počet hier, ak má prvý hráč začiatočný vklad n dolárov a koniec nastáva, ak získa všetky peniaze, teda N dolárov.



Pri prvej hre s pravdepodobnosťou p vyhrá 1 dolár, teda bude mať $n+1$ dolárov a nasleduje hra s jeho vkladom $n+1$ dolárov. Tu je počet hier $a(n+1)$(teda s pravdepodobnosťou p nastáva $a(n+1)$ hier).
S pravdepodobnosťou q prehrá v prvej hre 1 dolár, teda bude mať $n-1$ dolárov a s takýmto vkladom nasleduje ďalších $a(n-1)$ hier (s pravdepodobnosťou q bude $a(n-1)$ hier). Preto celkový počet hier môžeme vyjadriť:

$$a(n) = pa(n+1) + qa(n-1) + 1,$$

kde člen $+1$ vyjadruje prvú prebehnutú hru. Začiatočné podmienky pre počet hier sú nasledovné:

$$a(0) = 0,$$

ak prvý hráč nemá žiaden vklad "nie je o čo hrať", neprebehnú žiadne hry.

$$a(N) = 0,$$

ak prvý hráč má všetky peniaze, rovnako už "nie je o čo hrať", neprebehnú žiadne hry. Uvažujme rovnako ako v predchádzajúcom príklade dve možnosti, spravodlivú a nespravodlivú hru.

1. MOŽNOSŤ - spravodlivá hra

V tomto prípade $p = q = \frac{1}{2}$ a diferenčná rovnica má tvar

$$a(n) = \frac{1}{2}a(n+1) + \frac{1}{2}a(n-1) + 1,$$

resp.

$$a(n+2) - 2a(n+1) + a(n-1) = -2.$$

Všeobecné riešenie homogénnej diferenčnej rovnice je

$$a(n) = c_1 + c_2 n$$

a partikulárne riešenie budeme hľadať v tvare

$$a^*(n) = A.n^2 \text{ (keďže 1 je dvojnásobný koreň charakteristickej rovnice).}$$

Dosadením $x^*(n)$ do nehomogénnej rovnice vyjadríme konštantu $A = -1$ a všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice je

$$a(n) = c_1 + c_2 n - n^2.$$

Pre vyjadrenie konštánt c_1 a c_2 použijeme začiatočné podmienky $a(0) = 0$ a $a(N) = 0$. Dostávame $c_1 = 0$ a $c_2 = N$ a počet spravodlivých hier, ktoré odohrajú dvaja hráči (prvý s vkladom n a druhý s vkladom $N-n$) je

$$a(n) = n(N-n) \text{ (teda počet hier je súčin ich vkladov).}$$

Napríklad, ak prvý hráč má 80 dolárov a druhý hráč má 20. Cieľ hry je, aby hráč získal 100 dolárov. Pri spravodlivej hre je počet hier

$$a(80) = 80.(100-80) = 1600 \text{ hier.}$$

2. MOŽNOSŤ - nespravodlivá hra

Uvažujme prípad hry, kde pravdepodobnosť výhry jedného a druhého hráča nebude rovnaká. Teda $p \neq q$, pričom ale platí $p+q=1$, resp. $1+q/p=1/p$. Použijeme označenie α rovnako ako v predchádzajúcom príklade $\frac{q}{p}=\alpha$ a $\frac{1}{p}=1+\alpha$. Potom diferenčná rovnica popisujúca počet hier má tvar

$$a(n+1)-\frac{1}{p}a(n)+\frac{q}{p}a(n-1)=-\frac{1}{p},$$

resp.

$$a(n+2)-(1+\alpha)a(n+1)+\alpha a(n)=-\frac{1}{p}.$$

Charakteristická rovnica odpovedajúca homogénnej diferenčnej rovnici je

$$\lambda^2-(1+\alpha)\lambda+\alpha=0,$$

ktorej korene sú $\lambda_1=1$ a $\lambda_2=\alpha$ a preto všeobecné riešenie homogénnej rovnice má tvar

$$a(n)=c_1+c_2\alpha^n.$$

Partikulárne riešenie budeme hľadať v tvare

$$a^*(n)=A.n \text{ (keďže 1 je jednoduchý koreň charakteristickej rovnice).}$$

Po dosadení do nehomogénnej rovnice máme

$$A(n+2)-(1+\alpha)A(n+1)+\alpha An=-\frac{1}{p},$$

z čoho dostávame

$$A=\frac{-1}{p(1-\alpha)}$$

a všeobecné riešenie nehomogénnej diferenčnej rovnice je

$$a(n)=c_1+c_2\alpha^n+A.n=c_1+c_2\alpha^n-\frac{n}{p(1-\alpha)}.$$

Pre vyjadrenie partikulárneho riešenia dosadíme začiatočné podmienky $a(0)=0$ a $a(N)=0$, čím dostávame sústavu lineárnych rovníc

$$0-c_1+c_2$$

$$0=c_1+c_2\alpha^N-\frac{N}{p(1-\alpha)},$$

ktorej riešenia sú $c_1=\dfrac{N}{(\alpha^N-1)p(\alpha-1)}$ a $c_2=-\dfrac{N}{(\alpha^N-1)p(\alpha-1)}$.

Počet hier, ktoré odohrajú dvaja hráči (prvý s vkladom n a pravdepodobnosťou výhry v jednej hre p a druhý s vkladom $N-n$ a pravdepodobnosťou výhry v jednej hre q) je

$$a(n)=\frac{N}{(\alpha^N-1)p(\alpha-1)}-\frac{N}{(\alpha^N-1)p(\alpha-1)}\alpha^n-\frac{n}{p(1-\alpha)},$$

kde $\frac{q}{p}=\alpha$.

Príklad 12 *Každoročne vložíme P eur na účet s úrokom r, $r \in (0,1)$. Akú sumu nasporíme po n rokoch?*

Riešenie Nech funkcia $x(n)$ vyjadruje množstvo peňazí po n rokoch. Prvý vklad (P eur) môžeme zapísať ako $x(0) = P$.

Diferenčná rovnica

$$x(n+1) = x(n) + rx(n) + P$$

vyjadruje zhodnotenie peňazí počas jedného roka (z roka n na rok $n+1$). Celková suma v roku $n+1$, teda $x(n+1)$ pozostáva zo sumy, ktorá tam bola minulý rok $x(n)$, z úroku z tejto sumy $rx(n)$ a začiatočného vkladu P.

Riešme diferenčnú rovnicu

$$x(n+1) - (1+r)x(n) = P.$$

Všeobecné riešenie tejto lineárnej diferenčnej rovnice je

$$x(n) = c(1+r)^n + x^*(n),$$

pričom partikulárne riešenie $x^*(n)$ hľadáme v tvare $x^*(n) = A$. Po vyjadrení konštanty A dostávame všeobecné riešenie

$$x(n) = c(1+r)^n - \frac{P}{r}.$$

Pre výpočet konštanty c dosadíme začiatočnú podmienku $x(0) = P$:

$$P = c(1+r)^0 - \frac{P}{r},$$

$$c = \frac{P}{r}(r+1).$$

Teda výsledná suma nasporená po n rokoch je vyjadrená funkciou

$$x(n) = \frac{P}{r}(1+r)^{n+1} - \frac{P}{r} = \frac{P}{r}((1+r)^{n+1} - 1).$$

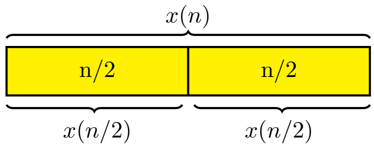
Vezmime si konkrétny príklad:
Banka ponúka ročné úročenie $r = 0,02$. Chceli by sme za 20 rokov nasporiť 10000 eur. Teda $x(20) = 10000$. Aký by mal byť náš každoročný vklad P, aby sme dosiahli stanovený cieľ? Uvedené hodnoty dosadíme do získaného predpisu funkcie $x(n)$ a dostávame

$$x(20) = 10000 = \frac{P}{0,02}((1+0,02)^{21} - 1).$$

Po vyjadrení, je hodnota začiatočného a zároveň každoročného vkladu $P = 387,90$ eur.

Príklad 13 *Majme reťazec reálnych čísel dĺžky* $n = 2^k$, $k \in Z$. *Určme počet porovnaní, ktoré musíme urobiť, aby sme v reťazci našli MIN aj MAX.*

Riešenie Nech funkcia $x(n)$ vyjadruje počet porovnaní čísel, ktoré musíme urobiť v reťazci dĺžky n aby sme našli minimum aj maximum.



Ak máme len dve čísla, stačí urobiť jedno porovnanie, teda $x(2) = 1$.
Keďže dĺžka reťazca je $n = 2^k$, vieme ho rozdeliť na dve polovice, každá bude mať dĺžku $\frac{n}{2}$. Reťazec dĺžky $\frac{n}{2}$ potrebuje $x\left(\frac{n}{2}\right)$ porovnaní. Teda, keď urobíme $x\left(\frac{n}{2}\right) + x\left(\frac{n}{2}\right)$ porovnaní nájdeme minimum v jednej aj druhej polovici a rovnako aj maximum.
Potom nám stačí urobiť len dve porovnania:
Porovnanať navzájom minimá (to menšie bude hľadané MIN) a porovnať obe nájdené maximá (to väčšie bude hľadané MAX).

Zhrnutím predchádzajúcej úvahy, celkový počet porovnaní $x(n)$, ktoré potrebujeme urobiť, vyjadruje rovnica

$$x(n) = 2x\left(\frac{n}{2}\right) + 2.$$

Použijeme nasledujúcu substitíciu

$$x(n) = x(2^k) = a(k),$$
$$x\left(\frac{n}{2}\right) = x(2^{k-1}) = a(k-1),$$

ktorej dosadením do zostavenej diferenčnej rovnice dostávame lineárnu diferenčnú rovnicu

$$a(k) = 2a(k-1) + 2, \quad \text{resp.}$$
$$a(k+1) - 2a(k) = 2.$$

Všeobecné riešenie tejto rovnice je

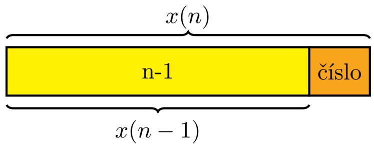
$$a(k) = c2^k - 2.$$

Dosadením začiatočnej podmienky, ktorá pre funkciu $a(k)$ je $a(1) = x(2) = 1$, vyjadríme hľadaný počet porovnaní

$$x(n) = \frac{3}{2}n - 2.$$

Príklad 14 *Majme reťazec reálnych čísel dĺžky* $n \neq 2^k,\ k \in Z$. *Určme počet porovnaní, ktoré musíme urobiť, aby sme v reťazci našli MIN aj MAX.*

Riešenie Označme podobne ako v predchádzajúcom príklade funkciou $x(n)$ počet porovnaní čísel, ktoré musíme urobiť v reťazci dĺžky n aby sme našli minimum aj maximum.



Keďže v tomto príklade nevieme rozdeliť reťazec čísel na polovicu, rozdelíme ho na reťazec dĺžky $n-1$ a jedno číslo. Funkcia $x(n-1)$ bude vyjadrovanť počet porovnaní v reťazci dĺžky $n-1$. Nájdeme MIN a a MAX. Potom stačí urobiť už len dve porovnania:

- MIN (nájdené v reťazci $n-1$) porovnám s posledným číslom $\rightarrow$ to menšie je hľadané MIN.

- MAX (nájdené v reťazci $n-1$) porovnám s posledným číslom $\rightarrow$ to väčšie je hľadané MAX.

Zhrnutím predchádzajúcich úvah dostávame diferenčnú rovnicu,

$$x(n) = x(n-1) + 2,$$

ktorej riešením je hľadaný počet porovnaní. Všeobecným riešením je

$$x(n) = c + x^*(n),$$

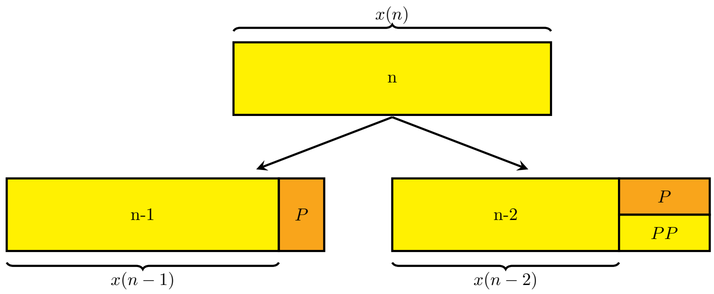
kde $x^*(n) = 2n$. Dosadením začiatočnej podmienky $x(2) = 1$ dostávame hľadaný počet porovnaní

$$x(n) = 2n - 3.$$

ŠACHOVNICA

Príklad 15 *Šachovnica má rozmery $n \times 2$ políčok. Koľkými spôsobmi je možné pokryť ju kockou domina o rozmere 1×2?*

Riešenie Označme $x(n)$ počet možných spôsobov pokrytia šachovnice s rozmermi $n \times 2$. Poslednú kocku domina P je možné dať zvisle alebo vodorovne, viď obrázok:



Ak posledná kocka bola umiestnená vodorovne, tak aj predposledná kocka PP musela byť nutne umiestnená vodorovne. To vedie k nasledujúcej diferenčnej rovnici

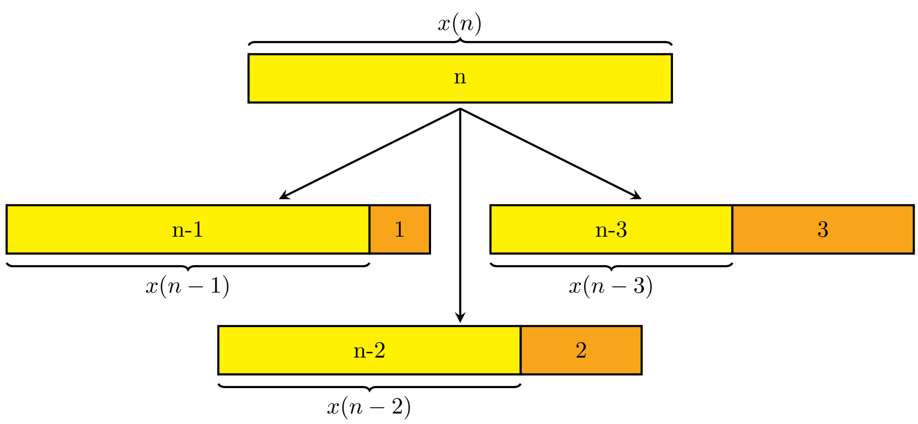
$$x(n) = x(n-1) + x(n-2),$$

ktorej riešením je Fibonacciho postupnosť so začiatočnými hodnotami $x(1) = 1$ a $x(2) = 2$.

SCHODY

Príklad 16 *Dospelý človek dokáže vystúpiť na prvý, druhý alebo tretí schod. Určme koľkými spôsobmi je možné vystúpať n schodov?*

Riešenie Označme $x(n)$ počet možných spôsobov, ktorými je možné vystúpať n schodov. Posledný krok môže mať dĺžku 1, 2 alebo 3 schody, viď obrázok:



To vedie k nasledujúcej diferenčnej rovnici

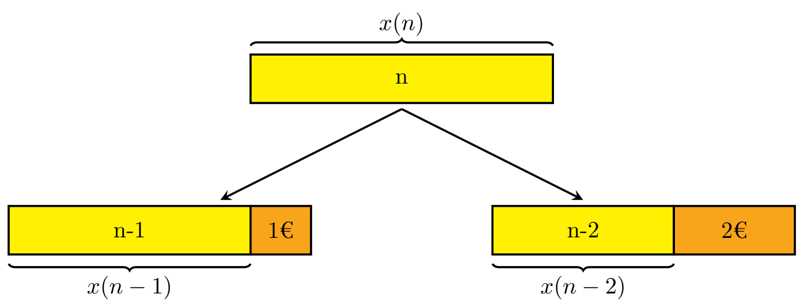
$$x(n) = x(n-1) + x(n-2) + x(n-3),$$

pričom $x(1) = 1$, $x(2) = 2$ a $x(3) = 4$.

PEŇAŽENKA

Príklad 17 *V peňaženke máme k dispozícii neobmedzený počet jednoeurových aj dvojeurových mincí. Koľkými spôsobmi je možné zaplatiť sumu n eur? Platby 1€+ 2€ a 2€ + 1€ považujeme za rôzne.*

Riešenie Označme $x(n)$ počet možných spôsobov, ktorými je možné zaplatiť n eur. Posledná minca, ktorú použijeme, môže mať hodnotu buď 1€ alebo 2€, viď obrázok:



V prvom prípade sme predtým museli zaplatiť $(n-1)$€, čo vieme urobiť $x(n-1)$ spôsobmi a v druhom prípade sme už zaplatili $(n-2)$€, čo vieme urobiť $x(n-2)$ spôsobmi. To vedie k nasledujúcej diferenčnej rovnici

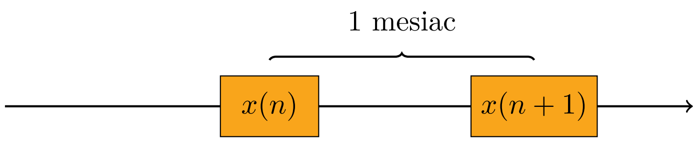
$$x(n) = x(n-1) + x(n-2),$$

pričom $x(1) = 1$, $x(2) = 2$. Riešením je Fibonacciho postupnosť.

BANKA

Príklad 18 *V banke si požičiame sumu D€ na R rokov pri ročnej úrokovej miere r_1%. Aká bude naša mesačná splátka M ak dlh splácame okamžite a úroková miera sa nemení.*

Najprv zjednotíme časové údaje. Mesačná úroková sadzba bude $r = r_1/1200$, pričom r už neudávame v percentách ale $r \in (0, 1)$. Doba splácania bude $N = 12R$ mesiacov. Označme $x(n)$ výšku dlhu po n mesiacoch, potom $x(0) = D$ a $x(N) = 0$. Dlžná suma po $(n + 1)$ mesiacoch poklesne o mesačnú splátku M a vzrastie o úrok z dlžnej sumy $rx(n)$.



Preto

$$x(n+1) = x(n) + rx(n) - M, \qquad x(0) = D, \quad x(N) = 0. \tag{3.14}$$

Dostali sme diferenčnú rovnicu prvého rádu

$$x(n+1) - (1+r)x(n) = -M, \qquad x(0) = D, \quad x(N) = 0.$$

Štandardným postupom riešenia dostávame, že

$$x(n) = c(1+r)^n + \frac{M}{r}.$$

Zo začiatočnej podmienky $x(0) = D$ vyplýva, že konštanta $c = D - (M/r)$ a v dôsledku toho

$$x(n) = \left(D - \frac{M}{r}\right)(1+r)^n + \frac{M}{r}.$$

Využitím koncovej podmienky $x(N) = 0$, vieme z posledného vzťahu určiť výšku mesačnej splátky

$$M = \frac{rD(1+r)^N}{(1+r)^N - 1}.$$

V tejto mesačnej splátke je zahrnutá splátka istiny M_I (pokles dlhu) a splátka úroku M_U, t.j. $M = M_I + M_U$. Keďže $M_I = x(n) - x(n+1)$, tak z (3.14) vyplýva, že

$$M_I = M - rx(n) \quad \text{a} \quad M_U = rx(n).$$

Pretože banka používa ako základný časový údaj deň, môžu sa naše hodnoty M_I a M_U líšiť od tých bankových. Hodnota M sa ale nemení.

4 VARIAČNÝ POČET

Nasledujúca kapitola je venovaná základným pojmom a úlohám z variačného počtu. Túto kapitolu zaraďujeme pre potreby študentov Fakulty elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach.

Motiváciu k variačnému počtu urobíme sadou príkladov, v ktorých sa zameráme na matematickú formuláciu uvažovaných problémov.

Úloha 1 *Nájdime spojitú rovinnú krivku najkratšej dĺžky, ktorá spája body* $A = [x_1, y_1]$ *a* $B = [x_1, y_2]$.

Riešenie Spojite diferencovateľná krivka daná predpisom $y = y(x)$ má na intervale $\langle x_1, x_2 \rangle$ dĺžku

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Matematický zápis úlohy je teda

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, \mathrm{d}x \to \min, \qquad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

Toto je najjednoduchšia variačná úloha. Samozrejme, riešením je úsečka a na tomto príklade overíme správnosť neskôr odvodenej teórie.

Úloha 2 *Nájdime spojitú krivku prechádzajúcu bodmi* $A = [x_1, y_1]$ *a* $B = [x_1, y_2]$, *rotáciou ktorej okolo osi* x *vznikne teleso s minimálnym povrchom.*

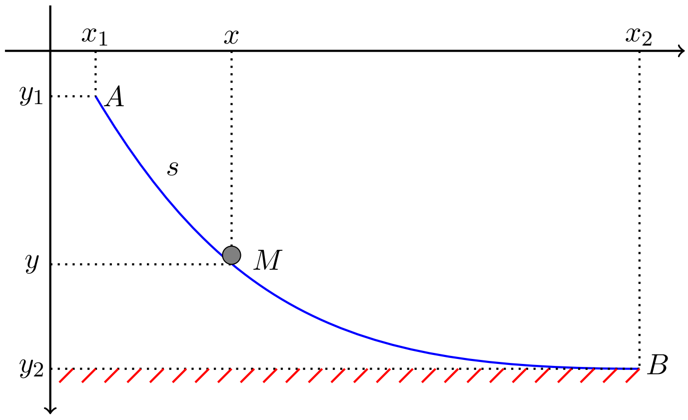
Riešenie Využitím vzorca pre povrch rotačného telesa môžeme priamo formulovať úlohu. Hľadáme spojitú krivku $y = y(x)$, takú že

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, \mathrm{d}x \to \min, \qquad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

Ľahko nahliadneme, že matematický zápis tejto úlohy je veľmi podobný tomu z predchádzajúcej úlohy.

Úloha 3 *Nájdime spojitú rovinnú krivku* $y = y(x)$, *po ktorej sa bod vplyvom tiaže dostane z bodu* $A = [x_1, y_1]$ *do bodu* $B = [x_1, y_2]$ *za najkratší čas. Trenie a odpor prostredia zanedbávame.*

Riešenie Toto je najslávnejšia úloha variačného počtu. Je známa tiež ako úloha o brachistochrone (brachistos - najkratší, chronos - čas). Na matematický zápis úlohy použijeme základné poznatky z fyziky.



Predpokladajme, že v čase $t_0 = 0$ je bod (objekt) v bode $A = [x_1, y_1]$ a má rýchlosť $v_0 = 0$. V čase $t > 0$ je objekt v bode $M = [x, y]$ a má rýchlosť $v > 0$. Pri prechode objektu z bodu A do bodu M poklesne jeho polohová energia o hodnotu $\Delta W_p = mg(y - y_1)$, pričom táto "stratená" polohová energia sa mení na kinetickú enrgiu $W_k = (1/2)mv^2$, kde m je hmotnosť objektu a g je gravitačné zrýchlenie. Preto platí rovnosť

$$\Delta W_p = W_k$$

odkiaľ dostávame

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y - y_1)$$

a preto

$$v = \sqrt{2g}\sqrt{y - y_1}.$$

Z elementárnej fyziky vieme, že rýchlosť objektu vieme vyjadriť pomocou dráhy s, ktorú prejde objekt, t.j.

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(t) = \sqrt{2g}\sqrt{y - y_1}. \tag{4.1}$$

Na druhej strane prejdenú dráhu s vieme vyjadriť ako dĺžku krivky $y = y(x)$

$$s = \int_{x_1}^{x} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Odtiaľ plynie že

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}. \tag{4.2}$$

Kombináciou (4.1) a (4.2) dostávame

$$\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{y(x) - y_1}}\,\mathrm{d}x,$$

čo je vlastne diferenciálna rovnica so separovanými premennými a integrovaním dostávame matematický zápis úlohy. Hľadáme spojite diferencovateľnú funkciu $y = y(x)$, takú že

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x) - y_1}}\,\mathrm{d}x \to \min, \qquad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

V uvedených troch motivačných úlohách sme hľadanej funkcii $y = y(x)$ priradili číselnú hodnotu - dĺžku krivky, objem rotačného telesa, čas. Takéto priradenie, keď funkcii priradíme reálne číslo, nazývame funkcionál a krivku, ktorá minimalizuje (maximalizuje) daný funkcionál, nazývame extremála.

Vo všeobecnosti všetky spomínané úlohy vieme matematicky formulovať tak, že v triede spojite diferencovateľných funkcií hľadáme takú, že

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \to \min, \qquad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \tag{4.3}$$

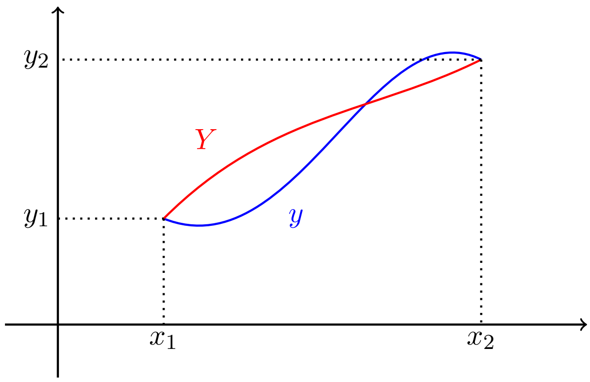
V predchádzajúcich úlohách máme

$$F = \sqrt{1 + (y')^2}, \quad F = y\sqrt{1 + (y')^2}, \quad F = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y - y_1}}.$$

Komplikovanú úlohu (4.3) transformujeme na hľadanie extrému funkcie jednej premennej. Predpokladajme, že spomedzi všetkých prípustných funkcií $Y(x)$ (t.j. spojite diferencovateľných a spĺňajúcich okrajové podmienky $Y(x_1) = y_1$, $Y(x_2) = y_2$) existuje jediná funkcia $y(x)$, ktorá minimalizuje funckcionál v (4.3) a teda platí

$$I(Y) \geq I(y) \tag{4.4}$$

pre všetky prípustné funkcie $Y(x)$.



Každú prípustnú funkciu $Y(x)$ vieme vyjadriť v tvare

$$Y(x) = y(x) + t\eta(x), \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0,$$

kde t je parameter a $\eta(x)$ je pomocná funkcia. Všimnime si, že pre $t = 0$ je $Y(x) = y(x)$ a teda vzťah (4.4) vieme zapísať pomocou parametra t v tvare

$$I(t) \geq I(0) \quad \text{pre všetky } t \geq 0$$

to ale znamená, že $I(t)$ má minimum pre $t = 0$ a preto

$$\left.\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0.$$

Použitím pravidiel pre deriváciu zloženej funkcie dostávame

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(x, Y, Y')\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial t}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial Y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta'(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

a teda

$$\left.\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

Naviac metóda per partes dáva

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\,\mathrm{d}x = \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)\,\mathrm{d}x,$$

čo v spojení s (4.5) dáva

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

pre všetky funkcie $\eta(x)$, čo je možné len ak

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0. \tag{4.6}$$

Rovnicu (4.6) nazývame Euler - Lagrangeova rovnica a vo všeobecnosti ide o diferenciálnu rovnicu druhého rádu. Získané poznatky sformulujeme do nasledujúceho tvrdenia.

Veta 1 *Nech funkcia $y(x)$ je jediným riešením úlohy* (4.3)*, potom $y(x)$ spĺňa rovnicu* (4.6)*.*

V dvoch špeciálnych prípadoch vieme rovnicu (4.6) zjednodušiť. Ak totiž $F = F(x, y')$, t.j. funkcia F neobsahuje premennú y, tak $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ a rovnica (4.6) sa transformuje na

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c, \tag{4.7}$$

čo predstavuje diferenciálnu rovnicu prvého rádu a to je výrazné zjednodušenie.

Teraz predpokladajme, že $F = F(y, y')$, t.j. funkcia F neobsahuje premennú x. Ľahko zistíme, že

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F(y,y')\right] &= y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y}y' - \frac{\partial F}{\partial y'}y'' \\ &= -y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] = 0\end{aligned}$$

a preto v tomto prípade

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F(y,y') = c, \tag{4.8}$$

čo je opäť diferenciálna rovnica prvého rádu.

Odvodenú teóriu použijeme na riešenie predchádzajúcich úloh.

Príklad 1 *(Riešenie Úlohy 1) Nájdime spojitú rovinnú krivku najkratšej dĺžky, ktorá spája body $A = [x_1, y_1]$ a $B = [x_1, y_2]$.*

Riešenie Ukázali sme, že v tomto prípade je

$$F = \sqrt{1 + (y')^2}$$

a preto na riešenie použijeme vzťah (4.7), čo vedie k rovnici

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = c.$$

Jednoduchou úpravou overíme, že

$$(y')^2 = \frac{c}{1-c} = k^2,$$

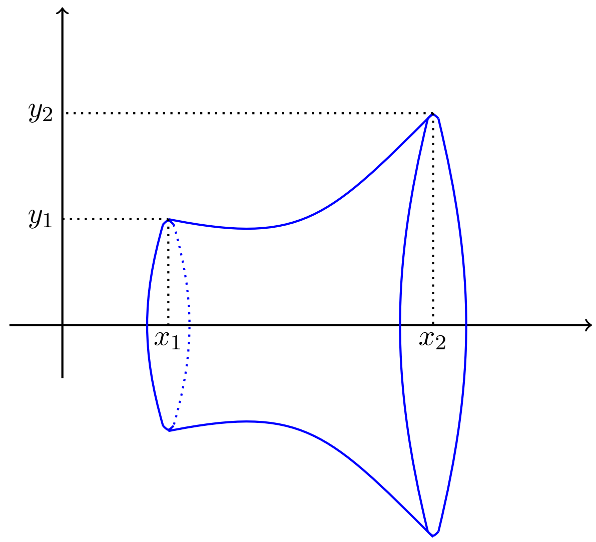
a preto $y' = k$ z čoho plynie, že najkratšou spojnicou je úsečka

$$y = kx + q, \quad x \in \langle x_1, x_2 \rangle,$$

pričom konštanty k a q získame z okrajových podmienok.

Príklad 2 *(Riešenie Úlohy 2) Nájdime spojitú krivku prechádzajúcu bodmi $A = [x_1, y_1]$ a $B = [x_1, y_2]$, rotáciou ktorej okolo osi x vznikne teleso s minimálnym povrchom.*

Riešenie



V tomto prípade je

$$F = y\sqrt{1+(y')^2}$$

a teda na riešenie použijeme vzťah (4.8). Preto

$$y'\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} - y\sqrt{1+(y')^2} = c.$$

Nasledujúcimi úpravami zjednodušíme tvar diferenciálnej rovnice

$$y(y')^2 - y(1+(y')^2) = c\sqrt{1+(y')^2},$$

$$-y = c\sqrt{1+(y')^2}.$$

Umocnením rovnice a osamostatnením y' dostávame diferenciálnu rovnicu so separovanými premennými

$$y^2 = c^2(1 + (y')^2),$$

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{c}$$

a teda

$$\frac{c}{\sqrt{y^2 - c^2}} dy = dx.$$

Rovnicu riešime integrovaním. Integrál z ľavej strany rovnice vypočítame použitím substitúcie

$$\int \frac{c}{\sqrt{y^2 - c^2}} dy = \left| \frac{y}{c} = t,\ dy = c\,dt \right| = \int \frac{c}{\sqrt{c^2t^2 - c^2}}\, c\,dt =$$

$$= c \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}\, dt = c \ln|t + \sqrt{t^2 - 1}| + c_1 = c \ln\left|\frac{y}{c} + \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}\right| + c_1.$$

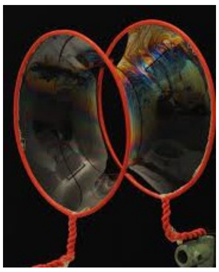
Teda integrovnaním diferenciálnej rovnice dostávame

$$c \ln\left|\frac{y}{c} + \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}\right| + c_1 = x.$$

Po úpravách, s cieľom osamostatniť y, máme predpis krivky:

$$y(x) = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c_1}{c}} + e^{-\frac{x-c_1}{c}}\right).$$

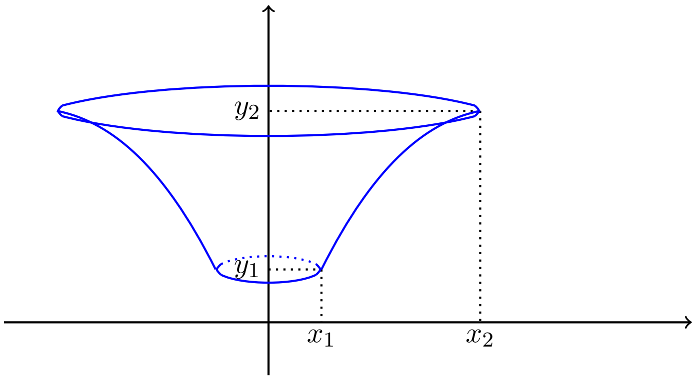
Nájdená krivka je reťazovka a teleso, ktoré vznikne rotáciou tejto krivky sa nazýva katenoid. V praxi sa s reťazovkou možeme stretnúť napr. pri kábloch vysokého napätia, ktoré medzi dvoma stožiarmi vytvárajú práve reťazovku. S katenoidom sa môžeme stretnúť pri názornom príklade mydlovej bubliny, ktorá medzi dvomi rovnobežnými kružnicami, ktorá zaujme tvar práve telesa s minimálnym povrchom.



Príklad 3 *Inteligentné huby sa snažia redukovať množstvo vlhkosti, ktorú strácajú odparovaním. Teda rastú tak, aby plocha, na ktorú môže svietiť Slnko bola minimálna. Predpokladajme, že huby sú symetrické a ich povrch vznikne rotáciou krivky $y(x)$ pre $y(x_1) = y_1$ a $y(x_2) = y_2$ okolo o_y.*

Riešenie Pre povrch rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou krivky, ktorá je grafom funkcie $y(x)$, pre $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ okolo o_y platí vzťah:

$$P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$



Hľadáme predpis krivky, pre ktorú uvedený určitý integrál nadobudne minimálnu hodnotu, teda hľadáme minimálu funkcionálu. Hľadaná funkcia je riešenie Euler-Lagrangeovej rovnice. Kedže v tomto príklade je daný funkcionál typu $P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} F(x, y')\, dx$, použijeme (4.8):

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c.$$

Kedže $F(x, y') = x\sqrt{1 + (y')^2}$, potom $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ a diferenciálna rovnica má tvar

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c.$$

Odseparujeme premenné a dostávame

$$dy = \frac{c}{\sqrt{x^2 - c^2}} dx.$$

Následným integrovaním vyjadríme riešenie zostavenej diferenciálnej rovnice

$$y(x) = c \ln \left| \frac{x}{c} + \sqrt{\frac{x^2}{c^2} - 1} \right| + c_1.$$

Získaná krivka je inverzná k reťazovke, o čom sa ľahko presvedčíme zámenou premenných $x \leftrightarrow y$.

Príklad 4 *(Riešenie Úlohy 3) Nájdime spojitú rovinnú krivku* $y = y(x)$*, po ktorej sa bod vplyvom tiaže dostane z bodu* $A = [x_1, y_1]$ *do bodu* $B = [x_1, y_2]$ *za najkratší čas. Trenie a odpor prostredia zanedbávame.*

Riešenie Odvodili sme, že

$$F = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y - y_1}}$$

a preto je najvýhodnejšie na riešenie využiť vzťah (4.8). V dôsledku toho

$$\frac{(y')^2}{\sqrt{y - y_1}\sqrt{1 + (y')^2}} - \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y - y_1}} = c.$$

Úpravami zjednodušíme

$$c^2 (y - y_1) \left(1 + (y')^2\right) = 1.$$

Označme $2a = 1/c^2$. Potom

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{2a - (y - y_1)}{y - y_1}},$$

čo je vlastne separovateľná diferenciálna rovnica. Preto

$$x = \int \frac{\sqrt{y - y_1}}{\sqrt{2a - (y - y_1)}}\,\mathrm{d}y.$$

Na výpočet integrálu je výhodné použiť substitúciu

$$y - y_1 = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2} = a(1 - \cos\varphi). \tag{4.9}$$

Dostávame

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int \frac{\sqrt{2a}\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2a - 2a\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}\, 2a \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 2a \int \sin^2 \frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= a \int 1 - \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = a(\varphi - \sin\varphi), \end{aligned} \tag{4.10}$$

kde x_0 je integračná konštanta. Spojením (4.9) a (4.10) dosávame parametrické rovnice hľadanej trajektórie

$$\begin{aligned} x - x_0 &= a(\varphi - \sin\varphi) \\ y - y_1 &= a(1 - \cos\varphi), \end{aligned}$$

čo predstavuje cykloidu.

Príklad 5 *Na ploche σ s rovnicou $z = g(x, y)$ sú dané dva body $A = [x_1, y_1, g(x_1, y_1)]$ a $B = [x_2, y_2, g(x_2, y_2)]$. Nájdime takú spojnicu oboch bodov, ktorá celá leží na ploche σ a má najkratšiu dĺžku.*

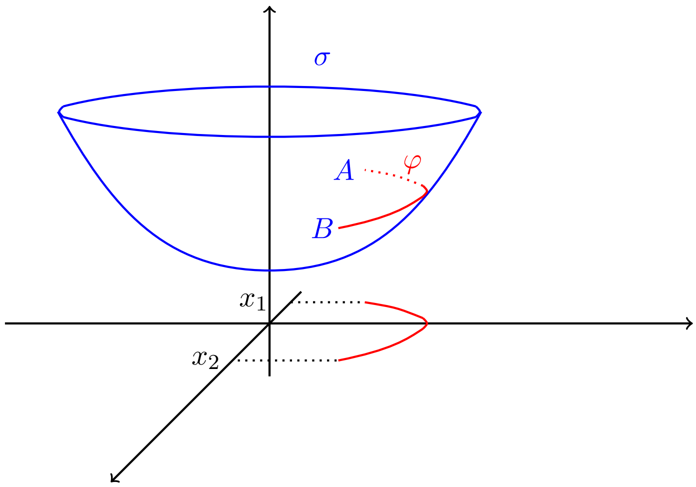
Riešenie Každú krivku φ, ktorá leži na ploche σ a spája dané body A a B môžeme vyjadriť parametrickými rovnicami

$$\begin{aligned} x &= x, \qquad x \in \langle x_1, x_2\rangle \\ y &= y(x), \\ z &= g(x, y(x)), \end{aligned}$$

pričom

$$\begin{aligned} x &= x, \qquad x \in \langle x_1, x_2\rangle \\ y &= y(x) \end{aligned}$$

sú parametrické rovnice priemetu tejto krivky do roviny (x, y). Ak poznáme tento priemet, tak poznáme aj odpovedajúcu krivku na ploche σ.



Dĺžku priestorovej krivky vieme vyjadriť ako

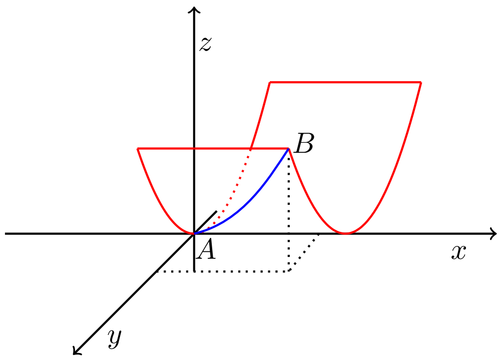
$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, \mathrm{d}x,$$

čo pre krivku φ dáva

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y'\right)^2}\, \mathrm{d}x \to \min, \qquad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

Keďže $F = \sqrt{1 + (y')^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y'\right)^2}$ bude vo všeobecnosti príslušná Euler - Lagrangeova rovnica (4.6) diferenciálnou rovnicou druhého rádu a jej vyriešením nájdeme priemet hľadanej priestorovej krivky do roviny (x, y).

Ako ilustratívny príklad budeme hľadať najkratšiu spojnicu bodov $A = [0,0,0]$ a $B = [1, 0.5, 1]$, ktorá leží na valcovitej ploche s rovnicou $z = x^2$.



V tomto prípade $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ a $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$. Preto $F = \sqrt{1 + (y')^2 + 4x^2}$ a na riešenie úlohy použijeme (4.7). V dôsledku toho

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + 4x^2 + (y')^2}} = c.$$

Ak označíme $k = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$, tak po úprave

$$y(x) = k \int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = k\left((Ax+B)\sqrt{1+4x^2} + C\int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x\right).$$

Preto

$$y = \frac{k}{4}\left(2x\sqrt{1+4x^2} + \ln\left|2x + \sqrt{1+4x^2}\right|\right) + q.$$

Našli sme rovnicu priemetu hľadanej spojnice do roviny (x, y), pričom konštanty k a q vypočítame z podmienok $y(0) = 0$ a $y(1) = 0.5$. Parametrické rovnice hľadanej krivky sú potom

$$\begin{aligned}
x &= x, \qquad x \in \langle 0, 1\rangle \\
y &= \frac{k}{4}\left(2x\sqrt{1+4x^2} + \ln\left|2x + \sqrt{1+4x^2}\right|\right) + q, \\
z &= x^2.
\end{aligned}$$

Literatúra

[1] M. Greguš, M. Švec, V. Šeda, *Obyčajné diferenciálne rovnice*, ALFA, Bratislava, 1985.

[2] J. Diblík, M. Ružičková, *Obyčajné diferenciálne rovnice,* IDIS ŽU, 2008.

[3] J. Džurina, V. Pirč, *Aplikovaná matematika,* eEDUSER Košice, 2005.

[4] W.G. Kelley, A.C. Peterson, *Difference equations: an introduction with applications,* Academic press, 2001.

[5] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations,* Springer, 2005.

[6] M. Braun, *Differential equation and their applications,* Springer, New York, 1983.