Derivácia funkcie

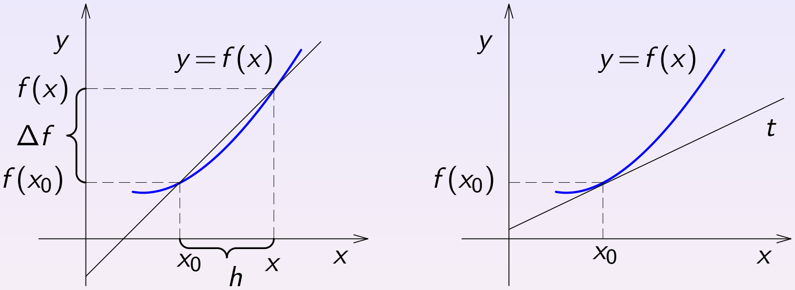
Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Ilustrácia



Obr.: Derivácia funkcie

Derivácia

Definícia

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu, ak je definovaná v okolí bodu x_0 a existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Túto limitu nazývame deriváciou funkcie f v bode x_0.

Zápis:

$$f'(x_0), \quad [f(x)]'_{x=x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left[\frac{df(x_0)}{dx}\right]_{x=x_0}$$

Jednostranné derivácie

Definícia

Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu zľava (sprava), ak je definovaná v ľavom (pravom) okolí bodu x_0 a existuje limita

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \left(\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right).$$

Túto limitu nazývame deriváciou zľava (sprava) funkcie f v bode x_0.

Zápis:

$$f'_-(x_0) \qquad (f'_+(x_0))$$

Existencia derivácie a jednostranné derivácie

Veta

Funkcia f má v bode x_0 (vnútorný bod $D(f)$) deriváciu $f'(x_0)$ práve vtedy, keď má v bode x_0 deriváciu zľava $f'_-(x_0)$, deriváciu sprava $f'_+(x_0)$ a platí

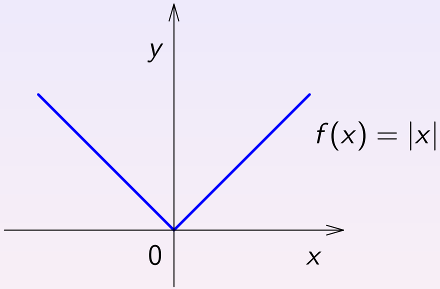
$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

Veta

Ak má funkcia f v bode x_0 deriváciu, tak je v bode x_0 spojitá.

Derivácia a spojitosť

Príklad: $f(x) = |x|$



Obr.: Spojitá funkcia s neexistujúcou deriváciou

Pravidlá derivovania

Veta

Nech funkcie f a g majú v bode x_0 derivácie $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$. Nech $c \in \mathbb{R}$. Potom existujú derivácie funkcií $c \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$, a ak $g(x_0) \neq 0$, tak aj $\frac{f}{g}$ v bode x_0, pre ktoré platí:

1. $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
2. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
5. $[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$
6. $\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{(f)'(y_0)}$

Derivácia elementárnych funkcií I

1. $c' = 0$ $\qquad c \in \mathbb{R}$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $\qquad n \in \mathbb{R},\ n \neq 0$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $\qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$
4. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $\qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Derivácia elementárnych funkcií II

7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Príklady

Príklad 1: $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x\sqrt{x}} + 8 + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

Príklad 2: $f(x) = x \cdot \operatorname{tg} x$

Príklad 3: $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Príklad 4: $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Príklad 5: $f(x) = \ln \sqrt{4 - x^2}$

Príklad 6: $f(x) = \sqrt{\ln(4 - x^2)}$

Príklad 7: $f(x) = x^3 + 3^x + x^x$

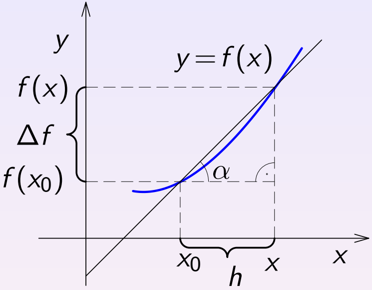
Logaritmická derivácia

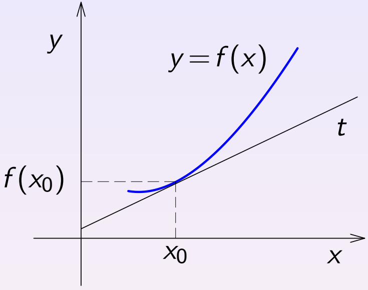
$$
\begin{aligned}
[f^g]'(x_0) &= \left[\mathrm{e}^{\ln f^g}\right]'(x_0) \\
&= \left[\mathrm{e}^{g \cdot \ln f}\right]'(x_0)
\end{aligned}
$$

Príklad:

$$f(x) = x^{\sin x}$$

Dotyčnica grafu funkcie





Obr.: Geometrický význam derivácie funkcie

Dotyčnica a normála grafu funkcie

Ak existuje $f'(x_0)$, tak existuje dotyčnica ku grafu funkcie v bode $P = [x_0, f(x_0)]$.

Ak navyše $f'(x_0) \neq 0$, tak existuje normála ku grafu funkcie v bode $P = [x_0, f(x_0)]$.

- Rovnica dotyčnice: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- Rovnica normály: $y - f(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

Dotyčnica a normála grafu funkcie - Príklad

Príklad:

Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie:

$$f(x) = x \cdot \ln x$$

v bode $P = [e^2, ?]$.

Derivácia druhého rádu

Definícia

Nech existuje derivácia funkcie $y = f(x)$ v bode $x_0 \in D(f)$. Deriváciou druhého rádu alebo druhou deriváciou funkcie f v bode x_0 nazývame deriváciu prvej derivácie funkcie v bode x_0, t. j. $(f')'(x_0)$.

Zápis:

$$f''(x_0), \qquad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$$

Derivácia n-tého rádu

Definícia

Nech existujú derivácie prvého, druhého, ..., $(n-1)$-ého rádu funkcie $y = f(x)$ v bode $x_0 \in D(f)$. Derivάciou n-tého rádu alebo n-tou deriváciou funkcie f v bode x_0 nazývame deriváciu $(n-1)$-vej derivácie funkcie v bode x_0, t. j. $(f^{(n-1)})'(x_0)$.

Zápis:

$$f^{(n)}(x_0), \qquad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$$

Derivácie vyšších rádov - Príklady

Príklad 1:

$$f(x) = e^{x^2-2x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x^2-2x})' &&= e^{x^2-2x}\cdot(2x-2) \\ f''(x) &= (e^{x^2-2x}\cdot(2x-2))' &&= e^{x^2-2x}\cdot(2x-2)^2 + e^{x^2-2x}\cdot 2 \end{aligned}$$

Príklad 2:

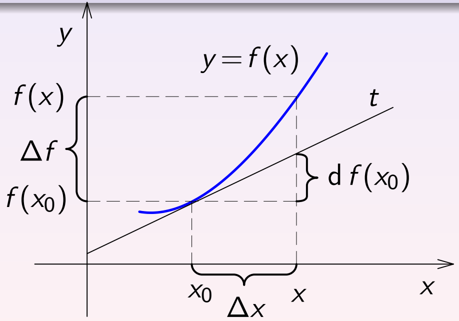
$$f(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x &&= f^{(1+4k)}(x) \\ f''(x) &= -\sin x &&= f^{(2+4k)}(x) \\ f'''(x) &= -\cos x &&= f^{(3+4k)}(x) \\ f^{IV}(x) &= \sin x &&= f^{(4k)}(x) \qquad k = 0, 1, \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pojem diferenciálu

Definícia

Nech funkcie f má v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)$. Potom hovoríme, že je v bode x_0 diferencovateľná. Výraz $\mathrm{d}\, f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$ nazývame diferenciálom funkcie f v bode x_0 pre prírastok $\Delta x = x - x_0$.



Obr.: Diferenciál funkcie

Aproximácia diferenciálom

Pre x v blízkom okolí bodu x_0 platí:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
f'(x_0) &\doteq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}\\
f'(x_0)\cdot\Delta x &\doteq f(x)-f(x_0)\\
\Longrightarrow\qquad \mathrm{d}\,f(x_0) &\doteq \Delta f(x_0)\\
\Longrightarrow\qquad f(x) &\doteq f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x\\
f(x) &\doteq f(x_0)+\mathrm{d}\,f(x_0)
\end{aligned}
$$

Aproximácia diferenciálom - Príklad 1

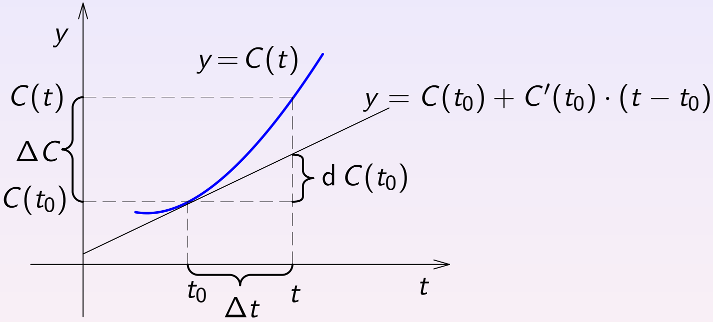
Príklad:

Náklad miestnych novín bude o t rokov odteraz $C(t) = 50t^2 + 100t + 10\,000$ kusov. Odhadnime pomocou diferenciálu, o koľko vzrastie náklad novín počas

1. nasledujúcich 3 mesiacov
2. nasledujúcich 9 mesiacov
3. prvých 6 mesiacov 4. roka

Vypočítajme priamo z funkcie, ako vzrastie náklad novín počas prvých 6 mesiacov 4. roka.

Aproximácia diferenciálom - Príklad



Aproximácia diferenciálom - Príklad 2

Príklad:

Denná produkcia podniku je $Q(K) = 1\,200 \cdot \sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je kapitálová investícia 400 000 eur. Odhadnime pomocou diferenciálu, ako sa zmení denná produkcia, ak:

1. zvýšime kapitál o 10 000 eur,
2. znížime kapitál o 20 000 eur.

Na akú hodnotu sa musí zmeniť kapitálová investícia, aby sa denná produkcia zvýšila o 180 jednotiek?

L´Hospitalovo pravidlo

Veta

Nech funkcie f a g majú derivácie v prstencovom okolí bodu $a \in \mathbb{R}^\star$. Nech

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alebo $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \infty$
2. existuje $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tak existuje aj $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L´Hospitalovo pravidlo - Príklady

Príklad 1: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Príklad 2: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 1}$

Príklad 3: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^{x^2}}$

Príklad 4: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$

Príklad 5: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 1} - x \right)$

Marginálna veličina

Definícia

Marginálna analýza je aproximačná metóda, ktorá využíva deriváciu na určenie zmeny hodnoty funkcie $f(x)$, vyvolanej zmenou premennej z hodnoty x na hodnotu $x+1$.

Definícia

Nech funkcie $TV = f(x)$ je ľubovoľná ekonomická totálna veličina. Marginálna veličina je prírastok celkovej veličiny TV, ktorý pripadá na prírastok premennej x o jednotku.

Zápis:

$$MTV(x) = f'(x)$$

Marginálna veličina - Príklad

Príklad:

Náklad miestnych novín bude o t rokov odteraz $C(t) = 50t^2 + 100t + 10\,000$ kusov. Odhadnime pomocou derivácie

1. akým tempom bude rásť náklad novín po t rokoch odteraz (t.j. prírastok za $(t+1)$-vý rok)
2. prírastok počas prvého roka
3. prírastok počas 6. roka

Marginálne náklady a marginálne príjmy

Definícia

Ak $TV = C(x)$ je funkcia celkových nákladov, tak $C'(x)$ je funkcia marginálnych nákladov, t. j. náklady na $(x+1)$-vý výrobok.

Zápis:

$$MC(x) = C'(x)$$

Definícia

Ak $TV = R(x)$ je funkcia celkových príjmov, tak $R'(x)$ je funkcia marginálnych príjmov, t. j. príjmy z $(x+1)$-vého výrobku.

Zápis:

$$MR(x) = R'(x)$$

Marginálne náklady - Príklad

Príklad:

Celkové mesačné náklady na výrobu x kusov tovaru sa dajú vyjadriť funkciou $C(x) = x^2 + 15x + 5\,000$.

1. Použime marginálnu analýzu na odhad nákladov na výrobu 11. výrobku.
2. Vypočítajme náklady na výrobu 11. výrobku priamo z funkcie nákladov.

Aproximácia marginálnou veličinou - Príklad

Príklad:

Denná produkcia podniku je $Q(K) = 1\,200 \cdot \sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. V súčasnosti je kapitálová investícia 400 000 eur. Použime marginálnu analýzu na odhad efektu, aký bude mať na dennú produkciu 1 000 eur navyše.

Relatívna zmena hodnoty funkcie

Definícia

Nech funkcia $y = f(x)$ má v bode x deriváciu. Relatívnou zmenou hodnoty funkcie nazývame výraz $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$.

Definícia

Nech funkcia $y = f(x)$ má v bode x deriváciu. Percentuálnou mierou zmeny hodnoty funkcie nazývame výraz $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot 100\%$.

Percentuálnou mierou zmeny hodnoty funkcie - Príklad

Príklad:

Ročné výnosy spoločnosti boli $R(t) = 20t^2 + 1000t + 2\,000$ tisíc eur t rokov po jej založení na začiatku roku 2005.

1. Akým ročným tempom rástli ročné výnosy na začiatku roku 2009?
2. Aké bolo percentuálne ročné tempo rastu ročných výnosov na začiatku roka 2009?

Percentuálna zmena hodnoty funkcie

Nech $f(x) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$ a nech existuje $f'(x)$ pre $x \in (0, \infty)$

$$\Longrightarrow \quad f'(x_0) \doteq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Otázka: Ako sa zmení hodnota funkcie pri 1% zmene premennej?

Nech $h = \frac{x_0}{100}$, t. j. h je 1% z x_0

$$f'(x_0) \doteq \frac{f(x_0 + \frac{x_0}{100}) - f(x_0)}{\frac{x_0}{100}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 \doteq \frac{f(x_0+\frac{x_0}{100})-f(x_0)}{f(x_0)} \cdot 100$$

Pojem elasticity

Definícia

Nech $f(x) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$ a nech existuje $f'(x)$ pre $x \in (0, \infty)$. Číslo $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0$, ktoré vyjadruje o koľko sa zmení hodnota funkcie $f(x)$ pri zvýšení hodnoty premennej x o 1%, nazývame elasticitou funkcie $f(x)$ v bode x_0.

Zápis:

$$\eta(f(x_0)) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0$$

Percentuálna zmena hodnoty funkcie

Veta

Nech $f(x) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$ a nech existuje $f'(x)$ pre $x \in (0, \infty)$. Potom platí

1. Ak $\eta(f(x)) > 0$ pre $x \in (0, \infty)$, tak zvýšenie (zníženie) hodnoty premennej x o 1 percento znamená zvýšenie (zníženie) hodnoty funkcie $f(x)$ o $\eta(f(x_0))$ percent.
2. Ak $\eta(f(x)) < 0$ pre $x \in (0, \infty)$, tak zvýšenie (zníženie) hodnoty premennej x o 1 percento znamená zníženie (zvýšenie) hodnoty funkcie $f(x)$ o $|\eta(f(x_0))|$ percent.

Elasticita funkcie - Príklad

Príklad:

Denná produkcia podniku je $Q(K) = 1\,200 \cdot \sqrt{K}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur. Odhadnime pomocou diferenciálu, o koľko percent vzrastie produkcia, ak sa kapitálová investícia zvýši o 1 percento.

Elasticita funkcie a priemerná hodnota funkcie

$$\eta(f(x_0)) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 = \frac{f'(x_0)}{\frac{f(x_0)}{x_0}} = \frac{Mf(x_0)}{Af(x_0)}$$

Nech $f(x)$ je funkciou nákladov $C(x)$

1. Ak $\eta(C(x_0)) > 1 \implies MC(x_0) > AC(x_0)$
   t. j. každé zvýšenie produkcie z hodnoty x_0 o jednotku vyvolá nárast nákladov väčší ako sú priemerné náklady pri produkcii x_0 jednotiek. S rastúcou produkciou priemerné náklady rastú.
2. Ak $\eta(C(x_0)) = 1 \implies MC(x_0) = AC(x_0)$
   t. j. každé zvýšenie produkcie z hodnoty x_0 o jednotku vyvolá nárast nákladov rovný priemerným nákladom pri produkcii x_0 jednotiek.S rastúcou produkciou sa priemerné náklady nemenia.
3. Ak $\eta(C(x_0)) < 1 \implies MC(x_0) < AC(x_0)$
   t. j. každé zvýšenie produkcie z hodnoty x_0 o jednotku vyvolá nárast nákladov menší ako sú priemerné náklady pri produkcii x_0 jednotiek. S rastúcou produkciou priemerné náklady klesajú.

Pojem elasticity funkcie dopytu

Zákon dopytu: Ak rastie cena, klesá dopyt po výrobku. Z toho plynie, že je funkcia dopytu klesajúca, t. j. $D'(p) < 0$.

Definícia

Nech $q = D(p)$ je funkciou dopytu, kde $p > 0$ je cena výrobku na trhu a $q > 0$ je dopyt po tomto výrobku. Nech existuje $D'(p)$ pre $p \in (0, \infty)$. Číslo $-\frac{D'(p_0)}{D(p_0)} \cdot p_0$, ktoré vyjadruje o koľko sa zníži dopyt $D(p)$ po výrobku pri zvýšení ceny p o 1%, nazývame elasticitou funkcie dopytu v bode p_0.

Zápis:

$$E_D = \eta(D(p_0)) = -\frac{D'(p_0)}{D(p_0)} \cdot p_0$$

Klasifikácia funkcie dopytu na základe elasticity

Nech $q = D(p)$ je funkciou dopytu a $E_D = \eta(D(p)) = -\frac{D'(p)}{D(p)} \cdot p$ jej elasticitou.

Klasifikácia funkcie dopytu:

1. Ak $E_D = 1$, tak funkcia dopytu má jednotkovú elasticitu, t. j. jednopercentná zmena ceny vyvolá jednopercentnú zmenu dopytu.
2. Ak $E_D > 1$, tak funkcia dopytu je elastická, t. j. jednopercentná zmena ceny vyvolá viac ako jednopercentnú zmenu dopytu.
3. Ak $E_D < 1$, tak funkcia dopytu je neelastická, t. j. jednopercentná zmena ceny vyvolá menej ako jednopercentnú zmenu dopytu.

Elasticita funkcie dopytu - Príklad

Príklad:

Predpokladajme, že pri cene p určitej komodity je dopyt po nej vyjadrený vzťahom $q = 240 - 2p$, pre $0 \leq p \leq 120$.

1. Vyjadrime elasticitu dopytu ako funkciu premennej p.
2. Vypočítajme elasticitu dopytu pre $p = 100$. Interpretujme výsledok.
3. Vypočítajme elasticitu dopytu pre $p = 50$. Interpretujme výsledok.
4. Pri akej cene je elasticita dopytu rovná 1? Aký je ekonomický význam tejto ceny?

Vplyv elasticity dopytu na celkové príjmy

$$\begin{aligned} R(p) &= p \cdot q = p \cdot D(p) \\ \Longrightarrow \quad R'(p) &= D(p) + p \cdot D'(p) = D(p)\left[1 + p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)}\right] \\ &= D(p)\left[1 - E_D\right] \end{aligned}$$

Celkové príjmy v závislosti na elasticite dopytu:

1. Ak $E_D = 1 \quad \Longrightarrow \quad R'(p) = 0$
   t. j. celkové príjmy sa so zmenou ceny nemenia - neutrálny dopyt.
2. Ak $E_D < 1 \quad \Longrightarrow \quad R'(p) > 0$
   t. j. celkové príjmy rastú s rastúcou cenou - neelastický dopyt.
3. Ak $E_D > 1 \quad \Longrightarrow \quad R'(p) < 0$
   t. j. celkové príjmy klesajú s rastúcou cenou - elastický dopyt.

Vplyv elasticity dopytu na celkové príjmy - Príklad

Príklad:

Predajca športových potrieb predáva cyklistické okuliare po 11 eur za kus. Dopyt po tomto type okuliarov vzhľadom na predajnú cenu majiteľ odhadol funkciou $D(p) = 4000 - p^3$ kusov, pre $0 \leq p \leq 10\sqrt[3]{4}$. Čo odporúčate majiteľovi predajne, zvýšiť alebo znížiť cenu?

Vplyv elasticity dopytu na celkové príjmy - Príklad

Príklad:

Predpokladajme, že pri cene p určitej komodity je dopyt po nej vyjadrený vzťahom $q = 240 - 2p$, pre $0 \leq p \leq 120$.

1. Určme, kde je dopyt elastický, neelastický a kde má jednotkovú elasticitu vzhľadom na cenu p.
2. Využime výsledok 1) na určenie intervalov rastu a klesania funkcie celkových príjmov $R(p)$ a cenu, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.
3. Vyjadrime explicitne funkciu celkových príjmov a použime prvú deriváciu na určenie intervalov rastu a klesania a ceny, pri ktorej sú celkové príjmy maximálne.

Pojem elasticity funkcie ponuky

Zákon ponuky: Ak rastie cena, rastie ponuka výrobku. Z toho plynie, že je funkcia ponuky rastúca, t. j. $S'(p) > 0$.

Definícia

Nech $q = S(p)$ je funkciou ponuky, kde $p > 0$ je cena výrobku na trhu a $q > 0$ je ponuka tohto výrobku. Nech existuje $S'(p)$ pre $p \in (0, \infty)$. Číslo $\frac{S'(p_0)}{S(p_0)} \cdot p_0$, ktoré vyjadruje o koľko sa zvýši ponuka $S(p)$ výrobku pri zvýšení ceny p o 1%, nazývame elasticitou funkcie ponuky v bode p_0.

Zápis:

$$E_S = \eta(S(p_0)) = \frac{S'(p_0)}{S(p_0)} \cdot p_0$$

Ďakujem za pozornosť.